

Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA
Engenharia Eletrônica

**Reconstrução de Sinais por
Compressive Sensing Dinâmico e Filtragem de Kalman
com Estudo de Caso em Eletrocardiografia**

Autor: Gabriel Luis de Araújo e Freitas

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso Rodrigues Mendes

Coorientador: Prof. Dr. Henrique Marra Taira Menegaz

Brasília, DF

2019



Gabriel Luis de Araújo e Freitas

**Reconstrução de Sinais por
Compressive Sensing Dinâmico e Filtragem de Kalman
com Estudo de Caso em Eletrocardiografia**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Eletrônica da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade UnB Gama – FGA

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso Rodrigues Mendes

Coorientador: Prof. Dr. Henrique Marra Taira Menegaz

Brasília, DF

2019

Gabriel Luis de Araújo e Freitas

Reconstrução de Sinais por *Compressive Sensing* Dinâmico e Filtragem de Kalman com Estudo de Caso em Eletrocardiografia. Gabriel Luis de Araújo e Freitas. – Brasília, DF, 2019-

56 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso Rodrigues Mendes

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA , 2019.

1. Filtro de Kalman. 2. *Compressive Sensing* Dinâmico. 3. Eletrocardiografia.
I. Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso Rodrigues Mendes. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Reconstrução de Sinais por *Compressive Sensing* Dinâmico e Filtragem de Kalman com Estudo de Caso em Eletrocardiografia.

Gabriel Luis de Araújo e Freitas

**Reconstrução de Sinais por
Compressive Sensing Dinâmico e Filtragem de Kalman
com Estudo de Caso em Eletrocardiografia**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Eletrônica da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 12 de dezembro de 2019:

**Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso
Rodrigues Mendes**
Orientador

**Prof. Dr. Henrique Marra Taira
Menegaz**
Coorientador

Prof. Dr. Fabiano Araujo Soares
Examinador interno

Prof. Dr. Roberto de Souza Baptista
Examinador Interno

Brasília, DF
2019

Aos meus avós Elza e Inácio.

Agradecimentos

Ao meu pai, Iron, à minha mãe Joana e à minha irmã Fernanda, os primeiros a me guiar e apoiar incondicionalmente em todas as escolhas que nos trouxeram até aqui.

À tia Natália e sua família, pessoas que foram decisivas nos meus primeiros dias em Brasília.

Aos meus orientadores Cristiano Jacques Miosso e Henrique Menegaz, professores excepcionais que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Os levarei sempre como exemplo em minha jornada como pesquisador e engenheiro.

Aos amigos que fiz ao longo da graduação, Adriel, Bia, Eduardo, Hugo, Ian, Igor, João, Lucas F. e Victor, por compartilharem comigo momentos incríveis. Eles fizeram que as coisas parecessem mais fáceis.

À Faculdade do Gama da Universidade de Brasília e seu corpo docente, que me colocou em contato com um mundo fantástico e me proporcionou grande desenvolvimento pessoal.

*“Quem está ao sol e fecha os olhos
Começa a não saber o que é o sol
E a pensar muitas cousas cheias de calor.
Mas abre os olhos e vê o sol,
E já não pode pensar em nada,
Porque a luz do sol vale mais que os pensamentos
De todos os filósofos e de todos os poetas.”*
O Guardador de Rebanhos, Fernando Pessoa

Resumo

A aquisição de sinais digitais com uma quantidade reduzida de medidas é possibilitada por *Compressive Sensing* (CS). O Filtro de Kalman Adaptativo Baseado em CS é um exemplo de algoritmo que foi elaborado no contexto de *streaming*. Seu processo de reconstrução considera que os sinais são recebidos de forma contínua e realiza estimativas de suporte para melhorar seus resultados. Entretanto, seu funcionamento foi observado apenas para sinais simulados e esparsos no domínio de Fourier. A aplicação desse algoritmo considerando sinais reais foi investigada no presente trabalho. Para tanto, modificações foram feitas com o objetivo de se obter melhores resultados no cenário específico

Para estudo de caso, decidiu-se por adotar sinais de eletrocardiografia. Inicialmente, foram estudadas transformadas esparsificantes para essa nova classe de sinais. Além do domínio de Fourier, foram avaliadas reconstruções utilizando a transformada de Daubechies 4 e uma criada com Análise de Componentes Principais. A observação de resultados parciais permitiram que se propusesse: (i) a atualização iterativa da matriz de covariância do modelo e (ii) modificações na etapa de estimação de suporte. Nas reconstruções, observou-se um nível médio de relação sinal ruído de 15,6 *dB*, porém atingiu-se, nos melhores casos, valores próximos a 40 *dB*.

Palavras-chaves: Compressive Sensing Dinâmico. Filtro de Kalman. Eletrocardiografia.

Abstract

Compressive Sensing (CS) allows a digital signal acquisition with a small amount of measurements. Adaptive Kalman Filter Based on CS is an algorithm created for streaming signals. Its reconstruction approach assumes that the signals are continuously received and support estimations are made to enhance the results. However, its behavior was analyzed only for simulated signals sparse on Fourier domain. The use of this algorithm with real signals was investigated at the present work. Thus, some modifications were made in order to get better results in the new specific scenario.

As a case study, electrocardiography signals was chosen. Firstly, sparsifying transforms for the new class of signals were studied. Daubechies 4 transform and one defined by Principal Component Analysis was evaluated, besides the Fourier domain. Partial results enabled us to propose: (i) iterative update of model covariance matrix and (ii) a new method to estimate the support. The reconstructions showed 15,6 *dB* as average signal to noise ratio, however the best situations achieved values close to 40 *dB*.

Key-words: Dynamic Compressive Sensing. Kalman Filer. Electrocardiography.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Ilustração para problema de reconstrução por CS no caso bidimensional. Em (a) são mostradas bolas ℓ_p unitárias para $p = 2$ (preto), $p = 1$ (vermelho), $p = 0,8$ (azul) e $p = 0,4$ (verde). Em (b) são vistas bolas $\ell_{0,4}$ com diferentes raios aproximando-se da reta de possíveis soluções.	20
Figura 2	– Esquematização do funcionamento do AIC discreto. Exemplo considerando $M = R = 4$	26
Figura 3	– Visão geral do sistema estudado. Em (a) é vista a aquisição a partir o AIC e em (b) estão representados os métodos de reconstrução <i>Adaptive</i> CS-KF (algoritmo avaliado) e IRLS (algoritmo usado como parâmetro de comparação).	29
Figura 4	– Representação de um sinal de ECG, apontando os formatos típicos das ondas P, Q, R, S, T e U.	32
Figura 5	– Primeiras 400 amostras do sinal 8 do conjunto 2 (azul) e sua versão condicionada (vermelho) para testes com <i>Adaptive</i> CS-KF utilizando o domínio de Fourier.	33
Figura 6	– Primeiras 400 amostras da primeira janela da versão condicionada do sinal 25 do conjunto 2 (azul) e suas reconstruções por IRLS (verde) e <i>Adaptive</i> CS-KF (vermelho).	37
Figura 7	– Comparação, para as versões Adaptativa (azul), <i>Genie</i> (laranja) e Modificada (verde), da evolução do EQM ao longo das 500 primeiras janelas do sinal 10 do conjunto 1.	41
Figura 8	– Trechos das janelas 60 (a) e 440 (b) do sinal 10 do conjunto 1 reconstruídas pelo <i>Adaptive</i> CS-KF (azul) e por sua versão modificada com 0,5 como fator de ponderação (verde).	42
Figura 9	– Erro Quadrático Médio ((a) e (c)) e 100 primeiros valores da janela 1 ((b) e (d)) no domínio de Fourier do sinal 8 do conjunto 2 reconstruídos com diferentes valores para o fator de ponderação utilizando a versão modificado do <i>Adaptive</i> CS-KF.	43
Figura 10	– Erro Quadrático Médio das 2000 primeiras janelas ((a) e (c)) e janelas reconstruídas pelo <i>Adaptive</i> CS-KF Modificado no domínio de Daubechies 4 ((b) e (d)). Em (a) e (b) as medidas foram tomadas com $M = 100$ e $R = 2$, já em (c) e (d) adotou-se $M = 500$ e $R = 2$	44

Figura 11 – Resultados da reconstrução do sinal 201 utilizando <i>Adaptive CS-KF</i> com o domínio de Daubechies 4 (verde) e o dado por PCA (vermelho). Em (a) vê-se no tempo as reconstruções da janela 800, em (b) é mostrada a mesma janela no domínio de PCA. A evolução da SNR (c) e EQM (d) também são mostradas para ambos os domínios.	46
Figura 12 – Evolução da SNR de reconstruções com amostras em diferentes condições de ruído (53,15 dB; 32,32 dB; 19,17 dB; 7,12 dB e sem ruído adicional) ao longo das janelas do sinal 186 do conjunto 3.	47
Figura 13 – Distribuição dos valores de SNR conseguidos na reconstrução de todas as janelas de todos os sinais do conjunto 3 pelo <i>Adaptive CS-KF</i> Modificado nos domínios Daubechies 4 e definido por PCA.	48
Figura 14 – Gráficos de SNR comparando reconstruções por IRLS aplicado independentemente a cada janela (amarelo) e com Informação <i>a Priori</i> (verde) e <i>Adaptive CS-KF</i> Modificado (vermelho).	50
Figura 15 – Comparação das reconstruções por IRLS aplicado independentemente a cada janela (amarelo) e com Informação <i>a Priori</i> (verde) e <i>Adaptive CS-KF</i> Modificado (vermelho) da janela 40 do sinal 200 do conjunto 3.	50

Lista de abreviaturas e siglas

AIC	<i>Analog to Information Converter</i>
CS	<i>Compressive Sensing</i>
CS-KF	<i>Kalman Filter Based on Compressive Sensing</i>
DFT	Transformada Discreta de Fourier
ECG	Eletrocardiograma
EQM	Erro Quadrático Médio
FFT	Transformada Rápida de Fourier
IRLS	<i>Iterative Recursive Least Squares</i>
MIMIC II	<i>Medical Information Mart for Intensive Care II</i>
OMP	<i>Orthogonal Matching Pursuit</i>
PCA	Análise de Componentes Principais
RIP	Propriedade de Isometria Restrita
SNR	Relação Sinal Ruído

