

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE SÍSMICA DE PÓRTICOS PLANOS
METÁLICOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS**

VICTOR ULYSSES SOUSA OLIVEIRA

ORIENTADOR: WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ESTRUTURAS

BRASÍLIA/DF: DEZEMBRO DE 2016

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE SÍSMICA DE PÓRTICOS PLANOS METÁLICOS
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

VICTOR ULYSSES SOUSA OLIVEIRA

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:

**PROF. WILLIAM TAYLOR MATIAS SILVA, Dr. Ing. (ENC-UnB)
(Orientador)**

**PROF. RAÚL DARIO DURAND FARFÁN, DSc (ENC-UnB)
(Examinador interno)**

**ENG. RAMON SALENO YURE RUBIM COSTA SILVA, DSc (VALEC)
(Examinador externo)**

BRASÍLIA/DF, 12 DE DEZEMBRO DE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

OLIVEIRA, VICTOR ULYSSES SOUSA

Análise Sísmica de Pórticos Planos Metálicos Utilizando o Método dos Elementos Finitos [Distrito Federal] 2016.

xi, 67 p., 210 x 279 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2016)

Monografia de Projeto Final. Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Dinâmica das Estruturas

3. Elementos Finitos

2. Análise Sísmica

4. Dissipador de Energia

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

OLIVEIRA, V. U. S. (2016). Análise Sísmica de Pórticos Planos Metálicos Utilizando o Método dos Elementos Finitos. Monografia de Projeto Final. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, xi, 67 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Victor Ulysses Sousa Oliveira

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Análise Sísmica de Pórticos Planos Metálicos pelo Método dos Elementos Finitos

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2016

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Victor Ulysses Sousa Oliveira

Qd. 10, Conj. F, 52 - Sobradinho

73.005-106 - Brasília/DF - Brasil

RESUMO

ANÁLISE SÍSMICA DE PÓRTICOS PLANOS METÁLICOS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Autor: Victor Ulysses Sousa Oliveira

Orientador: William Taylor Matias Silva

Graduação em Engenharia Civil

Brasília, 12 de dezembro de 2016

As estruturas submetidas a carregamentos que variam com o tempo que gerem forças de inércia com valores altos de forma que não possam ser desprezadas não podem ser resolvidas por análises estáticas simples, sendo necessário lançar mão de análises dinâmicas. Os sismos são exemplos desses carregamentos e apesar de não serem frequentes no Brasil, seus efeitos são importantes no projeto de obras especiais. O presente trabalho apresenta os conceitos básicos da análise dinâmica aplicados aos casos de sistemas de um grau de liberdade, assim como seu desenvolvimento para casos mais complexos com vários graus de liberdade. Por fim tais conhecimentos são aplicados para analisar numericamente um pórtico plano metálico em três casos distintos: sem contraventamento, com contraventamento e com contraventamento e com dissipador. São comparadas as respostas dos três casos a um carregamento sísmico.

Palavras chave: análise dinâmica, sistemas de um grau de liberdade, análise sísmica.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	viii
1 Introdução	1
1.1 Objetivo	2
1.2 Metodologia	2
1.3 Organização do trabalho	3
2 Estudo do Oscilador Simples	4
2.1 Introdução	4
2.1.1 Graus de liberdade	4
2.1.2 Amortecimento	5
2.1.3 Tipos de ação dinâmica	6
2.2 Sistemas com Um Grau de Liberdade	7
2.2.1 Equação de movimento	7
2.2.2 Oscilador simples em vibração livre	9
2.2.2.1 Sistema sem amortecimento	10
2.2.2.2 Sistema com amortecimento	11
2.2.3 Oscilador simples submetido a força harmônica	13
2.2.3.1 Sistema sem amortecimento	13
2.2.3.2 Sistema com amortecimento	14
2.2.3.3 Ressonância	15
2.2.4 Oscilador simples submetido a força periódica arbitrária	16
2.2.5 Oscilador simples submetido a força aperiódica	17
2.2.5.1 Método por diferença finita central	18
2.2.5.2 Método de Newmark com aceleração constante	19
2.2.5.3 Método Wilson θ	21
3 Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade	23
3.1 Introdução	23

3.2	Obtenção da Equação de Movimento	25
3.2.1	Formulação com o Método dos Elementos Finitos	25
3.2.2	Matriz de Rigidez do Elemento	27
3.2.2.1	Elemento de Viga	27
3.2.2.2	Elemento de Treliça Plana	29
3.2.2.3	Elemento de Pórtico Plano	31
3.2.3	Matriz de Massa do Elemento	31
3.2.3.1	Matriz de Massa Discreta	31
3.2.3.2	Matriz de Massa Consistente	32
3.2.4	Matriz de Amortecimento do Elemento	32
3.2.5	Sistema Global de Equações de Movimento	33
3.2.5.1	Transformação para o Referencial Global	33
3.2.5.2	Montagem do Sistema Global de Equações	34
3.3	Resolução da Equação de Movimento	36
3.3.1	Frequências e Modos Naturais de Vibração	36
3.3.2	Superposição Modal	38
3.3.3	Matriz de amortecimento de Rayleigh	39
3.3.4	Resolução por Integração Direta	40
4	Dissipador de Energia	43
4.1	Introdução aos amortecedores ADAS	43
4.2	Modelagem do dissipador	44
5	Excitação Sísmica	47
5.1	Introdução	47
5.2	Oscilador simples submetido à movimentação da base	50
5.2.1	Movimento harmônico da base	51
5.3	Modelo com múltiplos graus de liberdade sob ação sísmica	53
6	Análise de Exemplo de Pórtico Plano sob Excitação Sísmica	55
6.1	Introdução	55
6.2	O programa <i>fea_frames</i>	57
6.2.1	Entrada de dados	57
6.3	Resultados	58
7	Conclusões	65
7.1	Sugestões para trabalhos futuros	66
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	66

LISTA DE FIGURAS

2.1	Exemplo de sistema de um grau de liberdade (Adaptado de CLOUGH; PENZIEN, 2003 e SORIANO, 2014)	5
2.2	Modelo de multigráus de liberdade (Adaptado de CLOUGH; PENZIEN, 2003)	5
2.3	Tipos de ação dinâmica (SORIANO, 2014)	7
2.4	Corpo submetido a ação de força f	7
2.5	Sistema massa-mola-amortecedor	8
2.6	Sistema massa-mola submetido a ação estática do peso	9
2.7	Resposta para os amortecimentos crítico, subcrítico e supercrítico (Adaptado de SORIANO, 2014)	11
2.8	Amplificação dinâmica em função da razão de frequências, para várias razões de amortecimento (Adaptado de SORIANO, 2014)	16
2.9	Aproximação de \dot{u} para o instante t_i (SORIANO, 2014)	18
2.10	Média da aceleração no intervalo de tempo Δt (SORIANO, 2014)	20
2.11	Aceleração linear no intervalo estendido de tempo (SORIANO, 2014)	21
3.1	Deslocamentos nodais do elemento de viga	28
3.2	Deslocamentos nodais do elemento de treliça	30
3.3	Decomposição vetorial no plano (SORIANO, 2014)	33
3.4	Pórtico exemplo	35
4.1	Amortecedor ADAS (SIRVE, 2016)	43
4.2	Esquema de montagem do amortecedor ADAS	44
4.3	Conjunto de molas equivalentes do elemento <i>link</i>	44
4.4	Conjunto de amortecedores equivalentes do elemento <i>link</i>	45
5.1	Mapeamento da aceleração sísmica horizontal característica de projeto (NBR 15421, 2006, apud. SORIANO, 2014)	48
5.2	Acelerograma do sismo El Centro de 1940, componente Norte-Sul (Adaptado de CLOUGH; PENZIEN, 2003)	48
5.3	Espectro de resposta de deslocamento relativo para o sismo El Centro (SORIANO, 2014)	49

5.4	Sistema submetido a movimentação da base (Adaptado de CLOUGH & PENZIEN, 2003)	50
5.5	Amplificação dinâmica do deslocamento relativo em função da razão de frequências, para várias razões de amortecimento (Adaptado de SORIANO, 2009) . . .	52
5.6	Amplificação dinâmica do deslocamento total em função da razão de frequências, para várias razões de amortecimento (Adaptado de SORIANO, 2009) . . .	53
6.1	Pórtico contraventado com dissipador	55
6.2	Casos de análise do pórtico	56
6.3	Comparação do deslocamento dos nós superiores esquerdos	58
6.4	Comparação da velocidade dos nós superiores esquerdos	59
6.5	Comparação da aceleração dos nós superiores esquerdos	60
6.6	Comparação dos deslocamentos dos nós do dissipador	61
6.7	Comparação das velocidades dos nós do dissipador	61
6.8	Comparação das acelerações dos nós do dissipador	62
6.9	Força elástica desenvolvida no dissipador	62
6.10	Relação entre força elástica e deslocamentos	63
6.11	Força viscosa desenvolvida no dissipador	63
6.12	Relação entre força viscosa e velocidades	64

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição
a_0	Primeiro termo da série de Fourier
a_1, a_2	Constantes dependentes dos valores iniciais
a	Amplitude de deslocamento
A_d	Fator de amplificação dinâmica
A_d^{rel}	Fator de amplificação dinâmica do deslocamento relativo
A_d^{tot}	Fator de amplificação dinâmica do deslocamento total
a_p	Amplitude do deslocamento em regime permanente
a_q	Coefficiente da série de Fourier
b_1, b_2	Constantes dependentes das condições iniciais
b_q	Coefficiente da série de Fourier
c	Constante de amortecimento viscoso
c_{ij}	Coefficiente de influência de amortecimento
c_{cr}	Constante de amortecimento crítico
e	Exponencial
$f(t)$	Força externa variável com o tempo
f_0	Amplitude da força harmônica
f_a	Força de amortecimento
f_b	Força horizontal equivalente aplicada na base
f_e	Força elástica
f_i	Força de inércia
f'_i	Pseudoforça estática no instante t_i
f_n	Frequência natural
g	Aceleração da gravidade
I	Momento de inércia
k	Constante de rigidez
k_{ij}	Coefficiente de influência de rigidez
k'	Pseudorigidez

L	Comprimento
m	Massa
m_{ij}	Coefficiente de influência de massa
m'	Pseudomassa, massa linear
N_k	k-ésima função de forma
p_1, p_2	Constantes dependentes das características do sistema
r	Razão de frequências
t	Tempo
S_a	Pseudoaceleração relativa espectral espectral
S_d	Deslocamento relativo espectral espectral
S_v	Pseudovelocidade relativa espectral espectral
T_0	Período fundamental de força periódica
T_n	Período natural angular
u	Deslocamento
u^e	Deslocamento nodal do elemento
\dot{u}	Derivada primeira do deslocamento, ou velocidade
\ddot{u}	Derivada segunda do deslocamento, ou aceleração
u_b	Deslocamento da base
u_{est}	Deslocamento estático
u_p	Deslocamento em regime permanente
u_{so}	Amplitude do deslocamento da base
u_t	Deslocamento total
v	Velocidade
Y_j	Coordenadas nodais
α	Fator de amortecimento de <i>Rayleigh</i>
β	Fator de amortecimento de <i>Rayleigh</i>
Δt	Intervalo de tempo
ε	Deformação axial
θ	Coefficiente de extensão do intervalo Δt
κ	Curvatura
ξ	Razão de amortecimento
ρ	Densidade de massa
σ_{xx}	Tensão normal a x
τ	Tempo em relação a t_{i-1}
ϕ	Ângulo de fase
ω	Frequência angular

ω_a	Frequência angular amortecida
ω_n	Frequência natural angular
ω_j	j-ésima frequência natural de vibração
a	Vetor aceleração
B	Multiplicação entre L e N
C	Matriz de amortecimento
C^e	Matriz de amortecimento do elemento
D	Matriz dinâmica
d	Vetor deslocamento
$\dot{\mathbf{d}}$	Vetor velocidade
$\ddot{\mathbf{d}}$	Vetor aceleração
E	Matriz de propriedades elásticas
f	Vetor força
f_I	Vetor de forças de inércia
f_A	Vetor de forças de amortecimento
f_E	Vetor de forças elásticas
I	Matriz identidade
K	Matriz de rigidez
K^e	Matriz de rigidez do elemento
L	Operador diferencial
M	Matriz de massa
M^e	Matriz de massa do elemento
N	Matriz de funções de forma
R	Matriz de rotação
R^e	Matriz de rotação do elemento
q^e	Vetor de forças nodais equivalentes do elemento
q^m	Vetor de correspondência de deslocamentos
u^e	Vetor deslocamento do elemento
$\dot{\mathbf{u}}^e$	Vetor velocidade do elemento
$\ddot{\mathbf{u}}^e$	Vetor aceleração do elemento
Y	Vetor de coordenadas nodais
ε	Vetor deformações
σ	Vetor tensões
v	Campo de deslocamentos
$\dot{\mathbf{v}}$	Campo de velocidades

$\ddot{\mathbf{v}}$	Campo de acelerações
Φ	Matriz modal
φ_j	j-ésimo modo de vibração natural
Ω	Matriz espectral

1. INTRODUÇÃO

Na análise estrutural procura-se com a descrição da estrutura em um modelo matemático simplificado, a partir da definição de suas características, tais como as condições de apoio, as características dos materiais e as cargas às quais a estrutura estará submetida, obter os esforços nos elementos que compõem a o modelo estrutural, bem como estimar os deslocamentos da estrutura devido às ações a que é submetida. Tais informações são necessárias para posterior dimensionamento da estrutura, onde será verificado o atendimento desta a condições que garantam a segurança quanto à ruptura e quanto à utilização.

A análise estática é a forma mais usual, onde se considera que as ações à qual a estrutura está submetida são também estáticas, ou seja, não variam com o tempo. Para ações que apresentem variabilidade, são usados valores de projeto que sejam significativos quanto a probabilidade de ocorrência, porém na construção do modelo, são tratados como carregamentos estáticos.

Porém há casos em que se faz necessário estudar o comportamento da estrutura quando submetida a ações que variam com o tempo. Nesse caso lança-se mão da análise dinâmica estrutural para determinar o efeito destas sobre as estruturas.

Na análise estática de uma estrutura submetida a uma determinada carga, os esforços internos e a configuração deformada dependem apenas desta carga e das características de deformabilidade dos materiais, podendo ser determinados por princípios estabelecidos de equilíbrio de forças. Já na análise de uma estrutura submetida a uma carga dinâmica, os deslocamentos dependerão também das forças inerciais que se opõem às acelerações que as produzem. Assim, os esforços internos têm de equilibrar não só as cargas externas, mas também as forças inerciais resultantes da aceleração da estrutura (CLOUGH; PENZIEN, 2003)

Várias ações a que está submetida uma estrutura variam com o tempo, tais como as decorrentes das atividades humanas, equipamentos móveis, vento, sismos, etc. Tais ações deverão ser classificadas como dinâmicas na análise quando há o desenvolvimento de forças de inércia relevantes na estrutura. Particularmente com os avanços em ciência dos materiais possibilitou-se a construção de estruturas mais esbeltas, com maiores vãos e, portanto, mais sujeitas aos efeitos de ações dinâmicas, tais como vibrações e fadiga (SORIANO, 2014).

Especificamente em relação aos sismos, observa-se que são eventos de ocorrência não tão frequente no Brasil, sendo o estudo destes e de seus efeitos sobre as estruturas deixado para casos especiais. Não obstante, é importante para uma formação globalizada do engenheiro o co-

nhecimento e estudo do tema, visto a importância que tem em outros países, incluindo vizinhos próximos, bem como seu requerimento no projeto de estruturas especiais e de grande porte, tais como usinas nucleares, hidrelétricas e instalações de exploração de petróleo (SORIANO, 2014).

Na avaliação de projetos resistentes a sismos podem ser aplicados diferentes tipos de análises, desde métodos simples, como a aplicação de forças equivalentes, até métodos mais complexos que envolvam simulações numéricas de aplicação da excitação sísmica e determinação da resposta da estrutura, onde se pode decidir por utilizar métodos que melhorem tal resposta, como a utilização de dispositivos dissipadores de energia.

1.1. OBJETIVO

O presente trabalho tem como objetivo avaliar a resposta de um exemplo de pórtico plano metálico a um carregamento sísmico imposto na base, comparando três situações distintas na construção de tal pórtico. Na primeira situação o pórtico é considerado sem a presença de contraventamento e sem a presença de dispositivo dissipador de energia. Na segunda é considerada a presença de contraventamento ao pórtico e na terceira, além do contraventamento, é considerada a existência de um dispositivo dissipador de energia.

1.2. METODOLOGIA

Nas análises a serem realizadas não se pretende discutir parâmetros de projeto ou recomendações normativas, mas tão somente realizar a comparação entre o comportamento da estrutura nos três casos distintos, mesmo porque se trata de um exemplo simples e porque serão consideradas simplificações no modelo, como a consideração de comportamento linear tanto dos elementos estruturais quanto do dissipador de energia.

Para a avaliação será utilizado *software* específico para análise dinâmica, que utilizará como método escolhido para a determinação da resposta da estrutura ao carregamento sísmico o método de *Newmark* de integração direta da equação de movimento do modelo, sendo que este é discretizado em elementos de barra, além da consideração do amortecimento de *Rayleigh*.

Como parte do trabalho, para cumprir o objetivo citado acima será apresentada uma revisão da teoria necessária para compreender bem como se dá a análise de uma estrutura submetida a um carregamento dinâmico como o proposto. Nesse sentido serão adquiridos os conceitos básicos da dinâmica das estruturas pelo estudo do oscilador simples, passando-se em seguida para o estudo de sistemas mais complexos, com mais graus de liberdade, as considerações de discretização e avaliação da equação de movimento. Será feita também uma breve revisão sobre o dispositivo dissipador de energia considerado e sobre os carregamentos sísmicos e como eles entram na análise do modelo.

1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2 serão tratados conceitos básicos da dinâmica da estrutura e o estudo do oscilador simples, que é um sistema que possui apenas um grau de liberdade. Serão mostradas a obtenção da equação de movimento e as respostas desse sistema a alguns tipos de carregamentos dinâmicos comuns em análises dinâmicas para uma compreensão geral do comportamento de tais sistemas.

No capítulo 3 serão tratados os sistemas com múltiplos graus de liberdade, que são estruturas mais complexas. Para a obtenção da equação de movimento será necessário discutir a discretização do modelo, no caso, em elementos de barras, e a formulação do método dos elementos finitos para a obtenção das matrizes de rigidez e de massa. Será ainda discutida a resolução do sistema de equações de movimento, passando pela obtenção dos modos e frequências naturais até o desenvolvimento do método de integração direta de *Newmark* a ser utilizado na análise do exemplo.

No capítulo 4 será feita uma breve descrição do amortecedor ADAS, que é o dispositivo dissipador de energia a ser considerado na análise do exemplo, porém com a simplificação para comportamento linear. Será ainda discutida a modelagem de tal dispositivo.

No capítulo 5 serão feitas considerações acerca dos sismos e sua consideração em projetos estruturais. Será feita, ainda, uma revisão da consideração da movimentação da base no modelo, primeiro para o oscilador simples, depois para modelos com vários graus de liberdade.

No capítulo 6 são descritas as análises do exemplo de pórtico submetido à excitação sísmica e são apresentados os resultados obtidos.

Finalmente, no capítulo 7 são tecidas as conclusões do trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2. ESTUDO DO OSCILADOR SIMPLES

2.1. INTRODUÇÃO

A resolução de problemas relacionados à análise dinâmica de estruturas passa pela elaboração de modelos matemáticos que representem tanto a estrutura quanto as ações dinâmicas que agem sobre ela. Modelos simplificados têm análise também mais simplificadas, porém podem não representar o problema real com acurácia. Ainda assim, modelos simples podem ser úteis no estudo de conceitos básicos. A adição de complexidade ao modelo aproxima-o do comportamento real da estrutura porém a resolução será também mais complexa.

Nesta seção serão abordados os conceitos de algumas características importantes do modelo. A forma como tais características são consideradas na construção do modelo contribui para um maior ou menor grau de complexidade deste.

2.1.1. GRAUS DE LIBERDADE

O número de graus de liberdade do sistema pode ser definido como o número de deslocamentos independentes necessários para definir as posições das massas em relação à posição inicial das mesmas em uma análise dinâmica (CHOPRA, 1995), ou como o número de componentes de deslocamento que devem ser consideradas para representar os efeitos das forças de inércia significativas na estrutura (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

A Figura 2.1a mostra um exemplo de um modelo simplificado de estrutura de uma edificação de um pavimento. Nesse exemplo considera-se um teto rígido e com uma massa m concentrada no centro do vão e colunas esbeltas com massa desprezível e rigidez $k/2$. Esse modelo simplificado é análogo ao sistema massa mola mostrado na Figura 2.1b.

Chama-se de sistema de um grau de liberdade o sistema da Figura 2.1, onde a resposta que se está interessado é dada pela variação da posição da massa m , a qual pode ser descrita por um único deslocamento $u(t)$.

Se a consideração fosse, por exemplo, de uma viga com massa distribuída continuamente, para a determinação completa das forças inerciais que surgem devido ao carregamento dinâmico, os deslocamentos e acelerações deveriam ser definidos em cada ponto da viga, onde a formulação do problema se daria em termos de equações diferenciais parciais. A análise do sistema poderia ser bastante simplificada ao assumir a massa concentrada em pontos dis-

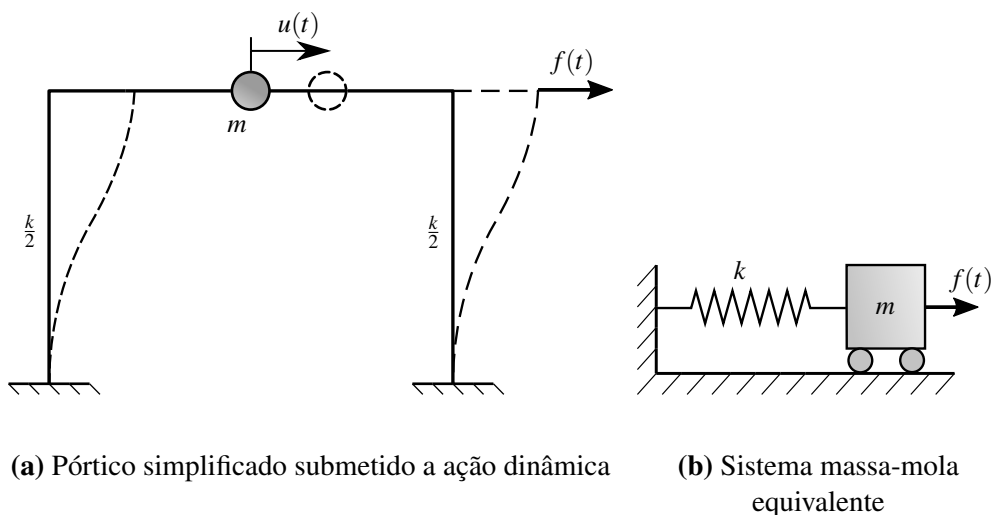


Figura 2.1. Exemplo de sistema de um grau de liberdade (Adaptado de CLOUGH; PENZIEN, 2003 e SORIANO, 2014)

cretos, pois assim seria necessário definir deslocamentos e acelerações apenas nesses pontos (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

A Figura 2.2 mostra o exemplo da viga discretizada. Esse é um exemplo de multigrados de liberdade, onde o número de graus de liberdade corresponde ao número de pontos de discretização, pois para cada ponto está associado um deslocamento que se tem interesse em obter.