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Contextualização	14
1.2	Objetivos	15
1.2.1	Objetivo geral	15
1.2.2	Objetivos específicos	15
1.3	Possíveis Aplicações	16
1.4	Organização do texto	16
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS E ESTADO DA ARTE	17
2.1	<i>Compressive Sensing</i>	17
2.1.1	<i>Compressive Sensing</i> Dinâmico	21
2.2	Domínios para representação esparsa	22
2.2.1	Transformada de Fourier	22
2.2.2	<i>Wavelets</i>	23
2.2.3	Domínio elaborado por Análise de Componentes Principais	23
2.3	Filtro de Kalman	24
2.4	Filtro de Kalman Adaptativo Baseado em <i>Compressive Sensing</i>	26
3	MATERIAIS E MÉTODOS	29
3.1	Conjuntos de sinais	30
3.1.1	Geração dos sinais sintéticos	30
3.1.2	Sinais de ECG	31
3.1.2.1	Caracterização das bases de dados	32
3.1.2.2	Condicionamento dos sinais	33
3.2	Aquisição das medidas	33
3.3	Métricas para avaliação dos resultados	34
3.4	Implementações para sinais sintéticos	35
3.5	Implementações para sinais de ECG	36
3.5.1	Domínio de Fourier	37
3.5.2	Domínio de <i>Wavelets</i> e Análise de Componentes Principais	38
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	40
4.1	Sinais sintéticos	40
4.2	Sinais reais de ECG	42
4.2.1	Conjunto 2	42
4.2.2	Conjunto 3	45

4.2.2.1	Avaliação em cenários ruidosos	47
4.2.2.2	Avaliação estatística do conjunto	48
4.2.2.3	Comparação com IRLS	49
5	CONCLUSÃO	52
5.1	Contribuições e possíveis trabalhos futuros	52
	REFERÊNCIAS	54

1 Introdução

Pesquisas desenvolvidas em *Compressive Sensing* (CS) trazem novas perspectivas para a realização de uma importante tarefa da engenharia contemporânea: a conversão de sinais analógicos em digitais [1]. Ao realizá-la, buscamos representar informações de um fenômeno físico que serão úteis para algum sistema. A identificação de padrões e tomadas de decisão, bem como o projeto de sistemas de controle são algumas das atividades beneficiadas pelo processamento digital de sinais.

1.1 Contextualização

Redes genéticas, por exemplo, são sistemas complexos que podem ser analisados e controlados a partir da observação de variáveis tratadas digitalmente [2]. Na área de materiais, há estudos de integridade de componentes que aplicam técnicas de processamento digital a partir de emissão acústica [3]. São muitos os campos de conhecimento que podem utilizar as ferramentas de processamento de sinais para obtenção de melhores resultados. Entretanto, a efetividade do uso de tais técnicas depende de que os sinais sejam amostrados (adquiridos) adequadamente.

O critério de Nyquist estabelece condições suficientes para que o processo de amostragem preserve, no mundo digital, as informações contidas no sinal analógico [4]. Esse paradigma é amplamente utilizado como critério de projeto no desenvolvimento de sistemas digitais. No entanto, a quantidade de amostras tomadas por essa abordagem geralmente é superestimada [5]. Sinais adquiridos a grandes taxas implicam em *hardwares* mais complexos tanto no sentido de capacidade de armazenamento, quanto no de frequência de operação. Dessa forma, a aquisição de informação com um menor número de amostras é desejável.

Novos mecanismos são fornecidos por CS para aquisição a taxas inferiores a estipulada pelo critério de Nyquist. Para tanto, considera-se que os sinais trabalhados possuem representação esparsa em algum domínio conhecido [1, 5, 6]. Os algoritmos são desenvolvidos considerando características específicas do contexto de sua aplicação. Cada cenário estudado possui requisitos próprios em termos de tempo execução ou de erro de reconstrução. A formação de imagens de tomografia por ressonância magnética é uma das aplicações mais comuns na literatura. Nesta situação, a qualidade da imagem é uma métrica importante, porém o tempo para reconstruí-la não é um fator crítico.

Para sinais de maior duração, os padrões observados de esparsidade variam gradualmente ao longo do tempo. Abordagens mais recentes tratam o problema como uma

sequência de sinais a serem reconstruídos. Isso possibilita a extração de informações de reconstruções anteriores para auxiliar em reconstruções futuras [7]. Esse tipo de estratégia é útil em algoritmos para *streaming*, em que não se conhece a princípio o tamanho dos sinais que serão processados [8, 9].

1.2 Objetivos

O Filtro de Kalman Adaptativo Baseado em *Compressive Sensing* (*Adaptive CS-KF*) é um algoritmo de reconstrução para sinais *streaming* [10]. Porém, sua validação foi feita apenas com sinais simulados. A principal restrição feita em seu desenvolvimento é a de que a reconstrução parta de janelas com sobreposição. Desde que respeitada essa condição, não há maiores impeditivos para o uso deste algoritmo em outros contextos.

1.2.1 Objetivo geral

O principal objetivo deste trabalho é, partindo do *Adaptive CS-KF*, desenvolver um algoritmo de reconstrução para alguma classe de sinais reais. Observando características específicas do cenário escolhido, foram propostos domínios esparsificantes e modificações ao algoritmo que tragam um melhor desempenho de reconstrução. Para realização do estudo de caso, optou-se por adotar sinais de eletrocardiografia (ECG), visto que há uma extensa bibliografia a respeito de suas características [11, 12]. Também, há trabalhos de *Compressive Sensing* com sinais de ECG [13, 14].

O projeto de sensores de baixo consumo energético, por exemplo, é um desafio na aquisição de sinais de ECG [15]. Novas possibilidades podem ser exploradas com o uso de CS [13]. Dessa maneira, aplicar o *Adaptive CS-KF* a sinais de ECG pode trazer contribuições, no sentido de avaliá-lo em condições mais próximas de situações reais e também possibilitar implementações em *hardware* que o usem para aquisição de ECG.

1.2.2 Objetivos específicos

O trabalho ocorreu em duas principais etapas: (i) reprodução dos resultados de [10] e (ii) elaboração de um novo algoritmo para sinais de ECG. A partir delas, elenca-se os seguintes objetivos:

- Avaliar o *Adaptive CS-KF* no contexto em que foi desenvolvido;
- Estudar transformadas esparsificantes para sinais de ECG;
- Realizar implementações que contemplem as novas transformadas esparsificantes;
- Propor eventuais modificações que melhorem os resultados do algoritmo com base nos resultados parciais conseguidos com os objetivos anteriores.

1.3 Possíveis Aplicações

O algoritmo proposto permite uma representação mais eficiente de informação no sentido de reduzir a quantidade de medidas necessárias. Assim, apesar de o trabalho ser desenvolvido observando sinais de ECG, uma série de outros cenários na engenharia podem ser explorados a partir do uso da mesma técnica, com as devidas adaptações aos contextos específicos e verificadas as condições de esparsidade e aquisição demandados por *Compressive Sensing*.

Em aplicações de comunicação, por exemplo, algoritmos como o aqui desenvolvido permitem que se utilize mais eficientemente o espectro disponível em um dado canal, ao se reduzir a largura de banda demandada para transmitir um sinal. Assim, equipamentos projetados com base em CS, podem apresentar melhor aproveitamento energético e demandar menores capacidades de armazenamento.

O presente trabalho considera uma situação prática específica e busca validar um algoritmo, que demanda tempo de reconstrução inferior aos conseguidos por grande parte dos algoritmos já existentes. Uma série de aplicações, que futuramente poderão ser exploradas sob o ponto de vista das abordagens aqui tomadas, são sumarizadas em [16]. Dentre elas, algumas das possibilidades de contribuição são: (i) formação de imagens, (ii) reconhecimento de padrões e (iii) sistemas de comunicação.

1.4 Organização do texto

Nos quatro capítulos seguintes será mostrado o desenvolvimento de uma versão modificada do Filtro de Kalman Adaptativo Baseado em *Compressive Sensing* para sinais de eletrocardiografia. Inicialmente, serão discutidos os conceitos básicos de *Compressive Sensing* e Filtragem de Kalman no Capítulo “Fundamentos Teóricos e Estado da Arte”. Posteriormente, em “Materiais e Métodos”, é mostrado o processo de elaboração dos algoritmos bem como dos métodos utilizados em sua validação. No Capítulo “Resultados e Discussões”, há comparações com um algoritmo do estado da arte de CS e uma avaliação estatística do que foi observado no conjunto de sinais testados. Por fim, a “Conclusão” sintetiza os resultados anteriormente apresentados sob a perspectiva dos avanços realizados e de possíveis trabalhos futuros.

2 Fundamentos Teóricos e Estado da Arte

Este trabalho aborda a reconstrução de sinais esparsos sob a perspectiva da teoria desenvolvida em *Compressive Sensing* e utilizando a Filtragem de Kalman como ferramenta. Este capítulo busca expor os conceitos básicos dessas duas áreas de conhecimento. Ao fim, é apresentada a formulação do Filtro de Kalman Adaptativo Baseado em CS [10], bem como modificações propostas para a melhoria do desempenho deste algoritmo.

2.1 *Compressive Sensing*

A aquisição de informações a partir de grandezas físicas é uma importante atividade para a engenharia. Nesse contexto, tais grandezas podem ser expressas na forma de sinais que, geralmente, na natureza, são quantidades contínuas que variam em algum domínio contínuo. Atualmente, é comum que o processamento desses sinais ocorra digitalmente. Com isso, devem ser adotadas técnicas para a aquisição que possibilitem o uso de ferramentas digitais ao mesmo tempo que preservam o conteúdo do sinal [17].

Tipicamente, sinais digitais são adquiridos em duas etapas: amostragem e quantização. Na primeira delas, obtém-se uma sequência de números, correspondentes a amostras uniformemente espaçadas do sinal em domínio contínuo. Assume-se um período de amostragem T_s , que deve ser adequadamente determinado de forma a estabelecer uma bijeção ente os domínios discreto e contínuo [17].

O teorema da amostragem de Nyquist, apresentado por [4], estabelece que, para um sinal de banda limitada f_m , é suficiente adotar $T_s = \frac{1}{2f_m}$. Porém, medidas tomadas com uma frequência de amostragem $f_s = \frac{1}{T_s}$ inferior à de Nyquist podem ser reconstruídos tomando outras abordagens [18]. É neste contexto que *Compressive Sensing* está inserido, possibilitando a aquisição de sinais com uma quantidade reduzida de medidas. Assim, realiza-se a compressão da informação a medida em que ocorre a aquisição do sinal [19].