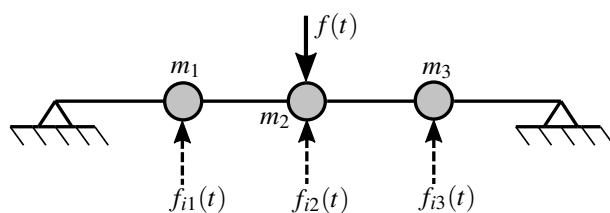


Figura 2.2. Modelo de multigrados de liberdade (Adaptado de CLOUGH; PENZIEN, 2003)

Observa-se ainda que um sistema com massa distribuída continuamente teria, então, infinitos graus de liberdade (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

2.1.2. AMORTECIMENTO

Sistemas em vibração livre, tais como estruturas submetidas a ações dinâmicas, dissipam energia durante o movimento, com conseqüente redução contínua da amplitude das vibrações, sendo tal fenômeno chamado de amortecimento (CHOPRA, 1995). As causas dessa dissipação de energia são complexas e variadas, podendo ser causas internas à estrutura, como o fenômeno de histerese do material, fricção entre superfícies de contato de elementos da estrutura; ou externos à estrutura, tais como os devidos à existência de elementos não estruturais (paredes, divisórias, forros, etc.). Dessa forma o amortecimento é uma propriedade com grande incerteza,

pois não pode ser obtido apenas a partir das características geométricas e dos materiais da estrutura, devendo ser determinado experimentalmente ou utilizando valores indicados na literatura e em normas (SORIANO, 2014).

O modelo de amortecimento mais comumente utilizado na análise dinâmica de estruturas, por conduzir a equações de solução mais simples e gerar resultados satisfatórios é o amortecimento viscoso, que leva esse nome por ser análogo à perda de energia causada pelo arrasto de um corpo se movendo num fluido (SORIANO, 2014).

Nesse modelo, o amortecimento é introduzido como uma força de amortecimento viscoso que é proporcional à velocidade do deslocamento, sendo definida por

$$f_a = c v$$
$$f_a = c \dot{u}(t) \quad (2.1)$$

em que c é denominada constante de amortecimento viscoso e v é a velocidade de deslocamento, também podendo ser escrito como \dot{u} , a primeira derivada do deslocamento em relação ao tempo.

2.1.3. TIPOS DE AÇÃO DINÂMICA

As ações dinâmicas são classificadas, inicialmente, em ações determinísticas e ações probabilísticas. Se a variação no tempo da ação dinâmica é completamente conhecida, chama-se esta ação de determinística e a análise da resposta estrutural se dá por uma análise também determinística. Já para ações probabilísticas, a variação destas no tempo não é totalmente conhecida, sendo determinadas por análises estatísticas (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

Adicionalmente o comportamento das ações determinísticas pode ser classificado, de acordo com sua forma, em (Figura 2.3):

- Ações harmônicas: são descritas por funções seno ou cosseno, do tipo

$$f(t) = f_0 \text{sen}(\omega t) \quad (2.2)$$

- Ações periódicas: não seguem uma lei definida como as ações harmônicas, porém se repetem dentro de um determinado período, podendo ser aproximadas por séries de Fourier;
- Ações impulsivas: têm duração curta se comparada com a intensidade;
- Ações aperiódicas: não seguem lei específica nem se repetem.

Nesse trabalho serão abordadas as respostas às ações determinísticas harmônicas e periódicas, por sua simplicidade na análise, e de ações aperiódicas, caracterizadas pelas ações de sismos.

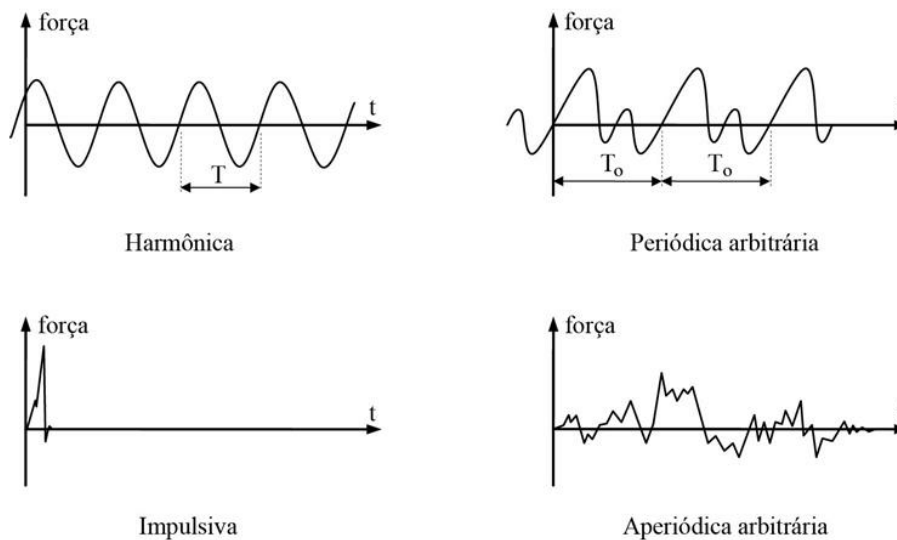


Figura 2.3. Tipos de ação dinâmica (SORIANO, 2014)

2.2. SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

Nesta seção serão abordados alguns conceitos relacionados à análise de sistemas de um grau de liberdade, inicialmente a formulação da equação geral de movimento e em seguida a análise da resolução dessa equação para os casos de oscilador não amortecido e amortecido submetidos à vibração livre e a diferentes tipos de ação dinâmica.

2.2.1. EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Para um sistema composto por um corpo se movimentando no espaço, como o mostrado na Figura 2.4, a segunda lei de Newton afirma que

$$f = m a \tag{2.3}$$

Considerando componente de força atuando na mesma direção do deslocamento, a equação 2.3 pode ser reescrita também como

$$f = m \ddot{u} \tag{2.4}$$

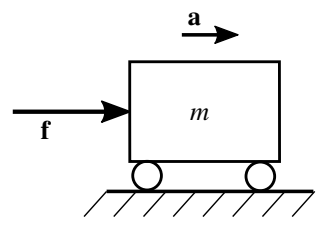


Figura 2.4. Corpo submetido a ação de força *f*

Utilizando o princípio de *D'Alembert*, pode-se, ainda, reescrever a equação 2.4 como

$$f - m \ddot{u} = 0 \quad (2.5)$$

A mudança na equação parece simples, mas revela uma nova visão do problema. Agora o termo $m \ddot{u}$ pode ser entendida como uma espécie de força que se opõe à ação da força externa. À equação 2.5 dá-se o nome de equação de equilíbrio dinâmico, onde o termo $m \ddot{u}$ é agora chamado de força de inércia.

Considerando um modelo composto por um sistema massa mola como o da Figura 2.1b, o equilíbrio dinâmico de forças pode ser escrito da seguinte maneira:

$$f = k u + m \ddot{u} \quad (2.6)$$

Onde a mola tem comportamento linear elástico e constante de rigidez igual a k . Neste caso o termo $k u$ é denominado de força elástica.

O sistema anterior é um sistema de um grau de liberdade típico e as forças consideradas até o momento são conservativas. Para a consideração de um sistema em que há a dissipação de energia pode ser acrescentado um amortecedor de comportamento viscoso, como descrito na seção 2.1.2, com constante de amortecimento c , levando ao sistema da Figura 2.5.

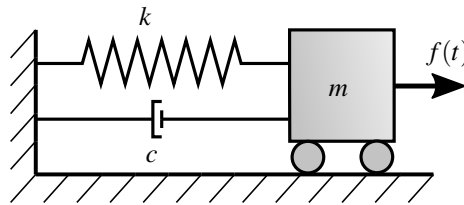


Figura 2.5. Sistema massa-mola-amortecedor

A equação de movimento seria dada, então, adicionando o termo correspondente à força de amortecimento dada na equação 2.1, onde se chega à seguinte expressão para a equação de movimento do sistema de um grau de liberdade:

$$f_i + f_a + f_e = f(t) \quad (2.7)$$

onde

f_i = força de inércia;

f_a = força de amortecimento;

f_e = força elástica;

$f(t)$ = força, ou ação externa.

A partir das considerações anteriores a equação 2.7 pode ser reescrita como:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f(t) \quad (2.8)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem que pode ser resolvida para $u(t)$.

Para um sistema similar ao da Figura 2.5, agora na vertical, como na Figura 2.6, há também a ação de uma força estática, que é a força peso, portanto, a equação de equilíbrio dinâmico é dada por

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u + k u_{est} = m g \quad (2.9)$$

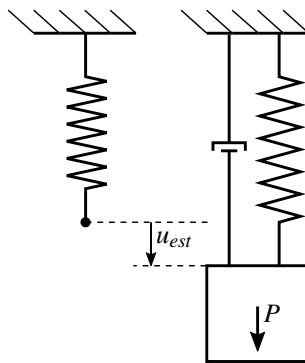


Figura 2.6. Sistema massa-mola submetido a ação estática do peso

Onde u_{est} é o deslocamento estático provocado pelo peso próprio. Como $m g = k u_{est}$ os dois termos se cancelam na equação 2.9 e esta se torna igual à equação 2.11, o que mostra que a força gravitacional não tem efeitos sobre os deslocamentos dinâmicos do sistema.

Assim o deslocamento total do sistema pode ser obtido pela soma entre o deslocamento estático provocado pela força peso e os deslocamentos dinâmicos

Nas seções seguintes serão discutidas as respostas do sistema para a equação, considerando o sistema inicialmente sem amortecimento e depois com o amortecimento viscoso; para os tipos de ação dinâmica especificados na seção 2.1.3.

2.2.2. OSCILADOR SIMPLES EM VIBRAÇÃO LIVRE

Um sistema em vibração livre é definido como um sistema que é perturbado de seu equilíbrio e passa a vibrar sem a ação de forças externas (CHOPRA, 1995). A equação 2.10 toma, então, a seguinte forma:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0 \quad (2.10)$$

O estudo do oscilador em vibração livre é interessante para o entendimento de algumas propriedades importantes.

2.2.2.1. SISTEMA SEM AMORTECIMENTO

O modelo mais simples de oscilador desconsidera também a parcela de amortecimento da equação 2.10, podendo ser representado por um modelo massa mola simples, com massa m e mola elástica linear com rigidez k . Para tal sistema em posição horizontal, a equação de equilíbrio dinâmico pode ser escrita como

$$m \ddot{u} + k u = 0 \quad (2.11)$$

Para a obtenção dos deslocamentos do sistema ao longo do tempo pode-se proceder à análise da equação 2.11. Esta é uma equação diferencial de segunda ordem homogênea que tem como solução

$$u(t) = a_1 \cos(\omega_n t) + a_2 \sin(\omega_n t) \quad (2.12)$$

onde as constantes a_1 e a_2 são dependentes das condições iniciais e dadas por:

$$a_1 = u_0 \quad ; \quad a_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

em que u_0 é a posição inicial e v_0 é a velocidade inicial do sistema.

Já ω é a frequência angular do sistema que, no caso do oscilador em vibração livre, é chamada de frequência natural angular (ω_n). Esta é uma propriedade do sistema que depende de suas características, sendo dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.13)$$

a partir da qual é possível obter a frequência natural de vibração do sistema fazendo

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (2.14)$$

e o período de vibração natural por

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (2.15)$$

A solução dada pela equação 2.12 pode ser escrita também, de forma simplificada, como

$$u(t) = a \cos(\omega_n t - \phi) \quad (2.16)$$

onde as constantes a e ϕ estão em função de a_1 e a_2 , portanto, em função das condições iniciais, sendo dadas por

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad ; \quad \phi = \arctg\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

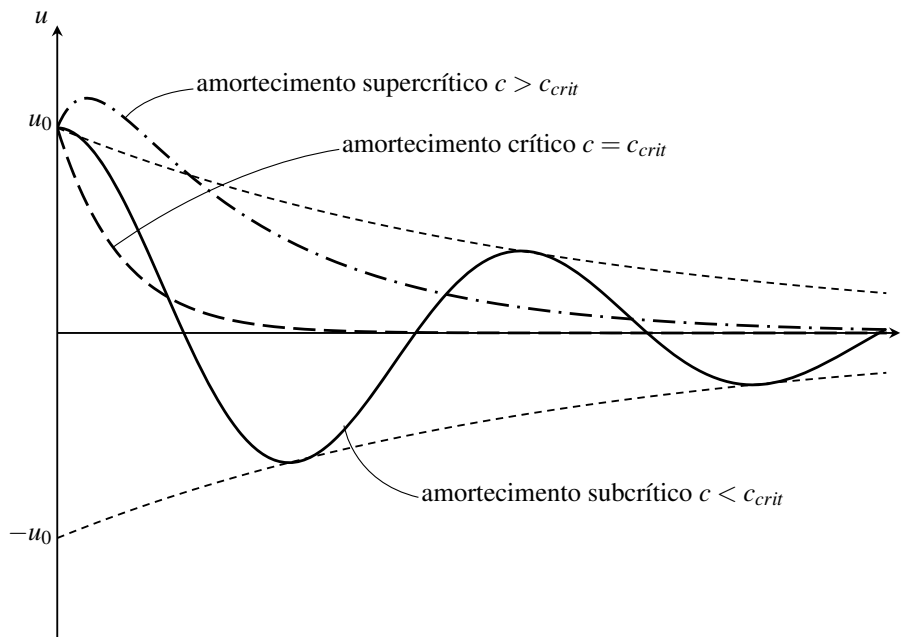


Figura 2.7. Resposta para os amortecimentos crítico, subcrítico e supercrítico (Adaptado de SORIANO, 2014)

A partir da equação 2.16 é mais fácil concluir que a resposta de deslocamento do sistema em vibração livre não amortecida é do tipo cossenoidal, com amplitude a e frequência angular ω_n . Nesse modelo, após excitado, o sistema vibra indefinidamente, pois não há a consideração de forças que dissipam energia.

2.2.2.2. SISTEMA COM AMORTECIMENTO

Considerando agora um sistema em vibração livre semelhante ao discutido na seção anterior, porém agora introduzindo um amortecedor viscoso com constante de amortecimento c obtém-se a equação de equilíbrio dinâmico dada pela equação 2.10.

A equação 2.10 admite solução do tipo

$$u(t) = b_1 e^{p_1 t} + b_2 e^{p_2 t} \quad (2.17)$$

onde as constantes p_1 e p_2 são dadas por

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.18)$$

A partir da equação 2.18 é possível identificar três casos distintos que dependem do valor assumido pelo radicando da equação, que pode ser igual a zero, maior que zero ou menor que zero (Figura 2.7).

Para o caso em que o radicando da equação 2.18 é igual a zero, a constante de amorteci-

mento do amortecedor viscoso deve assumir o valor de

$$c = c_{cr} = 2\sqrt{k m} \quad (2.19)$$

Esse caso é chamado de amortecimento crítico e o valor de c é chamado de constante de amortecimento crítico do sistema.

Quando $c > c_{cr}$ o radicando da equação 2.18 assume um valor maior que zero, sendo que esse caso é chamado de amortecimento supercrítico.

Para os dois casos anteriores, como o valor do radicando é maior ou igual a zero, os valores de p_1 e p_2 são reais, portanto pode-se concluir que a resposta, dada pela equação 2.17 corresponde a um decaimento exponencial que tende a zero quando t tende a infinito.

Um terceiro caso ocorre quando $c < c_{cr}$, sendo chamado de amortecimento subcrítico. Esse caso é de maior interesse para a análise dinâmica estrutural, visto que a maioria das estruturas reais recaem em casos de amortecimento subcrítico. Nesse caso o radicando da equação 2.18 é negativo, introduzindo um termo complexo à solução. Desenvolvendo a equação 2.18 com a consideração da equação de Euler

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x) \quad (2.20)$$

obtém-se a seguinte solução para o sistema em vibração livre com amortecimento subcrítico

$$u(t) = e^{-\xi \omega_n t} [a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \operatorname{sen}(\omega_a t)] \quad (2.21)$$

Novamente, as constantes a_1 e a_2 são dependentes das condições iniciais e dadas por

$$a_1 = u_0 \quad ; \quad a_2 = \frac{u_0 \xi \omega_n + v_0}{\omega_a}$$

O termo ξ é chamado de razão de amortecimento e é dado por

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (2.22)$$

Já o termo ω_a é a frequência angular amortecida, sendo dada por

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.23)$$

A equação 2.20 pode ser escrita, alternativamente, como

$$u(t) = a e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_a t - \phi) \quad (2.24)$$

onde a e ϕ são dados por

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad ; \quad \phi = \arctg\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

A partir da equação 2.24 pode-se concluir que a forma da resposta do sistema é oscilatória, com frequência angular ω_a , porém com amplitude que decai exponencialmente, delimitada pelas curvas envelope $u = a e^{-\xi \omega_n t}$ e $u = -a e^{-\xi \omega_n t}$, com a amplitude tendendo a zero quando t tende a infinito.

Pode-se obter o período de vibração para o caso amortecido por

$$T_a = \frac{2 \pi}{\omega_a} = \frac{2 \pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{T_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.25)$$

e a frequência pelo inverso de 2.25.

Como os valores de ξ para estruturas de engenharia civil são baixos, variando de 0,01 a 0,1, com exceção de ações sísmicas e estruturas com dispositivos específicos para dissipar energia (SORIANO, 2014), os valores de ω_a , T_a e f_a em geral são bem próximos aos valores de ω_n , T_n e f_n .

2.2.3. OSCILADOR SIMPLES SUBMETIDO A FORÇA HARMÔNICA

Para um sistema similar ao discutido na seção anterior, agora submetido a uma força externa, retorna-se à equação de equilíbrio 2.8.

Nessa seção será analisado o caso em que a força externa $f(t)$ é do tipo harmônica, ou seja, é dada por uma expressão cossenoidal ou senoidal. Nesse caso a expressão que descreve a força tem forma bem definida e é periódica, com frequência angular ω também definida. Trabalhando com a hipótese de força cossenoidal, a expressão geral da força externa harmônica aplicada ao sistema é dada por

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.26)$$

2.2.3.1. SISTEMA SEM AMORTECIMENTO

Para o caso de sistema sem amortecimento, a equação de equilíbrio dinâmico é dada por

$$m \ddot{u} + k u = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.27)$$

Essa equação tem como solução homogênea a equação 2.12, abordada na seção anterior, e como solução particular

$$u_p(t) = a_p \cos(\omega t) \quad (2.28)$$

onde

$$a_p = \frac{f_0}{k - m \omega^2} = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

$$a_p = \frac{u_{est}}{1 - r^2} \quad (2.29)$$

Os parâmetros $u_{est} = f_0/k$ e $r = \omega/\omega_n$ são, respectivamente, o deslocamento estático provocado por f_0 e a razão de frequências.

Dessa maneira, a solução completa para a equação fica

$$u(t) = a_1 \cos(\omega_n t) + a_2 \sen(\omega_n t) + a_p \cos(\omega t) \quad (2.30)$$

Onde as constantes a_1 e a_2 são dependentes das condições iniciais e dadas por

$$a_1 = u_0 - \frac{u_{est}}{1 - r^2} \quad ; \quad a_2 = \frac{v_0}{\omega_n}$$

2.2.3.2. SISTEMA COM AMORTECIMENTO

Acrescentando a parcela de amortecimento chega-se à equação de equilíbrio

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f_0 \cos(\omega t) \quad (2.31)$$

cuja solução particular é

$$u_p(t) = a_p \cos(\omega t - \phi) \quad (2.32)$$

onde as constantes a_p e ϕ são dadas por

$$\phi = \arctg\left(\frac{c \omega}{k - m \omega^2}\right) \quad (2.33)$$

$$a_p = \frac{f_0}{\sqrt{(k - m \omega^2)^2 + (c \omega)^2}} \quad (2.34)$$

As equações podem ser reescritas como

$$\phi = \arctg\left(\frac{2 \xi r}{1 - r^2}\right) \quad (2.35)$$

$$a_p = \frac{u_{est}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \xi r)^2}} \quad (2.36)$$

Em que u_{est} é o deslocamento estático provocado por f_0 , ξ é a razão de amortecimento,

definido na equação 2.22, e r é a razão de frequências, dada por

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.37)$$

A solução completa é, então,

$$u(t) = e^{-\xi \omega_n t} [a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \sen(\omega_a t)] + a_p \cos(\omega t - \phi) \quad (2.38)$$

onde as constantes a_1 e a_2 são dadas por

$$a_1 = u_0 - \frac{u_{est} \cos \phi}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$a_2 = \frac{1}{\omega_a} \left(v_0 + a_1 \xi \omega_n - \frac{u_{est} \omega \sen \phi}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \right)$$

Na equação 2.38 podem ser identificados dois termos, o primeiro dado por $e^{-\xi \omega_n t} [a_1 \cos(\omega_a t) + a_2 \sen(\omega_a t)]$, que é chamado de resposta transiente, pois decresce rapidamente com o tempo, e o segundo, dado pela solução particular, chamado de resposta em regime permanente pois seu efeito tende a predominar num instante de tempo de valor elevado.

2.2.3.3. RESSONÂNCIA

A partir das equações 2.29 e 2.36 pode-se definir o fator de amplificação dinâmica como

$$A_d = \frac{a_p}{u_{est}} \quad (2.39)$$

Para o caso do sistema sem amortecimento, a equação 2.29 mostra que o valor da amplificação dinâmica e, por consequência, a amplitude do deslocamento, tende ao infinito quando r tende a 1, ou seja, quando ω tende a ω_n . O caso da coincidência de frequências é chamado de ressonância, onde a solução particular dada pela equação 2.28 não fica definida.

Para o caso do sistema com amortecimento, a amplificação dinâmica tende para $1/2 \xi$ quando $\omega = \omega_n$ ($r = 1$). A Figura 2.8 mostra os valores de A_d em função de r para diferentes valores de ξ .

Observa-se que os maiores valores de A_d não ocorrem para $r = 1$. De fato eles ocorrem para os valores

$$r = \frac{1}{\sqrt{2 \xi^2}} \quad (2.40)$$

e

$$A_d^{max} = \frac{1}{2 \xi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.41)$$

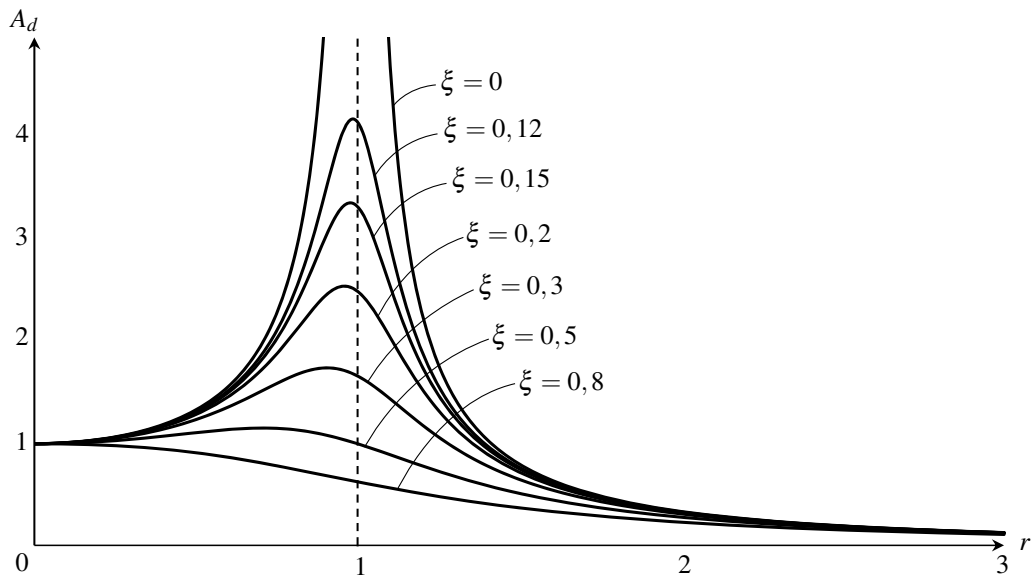


Figura 2.8. Amplificação dinâmica em função da razão de frequências, para várias razões de amortecimento (Adaptado de SORIANO, 2014)

Como citado anteriormente, os valores de ξ para estruturas usuais da engenharia civil são baixos, o que leva a frequências de ressonância bem próximas à frequência natural e a valores máximos de A_d próximos a $1/2 \xi$. A Figura 2.8 mostra como os valores de A_d são elevados para valores de r próximos de 1. É possível observar também que $A_d = 1$ para $r = 0$ (Vibração livre) e A_d tende para zero para valores altos de r . Além disso uma maior razão de amortecimento leva a menores valores de amplificação dinâmica.

2.2.4. OSCILADOR SIMPLES SUBMETIDO A FORÇA PERIÓDICA ARBITRÁRIA

Como definido na seção 2.1.3, as forças periódicas arbitrarias não têm uma expressão definida, porém se repetem em determinados períodos de tempo. Tais forças podem, então, ser definidas por

$$f(t) = f(t + q T_0) \quad q = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.42)$$

onde T_0 é chamado de período fundamental.

Funções desse tipo podem ser desenvolvida em uma série de *Fourier*, que consiste em uma série de infinitas funções harmônicas. A série de *Fourier* pode ser escrita, na forma trigonométrica, como

$$f(t) = a_0 + \sum_{q=1}^{\infty} [a_q \cos(q \omega_0 t) + b_q \sin(q \omega_0 t)] \quad (2.43)$$

onde os coeficientes de *Fourier* são dados por

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt$$

$$a_q = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos(q \omega_0 t) dt$$

$$b_q = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sen(q \omega_0 t) dt$$

onde t_1 é um instante de tempo qualquer.

A solução particular, ou solução em regime permanente, para esse caso pode ser desenvolvida considerando separadamente as soluções individuais em regime permanente para o termo a_0 , para os termos em cosseno e para os termos em seno, que remetem à solução obtida para o oscilador submetido à força harmônica, dadas, respectivamente, por

$$u_0 = \frac{a_0}{k} \quad (2.44)$$

$$u(t)_q^{cos} = \frac{a_q}{k \sqrt{(1-r_q^2)^2 + (2\xi r_q)^2}} \cos(q \omega_0 t) \quad (2.45)$$

$$u(t)_q^{sen} = \frac{b_q}{k \sqrt{(1-r_q^2)^2 + (2\xi r_q)^2}} \sen(q \omega_0 t) \quad (2.46)$$

onde

$$r_q = q \frac{\omega_0}{\omega_n} \quad (2.47)$$

A solução total em regime permanente será, então, dada por

$$u_p(t) = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(1-r_q^2)^2 + (2\xi r_q)^2}} [a_q \cos(q \omega_0 t) + b_q \sen(q \omega_0 t)] \quad (2.48)$$

2.2.5. OSCILADOR SIMPLES SUBMETIDO A FORÇA APERIÓDICA

As forças aperiódicas são mais gerais e as que têm maior ocorrência na prática da engenharia, porém conduzem a análises mais elaboradas, sendo, assim, substituídas por forças periódicas arbitrárias ou harmônicas quando possível, que possibilitam análises mais simples. No caso de forças aperiódicas não há resposta em regime permanente, pois a resposta do oscilador não tem padrão definido. Também não é possível obter de forma analítica explícita a solução da equação de movimento do oscilador simples, sendo necessário realizar simplificações e resoluções numéricas (SORIANO, 2005).

Nesta seção será tratada a obtenção da resposta à força aperiódica por meio da integração numérica da equação do oscilador, onde a ação externa é discretizada em uma sequência de instantes. Este é um método no domínio do tempo, isto é, fornece a resposta para cada instante

t a partir das respostas nos instantes anteriores.

Métodos de integração numérica podem ser classificados como explícitos, quando a solução para o instante t depende apenas das soluções de instantes anteriores, como o método por diferença finita central, ou implícitos, quando as soluções dependem tanto de valores de instantes interiores quanto de valores referentes ao próprio instante, como os métodos de Newmark e Wilson θ .

2.2.5.1. MÉTODO POR DIFERENÇA FINITA CENTRAL

Nesse método a derivada primeira em relação ao tempo da resposta $u(t)$, em um instante de tempo t_i (Figura 2.9), é aproximada por

$$\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t} \quad (2.49)$$

onde os deslocamentos u_{i+1} e u_{i-1} são os deslocamentos para os tempos $t_{i+1} = t + \Delta t$ e $t_{i-1} = t - \Delta t$ respectivamente, sendo $u(t)$, então, dividida em intervalos Δt arbitrários, como mostrado na Figura 2.9.

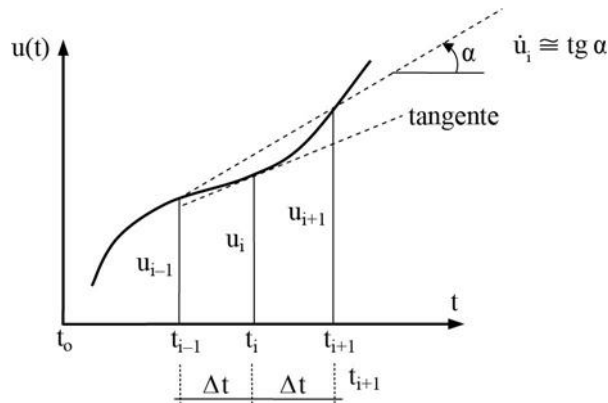


Figura 2.9. Aproximação de \dot{u} para o instante t_i (SORIANO, 2014)

A derivada segunda é aproximada, de maneira semelhante, por

$$\ddot{u}_i = \frac{\dot{u}_{i+1/2} - \dot{u}_{i-1/2}}{\Delta t} \quad (2.50)$$

onde define-se, de acordo com o estabelecido na equação 2.49, que

$$\dot{u}_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} \quad (2.51)$$

$$\dot{u}_{i-1/2} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \quad (2.52)$$

Substituindo as equações 2.50 e 2.51 em 2.49 obtém-se, após manipulação, que

$$\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (2.53)$$

Agora, considerando a equação de movimento para o instante t_i

$$m \ddot{u}_i + c \dot{u}_i + k u_i = f_i \quad (2.54)$$

e substituindo nela as equações 2.53 e 2.49 chega-se a

$$m' u_{i+1} = f'_i \quad (2.55)$$

em que m' é chamada de pseudomassa e f'_i é chamado de pseudoforça estática, sendo dados por

$$m' = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \quad (2.56)$$

$$f'_i = f_i - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2}\right) u_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right) u_{i-1} \quad (2.57)$$

Dessa forma, a resposta em cada instante depende da resposta nos dois instantes anteriores e é dada por

$$u_{i+1} = \frac{f'_i}{m'} \quad (2.58)$$

Para a obtenção da resposta u_1 será necessário, então, conhecer o deslocamento inicial u_0 e um deslocamento fictício u_{-1} em $t = -\Delta t$, sendo este último dado por

$$u_{-1} = u_0 - \dot{u}_0 \Delta t + \ddot{u}_0 \frac{\Delta t^2}{2} \quad (2.59)$$

2.2.5.2. MÉTODO DE NEWMARK COM ACELERAÇÃO CONSTANTE

Considerando um intervalo $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ e aceleração dada por $\ddot{u}(t)$, supõe-se para o intervalo uma aceleração constante (Figura 2.10), igual à aceleração média, dada por

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}) \quad ; \quad 0 < \tau < \Delta t \quad (2.60)$$

Integrando analiticamente a equação 2.60 em relação a τ obtém-se

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_{i-1} + \frac{\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}}{2} \tau \quad (2.61)$$

$$u(\tau) = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1} \tau + \frac{\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}}{4} \tau^2 \quad (2.62)$$

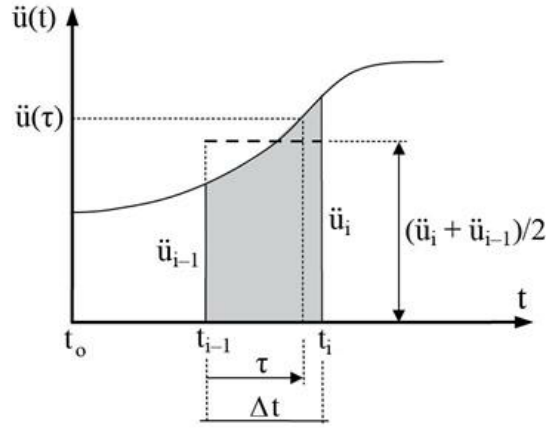


Figura 2.10. Média da aceleração no intervalo de tempo Δt (SORIANO, 2014)

em que para $\tau = \Delta t$

$$\dot{u}(\tau = \Delta t) = \dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}}{2} \Delta t \quad (2.63)$$

$$u(\tau = \Delta t) = u_i = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1} \Delta t + \frac{\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}}{4} \Delta t^2 \quad (2.64)$$

Manipulando-se as equações 2.63 e 2.64 pode-se escrever as expressões da velocidade e da aceleração em função dos deslocamentos nos instante t_i e t_{i-1} , dadas por

$$\ddot{u}_i = -\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (u_i - u_{i-1} - \dot{u}_{i-1} \Delta t) \quad (2.65)$$

$$\dot{u}_i = -\dot{u}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} (u_i - u_{i-1}) \quad (2.66)$$

Substituindo na equação 2.54 obtém-se

$$k' u_i = f'_i \quad (2.67)$$

onde k' e f'_i são, respectivamente, chamados de pseudorrigidez e pseudoforça estática, sendo dados por

$$k' = k + \frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{2c}{\Delta t} \quad (2.68)$$

$$f'_i = f_i + m \left(\ddot{u}_{i-1} + \frac{4\dot{u}_{i-1}}{\Delta t} + \frac{4u_{i-1}}{\Delta t^2} \right) + c \left(\dot{u}_{i-1} + \frac{2u_{i-1}}{\Delta t} \right) \quad (2.69)$$

A resposta para o instante i depende, então, do deslocamento, da velocidade e da aceleração no instante anterior, sendo dada por

$$u_i = \frac{f'_i}{k'} \quad (2.70)$$

2.2.5.3. MÉTODO WILSON θ

O método Wilson θ é semelhante ao método de Newmark, porém ao invés de se tomar um intervalo de t_{i-1} a t_i , com $t_i - t_{i-1} = \Delta t$, toma-se um intervalo estendido de t_{i-1} a $t_\theta = t_{i-1} + \theta\Delta t$, onde $t_\theta - t_{i-1} = \theta\Delta t$, como mostrado na Figura 2.11.

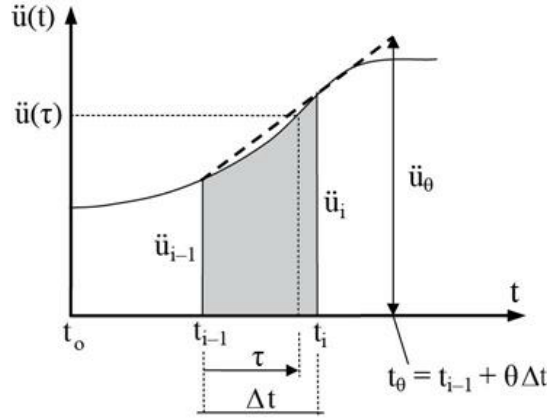


Figura 2.11. Aceleração linear no intervalo estendido de tempo (SORIANO, 2014)

Nesse intervalo estabelece-se uma lei de aceleração linear dada por

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_{i-1} + (u_\theta - u_{i-1}) \frac{\tau}{\theta\Delta t} \quad ; \quad 0 < \tau < \theta\Delta t \quad (2.71)$$

Integrando analiticamente e fazendo $\tau = t_\theta$ obtém-se

$$\dot{u}_\theta = \dot{u}_{i-1} + (\ddot{u}_\theta + \ddot{u}_{i-1}) \theta \frac{\Delta t}{2} \quad (2.72)$$

$$u_\theta = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1} \theta \Delta t + (\ddot{u}_\theta + 2\ddot{u}_{i-1}) \theta^2 \frac{\Delta t^2}{6} \quad (2.73)$$

Resolvendo o sistema chega-se a

$$\ddot{u}_\theta = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (u_\theta - u_{i-1}) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{u}_{i-1} - 2\ddot{u}_{i-1} \quad (2.74)$$

$$\dot{u}_\theta = \frac{3}{\theta \Delta t} (u_\theta - u_{i-1}) - 2\dot{u}_{i-1} - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_{i-1} \quad (2.75)$$

Substituindo as equações 2.74 e 2.75 na equação de equilíbrio para o instante t_θ , dada por

$$m \ddot{u}_\theta + c \dot{u}_\theta + k u_\theta = f_{i-1} + \theta(f_i - f_{i-1}) \quad (2.76)$$

obtém-se que

$$k' u_\theta = f'_i \quad (2.77)$$

onde a pseudorrigidez e a pseudoforça estática são agora dados por

$$k' = k + \frac{6m}{\theta^2 \Delta t^2} + \frac{3c}{\theta \Delta t} \quad (2.78)$$

$$f'_i = f_{i-1} + \theta(f_i - f_{i-1}) + 6m \left(\frac{\ddot{u}_{i-1}}{3} + \frac{\dot{u}_{i-1}}{\theta \Delta t} + \frac{u_{i-1}}{\theta^2 \Delta t^2} \right) + c \left(\frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{u}_{i-1} + 2\dot{u}_{i-1} + \frac{3u_{i-1}}{\theta \Delta t} \right) \quad (2.79)$$

Para determinar a resposta no instante t_i , faz-se a integração analítica da equação 2.71 e toma-se $\tau = \Delta t$, obtendo-se

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \ddot{u}_{i-1} \Delta t + (\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_{i-1}) \frac{\Delta t}{2\theta} \quad (2.80)$$

$$u_i = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1} \Delta t + \ddot{u}_{i-1} \frac{\Delta t^2}{2} + (\ddot{u}_\theta - \ddot{u}_{i-1}) \frac{\Delta t^2}{6\theta} \quad (2.81)$$

A partir das equações 2.80 e 2.81 pode-se obter as soluções para o instante t_1 , dadas por

$$\ddot{u}_i = \frac{6}{\theta^3 \Delta t^2} (u_\theta - u_{i-1}) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \dot{u}_{i-1} + \left(1 - \frac{3}{\theta} \right) \ddot{u}_{i-1} \quad (2.82)$$

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}) \quad (2.83)$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{u}_i + 2\ddot{u}_{i-1}) \quad (2.84)$$

3. SISTEMAS COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

3.1. INTRODUÇÃO

Como discutido na seção 2.1.1, um sistema com n graus de liberdade é aquele cujo comportamento pode ser descrito por n deslocamentos independentes. Um modelo contínuo teria, em tese, infinitos graus de liberdade, sendo então comum proceder à análise de modelos discretizados, que são baseados em uma configuração geométrica especificada por um número finito de parâmetros independentes entre si (SORIANO, 2004). Nesse trabalho as estruturas a serem estudadas são pórticos planos, contraventados ou não, discretizados em elementos de barra. Assim as estruturas serão representadas por dois tipos de elementos, sendo que as barras dos contraventamentos serão representadas por elementos de treliça plana, enquanto as demais barras do pórtico serão representadas por elementos de pórtico plano.

Para um sistema descrito por n deslocamentos o equilíbrio de forças associado a cada grau de liberdade pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_{I1} + f_{A1} + f_{E1} &= f_1(t) \\ f_{I2} + f_{A2} + f_{E2} &= f_2(t) \\ &\vdots \\ f_{Ii} + f_{Ai} + f_{Ei} &= f_i(t) \\ &\vdots \\ f_{In} + f_{An} + f_{En} &= f_n(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde f_I , f_A , f_E e $f(t)$ são, respectivamente, as forças de inércia, amortecimento, elástica e externa associadas a cada grau de liberdade.

Escrevendo 3.1 em forma matricial chega-se a

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_E = \mathbf{f}(t) \tag{3.2}$$

As forças associadas a um dos graus de liberdade i podem ser mais convenientemente escritas como uma combinação linear que relacione os deslocamentos e suas derivadas por meios de coeficientes apropriados.

Desta forma, e correlacionando com o modelo de um grau de liberdade, pode-se escrever a força de inércia associada ao grau de liberdade i como

$$f_{Ii} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + \cdots + m_{ii}\ddot{u}_i + \cdots + m_{in}\ddot{u}_n \quad (3.3)$$

a força de amortecimento associada a esse grau de liberdade como

$$f_{Ai} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + \cdots + c_{ii}\dot{u}_i + \cdots + c_{in}\dot{u}_n \quad (3.4)$$

e a força elástica como

$$f_{Ei} = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \cdots + k_{ii}u_i + \cdots + k_{in}u_n \quad (3.5)$$

Os coeficientes m_{ij} , c_{ij} e k_{ij} são, respectivamente, os coeficientes de influência de massa, amortecimento e rigidez, onde m_{ij} corresponde à força no nó i devido a uma aceleração unitária do nó j ; c_{ij} corresponde à força no nó i devido a uma velocidade unitária do nó j e k_{ij} corresponde à força no nó i devido a um deslocamento unitária do nó j .

Assim, os termos da equação 3.2 podem ser reescritos como

$$\mathbf{f}_I = \begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{Ii} \\ \vdots \\ f_{In} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2i} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ii} & \cdots & m_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{ni} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_i \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{f}_A = \begin{Bmatrix} f_{A1} \\ f_{A2} \\ \vdots \\ f_{Ai} \\ \vdots \\ f_{An} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{ni} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_i \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{f}_E = \begin{Bmatrix} f_{E1} \\ f_{E2} \\ \vdots \\ f_{Ei} \\ \vdots \\ f_{En} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{ni} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (3.8)$$

Chega-se, então, à seguinte equação de movimento para o sistema com n graus de liberdade:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (3.9)$$

onde as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são denominadas, respectivamente, matriz de massa, matriz de amortecimento e matriz de rigidez do modelo.

Nas seções seguintes são discutidos os métodos de construção dessas matrizes para as estruturas a serem estudadas. Para a obtenção das matrizes serão utilizados os conceitos do Método dos Elementos Finitos, sendo as estruturas consideradas discretizadas por um número finito de elementos ligados por seus nós.

3.2. OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

3.2.1. FORMULAÇÃO COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Tomando um elemento finito definido pelos nós i , j , etc., e contorno definido por linhas retas, considera-se o campo de deslocamentos do elemento dado por

$$\mathbf{v} = \sum_k \mathbf{N}_k \mathbf{u}_k^e = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & \mathbf{N}_j & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^e \\ \mathbf{u}_j^e \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (3.10)$$

onde \mathbf{u}_k^e representam os deslocamentos nodais e \mathbf{N}_k são funções de forma apropriadas. De forma análoga, os campos de velocidades e acelerações do elemento são dados, respectivamente, por

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e \quad (3.11)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e \quad (3.12)$$

A partir das equações 3.11 e 3.12, as componentes das forças de inércia e de amortecimento viscoso que agem sobre uma unidade de volume do elemento, considerando ρ e c

constantes, podem ser escritas como

$$\mathbf{f}_I = \rho \ddot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e \quad (3.13)$$

$$\mathbf{f}_A = c \dot{\mathbf{v}} = c \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e \quad (3.14)$$

As deformações do elemento podem ser escritas através de uma relação do tipo

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{v} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (3.15)$$

onde \mathbf{L} é um operador diferencial apropriado e define-se que $\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$.