As técnicas desenvolvidas em CS permitem a reconstrução de um dado sinal \mathbf{x} de dimensão N a partir de uma quantidade menor m de medidas lineares ($m < N$). Ou seja, as medidas são dadas por

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ é o sinal de interesse e $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ são suas medidas conhecidas. A matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{m \times N}$ é denominada matriz de medidas e diz respeito a maneira com que as medidas se relacionam com o sinal [20].

Visto que o sistema a ser resolvido é subdeterminado, deve-se considerar alguma restrição para a obtenção de uma solução satisfatória. Assim, as abordagens em CS assumem que \mathbf{x} possui alguma representação $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ em domínio transformado que seja esparsa [1]. De maneira simplificada, um sinal esparsa pode ser entendido como aquele cujo a maior parte de seus componentes possui valor nulo [20].

Pode-se definir esparsidade a partir da pseudonorma ℓ_0 [8]. Um sinal $\hat{\mathbf{x}}$ é dito K -esparsa se e somente se $\|\hat{\mathbf{x}}\|_0 \leq K$. O conjunto das posições não-nulas de $\hat{\mathbf{x}}$, $\text{supp}(\hat{\mathbf{x}}) := \{i : \hat{\mathbf{x}}[i] \neq 0\}$, é chamado de *suporte*. Assim, uma das dificuldades do processo de reconstrução é o fato de não se conhecer o suporte previamente; uma vez conhecido, o problema se resumiria a um sistema sobredeterminado [20].

Em princípio, a solução desejada poderia ser encontrada calculando o sinal $\hat{\mathbf{x}}^*$ que tem a menor ℓ_0 (o que significa maior esparsidade) e que satisfaça a restrição $\mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, ou seja:

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \underset{\hat{\mathbf{x}}}{\text{argmin}} \|\hat{\mathbf{x}}\|_0, \text{ sujeito a } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}. \quad (2.2)$$

Entretanto, os algoritmos que implementam tal solução possuem complexidade combinatorial por se tratar de um problema não-convexo [21, 22]. Assim, seu uso é inviabilizado para sinais práticos que possuem grandes dimensões.

Métricas alternativas para a esparsidade foram propostas com a finalidade de reduzir o esforço computacional. O uso de métricas ℓ_p com $0 < p \leq 1$ foi explorado em diversos trabalhos, tais como [1, 23]. Assim, a esparsidade pode ser avaliada a partir de

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{\mathbf{x}}[n]|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.3)$$

É importante observar sob quais condições se é possível reconstruir o sinal \mathbf{x} a partir da minimização de uma pseudonorma ℓ_p para algum p positivo e menor ou igual a 1. Além de uma quantidade suficiente m de medidas para uma dada esparsidade K , é necessário que a matriz \mathbf{MT}^{-1} cumpra a Propriedade de Isometria Restrita (*Restricted Isometry Property*, RIP) [6]. Esta propriedade é verificada a partir da constante de isometria δ_K .

Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$, a constante de isometria $\delta_K = \delta_K(\mathbf{A})$ ($K \in \mathbb{Z}$) a ela associada é o menor valor positivo tal que

$$(1 - \delta_K) \|\hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\hat{\mathbf{x}}\|_2^2, \quad (2.4)$$

para todo vetor $\hat{\mathbf{x}}$ K -esparso [6]. Diz-se que a matriz \mathbf{A} respeita a RIP caso δ_K seja suficientemente pequeno [20]. Neste caso, o teorema 1, apresentado em [6], garante a equivalência entre os problemas de minimização da ℓ_0 e da ℓ_1 .

A desigualdade (2.4) estabelece a razão de proporcionalidade máxima entre as normas dos vetores $\hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$. Assim, de certo modo, a RIP garante que o vetor de medidas \mathbf{b} terá energia semelhante ao vetor $\hat{\mathbf{x}}$. Com isso, consegue-se preservar em \mathbf{b} parte da informação contida em $\hat{\mathbf{x}}$.

Teorema 1 *Assume-se uma constante $\delta_{2K}(\mathbf{MT}^{-1}) < \sqrt{2} - 1$. Então, o problema*

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \underset{\hat{\mathbf{x}}}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\mathbf{x}}\|_0, \text{ sujeito a } \mathbf{MT}^{-1}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \quad (2.5)$$

obedece às desigualdades:

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}\|_1 &\leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_1 \\ \|\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}\|_2 &\leq C_0 K^{-1/2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_K\|_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para uma alguma constante C_0 . Aqui, considera-se que \mathbf{x}_K é a melhor reconstrução que se consegue obter no caso em que se conhece as posições e valores das K maiores entradas de \mathbf{x} . Assim, quando $\delta_{2K}(\mathbf{MT}^{-1}) < \sqrt{2} - 1$, as soluções para os problemas das Equações (2.2) e (2.5) são equivalentes.

Os problemas de minimização de ℓ_p com $0 < p \leq 1$ são tratáveis computacionalmente [1, 23]. Existem diferentes métodos que possibilitam a reconstrução dos sinais a partir das restrições assumidas. Tais técnicas valem-se de diferentes abordagens, que exigem diferentes quantidades de medida e condicionamento da matriz de aquisição, algumas das mais comuns na literatura baseiam-se em:

- *Convex Relaxation*: Neste grupo de algoritmos assume-se que, dada uma quantidade suficiente de medidas, há apenas uma matriz com posto mínimo que as satisfaça, de forma que um mínimo local é também global [24]. Alguns exemplos desta classe de algoritmos são: (i) *Basis Pursuit*; (ii) *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*; (iii) *Least Angle Regression*;
- *Greedy Algorithms*: Geralmente estes são algoritmos iterativos que, por meio de alguma simplificação, aproximam o resultado desejado por meio de minimização da ℓ_2 sucessivas vezes. Podem ser soluções custosas computacionalmente a medida que os sinais trabalhados possuam menor esparsidade;
- *Minimização Não-convexa*: Estas são abordagens comuns em aplicações de imageamento médico e de inferência de estado de redes [25]. São exemplos: (i) *Iterative*

Re-weighted Least Squares (IRLS), que se aproxima do sinal desejado a partir de sucessivas aplicações Mínimos Quadrados tomando como pesos a solução da iteração anterior [26]; e (ii) algoritmos baseados em simulações de Monte Carlo.

A Figura 1 ilustra, para o caso de um sinal com duas posições, a abordagem tomada por *Compressive Sensing* para reconstrução de sinais esparsos. Os lugares geométricos vistos na Figura 1(a) são denominados “bolas unitárias” e correspondem ao conjunto de vetores em \mathbb{R}^2 que possuem $\ell_p = 1$. Cada uma das cores diz respeito a um valor diferente de p entre 2 (preto) e 0,4 (verde).

É notável que quanto menor o valor de p , mais próximos os pontos da bola estão dos eixos horizontal e vertical. É essa característica que favorece (em termos de acurácia) as abordagens que utilizam métricas ℓ_p com $0 < p < 1$, pois permitem que os algoritmos se aproximem melhor da solução desejada, no sentido de que se diminui a probabilidade de que a solução convirja para um vetor distante da solução mais esparsa.

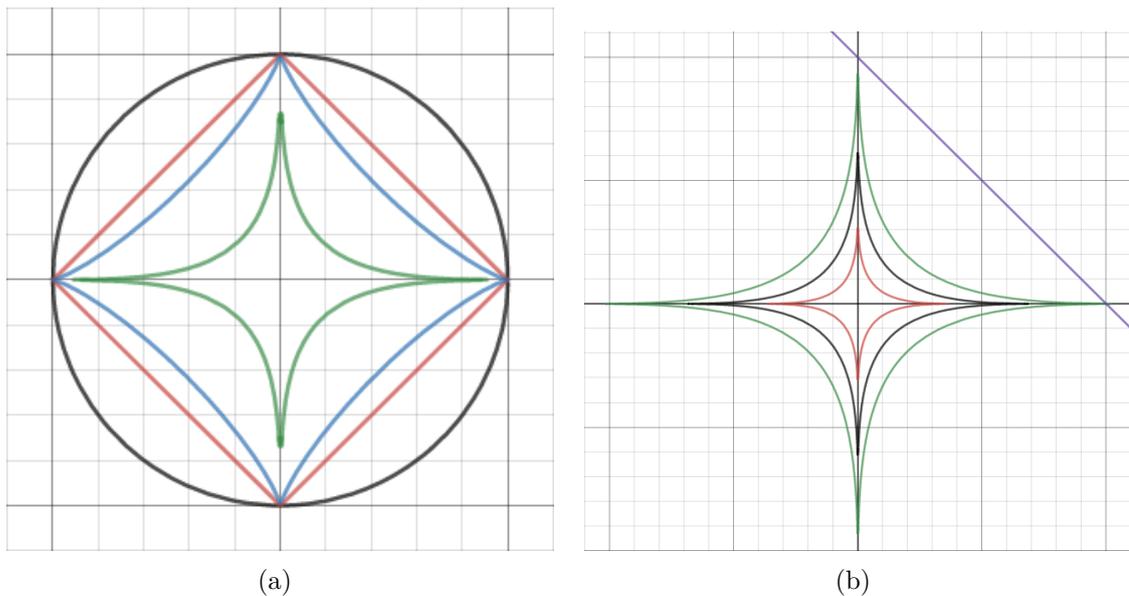


Figura 1 – Ilustração para problema de reconstrução por CS no caso bidimensional. Em (a) são mostradas bolas ℓ_p unitárias para $p = 2$ (preto), $p = 1$ (vermelho), $p = 0,8$ (azul) e $p = 0,4$ (verde). Em (b) são vistas bolas $\ell_{0,4}$ com diferentes raios aproximando-se da reta de possíveis soluções.

A reta na Figura 1(b) é o conjunto de vetores que satisfazem medidas específicas. Existem duas soluções de interesse, os pontos de intersecção entre a reta e os eixos (ordenada e abscissa). Os algoritmos de CS valem-se de diferentes estratégias para encontrar estes pontos. Na situação ilustrada, a solução será dada pelo primeiro ponto de intersecção entre a reta e a bola ℓ_p de menor raio que for encontrado.