Já a relação entre tensões e deformações é dada por relação do tipo

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (3.16)$$

onde \mathbf{E} é uma matriz de propriedades elásticas, dependente do material.

As forças nodais equivalentes, isto é, as forças externas aplicadas nos nós do elemento, são dadas por

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_j^e \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Para o caso considerado, de equilíbrio à ação dinâmica, as forças nodais externas, dadas por \mathbf{q}^e devem ser estaticamente equivalentes à forças internas desenvolvidas no elemento. Para tanto, considerando um deslocamento virtual arbitrário $\delta \mathbf{u}$ aplicado aos nós do elemento, o trabalho virtual das forças externas é dado por

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{q}^e \quad (3.18)$$

Já o trabalho virtual por unidade de volume realizado pelas forças internas é dado pela soma dos trabalhos das forças internas, das forças de inércia e das forças de amortecimento, podendo ser escrito por

$$\delta \mathbf{v}^T \mathbf{f}_I + \delta \mathbf{v}^T \mathbf{f}_A + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (3.19)$$

Considerando que

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}^e \quad (3.20)$$

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^e \quad (3.21)$$

e as equações 3.13, 3.14 e 3.16, igualando o trabalho das forças externas ao trabalho das forças

internas chega-se a

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{q}^e = \int_{V^e} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{f}_I dV^e + \int_{V^e} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{f}_A dV^e + \int_{V^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV^e \quad (3.22)$$

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{q}^e = \int_{V^e} \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e dV^e + \int_{V^e} \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}^T c \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e dV^e + \int_{V^e} \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}^e dV^e \quad (3.23)$$

$$\mathbf{q}^e = \left(\int_{V^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV^e \right) \ddot{\mathbf{u}}^e + \left(\int_{V^e} \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV^e \right) \dot{\mathbf{u}}^e + \left(\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV^e \right) \mathbf{u}^e \quad (3.24)$$

Comparando a equação 3.24 com a equação 3.9 pode-se escrever a equação de movimento para um elemento da estrutura como

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \quad (3.25)$$

onde as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do elemento são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{M}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV^e \quad (3.26)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T c \mathbf{N} dV^e \quad (3.27)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV^e \quad (3.28)$$

3.2.2. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

3.2.2.1. ELEMENTO DE VIGA

Considerando um elemento de viga, com comprimento L , em que não se considera a deformação devido ao esforço cortante, este pode ser descrito pelos quatro deslocamentos independentes u_i^e mostrados na Figura 3.1.

O campo de deslocamentos para o elemento pode ser escrito, então, como

$$\mathbf{v} = N_1 u_1^e + N_2 u_2^e + N_3 u_3^e + N_4 u_4^e \quad (3.29)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (3.30)$$

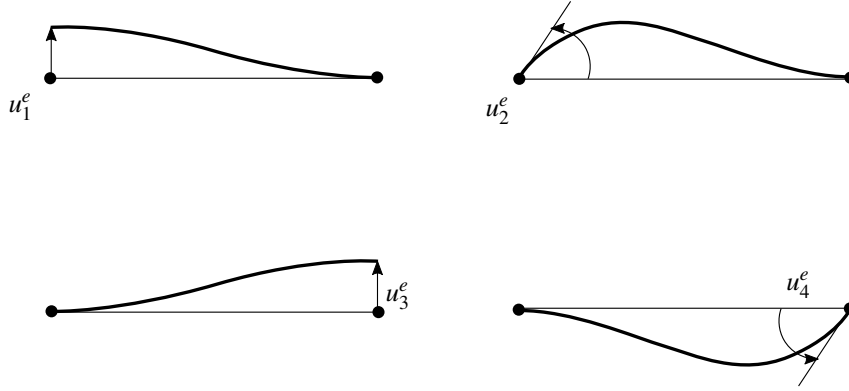


Figura 3.1. Deslocamentos nodais do elemento de viga

onde as funções N_i são as funções de forma do elemento e, nesse caso, são dadas por

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \quad (3.31)$$

$$N_2 = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad (3.32)$$

$$N_3 = \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \quad (3.33)$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad (3.34)$$

Nesse modelo de viga considera-se que há deformação apenas ao longo do eixo x da viga. A deformação em uma seção da viga pode ser escrita, então, por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d^2 v}{dx^2} y = \kappa y \quad (3.35)$$

Já a tensão na direção x é dada por

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon = E \kappa y \quad (3.36)$$

O trabalho virtual realizado pelas forças internas será dado, então, por

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_{V^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV^e = \int_0^L \int_{A^e} \delta \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} dA^e dx \\ \delta W_i &= \int_0^L \int_{A^e} \delta \kappa y E \kappa y dA^e dx = \int_0^L E \kappa \delta \kappa \int_{A^e} y^2 dA^e dx \end{aligned}$$

$$\delta W_i = \int_0^L EI \kappa \delta \kappa dx = \int_0^L \delta \kappa M dx \quad (3.37)$$

Assim, Zienckiewicz (2000), considera que as deformações generalizadas e as tensões generalizadas podem, definidas, respectivamente, nas equações 3.15 e 3.16, para o caso do elemento de viga podem ser escritas como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\kappa} = \frac{d^2 v}{dx^2} = v_{,xx} \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = M = EI \boldsymbol{\kappa} \quad (3.39)$$

O operador \mathbf{L} , definido em 3.15, degenera-se, então, na derivada segunda em relação a x , podendo-se então definir a matriz \mathbf{B} para o elemento de viga por

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} = \frac{d}{dx^2} \mathbf{N} = \mathbf{N}_{,xx} \quad (3.40)$$

Semelhantemente, a matriz \mathbf{E} da equação 3.16 pode ser escrita, para o elemento de viga, como

$$\mathbf{E} = EI \quad (3.41)$$

A matriz de rigidez do elemento de viga pode ser obtida, então, modificando a equação 3.28 para obter

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{N}_{,xx}^T EI \mathbf{N}_{,xx} dx \quad (3.42)$$

onde os elementos da matriz podem ser obtidos por

$$k_{ij}^e = EI \int_0^L N_{i,xx} N_{j,xx} dx \quad (3.43)$$

resultando na seguinte matriz de rigidez para o elemento de viga

$$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

3.2.2.2. ELEMENTO DE TRELIÇA PLANA

Um elemento de treliça plana pode ser descrito pelos dois deslocamentos descritos na Figura 3.2.

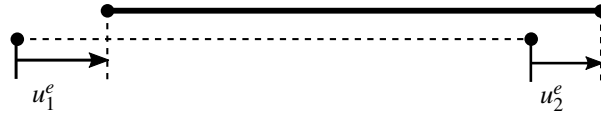


Figura 3.2. Deslocamentos nodais do elemento de treliça

O campo de deslocamentos para este elemento é dado, então, por

$$v = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

onde as funções de forma N_1 e N_2 são dadas por

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.46)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (3.47)$$

As deformações e as tensões são dadas, respectivamente, por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dv}{dx} = \mathbf{N}_{,x} \mathbf{u}^e \quad (3.48)$$

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon \quad (3.49)$$

O trabalho virtual realizado pelas forças internas é, então, dado por

$$\delta W_i = \int_{V^e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_{xx} dA^e dx = \delta W_i = \int_0^L \int_{A^e} \delta \mathbf{u}^e \mathbf{N}_{,x}^T E \mathbf{N}_{,x} dA^e dx$$

A matriz de rigidez do elemento será, então

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{N}_{,x}^T EA \mathbf{N}_{,x} dx \quad (3.50)$$

onde os elementos da matriz são dados por

$$k_{ij}^e = EA \int_0^L N_{i,x} N_{j,x} dx \quad (3.51)$$

de onde se obtém a matriz de rigidez para o elemento de treliça plana

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

3.2.2.3. ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

Observa-se que o elemento de pórtico plano será uma combinação dos elementos de viga e de treliça plana. Seus nós apresentam seis deslocamentos possíveis, que correspondem aos quatros deslocamentos do elemento de viga mais os dois deslocamentos do elemento de treliça plana. Dessa forma a matriz de rigidez deste elemento pode ser obtida de maneira similar à dos outros dois, sendo dada, finalmente, por

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

3.2.3. MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO

3.2.3.1. MATRIZ DE MASSA DISCRETA

As matrizes de massa discreta são obtidas a partir de um procedimento simplificado, onde considera-se massa concentrada nos nós do elemento.

Para um elemento de treliça plana, por exemplo, considera-se metade da massa da barra concentrada em cada extremidade, sendo a matriz de massa desse elemento dada por

$$\mathbf{M}^e = \frac{m' L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

onde m' é a massa por unidade de comprimento, dada por

$$m' = \rho A \quad (3.55)$$

Já para um elemento de viga é feita consideração semelhante e, desconsiderando a inércia à rotação, isto é, associando a matriz de massa apenas aos graus de liberdade de deslocamento vertical e não aos de rotação, obtém-se a seguinte matriz de massa para a viga

$$\mathbf{M}^e = \frac{m' L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

A matriz de massa para o elemento de pórtico plano é obtida combinando as matrizes

dos elementos de viga e de treliça plana, obtendo-se

$$\mathbf{M}^e = \frac{m' L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

3.2.3.2. MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE

A matriz de massa consistente é obtida através da formulação do método dos elementos finitos (SORIANO, 2014), de acordo com a equação 3.26, que para elemento de área de seção constante é escrita

$$\mathbf{M}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV^e = m' \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \quad (3.58)$$

A partir da equação 3.58 obtém-se a matriz de massa consistente para o elemento de treliça plana, dada por

$$\mathbf{M}^e = \frac{m' L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Para o elemento de viga, a matriz de massa consistente é

$$\mathbf{M}^e = \frac{m' L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Para o elemento de pórtico plano obtém-se, então

$$\mathbf{M}^e = \frac{m' L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

3.2.4. MATRIZ DE AMORTECIMENTO DO ELEMENTO

A partir da formulação desenvolvida na seção 3.2.1 obteve-se pela equação 3.28 uma maneira de obter a matriz de amortecimento. Entretanto, observa-se que não é prático de-

terminar a matriz de amortecimento dessa maneira pois os parâmetros de amortecimento dos materiais não são conhecidos e mesmo que fossem, a matriz de amortecimento resultante não consideraria a energia dissipada nas ligações dos elementos estruturais, fissuração do concreto ou pelos elementos não estruturais, etc. (CHOPRA, 1995).

Nesse sentido, segundo Soriano, 2014, "é prático especificar o amortecimento em termos de razões de amortecimento de modos naturais de vibração e, para facilitar a resolução do sistema global das equações de movimento, arbitra-se que esses modos sejam também ortogonais com respeito à matriz de amortecimento global".

Alguns desses conceitos, como o de modo natural de vibração, serão tratados nas seções seguintes. Por isso, um método conveniente para a construção da matriz de amortecimento, chamado método de *Rayleigh*, será também tratado mais à frente, na seção 3.3.3.

3.2.5. SISTEMA GLOBAL DE EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

3.2.5.1. TRANSFORMAÇÃO PARA O REFERENCIAL GLOBAL

Considerando que o nó de um elemento sofre um deslocamento \mathbf{u} em relação ao referencial local do elemento (plano xy), como mostrado na Figura 3.3, os componentes do deslocamento são u_x e u_y .

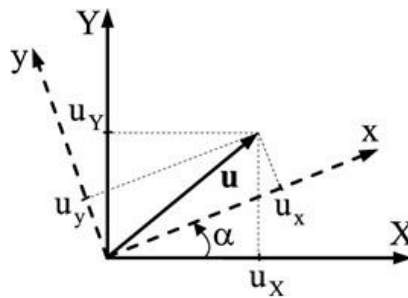


Figura 3.3. Decomposição vetorial no plano (SORIANO, 2014)

Para transformar esses deslocamentos para o referencial global XY utiliza-se a matriz de rotação \mathbf{R} dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_{xX} & \lambda_{xY} \\ \lambda_{yX} & \lambda_{yY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Para o elemento de pórtico plano considerado, que possui dois nós, utiliza-se a matriz de rotação do elemento, expandida adequadamente. A transformação dos deslocamentos nodais no referencial local para o referencial global escreve-se, então, como

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{u}_G^e \quad (3.63)$$

onde, para o caso do elemento de pórtico plano

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Assim, para transformar a equação de movimento do elemento no referencial local, dada em 3.25, multiplica-se ambos os lados pela transposta da matriz de rotação do elemento, obtendo-se

$$\mathbf{R}^{eT} (\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e) + \mathbf{R}^{eT} (\mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}^e) + \mathbf{R}^{eT} (\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e) = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f}^e$$

$$\mathbf{R}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{R}^e \ddot{\mathbf{u}}_G^e + \mathbf{R}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{u}}_G^e + \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^e \mathbf{u}_G^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f}^e \quad (3.65)$$

A equação de movimento do elemento pode ser escrita, então, como

$$\mathbf{M}_G^e \ddot{\mathbf{u}}_G^e + \mathbf{C}_G^e \dot{\mathbf{u}}_G^e + \mathbf{K}_G^e \mathbf{u}_G^e = \mathbf{f}_G^e \quad (3.66)$$

onde

$$\mathbf{M}_G^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{R}^e \quad (3.67)$$

$$\mathbf{C}_G^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{R}^e \quad (3.68)$$

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^e \quad (3.69)$$

$$\mathbf{f}_G^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f}^e \quad (3.70)$$

3.2.5.2. MONTAGEM DO SISTEMA GLOBAL DE EQUAÇÕES

Segundo Soriano, 2014, "com o Método dos Elementos Finitos podem ser feitas discretizações com um número qualquer de graus de liberdade, de maneira a obter o correspondente sistema de equações diferenciais de movimento. Contudo, esse sistema é usualmente construído a partir das matrizes de rigidez e de massa, assim como dos vetores de forças nodais, dos diversos elementos finitos da discretização, por acumulação adequada dos correspondentes coeficientes que dizem respeito a cada um dos deslocamentos nodais da malha de elementos, de maneira a obter as chamadas matrizes globais de rigidez e de massa, assim como obter o vetor global de forças nodais."

Desse modo, para a obtenção das matrizes globais inicialmente define-se a matriz de incidência, que fará a correspondência entre a numeração local do nó no elemento e a numeração global do nó na estrutura. O número de linhas da matriz de incidência será igual ao número de elementos que formam a estrutura e o número de colunas será igual ao número de nós dos

elementos, no caso dos elementos estudados, será 2.

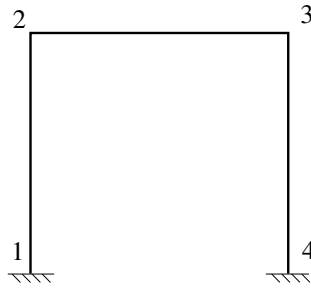


Figura 3.4. Pórtico exemplo

Para a estrutura exemplo da Figura 3.4, a matriz de incidência é dada por

$$\mathbf{Inc} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Na matriz, a linha m corresponde ao elemento m . O primeiro número da linha diz o número do nó na estrutura ao qual o nó 1 do elemento corresponde e na segunda coluna o mesmo para o nó 2 do elemento.

Cada nó do elemento tem g graus de liberdade, no caso dos elementos estudados, 3 deslocamentos por nó e, logo, 6 deslocamentos por elemento. Os deslocamentos de um elemento m , numerados de 1 a 3 para o nó 1 e de 4 a 6 para o nó 2, podem ser colocados na numeração global dos deslocamentos da estrutura de acordo com

$$\begin{aligned} u_1^e &= d_{(Int_{m,1}-1)g+1} \\ u_2^e &= d_{(Int_{m,1}-1)g+2} \\ u_3^e &= d_{(Int_{m,1}-1)g+3} \\ u_4^e &= d_{(Int_{m,2}-1)g+1} \\ u_5^e &= d_{(Int_{m,2}-1)g+2} \\ u_6^e &= d_{(Int_{m,2}-1)g+3} \end{aligned} \quad (3.72)$$

A numeração, para o elemento m , pode ser armazenada no vetor de correspondência de deslocamentos

$$\mathbf{q}^m = \left[(Int_{m,1} - 1)g + 1 \quad (Int_{m,1} - 1)g + 2 \quad \cdots \quad (Int_{m,2} - 1)g + 3 \right]^T \quad (3.73)$$

A montagem, por exemplo, da matriz de rigidez global não restringida, \mathbf{K}^* se dá por

$$\begin{aligned} m &= 1, \dots, n^\circ \text{ de elementos;} \\ i &= 1, \dots, 6; \\ j &= 1, \dots, 6; \\ k_{q_i^m q_j^m}^* &= k_{q_i^m q_j^m}^* + k_{ij,G}^m \end{aligned} \quad (3.74)$$

Fazendo o mesmo para as demais matrizes chega-se ao sistema global de equações não restringido, isto é, incluindo os deslocamentos restringidos pelos apoios, dado por

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{d}}^* + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{d}}^* + \mathbf{K}^* \mathbf{d}^* = \mathbf{f}^*(t) \quad (3.75)$$

Organizando os deslocamentos restringidos pelos apoios em um vetor \mathbf{d}_b , chega-se a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M}_{bb} \\ \mathbf{M}_{bb}^T & \mathbf{M}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} \\ \ddot{\mathbf{d}}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}_{bb} \\ \mathbf{C}_{bb}^T & \mathbf{C}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{d}}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{bb} \\ \mathbf{K}_{bb}^T & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}_b(t) \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

e considerando que os apoios são indeslocáveis, ou seja, $\mathbf{d} = 0, \dot{\mathbf{d}} = 0$ e $\ddot{\mathbf{d}} = 0$, chega-se à equação global de movimento restringida

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}(t) \quad (3.77)$$

3.3. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

3.3.1. FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

Considerando um sistema de múltiplos graus de liberdade submetido à vibração livre não amortecida, sua equação de movimento pode ser escrita como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.78)$$

Analogamente ao sistema com um grau de liberdade, assume-se que o movimento do sistema é do tipo harmônico simples, sendo a solução dada, então, por

$$\mathbf{d} = \hat{\boldsymbol{\phi}}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) \quad (3.79)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\phi}}_j$ é o j-ésimo modo natural de vibração, ω_j é a j-ésima frequência natural correspondente e ϕ_j é o ângulo de fase. Substituindo a solução na equação 3.79 chega-se a que a solução do sistema só é possível se a seguinte condição for atendida

$$\mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\phi}}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\hat{\boldsymbol{\phi}}_j \quad (3.80)$$

A equação 3.80 apresenta um problema de autovalor com n soluções não triviais $(\omega_j^2, \hat{\boldsymbol{\phi}}_j)$, onde ω_j^2 são os autovalores e $\hat{\boldsymbol{\phi}}_j$ são autovetores, ou seja, para um modelo com n graus de liberdade há n pares de frequências e modos naturais, que usualmente são ordenados na ordem crescente das frequências, sendo a primeira frequência chamada de frequência fundamental e o modo associado chamado de modo fundamental.

De acordo com Clough, 2003, as soluções para este tipo de problema podem ser avaliadas por métodos iterativos, como o método de *Stodola*. Considerando que a equação 3.80 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\phi}}_j &= \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}_j &= \omega_j^2 \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\phi}}_j\end{aligned}\quad (3.81)$$

onde \mathbf{D} é chamada matriz dinâmica.

O processo iterativo considera

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_1^{(1)} = \omega_1^2 \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\phi}}_1^{(0)} \quad (3.82)$$

A amplitude do vetor depende da frequência, que não é conhecida a priori, mas apenas o modo é necessário para o processo iterativo. Assim considera-se a forma

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}_1^{(1)} \equiv \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\phi}}_1^{(0)} \quad (3.83)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\phi}}_1^{(1)}$ é o autovetor não normalizado. Uma maneira vantajosa de normalizar o autovetor é fazê-lo em relação à matriz de massa

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}_i}{(\hat{\boldsymbol{\phi}}_i^T \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\phi}}_i)^{1/2}} \quad (3.84)$$

de maneira que a matriz modal estará ortonormalizada em relação à matriz de massa, o que pode ser expresso por

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \quad (3.85)$$

onde $\boldsymbol{\Phi}$ é a matriz modal, dada por

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_n \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Além disso a equação 3.80 pode ser reescrita como

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega} \quad (3.87)$$

o que leva a

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{\Omega} \quad (3.88)$$

onde $\mathbf{\Omega}$ é chamada matriz espectral, sendo dada por

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Uma aproximação do autovalor será obtida tomando a média dentre o intervalo

$$\left(\frac{\varphi_{j1}^{(0)}}{\bar{\varphi}_{j1}^{(1)}} \right)_{min} \leq \omega_1^2 \leq \left(\frac{\varphi_{j1}^{(0)}}{\bar{\varphi}_{j1}^{(1)}} \right)_{max} \quad (3.90)$$

O processo iterativo converge para o par de frequência e modo fundamentais quando o intervalo da equação 3.90 diminui para um valor especificado. Os modos superiores podem ser obtidos partindo de uma tentativa inicial que seja ortogonal aos modos obtidos anteriormente.

Por exemplo, para a análise do segundo modo pode-se obter uma tentativa inicial que seja ortogonal ao primeiro modo fazendo

$$\tilde{\varphi}_2^{(0)} = \varphi_2^{(0)} - \frac{\varphi_1 \varphi_1^T \mathbf{M}}{\varphi_1^T \mathbf{M} \varphi_1} \varphi_2^{(0)} \quad (3.91)$$

3.3.2. SUPERPOSIÇÃO MODAL

Segundo Soriano, 2014, "uma vez que um modelo de estrutura seja deformado segundo o seu j-ésimo modo natural de vibração e se retirem as restrições externas que imponham esse modo, o modelo passa a vibrar em movimento harmônico simples na j-ésima frequência natural e mantém esse modo ao longo do tempo. Assim, as frequências naturais e os modos naturais de vibração independem das forças externas, como funções apenas das distribuições de massa e de rigidez do modelo".

Os modos naturais são linearmente independentes e em número igual ao de graus de liberdade, formando, então uma base completa no espaço n-dimensional. Assim, qualquer configuração do sistema pode ser escrita como uma superposição dos modos de vibração, ou seja

$$\mathbf{d} = \sum_{j=1}^n \varphi_j Y_j = \Phi \mathbf{Y} \quad (3.92)$$

onde Y_j são chamadas coordenadas modais.

Substituindo na equação de movimento e multiplicando por Φ^T obtém-se

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{Y}} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{Y}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{Y} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (3.93)$$

Na seção 3.2.4 colocou-se que seria conveniente que a matriz de amortecimento do sistema fosse ortogonal aos modos naturais de vibração e escrita em termos de razões de amortecimento. A partir da equação 3.93 observa-se que a matriz de amortecimento deveria satisfazer o seguinte

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = 2 \begin{bmatrix} \omega_1 \xi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n \xi_n \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Considerando, então, as equações 3.85, 3.88 e 3.94, pode-se reescrever a equação 3.93 como um sistema de equações desacopladas da forma

$$\ddot{Y}_j + 2\omega_j \xi_j \dot{Y}_j + \omega_j^2 Y_j = \phi_j f_j \quad (3.95)$$

Assim, para cada grau de liberdade, a equação pode ser resolvida para Y de acordo com os desenvolvimentos feitos anteriormente para sistemas com um grau de liberdade, podendo obter-se os deslocamentos \mathbf{d} a partir da equação 3.92. Observa-se também que se aplicam os efeitos de ressonância ao modelo com vários graus de liberdade quando a frequência das forças externas se aproximam das frequências naturais.

Outra observação importante é que para a obtenção da resposta da estrutura de maneira precisa não é necessário fazer a superposição de todos os modos. Os modos de frequências mais elevadas têm pouca influência no comportamento e, além disso, os primeiros modos do modelo discreto são mais acurados em relação ao modelo contínuo original (SORIANO, 2014).

3.3.3. MATRIZ DE AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH

Um procedimento para construir a matriz de amortecimento na forma mostrada na equação 3.94 tem como base uma combinação linear das matrizes de massa e de amortecimento

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.96)$$

onde as α e β são constantes de proporcionalidade determinadas com a condição de que a matriz modal seja ortogonal à matriz de amortecimento (SORIANO, 2014).

Multiplicando por Φ^T e Φ chega-se a

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \alpha (\Phi^T \mathbf{M} \Phi) + \beta (\Phi^T \mathbf{K} \Phi) = \alpha + \beta \mathbf{\Omega} \quad (3.97)$$

Para um modo de vibração, a equação 3.97 se reescreve como

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}) \boldsymbol{\varphi}_j = \alpha + \beta \omega_j^2 \quad (3.98)$$

Comparando com 3.94 pode-se escrever

$$\alpha + \beta \omega_j^2 = 2 \omega_j \xi_j \quad (3.99)$$

Estabelecendo dois modos de referência com suas respectivas frequências ω_i e ω_j e considerando uma mesma razão de amortecimento ξ para ambos pode-se obter α e β por

$$\alpha = 2\xi \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad (3.100)$$

$$\beta = 2\xi \frac{1}{\omega_i + \omega_j} \quad (3.101)$$

Para os exemplos a serem estudados serão consideradas as duas primeira frequências naturais por se considerar que estas são mais determinantes no comportamento da estrutura.

3.3.4. RESOLUÇÃO POR INTEGRAÇÃO DIRETA

A superposição modal, discutida na seção 3.3.2, só é válida para modelos com comportamento linear e exige a utilização do amortecimento proporcional para que seja possível a obtenção das equações desacopladas. Tal método é indicado para a obtenção de respostas de longa duração para modelos com muitos graus de liberdade em que se possa obter a resposta de forma precisa utilizando reduzido número de primeiros modos naturais. Os métodos de integração direta por sua vez são mais gerais, fornecendo a resposta para modelos com comportamento linear ou não que utilizem matriz de amortecimento proporcional ou não, sendo eficazes principalmente na obtenção de respostas de curta duração (SORIANO, 2014).

Os métodos de integração direta já foram discutidos na seção 2.2.5.1 para o caso de osciladores simples, sendo que para os modelos com vários graus de liberdade pode ser feita uma extensão do caso de um grau de liberdade. Como optou-se por utilizar o método de *Newmark* na análise do exemplo, apenas este método será estendido, nesta seção, para o caso de múltiplos graus de liberdade.

Assim, assume-se aceleração linear média no intervalo, agora dada por

$$\ddot{\mathbf{d}}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}_i + \ddot{\mathbf{d}}_{i+1}) \quad (3.102)$$

Similar ao caso do oscilador simples podem ser obtidas a aceleração e a velocidade no

instante i em função dos valores do instante $i - 1$, dadas por

$$\ddot{\mathbf{d}}_i = -\ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2}(\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1} - \dot{\mathbf{d}}_{i-1}\Delta t) \quad (3.103)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_i = -\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t}(\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{i-1}) \quad (3.104)$$

Substituindo as equações 3.103 e 3.104 na equação de movimento do sistema para o instante i , dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_i + \mathbf{K}\mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i \quad (3.105)$$

chega-se a uma expressão do tipo

$$\mathbf{K}' \mathbf{d}_i = \mathbf{f}'_i \quad (3.106)$$

onde o termo \mathbf{K}' é agora chamado de pseudomatriz de rigidez e o termo \mathbf{f}'_i é chamado de pseudovetor das forças nodais. Ambos são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{C} \quad (3.107)$$

$$\mathbf{f}'_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{M}\left(\ddot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{d}_{i-1}\right) + \mathbf{C}\left(\dot{\mathbf{d}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t}\mathbf{d}_{i-1}\right) \quad (3.108)$$

O vetor deslocamento no instante i é então calculado por

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{K}'^{-1} \mathbf{f}'_i \quad (3.109)$$

O método, considerando uso de matriz de amortecimento de *Rayleigh*, é resumido no seguinte algoritmo:

1. Especificar as condições iniciais \mathbf{d}_0 , $\dot{\mathbf{d}}_0$, o intervalo de tempo Δt e os valores da ação dinâmica \mathbf{f}_i para cada instante i ;
2. Construir as matrizes globais \mathbf{M} e \mathbf{K} ;
3. Determinar as duas primeiras frequências naturais ω_1 e ω_2 para o cálculo dos coeficientes α e β do amortecimento de *Rayleigh*;
4. Calcular α e β pelas equações 3.100 e 3.101, a matriz de amortecimento \mathbf{C} pela equação 3.96 e a pseudomatriz de rigidez \mathbf{K}' de acordo com 3.107;
5. Determinar a aceleração inicial $\ddot{\mathbf{d}}_0$ considerando que

$$\text{Se } \mathbf{d}_0 = 0 \text{ e } \dot{\mathbf{d}}_0 = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_0 = 0;$$

$$\text{Se } \mathbf{d}_0 \neq 0 \text{ ou } \dot{\mathbf{d}}_0 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{K} \mathbf{d}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_0;$$

6. Para o instante t_i , com $i = 1, \dots, n$, sendo n o número total de discretizações do tempo, com passo Δt ;
- Calcular \mathbf{f}'_i pela equação 3.108;
 - Calcular \mathbf{d}_i pela equação 3.109;
 - Calcular $\dot{\mathbf{d}}_i$ pela equação 3.104;
 - Calcular $\ddot{\mathbf{d}}_i$ pela equação 3.103;
7. Repetir o passo 6 para $i = i + 1$, até o número total de instantes de discretização.

4. DISSIPADOR DE ENERGIA

4.1. INTRODUÇÃO AOS AMORTECEDORES ADAS

Os amortecedores ADAS (*Added Damping and Stiffness*) são dispositivos que fazem parte de um sistema passivo de controle de vibrações. Tais sistemas respondem de forma inercial à ação dinâmica, isto é, não necessitam de fontes externas de energia para o funcionamento. Sua função principal é melhorar as características de dissipação de energia da estrutura, portanto, melhorando a resposta da mesma a, por exemplo, ações de sismos. Mais especificamente, o ADAS faz parte dos dispositivos que dissipam energia através da deformação inelástica de um metal, oferecendo, assim, uma grande capacidade de amortecimento em relação ao seu volume.

O amortecedor ADAS é constituído por uma série de placas metálicas em formato de X, como mostrado na Figura 4.1 e deve ser instalado em um pórtico, com a base presa ao topo de um contraventamento do tipo *Chevron* e o topo preso à parte inferior da viga, como mostrado na Figura 4.2. O formato de X das placas proporciona uma distribuição uniforme de deformações sobre toda a altura do dispositivo, levando a um comportamento estável (PARI, 2014). Para uma compreensão mais aprofundada sobre as características e o comportamento do dispositivo ADAS, que não é o foco deste trabalho, recomenda-se como bibliografia Whittaker et. al, 1989.

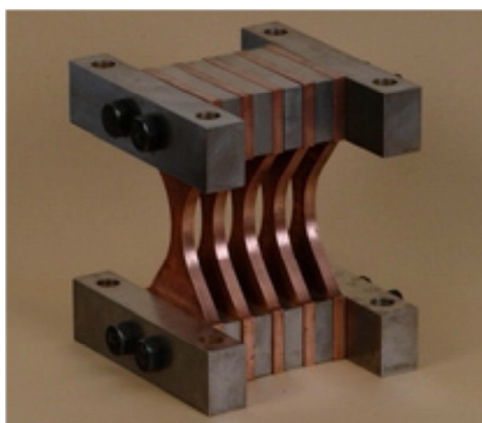


Figura 4.1. Amortecedor ADAS (SIRVE, 2016)

Evidentemente uma das principais características do amortecedor ADAS é seu comportamento inelástico, dissipando energia através da deformação plástica do metal que o constitui.

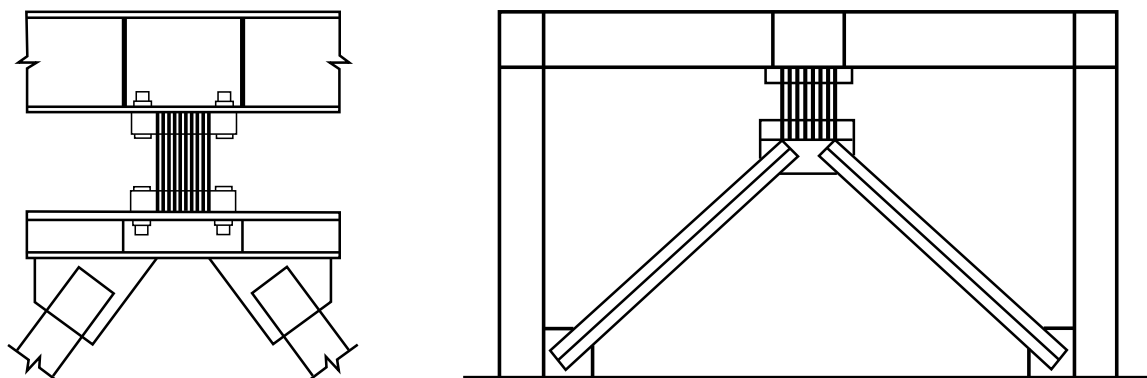


Figura 4.2. Esquema de montagem do amortecedor ADAS

Como o estudo deste tipo de comportamento foge ao escopo deste trabalho, o dissipador será aproximado considerando um comportamento linear elástico, com a dissipação de energia aproximada por um amortecedor viscoso.

4.2. MODELAGEM DO DISSIPADOR

O dissipador de energia será modelado como um elemento do tipo *link*, isto é, um elemento com dois nós, porém com comprimento igual a zero, assim, considerando a altura do dispositivo como desprezível em relação à estrutura. Também será desconsiderada a massa do dispositivo, pequena em relação à estrutura. Desta maneira o dissipador contribuirá no comportamento da estrutura com suas características de rigidez e amortecimento.

O elemento *link* com comportamento linear, tendo dois nós, têm, portanto, seis graus de liberdade. A rigidez do dissipador pode ser representada pelas três molas independentes mostradas na Figura 4.3, que agem em contraponto a deslocamentos horizontais, verticais e rotacionais, respectivamente.

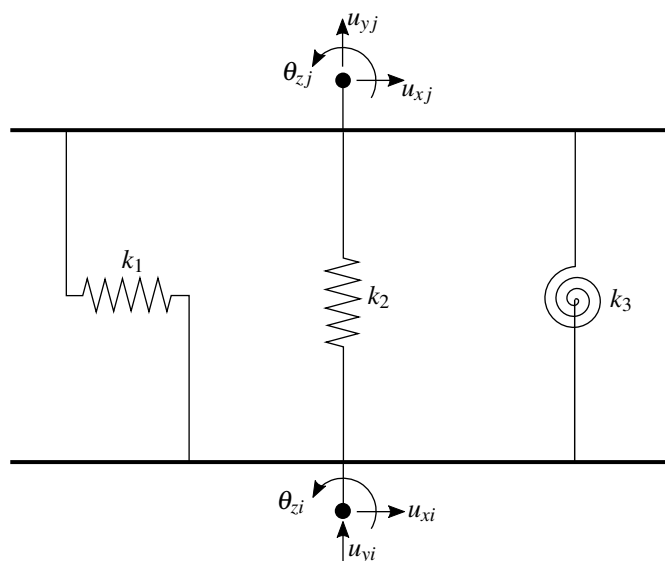


Figura 4.3. Conjunto de molas equivalentes do elemento *link*

As forças elásticas atuantes nas molas são dadas por

$$\begin{aligned} F_{e1} &= k_1(u_{xi} - u_{xj}) \\ F_{e2} &= k_2(u_{yi} - u_{yj}) \\ F_{e3} &= k_3(\theta_{zi} - \theta_{zj}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dessa maneira, a matriz de rigidez do dissipador pode ser obtida pela equação de equilíbrio

$$\mathbf{K}_d \mathbf{u}_d = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & -k_3 \\ -k_1 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_{zj} \\ u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_1(u_{xi} - u_{xj}) \\ -k_2(u_{yi} - u_{yj}) \\ -k_3(\theta_{zi} - \theta_{zj}) \\ k_1(u_{xi} - u_{xj}) \\ k_2(u_{yi} - u_{yj}) \\ k_3(\theta_{zi} - \theta_{zj}) \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

De maneira semelhante, o amortecimento do dissipador pode ser representado pelos três amortecedores equivalentes da Figura 4.4.

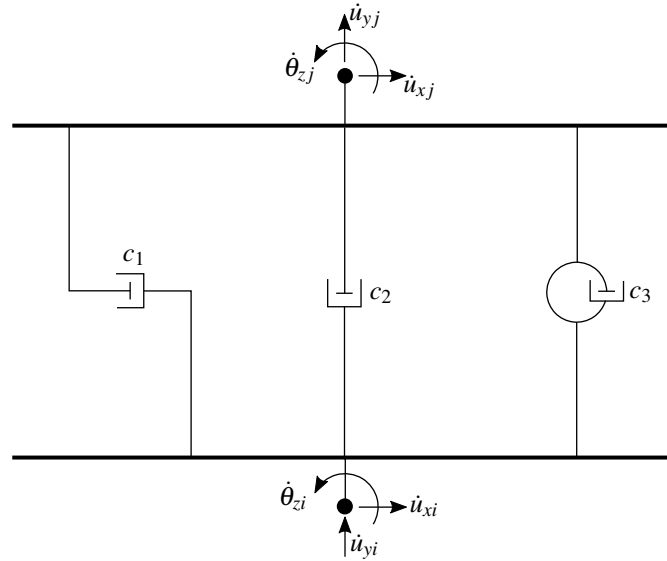


Figura 4.4. Conjunto de amortecedores equivalentes do elemento *link*

As forças viscosas nos amortecedores são

$$\begin{aligned} F_{v1} &= c_1(\dot{u}_{xi} - \dot{u}_{xj}) \\ F_{v2} &= c_2(\dot{u}_{yi} - \dot{u}_{yj}) \\ F_{v3} &= c_3(\dot{\theta}_{zi} - \dot{\theta}_{zj}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Assim, a matriz de amortecimento pode ser obtida a partir de

$$\mathbf{C}_d \dot{\mathbf{u}}_d = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & -c_3 \\ -c_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{xj} \\ \dot{u}_{yj} \\ \dot{\theta}_{zj} \\ \dot{u}_{xi} \\ \dot{u}_{yi} \\ \dot{\theta}_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -c_1(\dot{u}_{xi} - \dot{u}_{xj}) \\ -c_2(\dot{u}_{yi} - \dot{u}_{yj}) \\ -c_3(\dot{\theta}_{zi} - \dot{\theta}_{zj}) \\ c_1(\dot{u}_{xi} - \dot{u}_{xj}) \\ c_2(\dot{u}_{yi} - \dot{u}_{yj}) \\ c_3(\dot{\theta}_{zi} - \dot{\theta}_{zj}) \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Para o exemplo estudado, o comportamento do dissipador só será considerado em relação aos deslocamentos horizontais, sendo o dispositivo caracterizado, então, apenas pelas propriedades k_1 e c_1 por se considerar que seus efeitos são bem mais relevantes para deslocamentos horizontais do que para deslocamentos nos outros graus de liberdade e pela dificuldade em quantificar as constantes k_2 , k_3 , c_2 e c_3 para que representem um comportamento acurado.

5. EXCITAÇÃO SÍSMICA

5.1. INTRODUÇÃO

Uma importante ação dinâmica a que uma estrutura pode estar submetida e que acarreta a movimentação de sua base é a ação sísmica. As causas dos sismos são, principalmente, naturais, com estes ocorrendo devido à movimentação relativa entre placas tectônicas (sismos interplacas) ou devido à movimentação relativa de blocos geológicos em falhas (sismos intra-placas), sendo que a primeira causa gera os sismos mais frequentes e de maior intensidade. Os sismos podem ser classificados de maneira quantitativa por meio da escala *Richter*, uma classificação que está relacionada com a energia liberada pelo sismo. Podem também ser classificados pela escala de *Mercalli*, que descreve qualitativamente os efeitos do sismo (SORIANO, 2014).

O Brasil está localizado no centro da placa sul-americana, com suas fronteiras situadas a uma distância razoável de regiões de atividade sísmica mais intensa. Por isso a sismicidade no território brasileiro é reduzida, havendo pouca frequência de sismos de grande magnitude. A NBR 15421 de 2006, que trata do projeto de estruturas usuais submetidas a sismos divide o país em cinco zonas, atribuindo acelerações características de projeto como mostrado na Figura 5.1 (SORIANO, 2009; SORIANO, 2014).

Os sismos são em geral registrados por meio de acelerogramas, como o mostrado na Figura 5.2, que se refere à componente Norte-Sul do sismo *El Centro*, ocorrido em 18 de maio de 1940 na Califórnia, com duração de 30 s, magnitude 6,7 e aceleração de pico de 0,319g (SORIANO, 2014). Os acelerogramas são formados a partir do registro das acelerações do solo em intervalos definidos de tempo. Considerando aceleração linear entre tais intervalos pode ser obtida por integração os históricos de velocidades e deslocamentos dos sismos. Utilizando a formulação obtida na equação 5.10 observa-se que o histórico de deslocamentos relativos da estrutura pode, então, ser obtido através dos métodos discutidos na seção 2.2.5.

A partir do histórico de deslocamentos relativos pode-se identificar o valor máximo, chamado de deslocamento relativo espectral, dado por

$$S_d(T_n; \xi) = u_{max} \quad (5.1)$$

que em geral é o valor de interesse para critérios de projeto. Dessa forma pode-se também

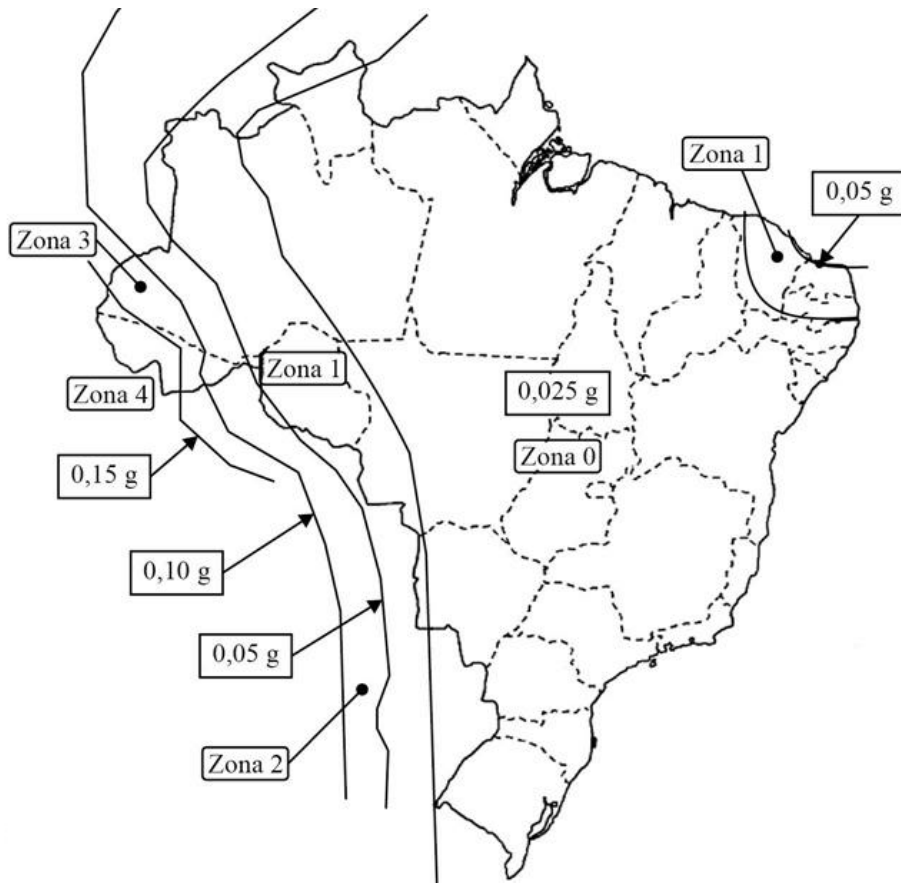


Figura 5.1. Mapeamento da aceleração sísmica horizontal característica de projeto (NBR 15421, 2006, apud. SORIANO, 2014)

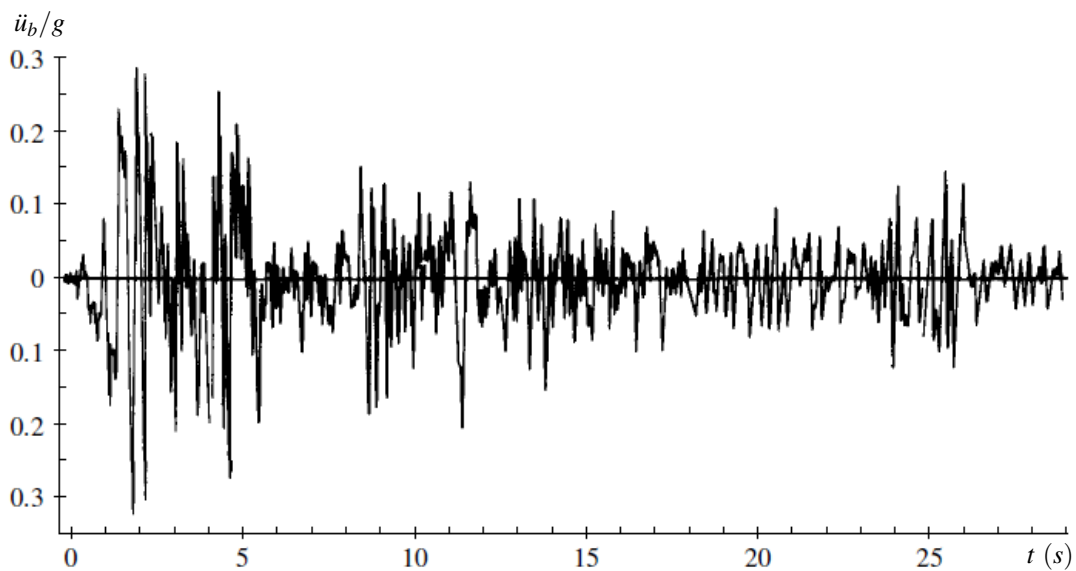


Figura 5.2. Acelerograma do sismo El Centro de 1940, componente Norte-Sul (Adaptado de CLOUGH; PENZIEN, 2003)

construir um digrama que mostre a variação dos valores máximos em função do período natural da estrutura. Tal diagrama é chamado de espectro de resposta de deslocamento. Um exemplo de espectro de resposta obtido para o sismo da Figura 5.2 é mostrado na Figura 5.3.