Situações práticas exigem sinais de dimensões muito superiores. Enquanto que no exemplo o sinal tem apenas duas dimensões, imagens de ressonância magnética típicas possuem dimensões de 128×128 e 256×256 [27]. Nesse caso, as medidas tomadas definem um hiperplano de soluções que as satisfazem. A solução de interesse é aquela mais esparsa, ou seja, a que está contida na maior quantidade de eixos. Os algoritmos de *Compressive Sensing* buscam este ponto utilizando alguma métrica ℓ_p ($0 < p \leq 1$) como aproximação da ℓ_0 .

Diversos fatores, tais como a quantidade de medidas disponíveis, o condicionamento da matriz de aquisição e a esparsidade atingida no domínio transformado; afetam os resultados dos algoritmos possíveis [20]. Assim, características dos sinais trabalhados (esparsidade K , quantidade m de medidas tomadas pelo *hardware*, etc.) e do sistema de aquisição devem ser avaliadas para a escolha do método mais adequado à aplicação.

2.1.1 *Compressive Sensing* Dinâmico

Os algoritmos mais comuns em CS foram desenvolvidos para situações com condições específicas: (i) sinais de dimensão finita conhecida, (ii) aquisição a partir de medidas randomizadas, (iii) critério rigoroso de esparsidade [25]. Conforme apontado em [19], as contribuições mais recentes expandem as possibilidades de aplicações em *Compressive Sensing* para classes mais amplas de sinais (condições menos restritas de esparsidade) adquiridos por meio de matrizes que possuem uma estrutura não completamente randômica.

Torna-se interessante o desenvolvimento de algoritmos que contemplem sinais cujo comportamento de sua esparsidade varie ao longo do tempo (tanto pela cardinalidade do conjunto quanto pelos elementos que o compõem), bem como de sinais de dimensões arbitrariamente grandes. A formulação de *Compressive Sensing* dinâmico é apresentada em [7]. Nessa formulação, busca-se reconstruir uma sequência de sinais $\{\mathbf{x}_t\}$, a partir de uma sequência de medidas $\{\mathbf{y}_t\}$ dados por

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{M}_t \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, \text{ com } \|\mathbf{w}_t\| < \epsilon, \quad (2.7)$$

em que t é um índice de tempo discreto

Cada um dos sinais \mathbf{x}_t possui uma representação esparsa $\hat{\mathbf{x}}_t$ com conjunto de suporte $\text{supp}(\hat{\mathbf{x}}_t)$. Considera-se que as variações no suporte entre dois instantes t seja muito pequena, ou seja:

$$|\text{supp}(\hat{\mathbf{x}}_t) \setminus \text{supp}(\hat{\mathbf{x}}_{t-1})| \approx |\text{supp}(\hat{\mathbf{x}}_{t-1}) \setminus \text{supp}(\hat{\mathbf{x}}_t)| \ll |\text{supp}(\hat{\mathbf{x}}_t)|, \quad (2.8)$$

em que \setminus denota a operação de diferença entre conjuntos e $||$ é a cardinalidade do conjunto.

Essa nova formulação permite o desenvolvimento de algoritmos que explorem as reconstruções de instantes anteriores para auxiliar na reconstrução do sinal \mathbf{x}_t no instante atual t [7]. Assim, esses algoritmos utilizam uma quantidade maior de informação quando comparados à aplicação de soluções tradicionais em *CS* que trata cada \mathbf{x}_t independentemente, permitindo menores tempos para obtenção da reconstrução [7].

2.2 Domínios para representação esparsa

O domínio esparsificante a ser utilizado em uma aplicação de *Compressive Sensing* é definido a partir das características dos grupos de sinais de interesse. Deve-se escolher a transformada linear que consiga concentrar a informação dos sinais trabalhados de forma a representá-los com a menor quantidade de coeficientes não-nulos possível. A seguir são descritos os três tipos de transformadas que foram exploradas neste trabalho.

A Transformada de Fourier foi utilizada nos primeiros experimentos com sinais simulados, que objetivavam reproduzir o trabalho de [10]. Os outros dois domínios foram aproveitados no contexto de sinais de Eletrocardiografia e, portanto, se aproveitaram de características específicas dessa classe de sinais.

2.2.1 Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é uma das ferramentas matemáticas mais importantes para a engenharia atual. Seu uso é recorrente em áreas como comunicação, controle e processamento de sinais. Por meio dela, pode-se analisar um sinal de interesse a partir das magnitudes e fases de componentes básicos de frequência. Isto é possível pois o sinal é representado em uma base de funções exponenciais complexas do formato $b(t, f) = e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft)$, onde $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, t e f são os índices que indicam os domínios de tempo e frequência, respectivamente.

Existem várias formulações para a Transformada de Fourier, que consideram diferentes conjuntos de domínio (tempo) e contradomínio (frequência). Em aplicações com computação digital é comumente utilizada a Transformada Discreta de Fourier (DFT), que leva um sinal no tempo discreto de tamanho finito N a um conjunto discreto de frequências de mesma dimensão. Além das possibilidades que a representação em frequência traz, o desenvolvimento de algoritmos rápidos para seu cálculo foi um importante fator para a popularização da DFT em trabalhos de eletrônica digital.

Dado um sinal $x[n]$ de dimensão N sua DFT $X[k]$ é definida por

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}, \quad \forall k \in [0, N-1]. \quad (2.9)$$

2.2.2 Wavelets

Ao analisar um sinal a partir de sua Transformada de Fourier são evidenciadas informações diferentes daquelas vistas no domínio do tempo. As *wavelets* são uma família de bases que possibilitam a representação do sinal a partir de diferentes resoluções e escalas de visualização. Dessa forma, pode-se observar eventos de alta frequência mantendo-se a noção do instante no tempo em que ocorre e não apenas a magnitude desta componente [28].

Uma forma de se compreender a obtenção dos coeficientes de *wavelets* de um sinal é por meio do uso de bancos de filtros. De maneira simplificada, essas estruturas podem ser entendidas como um conjunto de filtros passa-banda com diferentes faixas de passagem. Cada um é construído a partir de combinações específicas de dois filtros: um passa-baixas e outro passa-altas, projetados conjuntamente de forma a possibilitar a reconstrução do sinal a partir de subamostragens de suas saídas. Sob essa perspectiva, a transformada de *wavelets* de um sinal é dada pelos coeficientes subamostrados nas saídas dos filtros passa-banda.

Cada par de filtros passa-altas e passa-baixas define uma família de *wavelets* diferente. As famílias de Daubechies (de 1 a 22), por exemplo, são tipicamente utilizadas em aplicações com sinais biomédicos. Nesses casos, é comum que as funções de base tenham formatos visualmente semelhantes aos recorrentes nos sinais trabalhados [29].

2.2.3 Domínio elaborado por Análise de Componentes Principais

A definição de transformadas esparsificantes pode se valer de abordagens estatísticas em situações em que são conhecidos alguns sinais pertencentes à classe da qual se deseja uma base para representação esparsa. A Análise de Componentes Principais (PCA) é uma técnica que se insere neste contexto. Esta ferramenta matemática, a partir de realizações de um processo estocástico, fornece uma base ortogonal que minimiza a quantidade de coeficientes não-nulos necessários para representação de um vetor deste espaço.

Parte-se da hipótese de que a maior parte das posições dos vetores são correlacionadas. Em termos de informação, a correlação entre variáveis aleatórias pode ser vista como redundância. Assim, o objetivo é encontrar uma base que diga respeito a um novo processo estocástico, em que a correlação entre suas variáveis aleatórias seja a mínima possível [30]. Se considerarmos que o nosso sinal de interesse, aquele que desejamos reconstruir, é a realização de um vetor aleatório \mathbf{X} com matriz de covariância $\mathbf{c}_{\mathbf{X}}$, obtemos com PCA uma matrix \mathbf{T} que define o vetor $\mathbf{Y} = \mathbf{TX}$, cuja matriz de covariância $\mathbf{c}_{\mathbf{Y}}$ é diagonal. As matrizes de covariância dos vetores aleatórios \mathbf{X} e \mathbf{Y} relacionam-se pela

igualdade

$$\mathbf{c}_Y = \mathbf{T}\mathbf{c}_X\mathbf{T}^H, \quad (2.10)$$

onde \mathbf{T}^H é a matriz Hermitiana de \mathbf{T} .

A Análise Principal de Componentes é, portanto, um problema de diagonalização de operador. Desta forma, a matriz \mathbf{T} é formada pelos autovetores de \mathbf{c}_X dispostos em colunas e \mathbf{c}_Y tem em sua diagonal os autovalores associados. Convencionou-se que os autovalores em \mathbf{T} são normalizados e ordenados da esquerda para direita seguindo a ordem decrescente de seus autovalores correspondentes. Assim, os primeiros coeficientes do vetor são aqueles mais significativos (com maior variância). Para que se realize este procedimento é necessário primeiro que se calcule a covariância do conjunto amostral.

2.3 Filtro de Kalman

A técnica de filtragem de Kalman tem suas primeiras aplicações no contexto das engenharias de controle e de comunicação [31]. É utilizada, por exemplo, em problemas de rastreamento de trajetória e como componente de *phase locked loops* em receptores e transmissores para sistemas de comunicação [32]. Este algoritmo estima as variáveis de um processo descrito na forma de um sistema linear [33]. Para tanto, são utilizados o modelo matemático do sistema e as medidas adquiridas, que intrinsecamente ao procedimento de aquisição possuem algum tipo de ruído.

O filtro de Kalman é um estimador *Bayesiano*. Neste sentido, seu funcionamento fundamenta-se na observação de estados anteriores para a estimativa de um atual a partir de um comportamento estatístico [32]. Entende-se por estado o conjunto de variáveis (geralmente representados vetorialmente) que descrevem a condição interna de um sistema em dado instante de tempo [31].

Inicialmente, é necessário elaborar um modelo para o processo em análise na forma de um sistema linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que \mathbf{x} é o vetor de estados do sistema, \mathbf{y} são as medidas tomadas, \mathbf{F} é a matriz de estados do sistema e \mathbf{H} é a matriz de saída. Os vetores \mathbf{w} e \mathbf{v} são ruídos referentes, respectivamente, ao processo e a tomada das medidas na saída. Estes ruídos são modelados com uma distribuição gaussiana de média zero e com matrizes de covariância \mathbf{Q} e \mathbf{R} . O índice k indica o instante avaliado [31, 32].