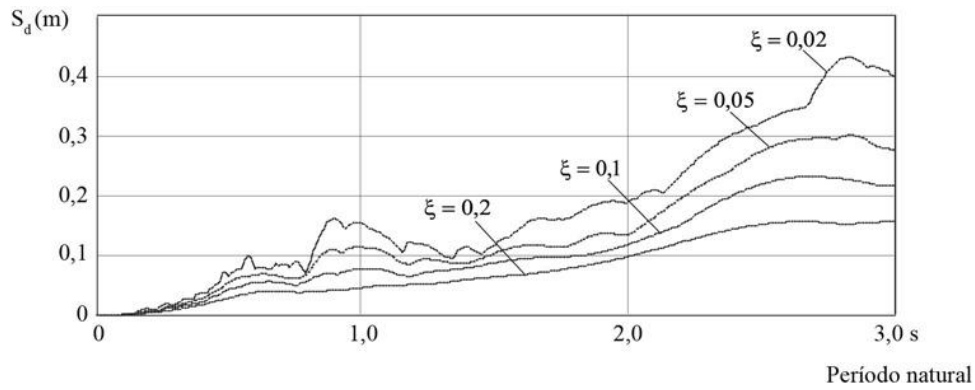


Figura 5.3. Espectro de resposta de deslocamento relativo para o sismo El Centro (SORIANO, 2014)

Da mesma maneira poderiam ser definidos os espectros de resposta de velocidade e acelerações. Porém uma boa aproximação desses espectros, que têm a vantagem de serem simples de se obter são os espectros de pseudovelocidades e pseudoacelerações, onde as pseudovelocidades relativas espectrais são dadas por

$$S_v = \omega_n S_d \quad (5.2)$$

e as pseudoacelerações relativas espectrais por

$$S_a = \omega_n^2 S_d \quad (5.3)$$

No projeto de uma estrutura, então, podem ser adotados diferentes critérios para avaliação do comportamento da mesma sob a ação de sismos.

Pode ser feita uma análise dinâmica determinística, aplicando à estrutura um sismo conhecido e obtendo o histórico de deslocamentos, em caso de um grau de liberdade, resolvendo a equação 5.10, sendo esta uma análise complexa, principalmente quando se consideram estruturas com muitos graus de liberdade, ou podem ser utilizados critérios simplificados, baseados em espectros de resposta.

Como os espectros de resposta obtidos a partir da análise de um sismo já ocorrido apresentam variações bruscas e não incorporam o caráter aleatório de sismos futuros, características do solo ou importância da edificação, os códigos normativos usualmente propõem a utilização de espectros de resposta de projeto expressos por trechos lineares e curvas suavizadas, que tentam incorporar a sísmica local e fatores de correção de acordo com o tipo de solo e de utilização da estrutura. Na NBR 15421 de 2006, por exemplo, a construção dos espectros de resposta de pseudo-aceleração de projeto é feita com o cálculo de fatores que dependem da aceleração sísmica horizontal característica da região, mostrada na Figura 5.1 (SORIANO, 2014).

Um critério ainda mais simples seria a aplicação de uma força horizontal na base da

estrutura, equivalente à parcela de força elástica, dada, a partir dos espectros de resposta, por

$$f_b = k S_d \quad (5.4)$$

ou

$$\begin{aligned} f_b &= k S_a / \omega_n^2 \\ f_b &= m S_a \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.2. OSCILADOR SIMPLES SUBMETIDO À MOVIMENTAÇÃO DA BASE

Considera-se um sistema similar ao da Figura 2.1a, porém acrescentando o amortecimento e considerando que, ao invés de estar submetido a uma força dinâmica, o sistema esteja submetido a uma movimentação de sua base, obtendo o sistema mostrado na Figura 5.4. As forças de inércia desenvolvidas na estrutura serão função do deslocamento total da mesma em relação a um referencial fixo. Enquanto isso as forças elásticas e de amortecimento serão função apenas do deslocamento relativo entre a massa e a base (SORIANO, 2009). Nesse caso a equação de equilíbrio dinâmico se escreve como

$$m \ddot{u}_t + c \dot{u} + k u = 0 \quad (5.6)$$

onde u_t representa o deslocamento total da estrutura em relação a um referencial fixo, ou seja, a soma do deslocamento da estrutura relativo à base (u) mais o deslocamento da base (u_b), como mostra a Figura 2.8, sendo dado por

$$u_t = u + u_b \quad (5.7)$$

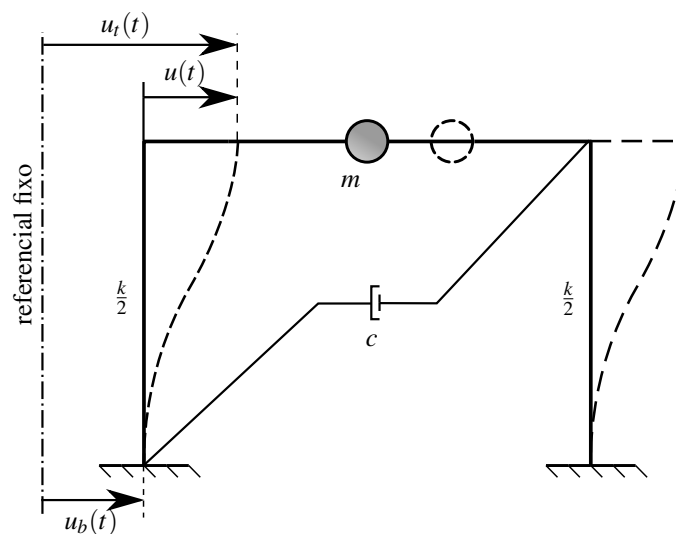


Figura 5.4. Sistema submetido a movimentação da base (Adaptado de CLOUGH & PENZIEN, 2003)

Diferenciando a equação 5.7 duas vezes e considerando que os deslocamentos u e u_b são independentes obtém-se que

$$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_b \quad (5.8)$$

Substituindo a equação 5.8 em 5.6 obtém-se

$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_b) + c \dot{u} + k u = 0 \quad (5.9)$$

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{u}_b \quad (5.10)$$

onde observa-se que, comparando com a equação 2.8, a ação do movimento da base pode ser introduzida como uma força externa equivalente dada por $f = -m \ddot{u}_b$ e a equação terá soluções como as apresentadas nas seções 2.2.3 , 2.2.4 e 2.2.5. Tal formulação é boa para a análise de estruturas submetidas a sismos já que os mesmos são usualmente medidos em termos de acelerações (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

Em seguida serão tratadas as respostas do sistema submetido ao movimento harmônico da base e a excitações sísmicas.

5.2.1. MOVIMENTO HARMÔNICO DA BASE

Considerando, inicialmente, que a movimentação da base é harmônica, sendo dada por

$$u_b = u_{so} \cos(\omega t) \quad (5.11)$$

a força equivalente de excitação é dada por

$$f = -m \ddot{u}_b = u_{so} \omega^2 \cos(\omega t) \quad (5.12)$$

Nesse caso, de acordo com as equações 2.32, 2.35 e 2.36, a solução em regime permanente da equação 5.10 é dada por

$$u(t) = \frac{u_{so} r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (5.13)$$

Nesse caso, define-se o fator de amplificação do deslocamento relativo, dado por

$$A_d^{rel} = \frac{u_{max}}{u_{so}} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (5.14)$$

cujo gráfico em função de r para diferentes ξ é mostrado na Figura 5.5, onde percebe-se que para frequências de excitação pequenas, bem menores que a frequência natural, o deslocamento relativo à base é pequeno, não sendo desenvolvidas grande forças de inércia. Quando r está

próximo de 1 o deslocamento relativo é elevado. Quando a frequência de excitação é bem maior que a frequência natural, o deslocamento relativo tende a se igualar ao deslocamento da base, havendo o desenvolvimento de grandes forças de inércia (SORIANO, 2009).

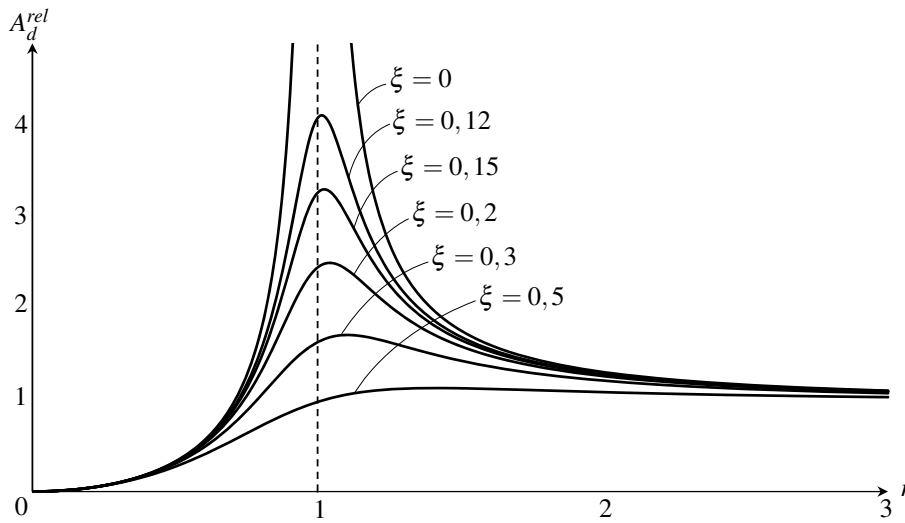


Figura 5.5. Amplificação dinâmica do deslocamento relativo em função da razão de frequências, para várias razões de amortecimento (Adaptado de SORIANO, 2009)

A equação do sistema em termos do deslocamento total é dada por

$$m \ddot{u}_t + c(\dot{u}_t - \dot{u}_b) + k(u_t - u_b) = 0$$

$$m \ddot{u}_t + k \dot{u}_t + c u_t = k u_{so} \cos(\omega t) - c u_{so} \omega \cos(\omega t) \quad (5.15)$$

A equação 5.15 tem como solução

$$u_t(t) = \frac{u_{so} \sqrt{1 + (2 r \xi^2)}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 r \xi)^2}} \cos(\omega t + \beta - \phi) \quad (5.16)$$

onde

$$\beta = \arctg(2 r \xi) \quad (5.17)$$

O fator de amplificação do deslocamento total é dado, então, por

$$A_d^{tot} = \frac{u_{tmax}}{u_{so}} = \frac{\sqrt{1 + (2 r \xi^2)}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 r \xi)^2}} \quad (5.18)$$

com gráfico mostrado na Figura 5.6. Percebe-se que para frequências de excitação pequenas, r próximo de 0, o deslocamento total da estrutura é praticamente igual ao deslocamento da base. Quando a frequência de excitação é bem maior que a frequência natural, o deslocamento total tende a ser zero, onde o deslocamento relativo da estrutura é igual e contrário ao deslocamento da base (SORIANO, 2009).

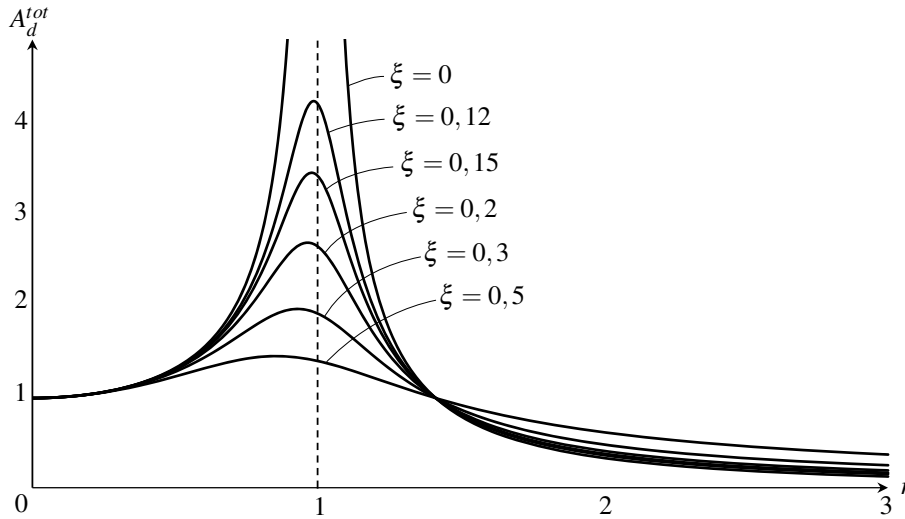


Figura 5.6. Amplificação dinâmica do deslocamento total em função da razão de frequências, para várias razões de amortecimento (Adaptado de SORIANO, 2009)

5.3. MODELO COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE SOB AÇÃO SÍSMICA

Considerando uma estrutura submetida a uma excitação sísmica, onde a base se move como um corpo rígido, os nós restringidos, isto é, os nós junto à base sofrerão um deslocamento igual ao do solo. Os deslocamentos, velocidades e acelerações desses nós podem ser expressos por

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{br} &= \mathbf{l}_b u_b \\ \dot{\mathbf{d}}_{br} &= \mathbf{l}_b \dot{u}_b \\ \ddot{\mathbf{d}}_{br} &= \mathbf{l}_b \ddot{u}_b \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde \mathbf{l}_b é um vetor que garante que os deslocamentos horizontais do solo afetem apenas os graus de liberdade horizontais dos nós restringidos, sendo dado por

$$\mathbf{l}_b^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

De maneira similar ao oscilador simples, os deslocamentos dos nós livres serão a soma entre um deslocamento devido ao movimento de corpo rígido (\mathbf{d}_{ar}) e um deslocamento devido à ação sísmica (\mathbf{d}_a). A equação de movimento pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ab} \\ \mathbf{M}_{ba} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_a + \ddot{\mathbf{d}}_{ar} \\ \mathbf{l}_b \ddot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{aa} & \mathbf{C}_{ab} \\ \mathbf{C}_{ba} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_a + \dot{\mathbf{d}}_{ar} \\ \mathbf{l}_b \dot{u}_b \end{Bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_a + \mathbf{d}_{ar} \\ \mathbf{l}_b u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Desenvolvendo a primeira linha chega-se a

$$\mathbf{M}_{aa} \ddot{\mathbf{d}}_a + \mathbf{M}_{aa} \ddot{\mathbf{d}}_{ar} + \mathbf{M}_{ab} \mathbf{l}_b \ddot{u}_b + \mathbf{C}_{aa} \dot{\mathbf{d}}_a + \mathbf{C}_{aa} \dot{\mathbf{d}}_{ar} + \mathbf{C}_{ab} \mathbf{l}_b \dot{u}_b + \mathbf{K}_{aa} \mathbf{d}_a + \mathbf{K}_{aa} \mathbf{d}_{ar} + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{l}_b u_b = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

Como nos nós livres não há aplicação direta de aceleração e velocidade do solo o terceiro e o sexto termos serão iguais a zero

$$\mathbf{M}_{ab} \mathbf{l}_b \ddot{u}_b = \mathbf{C}_{ab} \mathbf{l}_b \dot{u}_b = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

Como não há forças externas diretamente aplicadas nos nós livres os dois últimos termos também serão iguais a zero

$$\mathbf{K}_{aa} \mathbf{d}_{ar} + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{l}_b u_b = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{d}_{ar} = \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab} \mathbf{l}_b u_b \quad (5.25)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{ar} = \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab} \mathbf{l}_b \ddot{u}_b \quad (5.26)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{ar} = \mathbf{l}_a \ddot{u}_b \quad (5.27)$$

onde o vetor \mathbf{l}_a é dado por

$$\mathbf{l}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1} \mathbf{K}_{ab} \mathbf{l}_b \quad (5.28)$$

Considerando ainda os efeitos viscosos desprezíveis em relação aos efeitos inerciais da ação sísmica

$$\mathbf{C}_{aa} \mathbf{l}_a \dot{u}_b \ll \mathbf{M}_{aa} \mathbf{l}_a \ddot{u}_b \quad (5.29)$$

chega-se à equação de movimento para sistema submetido à movimentação da base.

$$\mathbf{M}_{aa} \ddot{\mathbf{d}}_a + \mathbf{C}_{aa} \dot{\mathbf{d}}_a + \mathbf{K}_{aa} \mathbf{d}_a = -\mathbf{M}_{aa} \mathbf{l}_a \ddot{u}_b \quad (5.30)$$

6. ANÁLISE DE EXEMPLO DE PÓRTICO PLANO SOB EXCITAÇÃO SÍSMICA

6.1. INTRODUÇÃO

O exemplo a ser analisado trata-se do pórtico plano metálico mostrado na figura 6.1, cujas características são baseadas em exemplo de Paz, 1997, por isso o uso de unidades do sistema imperial. O exemplo possui as seguintes características:

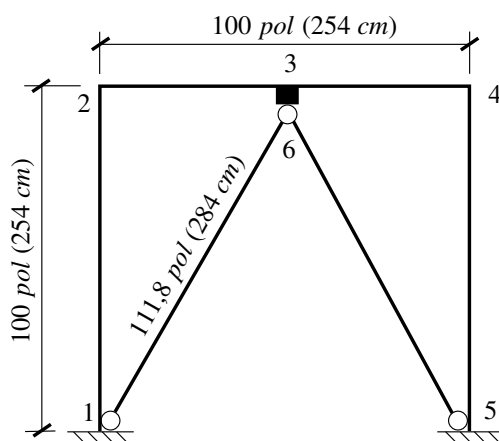


Figura 6.1. Pórtico contraventado com dissipador

Módulo de elasticidade: $E = 10^7 \text{ lb/pol}^2$ (69,0 GPa);

Área das colunas e viga: $A = 6 \text{ pol}^2$ (38,71 cm²);

Área das barras de contraventamento: $A_b = 0,8 \text{ pol}^2$ (5,16 cm²);

Momento de inércia das colunas e viga: $I = 100 \text{ pol}^4$ (4162,31 cm⁴);

Momento de inércia dos contraventamentos: $I_b = 18 \text{ pol}^4$ (749,21 cm⁴);

Densidade de massa: $\rho = 0,7 \text{ lb s pol}^{-4}$ (7483,8 kg/m³);

Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,3$;

Razão de amortecimento: $\xi = 0,01$;

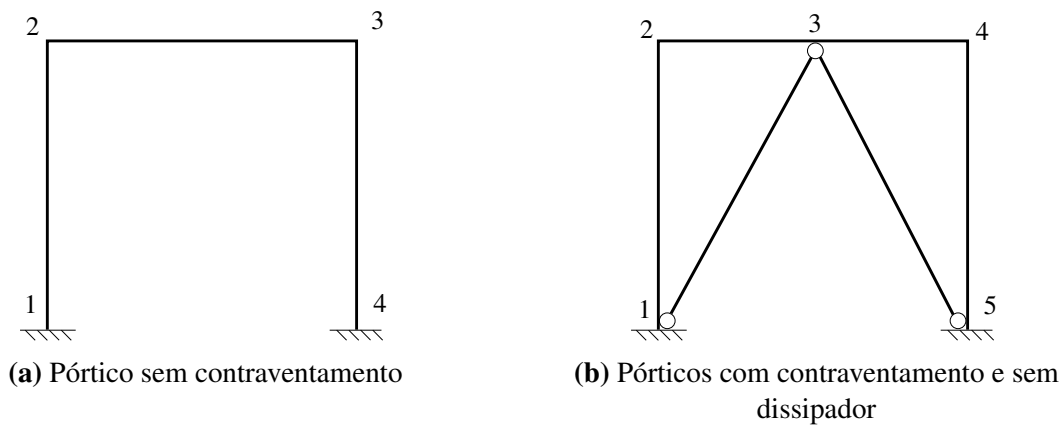


Figura 6.2. Casos de análise do pórtico

O pórtico da figura 6.1 possui um dissipador entre o topo do contraventamento e a viga. Considera-se que o dissipador é efetivo para deslocamentos horizontais que tendem a cisalhá-lo. Portanto considera-se rigidez e constante de amortecimento para esse dissipador apenas, o que corresponderia, respectivamente a k_1 e c_1 nas figuras 4.3 e 4.4. Os valores dessas constantes utilizados para este amortecedor são $k_1 = 1000 \text{ lb/pol}$ ($11,3 \text{ kN/cm}$) e $c_1 = 1500 \text{ lb s/pol}$ ($262,8 \text{ kN s/m}$).