As informações sobre o sistema em um dado instante k estão no vetor \mathbf{x}_k , porém estes valores não podem ser lidos diretamente, eventualmente não possuem nem mesmo algum significado físico [33]. O vetor \mathbf{y} , cujas entradas são combinações lineares de \mathbf{x} corrompidas por \mathbf{v} , pode ser medido. Os valores de tais medidas são utilizados pelo algoritmo do filtro para obter uma melhor estimativa de \mathbf{x} [31].

A Equação (2.11) nos permite conhecer a dinâmica do sistema. Isto possibilita a implementação de equações que descrevem a propagação do valor esperado do estado e de sua covariância [31, 32]. As equações seguintes derivam da aplicação do teorema de *Bayes* ao sistema [32, 34]:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^* &= E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}] \\ &= \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^* \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1},\end{aligned}\tag{2.12}$$

em que \mathbf{x}_k^* é a estimativa do vetor \mathbf{x} no instante k , dada pela esperança estatística; \mathbf{P}_k é a matriz de covariância do erro da estimativa no instante k e E é o operador esperança [31].

Depois que o estado \mathbf{x}_k é estimado, seu valor, bem como o de sua covariância P_k , é atualizado ao se obter uma nova medida \mathbf{y}_k . Denomina-se estimativa *a priori* o valor \mathbf{x}^* conseguido com a Equação (2.12) e estimativa *a posteriori* a atualizada com base em uma nova observação. Inserem-se as notações: $\mathbf{x}_{k|k-1} = \mathbf{x}_{k-1}^*$, $\mathbf{P}_{k|k-1}$, para a estimativa do estado *a priori* e a matriz de covariância de seu erro; e $\mathbf{x}_{k|k}$ e $\mathbf{P}_{k|k}$, para estimativa *a posteriori* e a matriz de covariância de seu erro, que são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_{k-1}^{-1} \\ \mathbf{x}_{k|k} &= \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{x}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1},\end{aligned}\tag{2.13}$$

o termo \mathbf{K}_k é uma matriz intermediária para os demais cálculos, denominada como matriz de ganho. A Equação (2.13) é decorrente da aplicação do método de mínimos quadrados recursivo nos resultados *a priori* [31].

A expressão $\mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_{k|k-1})$ na equação da estimativa *a posteriori* é chamado de termo de correção [33]. Os valores contidos nesta matriz dizem respeito à “confiabilidade” atribuída às medidas observadas. De forma que quanto maior o efeito do ruído \mathbf{v} em \mathbf{y} , maior serão os valores de covariância vistos em \mathbf{R} e menor a contribuição de y_k na atualização dos estados. Ou seja, conhecer bem a natureza dos ruídos envolvidos no processo possibilita ponderar as contribuições do modelo matemático e das medidas observadas na resposta do filtro [31].

2.4 Filtro de Kalman Adaptativo Baseado em *Compressive Sensing*

Sinais de *streaming* demandam um processamento contínuo. A maior parte dos algoritmos baseados em CS não possuem resultados efetivos nesse contexto; uma vez que, geralmente, tratam o sinal como um vetor de tamanho finito [35]. Uma abordagem possível é modelar o problema com janelas deslizantes. Ou seja, o método de reconstrução é aplicado a trechos do sinal que possuem intersecção entre si [8]. Esta forma de modelar o problema pode ser entendida sob a perspectiva de *Compressive Sensing* Dinâmico.

Em [9] é proposto o uso de filtragem de Kalman para reconstrução esparsa de sinais de *streaming*. Em [10] é desenvolvido um modelo Gaussiano de Markov para sinais K -esparsos no domínio de Fourier adquiridos por meio de um *Analog-to-Information Converter* (AIC) e propõe o *Adaptive CS-KF* como solução. O AIC é uma forma de se adquirir sinais por *Compressive Sensing*. Sua versão discreta é dada por

$$\mathbf{y}[m] = \sum_{n=mR}^{(m+1)R-1} \mathbf{x}[n]\mathbf{p}[n], \quad (2.14)$$

em que \mathbf{y} , de tamanho M , é a saída do AIC e \mathbf{x} , de tamanho N sua entrada. O valor R é a constante de proporcionalidade entre as dimensões da entrada e saída ($N = MR$). Por fim, \mathbf{p} é um vetor cujas as entradas são ± 1 sorteados aleatoriamente.

A Figura 2 ilustra o funcionamento do AIC. No exemplo foram adotados $R = 4$ e $M = 4$. Pode-se ver duas janelas que sobrepostas. O sinal na parte de cima corresponde ao vetor \mathbf{x} e o visto na parte de baixo representa o vetor \mathbf{y} . Para designar a k -ésima janela será utiliza-se a notação \mathbf{x}_k , para o sinal na entrada do AIC e \mathbf{y}_k para o sinal na saída.

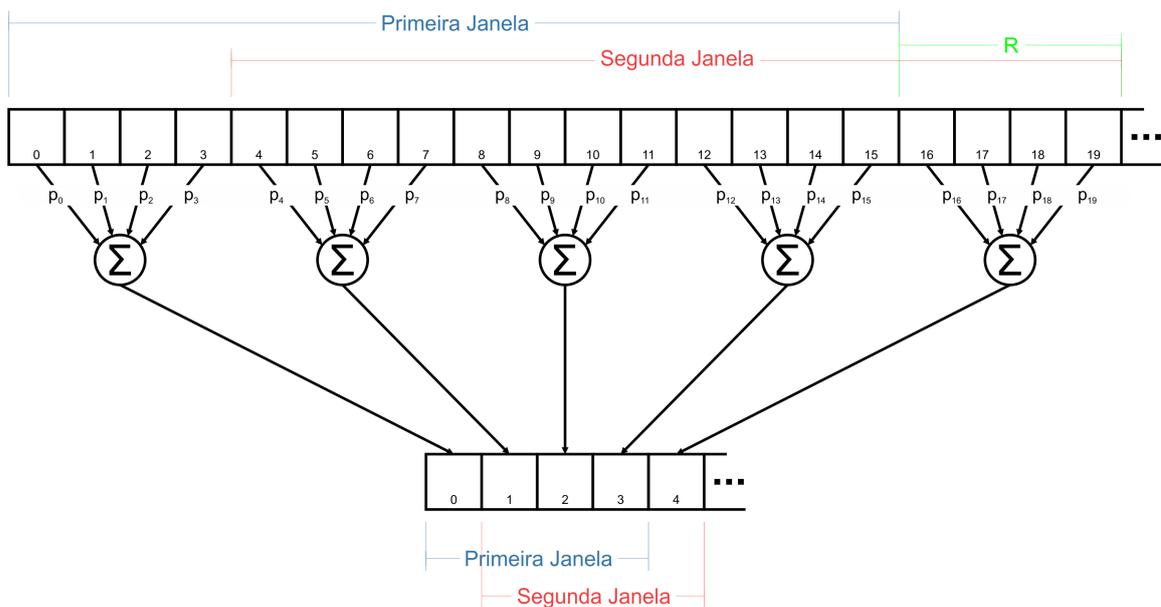


Figura 2 – Esquematização do funcionamento do AIC discreto. Exemplo considerando $M = R = 4$.

onde $\mathbf{H}_{k-1} = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{F}^{-1}$ e $\Phi = \Lambda^R$.

Uma vez estabelecidas as equações do filtro, é definida a maneira que algoritmo funcionará. A janela $k - 1$ reconstruída é a saída do filtro $\mathbf{X}_{k-1|k-1}$, o suporte dela é dado como informação para reconstrução da janela k seguinte. O conjunto de suporte estimado Ω é formado pela união do suporte da janela $k - 1$ anterior com as posições dos K maiores valores do vetor $\mathbf{p}_k = \mathbf{H}_{k-1}^H \mathbf{r}_k$, em que $\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{H}_{k-1}\mathbf{X}_{k-1}$ é chamado de resíduo e diz respeito as variações no suporte entre duas janelas consecutivas. Para a inicialização do algoritmo é tomado como suporte as posições dos K maiores valores de $\mathbf{p} = (\mathbf{H}_1)^H \mathbf{y}_1$.

Os termos presentes nas equações do modelo e do filtro podem ser observados também nos sinais de entrada e saída do AIC. O estado $\mathbf{X}_{k|k}$ é a transformada de Fourier de cada janela \mathbf{x}_w na entrada do AIC (sinal representado na parte de cima da Figura 2), enquanto as observações \mathbf{y}_k são a saída do AIC (sinal visto na parte inferior da Figura 2). Por último, a matriz Φ diz respeito a atualização entre duas janelas consecutivas devido ao deslocamento de R entradas que há entre elas.

3 Materiais e Métodos

Este trabalho explora técnicas de reconstrução de sinais modeladas a partir de *Compressive Sensing* dinâmico. Tomou-se como ponto de partida a implementação do Filtro de Kalman Adaptativo Baseado em CS desenvolvido por [10], que apresenta uma solução no contexto de *streaming* para sinais esparsos no domínio de Fourier.

O algoritmo foi inicialmente testado com sinais sintéticos que possuíam as características de esparsidade e aquisição consideradas no desenvolvimento do modelo. Posteriormente, foi testado com sinais reais de eletrocardiograma (ECG), disponíveis em [36, 37]. Uma vez que nesta segunda situação os sinais não atendem rigorosamente as condições para reconstrução, foram propostas modificações ao algoritmo, as quais serão detalhadas e melhor discutidas nos próximos tópicos.

A Figura 3(a) mostra o sistema de aquisição empregado, enquanto na Figura 3(b) são esquematizados os métodos de reconstrução avaliados. Todos os algoritmos aqui descritos foram implementados em linguagem Python. Os códigos contemplam: (i) a geração dos sinais sintéticos, (ii) condicionamento e aquisição dos sinais seguindo a estrutura do AIC, (iii) algoritmos de reconstrução e (iv) análise de resultados. Parte do desenvolvimento ocorreu a partir de resultados parciais e, portanto, serão feitos alguns comentários breves a seu respeito neste Capítulo.