Considerando que este trabalho tem propósitos acadêmicos, tais valores característicos do amortecedor foram tomados de maneira a aproximar o comportamento de amortecedor com comportamento não linear, tais como os analisados por Pari, 2007, mas também de maneira a evidenciar a atuação deste em relação aos outros casos.

Serão analisadas três situações com esse pórtico. Na primeira será considerado o caso do pórtico sem o dissipador e sem o contraventamento. Nesse caso, o modelo discretizado terá 4 nós e três elementos de pórtico plano, como mostrado na figura 6.2a. No segundo caso será considerado o pórtico sem o dissipador e com os contraventamentos. Nesse caso o modelo terá cinco nós e 6 elementos, como mostra a figura 6.2b, sendo que duas barras são elementos de treliça plana e as demais são elementos de pórtico plano.

O terceiro caso é o da própria figura 6.1, considerando a presença tanto do contraventamento quanto do dissipador. Nesse caso o modelo têm 6 nós e 7 elementos. Nesse caso o sétimo elemento, que representa o dissipador, é um elemento *link*, tendo, portanto, comprimento igual a zero.

O carregamento ao qual os pórticos estarão submetidos é uma excitação sísmica na base, dada pelo componente Norte-Sul do acelerograma do sismo *El Centro* de 1940, que foi mostrado na figura 5.2.

Serão comparadas, inicialmente, as componentes horizontais de deslocamento, velocidade e aceleração do nó superior esquerdo de cada pórtico, onde se procura uma visualização de como o contraventamento e o dissipador influenciam na resposta ao carregamento sísmico. Para o caso do pórtico com o dissipador também serão comparadas as componentes horizontais

de deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós 3 e 6, que são os que formam o elemento *link* do dissipador. Serão também mostradas como as forças elástica e viscosa se desenvolvem no dissipador ao longo do tempo do carregamento.

6.2. O PROGRAMA *FEA_FRAMES*

O *software* a ser utilizado para a avaliação numérica das respostas ao carregamento sísmico é o *fea_frames* (*finite element analysis of frames*), que foi desenvolvido na Universidade de Brasília pelo professor William T. M. Silva como uma alternativa acadêmica a programas comerciais. Pari, 2014, em sua dissertação comparou seus resultados com os de um *software* comercial conhecido, verificando sua acurácia.

6.2.1. ENTRADA DE DADOS

A entrada de dados no programa se dá através de um arquivo de texto contendo os dados do modelo a ser analisado, bem como os parâmetros da análise. O nome do arquivo é informado ao programa que então o lê e cria novos arquivos de texto com os dados calculados.

Para cada pórtico analisado é necessário fazer duas análises, uma análise modal e uma análise dinâmica. Na análise modal são definidos os primeiros modos naturais e as correspondentes frequências. As duas primeiras frequências são utilizadas para calcular os parâmetros α e β do amortecimento de *Rayleigh*.

Nos dados de configuração da análise modal, optou-se por utilizar a matriz de massa consistente, definiu-se que o programa deveria calcular os quatro primeiros pares de autovalores e autovetores e que os modos seriam normalizados. A tolerância para convergência foi colocada em 10^{-5} e o número máximo de iterações em 250.

Na configuração da análise dinâmica também se optou por utilizar matriz de massa consistente. o algoritmo de integração escolhido foi o de *Newmark* com aceleração constante. O tamanho do passo de tempo foi colocado em 0,02 s e foram definidos 1500 passos para chegar aos 30 s de duração da excitação sísmica. Devem ser informados também os coeficientes de *Rayleigh* obtidos da análise modal.

Os demais parâmetros do modelo são inseridos nas linhas seguintes. Primeiro são definidos os nós em um arranjo de quatro colunas, com o número do nó na primeira coluna e as coordenadas x , y e z nas demais. Em seguida são definidos os elementos em um arranjo de 5 colunas, com o número do elemento na primeira, número do nó inicial, do nó final, número correspondente ao material e número correspondente ao tipo de elemento (treliça, viga, *link*, etc.). Em seguida colocam-se as informações das barras, onde se informam as propriedades dos materiais e por fim são definidos os nós restringidos, com o número do nó seguido da restrição em x , y ou rotação em torno de z , sendo que 1 significa restringido e 0 não restringido.

6.3. RESULTADOS

Inicialmente os pórticos, nos três casos, foram submetidos a uma análise modal, para a determinação das duas primeiras frequências naturais. Essas foram, então utilizadas para o cálculo dos parâmetros α e β do amortecimento de *Rayleigh*. Os valores obtidos são mostrados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1. Valores das duas primeiras frequências naturais angulares e parâmetros de amortecimento de *Rayleigh*

Caso	ω_1 (rad/s)	ω_2 (rad/s)	α	β
1º caso	4,933	21,98	$0,80850 \cdot 10^{-1}$	$0,74302 \cdot 10^{-3}$
2º caso	7,878	26,38	0,12132	$0,58385 \cdot 10^{-3}$
3º caso	5,073	19,41	$0,80429 \cdot 10^{-1}$	$0,81701 \cdot 10^{-3}$

Na primeira análise foi avaliada a resposta à excitação sísmica do nó superior esquerdo de cada pórtico, o que corresponde ao nó 3 do pórtico sem contraventamentos e ao nó 4 nos pórticos contraventados. A Figura 6.3 mostra o comparativo entre os deslocamentos horizontais ao longo do tempo para os nós citados:

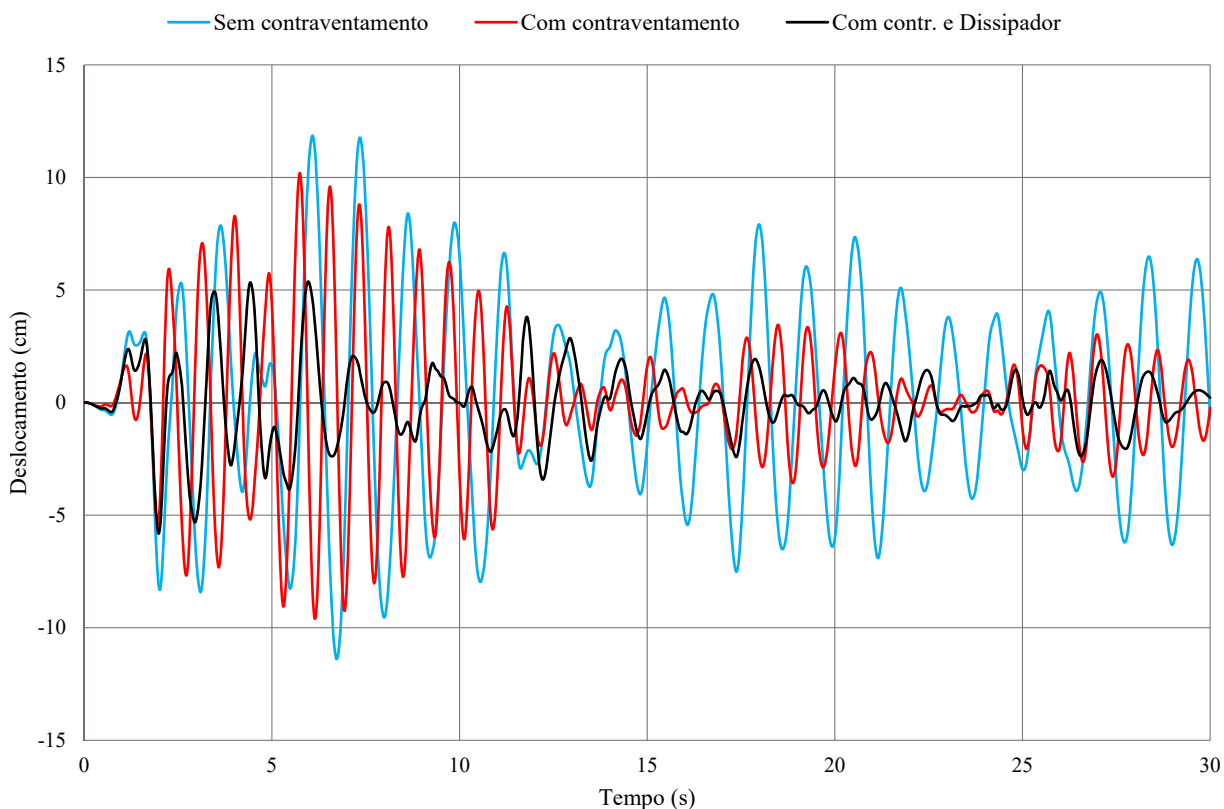


Figura 6.3. Comparação do deslocamento dos nós superiores esquerdos

Observa-se que os maiores deslocamentos ocorreram para o pórtico sem o contraventamento. A adição do contraventamento representou uma pequena redução no deslocamento máximo para este caso. Uma mudança maior ocorre com a adição do dissipador. Não só os deslocamentos são menores, mas também a forma como estes se desenvolvem muda. Enquanto os pórticos sem dissipador oscilam de forma mais harmônica, o pórtico com o dissipador oscila de maneira irregular, com picos grandes seguidos de vales pequenos e vice-versa, o que evidencia o trabalho de dissipação da energia.

As Figuras 6.4 e 6.5 mostram, respectivamente, as comparações das velocidades e das acelerações para a mesma situação de antes. Destaca-se como o pórtico com contraventamento e sem dissipador apresenta velocidades e acelerações bem mais altas no início, o que significa que está oscilando numa frequência maior no começo. Enquanto a diferença de comportamento entre este pórtico e o sem dissipador é mais influenciada pelo conteúdo de frequências do sismo e pelas características do próprio pórtico, observa-se que a diferença no comportamento do pórtico com o dissipador em relação aos outros se dá muito mais pela presença do dispositivo e a influência da dissipação de energia.

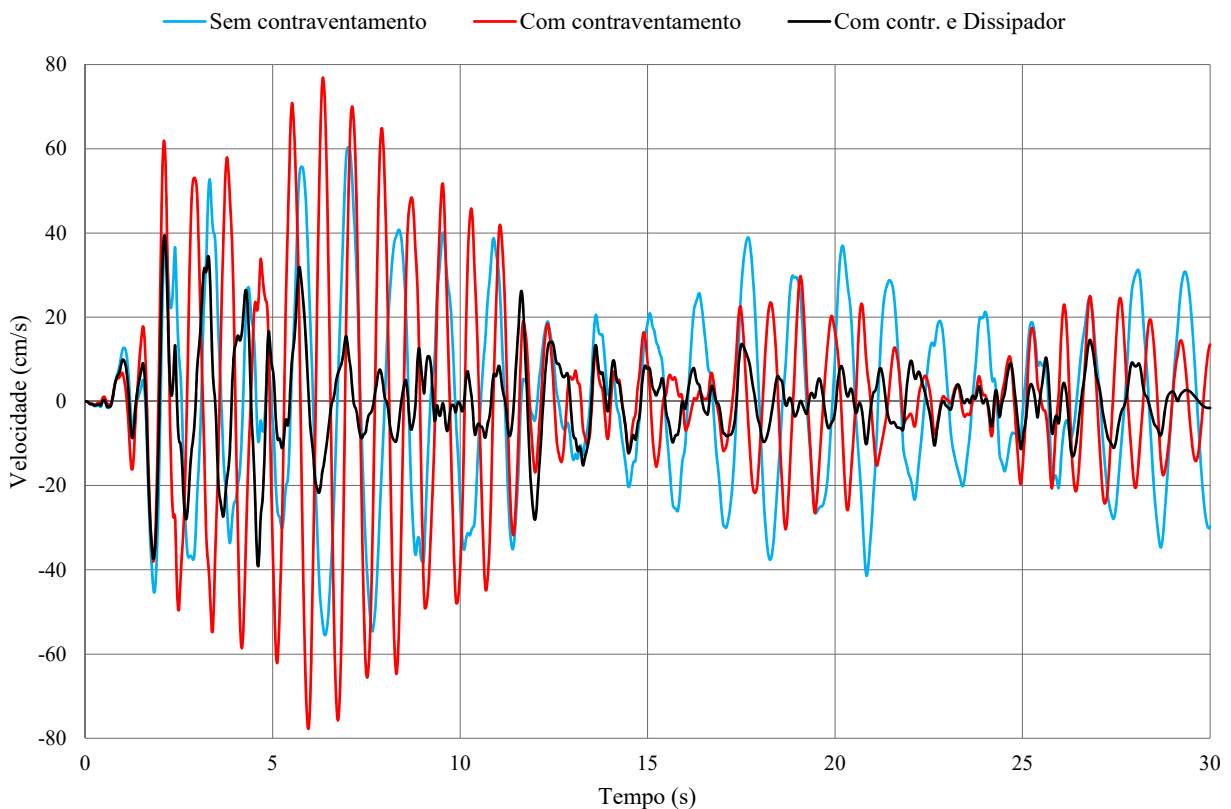


Figura 6.4. Comparação da velocidade dos nós superiores esquerdos

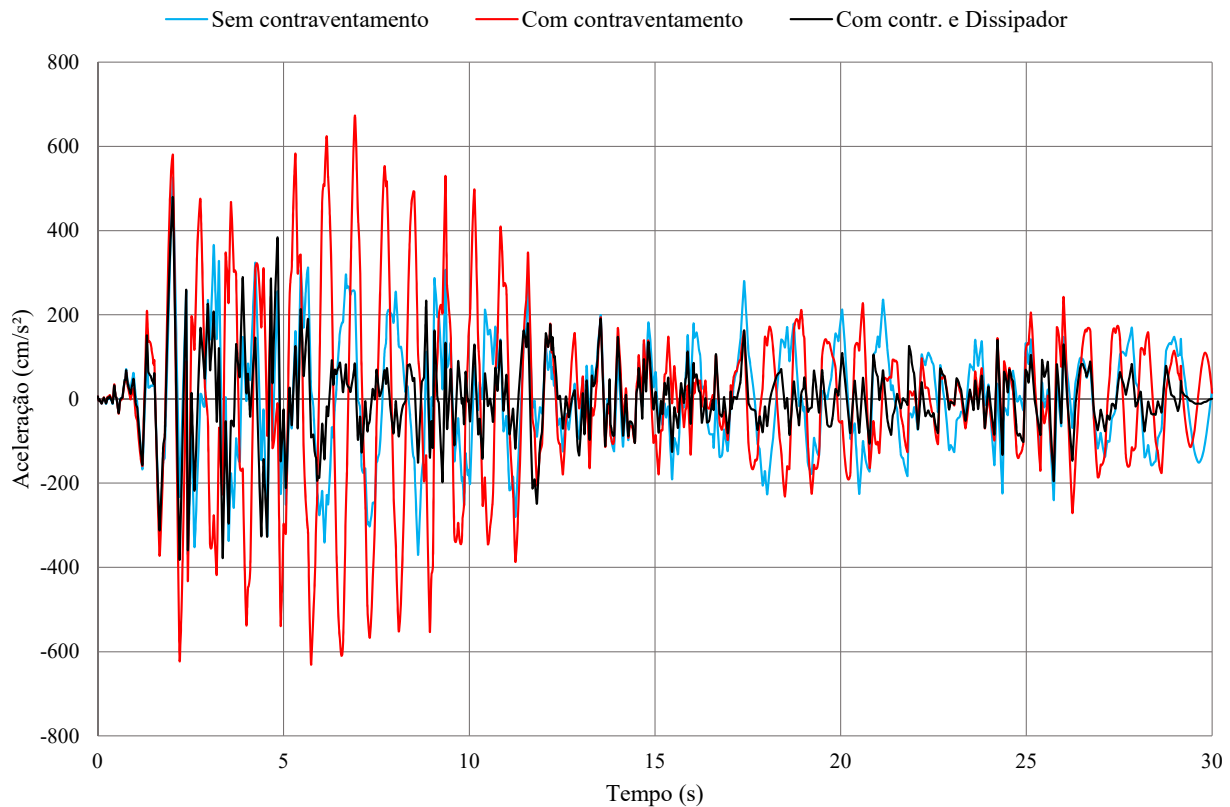


Figura 6.5. Comparação da aceleração dos nós superiores esquerdos

Uma segunda análise foi feita somente para o pórtico com o dissipador. Foram analisados os deslocamentos horizontais dos nós que compõem o elemento do dissipador, no caso o nó 3 e o nó 6, como mostrado na Figura 6.6. Observa-se que o nó 3 que se localiza na viga têm um deslocamento similar ao do nó 4 analisado anteriormente. Já o nó 6 que está sob o dissipador tem deslocamentos bem menores, evidenciando a diferença de comportamento entre este pórtico e o pórtico sem dissipador, onde nesse ponto há apenas um nó, com o conjunto movendo-se como um todo.

Foram avaliadas também as velocidades e acelerações nesses nós, com os históricos mostrados nas Figuras 6.7 e 6.8. Em conjunto também foram avaliadas as forças elásticas e viscosas desenvolvidas no dissipador, mostradas nas Figuras 6.9 e 6.11, respectivamente. Observa-se como os pontos onde há um maior deslocamento relativo são onde se desenvolvem as maiores forças elásticas e os pontos onde há maior diferença de velocidade são aqueles em que há maior desenvolvimento de forças viscosas, como previsto. Os trechos onde se desenvolvem forças viscosas maiores também estão relacionados a uma maior dissipação de energia.

As Figuras 6.10 e 6.12 mostram, respectivamente a força elástica no dissipador em relação ao seu deslocamento e a força viscosa em relação à sua velocidade, confirmando, portanto o comportamento linear do dispositivo.

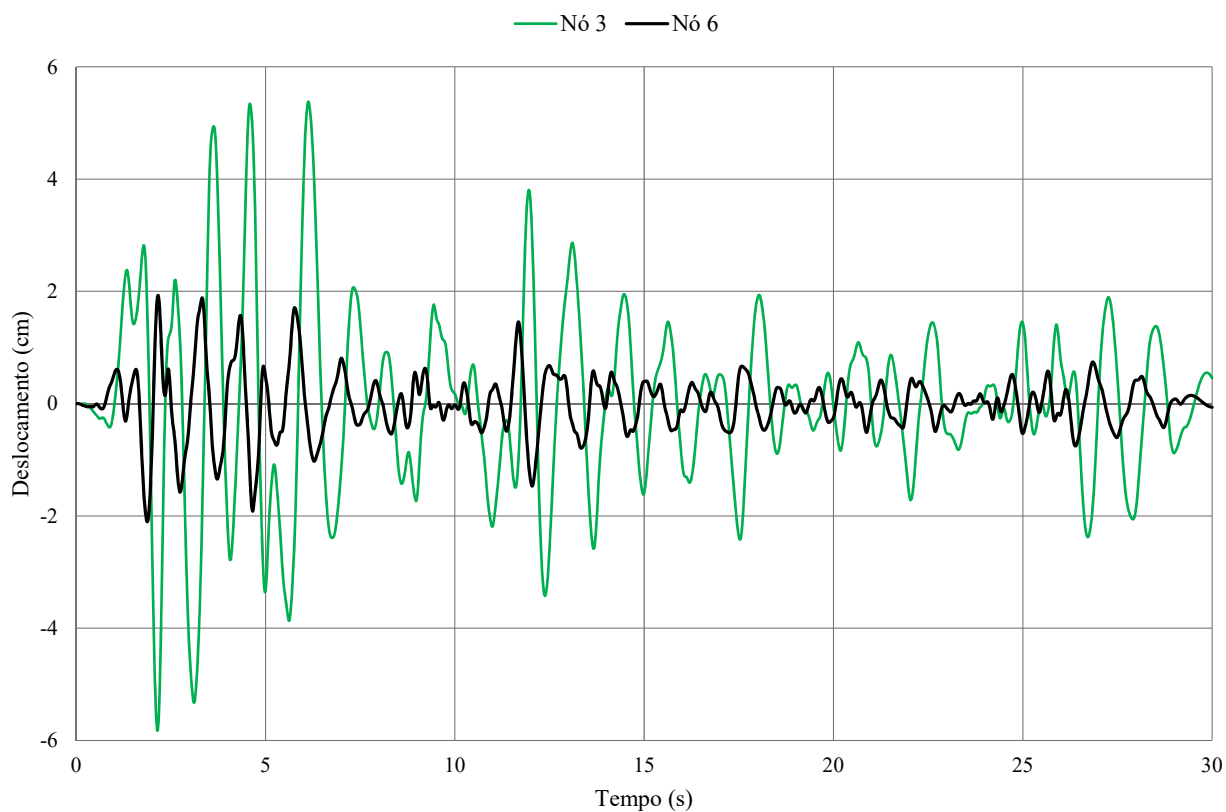


Figura 6.6. Comparação dos deslocamentos dos nós do dissipador

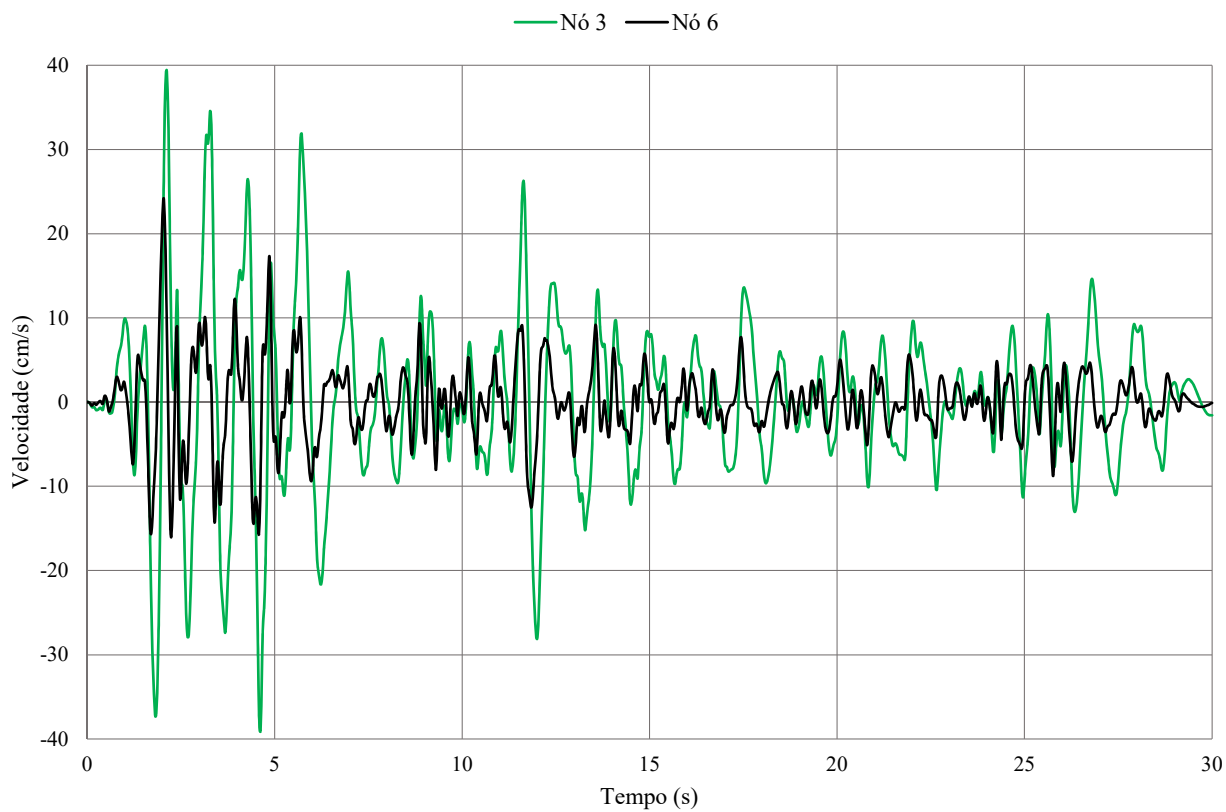


Figura 6.7. Comparação das velocidades dos nós do dissipador

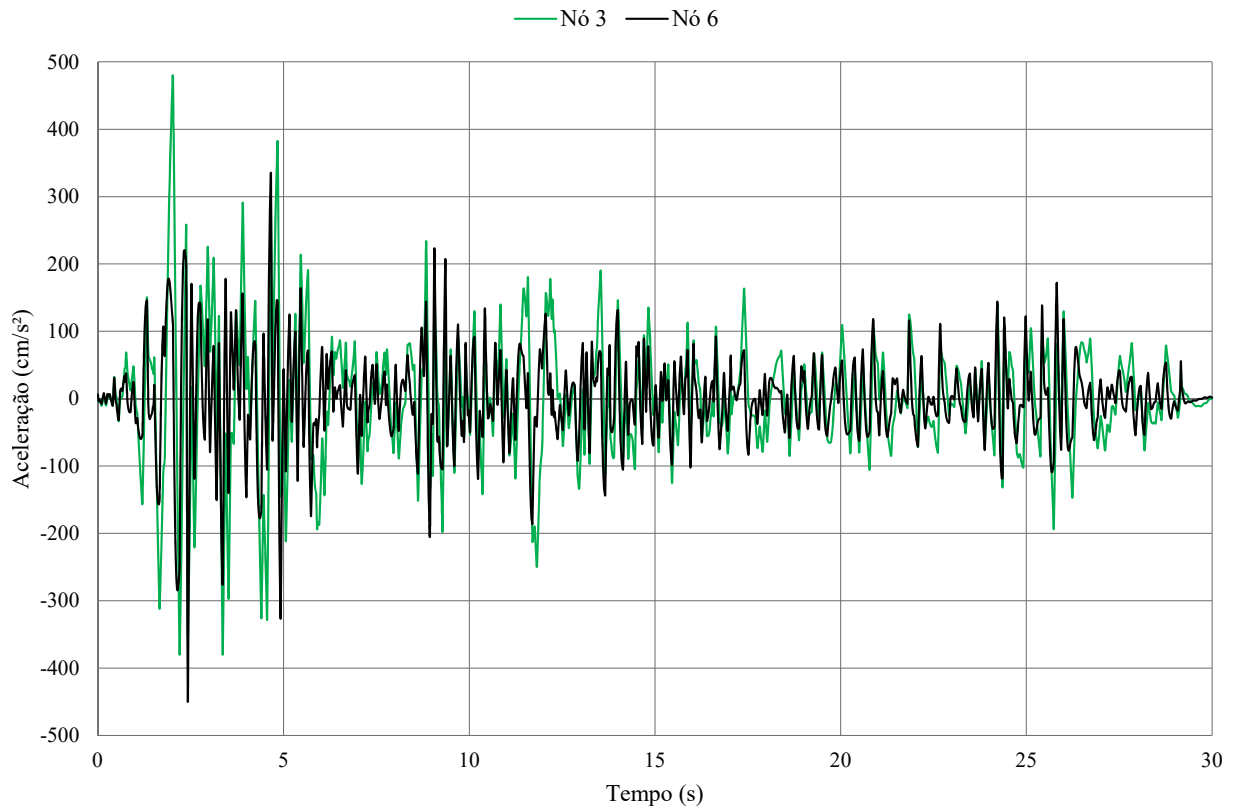


Figura 6.8. Comparação das acelerações dos nós do dissipador

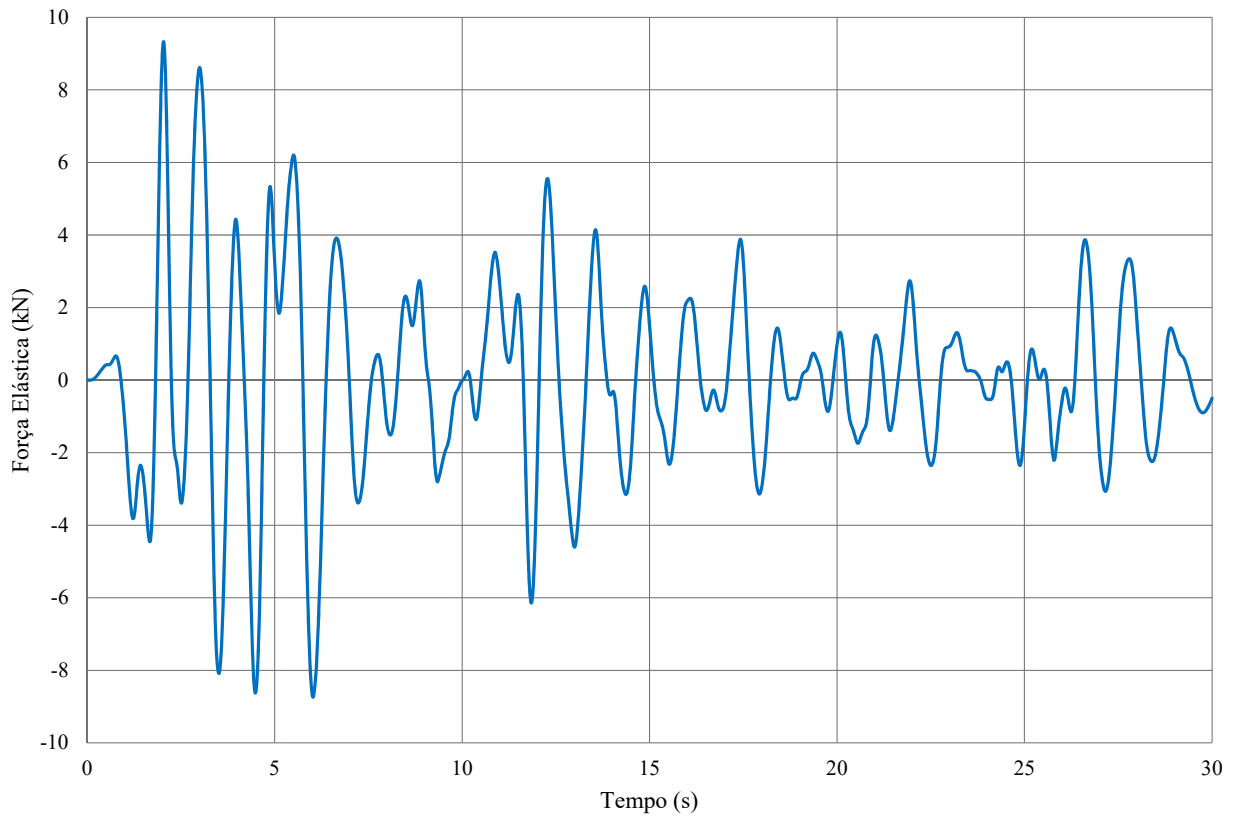


Figura 6.9. Força elástica desenvolvida no dissipador

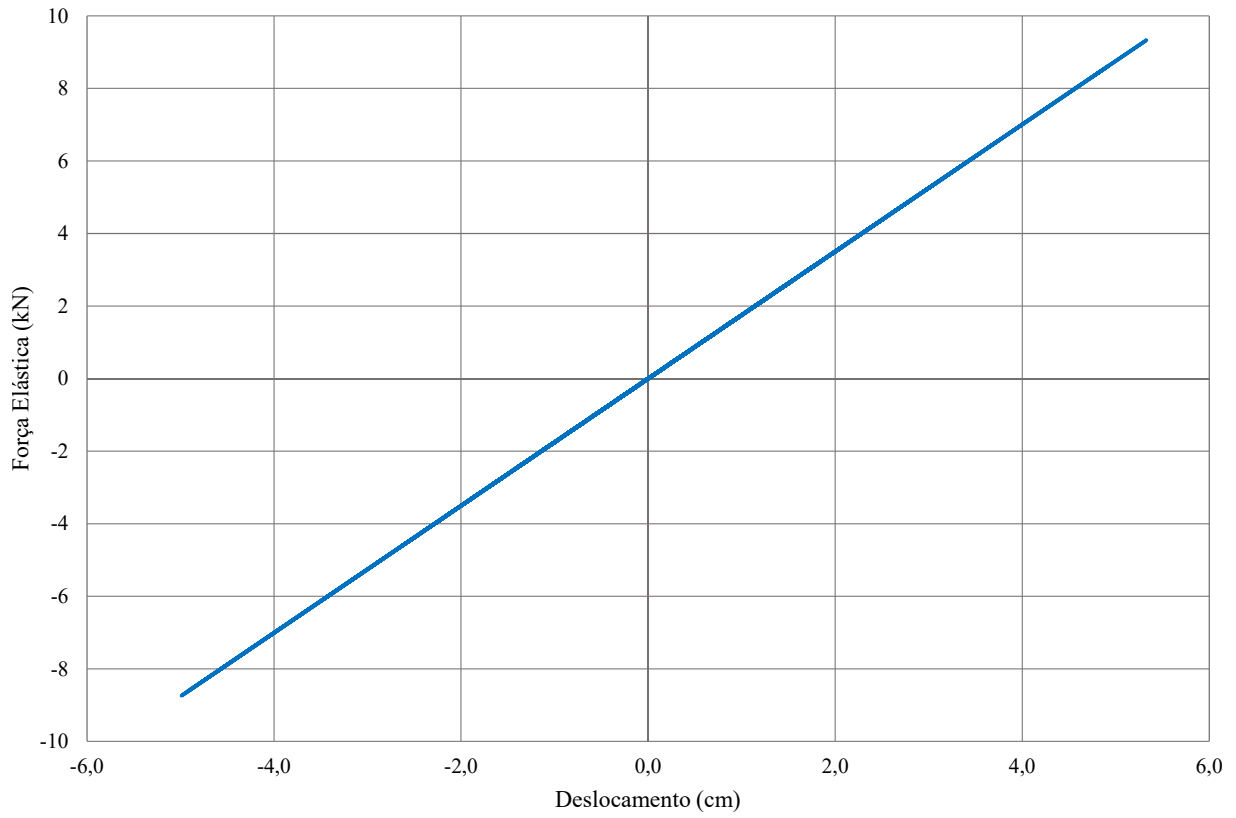


Figura 6.10. Relação entre força elástica e deslocamentos

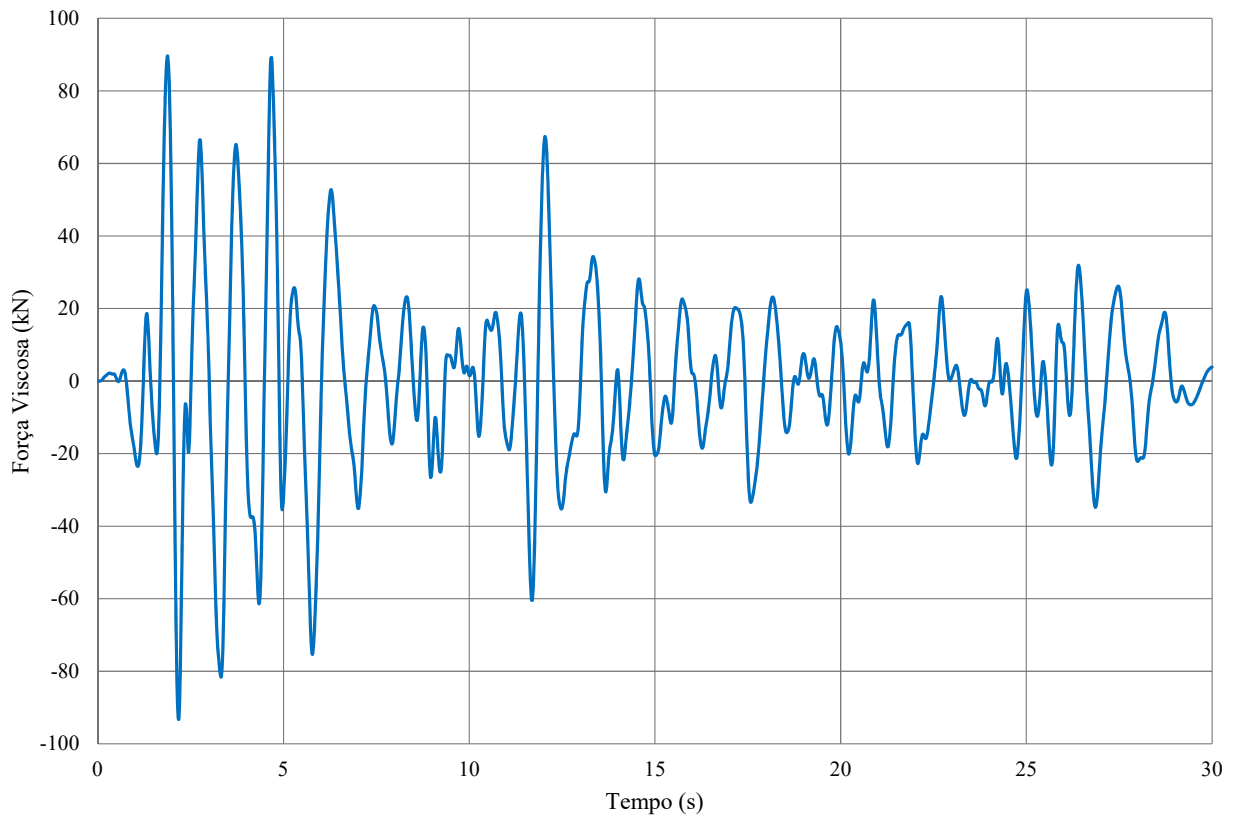


Figura 6.11. Força viscosa desenvolvida no dissipador

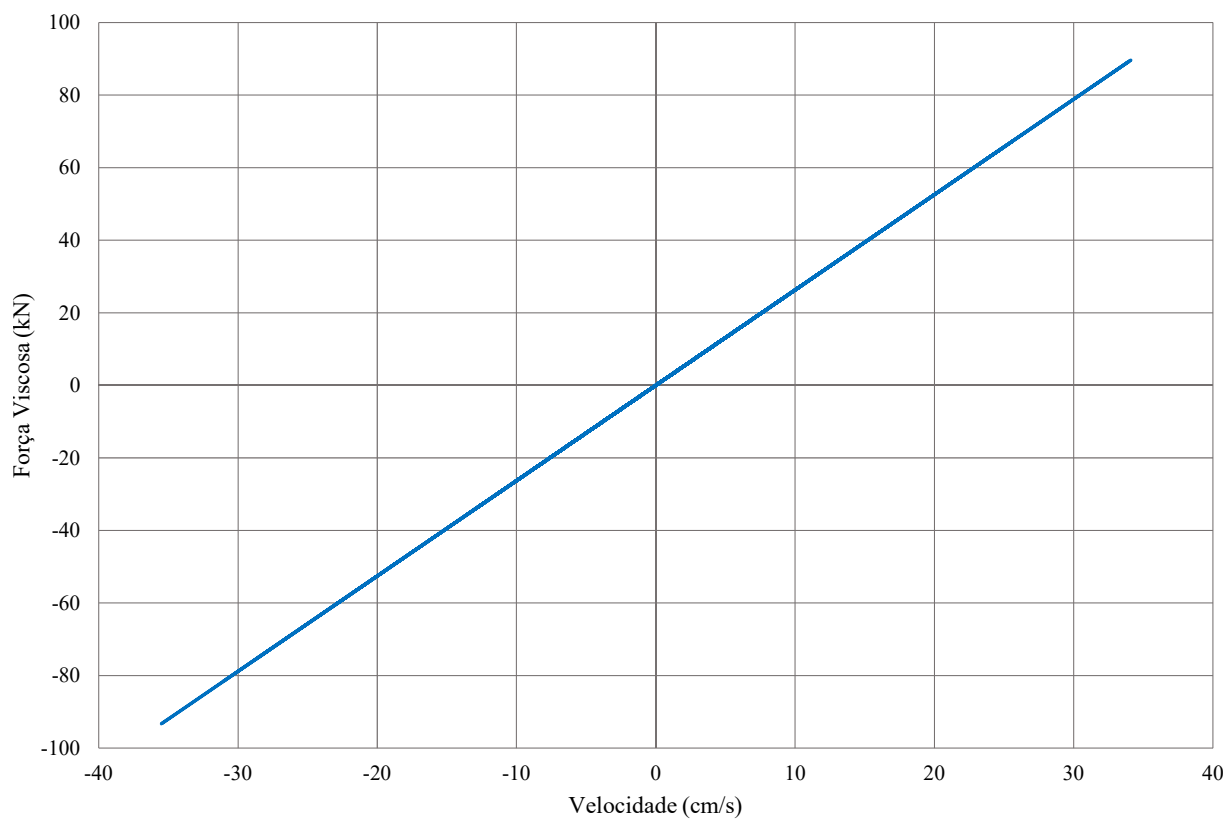


Figura 6.12. Relação entre força viscosa e velocidades

7. CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi desenvolvida uma revisão dos conceitos necessários para compreender a análise de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos, começando por conceitos básicos ao se estudar osciladores simples, que são sistemas com um grau de liberdade e depois desenvolvendo para a análise de sistemas mais complexos com vários graus de liberdade, passando pelo estudo de conceitos básicos do método dos elementos finitos para a discretização dos modelos e avaliação das matrizes de massa e rigidez que compõem a equação de movimento do modelo. Foram também brevemente estudados os amortecedores ADAS e como podem ser modelados dentro do estudo proposto, além dos carregamentos sísmicos, como eles podem ser avaliados e como este tipo de carregamento afeta na análise dinâmica.

O estudo desses temas ofereceu a base para proceder com o objetivo do trabalho que era analisar um exemplo de pórtico submetido a um carregamento sísmico e comparar a resposta em diferentes casos, sem contraventamento, com contraventamento e com contraventamento e com dissipador de energia. A partir das análises conclui-se que os resultados ocorreram dentro do esperado, com o pórtico apresentado uma resposta ligeiramente melhor com a presença do contraventamento e uma resposta melhor ainda com o dissipador. É importante observar que o conteúdo de frequências do sismo e efeitos de ressonância são bastante importantes na análise dinâmica, como evidenciado, respectivamente, no capítulo de análise sísmica com a construção dos espectros de resposta do sismo e no capítulo do estudo do oscilador simples com o fator de amplificação dinâmica.

Observa-se, assim, na análise dos casos estudados, que o comportamento dos pórticos que não possuem o dissipador está intimamente às suas características, como frequências naturais de vibração e como estas se relacionam com o conteúdo de frequências do sismo. Já no caso do pórtico com dissipador, o comportamento é visivelmente alterado, principalmente em relação ao segundo pórtico, que possui características semelhantes, observando-se, assim, que dispositivos amortecedores como o estudado podem se apresentar como alternativas efetivas para melhora de desempenho da estrutura por basearem seu funcionamento na dissipação da energia.

7.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi analisado um exemplo de pórtico plano submetido a um carregamento sísmico, com o objetivo de comparar o comportamento entre situações com ou sem dissipador de energia e com ou sem contraventamento, porém de forma acadêmica, sem querer avaliar alternativas de projeto. Também são simplificações adotadas a adoção de comportamento linear para os elementos da estrutura e para o dissipador de energia, além da análise considerando apenas um método de integração direta.

Nesse sentido, para trabalhos futuros poderia ser considerada a realização de análises semelhantes às desse trabalho, porém adicionando camadas de complexidade não abordadas aqui, como a análise de exemplos de pórticos mais complexos e casos reais com a consideração de parâmetros de projeto e recomendações de norma; consideração do comportamento não linear do amortecedor e não linearidades físicas e geométricas dos elementos da estrutura; análise de outros métodos de controle de vibrações; comparação de diferentes métodos para a obtenção da resposta dinâmica, como a superposição modal e o método *Wilson θ* .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15421 - Projeto de Estruturas Resistentes a Sismos**. Rio de Janeiro: ABNT, 2006, 26 p.

PARI, D. M. C. **Análise Sísmica de Pórticos Planos com Dissipadores Metálicos de Energia**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.DM-003A/14, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília, 2014, 118p.

CHOPRA, Anil K. **Dynamics of Structures**. 1ª Ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1995. 729p.

CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of Structures**. 3ª Ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc, 2003. 730 p.

PAZ, Mario. **Structural Dynamics: Theory and Computation**. 4ª Ed. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1997, 827 p.

SORIANO, Humberto Lima. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. 420 p.

SORIANO, Humberto Lima. **Elementos Finitos. Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009. 432 p.

SIRVE. **Disipación de Energia - Concepto y Aplicación**. Disponível em <sirve.cl/insights>. Acesso em 01 de dezembro de 2016.

VAZ, Luiz Eloy. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011. 296 p.

WHITAKKER, A. S.; BERTERO, V. V.; ALONSO, L. J.; THOMPSON, C. L. **Earthquake Simulator Testing of Steel Plate Added Damping And Stiffness Elements**. Report No. UCB/EERC-89/02. Earthquake Engineering Research Center. University of California at Berkeley, 1989.

ZIENKIEWICZ, O. Z.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method - Volume 1: The Basis**. 5ª Ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 689 p.