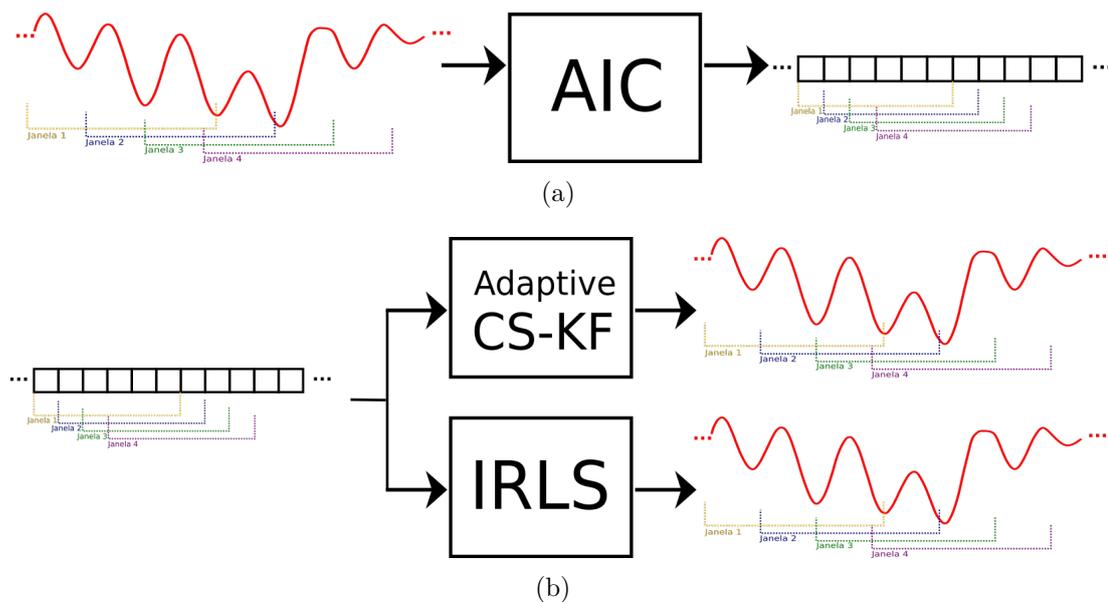


Figura 3 – Visão geral do sistema estudado. Em (a) é vista a aquisição a partir o AIC e em (b) estão representados os métodos de reconstrução *Adaptive CS-KF* (algoritmo avaliado) e *IRLS* (algoritmo usado como parâmetro de comparação).

3.1 Conjuntos de sinais

Os algoritmos foram desenvolvidos e testados com três diferentes conjuntos de sinais. O primeiro deles é formado pelos sinais sintéticos esparsos em *Fourier*, enquanto os dois últimos são compostos por sinais reais oriundos de duas bases de dados abertas.

- **Conjunto 1:** Composto por 150 sinais gerados aleatoriamente, todos com esparsidade $K = 10$. Suas medidas foram tomadas com $M = 100$ e $R = 5$ e adicionadas de ruído gaussiano branco.
- **Conjunto 2:** Formado por 42 sinais de ECG de diferentes dimensões e adquiridos a uma taxa de 125 Hz , retirados do banco de dados *Medical Information Mart for Intensive Care II* (MIMIC II) [36]. Foram tomadas medidas com alguns valores de M e R em diferentes momentos.
- **Conjunto 3:** São 1000 fragmentos de 10 segundos de sinais de ECG amostrados a uma taxa de 360 Hz , foram retirados do banco de dados *MIT-BIH Arrhythmia database* [37]. Diferentes medidas também foram tomadas variando os valores de M e R .

3.1.1 Geração dos sinais sintéticos

O primeiro conjunto de sinais foi gerado sinteticamente com o objetivo de se observar o funcionamento do *Adaptive CS-KF* nas condições ideais em que foi projetado. Ou seja, com janelas esparsas no domínio de Fourier e com uma esparsidade K conhecida. O Algoritmo 1 descreve a geração desse sinal. Assume-se que o sinal gerado corresponde a um processo de amostragem convencional que obedeceu o critério de Nyquist. Assim, determinar um valor f_s de frequência de amostragem não traz consequências ao funcionamento do algoritmo, apenas define uma escala de tempo. O suporte é sorteado seguindo uma distribuição em que todas as posições do sinal são equiprováveis, a única limitação observada é quanto a simetria que deve ser obedecida no domínio da frequência para que o sinal seja real no domínio do tempo.

A geração é iniciada nas linhas entre 2 e 12. Nessas linhas, um suporte é sorteado para cada uma das W janelas. Então, um sinal de tamanho $R(M + W - 1)$ no domínio do tempo é gerado aleatoriamente por meio de uma distribuição Normal de com média zero e variância um (linha 13 no Algoritmo 1). Depois, esse sinal é multiplicado por um ganho, nos exemplos gerados adotou-se um valor de 10^{-1} . Nas linhas 15 a 21, executa-se um laço que: (i) percorre as janelas calculando suas respectivas Transformadas de Fourier e (ii) substitui por zero os elementos fora do suporte. Esse processo é repetido por uma quantidade de vezes pré-definida. Finalmente, na linha 22, o sinal desejado é obtido

Algoritmo 1: Geração de Sinais Iterativamente

Entrada: $K, M, R, W, \text{ganho}, p, q, n, \text{passo}$;
Saída: \mathbf{x}, \mathbf{X} ;

- 1 **início**
- 2 $\text{sup} \leftarrow$ lista vazia para guardar os suportes de todas as janelas;
- 3 É sorteado o suporte da primeira janela (respeitando simetria necessária) e adicionado à lista sup ;
- 4 **repita**
- 5 $\text{aux} \leftarrow$ valor aleatório entre 0 e 1
- 6 **se** $\text{aux} \leq p$ **então**
- 7 Uma cópia do último suporte é adicionado à lista sup ;
- 8 **senão**
- 9 $\text{aux} \leftarrow$ vetor com q posições, cujos valores são inteiros sorteados no intervalo $[-\text{passo}, \text{passo}]$;
- 10 Insere-se um novo elemento à lista sup , calculado como sendo o suporte anterior com os q primeiros elementos somados ao vetor aux ;
- 11 **fim**
- 12 **até** gerar um suporte para cada uma das W janelas;
- 13 $\mathbf{x} \leftarrow$ vetor aleatório com $R * (M + W - 1)$ posições sorteadas aleatoriamente seguindo uma distribuição normal com média zero e variância um;
- 14 $\mathbf{x} \leftarrow \text{ganho} * \mathbf{x}$;
- 15 **repita**
- 16 **repita**
- 17 $\mathbf{X}_{\text{atual}} \leftarrow$ transformada de Fourier da janela atual;
- 18 Elementos de $\mathbf{X}_{\text{atual}}$ fora do suporte são zerados;
- 19 A transformada inversa de Fourier de $\mathbf{X}_{\text{atual}}$ é colocada nas posições correspondentes em x
- 20 **até** Percorrer todas as W janelas;
- 21 **até** realizar n iterações;
- 22 $\mathbf{X} \leftarrow \text{fft}(\mathbf{x})$
- 23 **fim**

calculando a DFT (como definida na Equação (2.9)) do sinal gerado pelo laço anterior, pela aplicação da Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Essa forma de gerar os sinais, entretanto, produz o mesmo suporte para todas as janelas. Assim, uma janela somente se distingue de outra quanto aos valores dos seus elementos, mas os não-nulos estão sempre no mesmo conjunto de posições.

3.1.2 Sinais de ECG

Os dois últimos conjuntos são compostos por sinais reais de ECG. Como a esparsidade desses varia ao longo do tempo, o teste de desempenho do *Adaptive CS-KF* é mais confiável do que aqueles realizados com os sinais artificiais gerados pelo Algoritmo 1.

A Figura 4 representa um sinal de eletrocardiografia com um ciclo cardíaco com-

pleto. Seu formato característico é resultado da composição de seis principais formas de onda (P, Q, R, S, T, U). Cada uma delas pode ser associada a uma etapa do movimento do coração. A onda P, por exemplo, diz respeito à despolarização atrial, enquanto a onda T representa a repolarização ventricular. O complexo QRS é a forma de onda mais pronunciada visualmente e também está relacionado à despolarização ventricular [11].

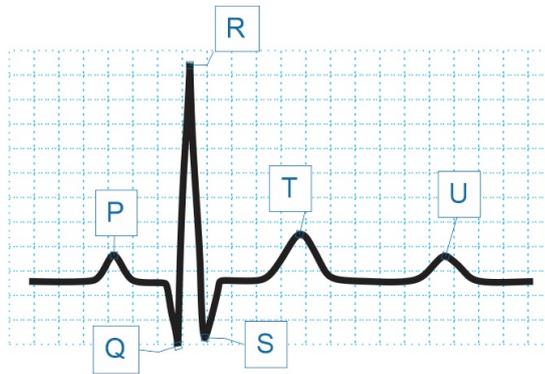


Figura 4 – Representação de um sinal de ECG. Modificado de [11].

3.1.2.1 Caracterização das bases de dados

O conjunto 2 consiste de 42 sinais selecionados aleatoriamente da MIMIC II, uma base extensa de sinais que foram coletados entre os anos de 2001 e 2008. Em [38], são selecionados e reorganizados 5599 trechos de sinais amostrados a 125 Hz , de onde foram retirados os sinais aqui utilizados.

Depois de obtidos alguns resultados com o conjunto 2, decidiu-se por realizar uma busca por outro conjunto de dados que fosse amostrado com uma maior frequência, visto que a taxa de 125 Hz é baixa dentre os valores típicos para aquisição de ECG.

O conjunto 3 é uma base de dados elaborada pela *Elsevier* a partir de uma seleção aleatória de 1000 trechos distintos de sinais da *MIT-BIH Arrhythmia database*. As coletas foram realizadas entre os anos de 1975 e 1979. As digitalizações se deram com frequência de amostragem de 360 Hz e 11 bits de resolução no intervalo entre $\pm 5\text{ mV}$. Os sinais são de 45 pacientes de 23 a 89 anos, sendo 19 mulheres e 26 homens. A base encontra-se dividida em 17 categorias, as duas primeiras referentes aos pacientes com ritmo sinusal normal e a usuários de marca-passo, os demais grupos referem-se a disfunções cardíacas.

Dento do conjunto 3, o grupo “NSR”, com 283 sinais, foi selecionado para a aquisição de medidas e, conseqüentemente, execução das reconstruções. Eles apresentam ritmo sinusal normal. A transformada esparsificante gerada pela PCA tomou como amostras os 135 sinais do grupo “AFIB”, que corresponde aos pacientes com Fibrilação Atrial.

Ambos conjuntos disponibilizam os sinais em formato “.mat” e passaram, para fins deste trabalho, por uma etapa de padronização de arquivo, afim de facilitar sua leitura

pelas bibliotecas em *Python*.

3.1.2.2 Condicionamento dos sinais

Inicialmente, buscou-se cumprir o critério de esparsidade no domínio de Fourier, pois isso permite aplicar o *Adaptive CS-KF* na sua formulação original. Assim, antes de tomar as medidas do conjunto 2, seus sinais foram condicionados para obter suas versões esparsificadas. O condicionamento pode ser visto como uma filtragem de frequências e é executado do seguinte modo: a princípio, faz-se a Transforma de Fourier do sinal; depois, encontra-se a maior magnitude dentre os componentes; por último, reduzem-se a zero todas as componentes com magnitude menor que 50% daquela máxima. A Figura 5 apresenta um dos sinais no tempo do conjunto 2 antes e depois de ser condicionado.

O condicionamento compromete significativamente a informação contida no sinal. Na Figura 5, por exemplo, a SNR entre os sinais antes e depois do processo é de 4,2 *dB*. Entretanto, os testes realizados com esse conjunto de sinais foram oportunos porque possibilitaram conhecer o comportamento do algoritmo em um contexto em que os sinais não são rigorosamente esparsos. Esse conhecimento possibilitou que se realizassem melhorias ao algoritmo. Posteriormente, com os conjuntos 2 e 3, foram realizadas reconstruções utilizando outros domínios esparsificantes.

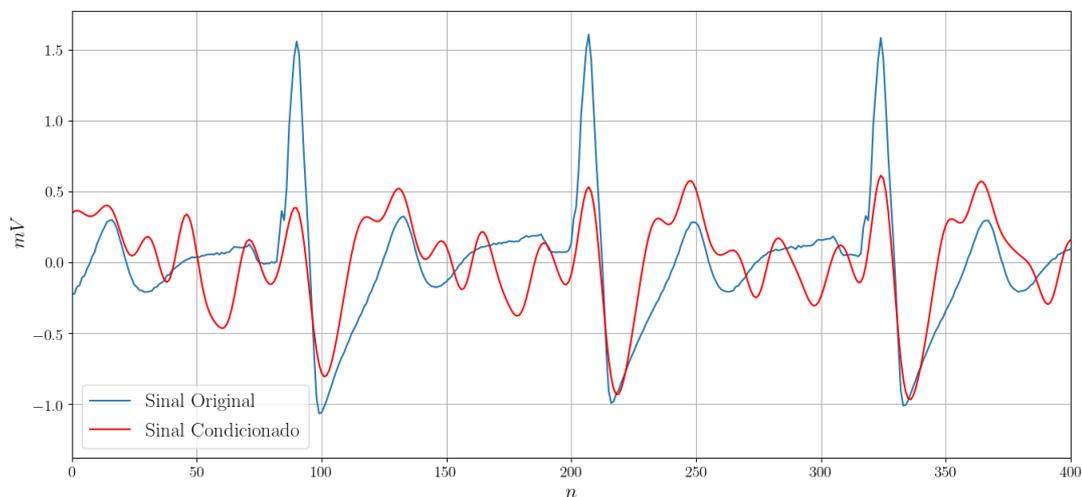


Figura 5 – Primeiras 400 amostras do sinal 8 do conjunto 2 (azul) e sua versão condicionada (vermelho) para testes com *Adaptive CS-KF* utilizando o domínio de Fourier.

3.2 Aquisição das medidas

A aquisição é feita da mesma maneira para todos os conjuntos, por meio do AIC. As operações matriciais correspondentes a esta estrutura não são executadas explicitamente, mas por meio de laços que percorrem o sinal e realizam os somatórios conforme indicado na

Figura 2. O AIC (Algoritmo 2) recebe como entrada o sinal a ser amostrado no domínio do tempo. Em seguida, cria o vetor aleatório p e inicia um laço para percorrer o sinal somando as R consecutivas amostras multiplicadas pelos valores de p nas posições correspondentes. O vetor \mathbf{v} é um ruído gaussiano branco que é somado às medidas.

Algoritmo 2: Analog to Information Converter

Entrada: $\mathbf{x}, R, \text{ganho}$
Saída: \mathbf{y}, \mathbf{p}

```

1 início
2    $N \leftarrow \text{length}(\mathbf{x})$ 
3    $\mathbf{p} \leftarrow$  vetor de  $N$  entradas com valores 1 ou  $-1$  sorteados aleatoriamente
4   inicializa  $\mathbf{y}$  com um vetor nulo com  $N/R$  entradas
5    $i \leftarrow 0$  (contador para laço)
6   repita
7      $\mathbf{y}[i] \leftarrow \sum_{n=iR}^{(i+1)R-1} \mathbf{x}[n]\mathbf{p}[n]$ 
8      $i \leftarrow i + 1$ 
9   até  $i = N/R$ ;
10   $\mathbf{v} \leftarrow$  vetor aleatório (distribuição normal com média zero e variância um) com
    a mesma dimensão de  $\mathbf{y}$  multiplicado por  $\text{ganho}$ ;
11 fim
  
```

As amostras \mathbf{y} na saída do AIC correspondem às medidas obtidas por um sistema de aquisição. Na recepção, para que se reconstrua o sinal \mathbf{x} , além de \mathbf{y} , deve se conhecer o vetor p e as covariâncias \mathbf{R} e \mathbf{Q} das matrizes \mathbf{v} e ξ do modelo (Equação 2.17). Tais matrizes são calculadas para cada um dos sinais gerados e possuem o seguinte formato:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sigma_R^2 I \\ \mathbf{Q} &= \sigma_Q^2 I, \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que σ_R^2 e σ_Q^2 são as variâncias calculadas a partir dos sinais dos conjuntos [9].

3.3 Métricas para avaliação dos resultados

Os resultados das simulações foram avaliados segundo as métricas aqui definidas. A partir delas, serão realizadas comparações pontuais (para alguns sinais) de desempenho com a reconstrução por IRLS. Diferentes cenários, com respeito a quantidade de ruído nas medidas, foram avaliados.

Depois de obtido o sinal reconstruído, é possível compará-la diretamente com sinal original (aquele usado para se obter as medidas). Para tanto, são utilizadas duas métricas:

(i) o Erro Quadrático Médio (EQM) e (ii) a Relação Sinal Ruído (SNR). Eles são definidas, respectivamente, para cada janela w , pelas equações

$$\text{EQM}_w = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{x}_w[n] - \mathbf{x}_w^*[n])^2 \quad (3.2)$$

$$\text{SNR}_w = 20 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{x}_w[n]|}{\sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{x}_w[n] - \mathbf{x}_w^*[n]|} \right). \quad (3.3)$$

Tais métricas poderão ser utilizadas na avaliação da qualidade de reconstrução de um sinal, mostrando, por exemplo, sua evolução ao longo das janelas. Porém, também é de interesse utilizá-las para avaliar a tendência do comportamento para os conjuntos de sinais. Pode-se, por exemplo, calcular a EQM e SNR média de todas as janelas de todos os sinais.

3.4 Implementações para sinais sintéticos

Foram reproduzidas duas variações do algoritmo de [10]: (i) *Genie* CS-KF, que conhece o suporte das janelas a serem reconstruídas; e (ii) *Adaptive* CS-KF, que estima o suporte de cada janela.

Ambos os filtros recebem as medidas \mathbf{y} , as matrizes de covariância \mathbf{R} e \mathbf{Q} , a matriz Φ e a matriz de reconstrução \mathbf{H} . O *Adaptive* CS-KF é mostrado no Algoritmo 3. Na linha 5 é calculado o resíduo \mathbf{r}_k a partir da diferença entre a janela anterior y_{k-1} e as amostras que são obtidas a pela janela reconstruída $\mathbf{y}_{k-1}^* = \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{X}_{k-1}$. O suporte para cada nova janela k é então estimado na linha 7, como sendo a união entre o suporte da janela anterior e a posição dos K maiores valores no vetor $\mathbf{p}_k = \mathbf{H}_{k-1}^H \mathbf{r}_k$, previamente calculado na linha 6. Para a primeira janela assume-se que $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1$ e $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$ e o suporte é iniciado como um conjunto vazio.

A cada nova iteração, o filtro de Kalman (Equações (2.18)) é executado para a janela atual conforme visto na linha 8. Entretanto, essa operação ocorre apenas nas posições do suporte, ou seja, escolhe-se as submatrizes de \mathbf{Q} , \mathbf{P} , Φ , \mathbf{H} e \mathbf{X} selecionando as linhas ou colunas que correspondem ao suporte estimado. Na saída obtêm-se a a janela reconstruída $\mathbf{X}_{k|k}$ e a matriz $\mathbf{P}_{k|k}$. As posições fora do suporte são preenchidas com valor nulo. Há apenas uma diferença entre o *Adaptive* CS-KF e *Genie* KF: para esse último não são executadas as linhas 5, 6 e 7 do Algoritmo 3. O suporte real das janelas é dado como entrada para o *Genie* CS-KF e, portanto, não é necessário que seja estimado.

Conforme será mostrado no Capítulo 4, ao observarmos a evolução do Erro Quadrático Médio, comumente são atingidos, a partir de algum instante, valores extremamente

Algoritmo 3: Filtro de Kalman Adaptativo Baseado em CS

Entrada: \mathbf{x}, R ;
Saída: \mathbf{y}, \mathbf{p} ;

- 1 **início**
- 2 $aux \leftarrow \text{supp}(H^H \mathbf{y})_K$;
- 3 $\mathbf{P}_{0|0} \leftarrow$ Matriz com todos elementos nulos exceto por aqueles na diagonal principal com posições correspondentes às contidas em aux , preenchidos com 1;
- 4 **repita**
- 5 $\mathbf{r}_k \leftarrow \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_{k01} \mathbf{X}_{k-1}$;
- 6 $\mathbf{p}_k \leftarrow \mathbf{H}_{k-1}^H \mathbf{r}_k$;
- 7 $\Omega \leftarrow \text{supp}(\mathbf{p})_K \cup \Omega$;
- 8 Executa-se o filtro de Kalman nas posições do suporte (Equação (2.18)) e obtém-se $\mathbf{X}_{k|k}$ e $\mathbf{P}_{k|k}$. A janela reconstruída X_k é dada pelo vetor com os valores de $\mathbf{X}_{k|k}$ nas posições do suporte e zeros nas demais;
- 9 $\Omega \leftarrow \text{supp}(\mathbf{X}_k)_K$;
- 10 **até** todas as janelas serem reconstruídas;
- 11 **fim**

altos (da ordem de grandeza da energia do sinal), significando que o filtro deste momento em diante não consegue reconstruir satisfatoriamente as janelas. Devido a tal comportamento, propôs-se duas modificações ao algoritmo: (i) atualizar iterativamente a matriz de covariância e (ii) ponderar as medidas nas equações de atualização do filtro. Essas modificações resolveram, para a maioria dos sinais do conjunto 1, aquele problema, resultando em valores aceitáveis de EQM para todo o sinal estudado.

3.5 Implementações para sinais de ECG

Ao lidar com os sinais reais, perde-se uma das características que contribuiu para os resultados positivos com os sinais sintéticos: agora, as janelas não possuem mais o mesmo suporte, que passa a variar lentamente entre elas. Assim, a estimativa do tamanho K do suporte passa a ser mais significativa para a reconstrução. As implementações com os sinais de ECG foram realizadas em três diferentes domínios:

- **Domínio de Fourier:** com as mesmas implementações utilizadas para o conjunto 1, realizou-se testes no domínio de Fourier, com as versões condicionadas dos sinais do conjunto 2;
- **Domínio de Wavelets - Daubechies 4:** Para estes testes foi necessário a implementação de novas funções, que realizassem as transformações com operações matriciais. Também, o modelo utilizado pelo filtro foi modificado, pois o anterior era específico para o domínio de *Fourier*. Foram considerados os conjuntos 2 e 3 nas execuções;

- **Domínio desenvolvido a partir de Análise de Componentes Principais:** O algoritmo de reconstrução dos testes anteriores pode ser aproveitado, alterando-se apenas a matriz de transformação dada. Adotou-se apenas o conjunto 3, devido sua maior taxa de amostragem, com o objetivo de favorecer a aplicação da PCA. Então, o conjunto 3 foi subdividido em dois grupos, um dado para construção da transformada esparsificante e o outro para os testes de reconstrução.

3.5.1 Domínio de Fourier

Inicialmente, utilizaram-se os mesmos códigos feitos para o conjunto 1 com os sinais de ECG. Porém, os resultados obtidos foram inconsistentes: valores de SNR abaixo de 1 e EQM com ordem de grandeza similar ou superior à energia dos sinais. Isto já era esperado, uma vez que os sinais de ECG, mesmo após o condicionamento, não são rigorosamente esparsos no domínio de Fourier. Entretanto, ao utilizar o IRLS a cada janela independentemente, consegue-se reconstruções consideravelmente melhores do que as obtidas com o *Adaptive CS-KF*. A Figura 6 mostra, a título de exemplo, um trecho da primeira janela do sinal 25 do conjunto 2 após condicionamento e os resultados das reconstruções por IRLS, com SNR de 12,6 dB; e *Adaptive CS-KF*, com uma SNR negativa. Neste exemplo, as amostras foram coletadas com $M = 500$ e $R = 2$.

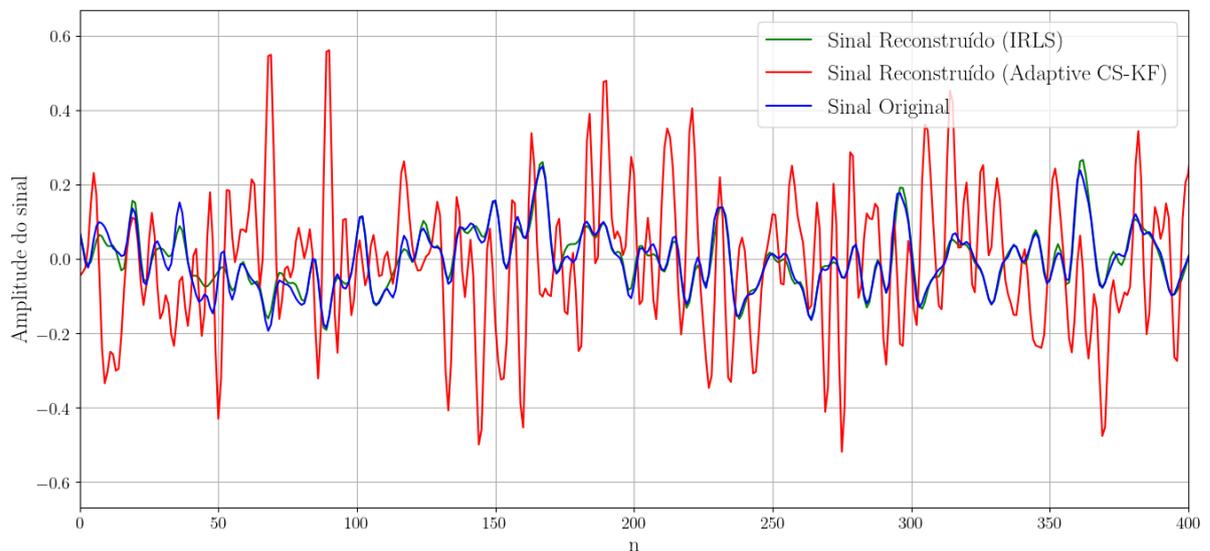


Figura 6 – Primeiras 400 amostras da primeira janela da versão condicionada do sinal 25 do conjunto 2 (azul) e suas reconstruções por IRLS (verde) e *Adaptive CS-KF* (vermelho).

Duas abordagens foram adotadas a partir da observação desses resultados parciais. O algoritmo passou a ser iniciado utilizando IRLS para reconstruir a primeira janela, e as demais seguindo a rotina do *Adaptive CS-KF* normalmente; pois desta maneira o filtro

de Kalman parte de uma estimativa mais acurada. Também, passou-se a normalizar a saída do filtro para uma janela com o valor RMS da reconstrução anterior. Esta segunda abordagem partiu das hipóteses (i) de que a energia entre uma janela e a seguinte é similar devido a grande intersecção entre elas e (ii) de que o filtro era capaz de manter as proporções corretas entre os componentes de sua saída.

Mesmo com as modificações no algoritmo, os resultados conseguidos com os sinais de ECG continuaram insatisfatórios. O EQM, por exemplo, apresentou comportamento crescente, ainda que mantendo níveis razoáveis (próximos ao conseguido pelo IRLS) nas primeiras janelas.

Por fim, foi testado outro formato para a matriz de covariância do modelo, já que a dada pela Equação (3.1) não contempla as correlações existentes entre as posições do sinal de ECG. A matriz \mathbf{Q} , dada como entrada ao filtro, foi calculada a partir das transformadas de Fourier das janelas de uma parte dos sinais condicionados, considerados como realizações de um processo estocástico. Com isso, o EQM deixou de ter comportamento crescente, mas oscilando em torno de níveis ainda altos.

Os resultados para este domínio não verificaram a reconstrução dos sinais, porém foram importantes para compreensão do efeito parâmetros, como estimativa inicial dada ao filtro e a matriz de covariância do modelo, no desempenho do algoritmo. As abordagens posteriores, utilizando outros domínios esparsificantes, desenvolveram-se levando estes aspectos em consideração.

3.5.2 Domínio de *Wavelets* e Análise de Componentes Principais

Os códigos para o algoritmo de reconstrução desenvolvidos até aqui utilizavam o modelo dado pelas Equações (2.16) e (2.17). Nesta última, a matriz $\mathbf{\Lambda}$ é definida a partir de um desenvolvimento específico para o domínio de Fourier. Assim, as equações do filtro e outros detalhes de implementação foram modificados para que as funções contemplassem qualquer transformada linear. Adotou-se, então, o modelo apresentado em [9], que foi a base para o desenvolvimento do *Adaptive CS-KF* e não restringe a transformada esparsificante. Assim, para os domínios de *Wavelets* e o dado por PCA, são utilizadas as seguintes equações para o filtro de Kalman, em substituição às Equações (2.18):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{P}_{k-1|k-1} + \mathbf{Q} \\
 \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \\
 \mathbf{P}_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \\
 \mathbf{X}_{k|k-1} &= \mathbf{X}_{k-1} \\
 \mathbf{X}_{k|k} &= \mathbf{X}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{X}_{k|k-1} \right).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Além de uma formulação diferente para o filtro, adotou-se um novo critério para estimação de suporte, que independe de conhecimento prévio a respeito de seu tamanho K . No trabalho original de [10], o valor de K é dado como entrada ao algoritmo e o suporte de uma janela reconstruída é estimado considerando as posições dos seus K maiores valores em módulo. Esta abordagem demanda maior conhecimento do comportamento de esparsidade da classe de sinais e desconsidera possíveis diferenças na cardinalidade do suporte de duas janelas distintas.

Nas execuções nos novos domínios, o suporte de uma janela foi estimado a partir de uma métrica calculada sobre a saída do filtro de Kalman. As posições cujo módulo fosse superior à média dos módulos de todas as posições do sinal são consideradas como elemento do suporte. Com esta nova formulação para o algoritmo, não é mais necessário uma estimativa inicial de K , que passa a se atualizar ao fim de cada iteração realizada.

As operações de transformada são agora realizadas matricialmente, portanto são necessárias duas novas funções para o cálculo das matrizes de mudança de base. No caso de Daubechies 4, é realizada a transformação de uma matriz identidade, considerando cada uma de suas colunas como um sinal. A construção da transformada realizando a Análise de Componentes Principais se dá conforme descrito anteriormente na seção 2.2.3.

Notou-se que, a partir dos resultados com o conjunto 2, o erro da reconstrução era maior quanto mais complexos QRS estivessem na janela. Portanto, as aquisições do conjunto 3 foram tomadas com $M = 200$ e $R = 2$, de forma que o sinal reconstruído tenha dimensão $N = 400$, que corresponde a aproximadamente um ciclo cardíaco.

A última versão do algoritmo de reconstrução elaborada neste trabalho tem a mesma estrutura geral de funcionamento que a apresentada no Algoritmo 3. Há, entretanto, algumas diferenças:

1. A operação $supp()$ não determina o suporte selecionando as K maiores entradas, mas observando o comportamento médio do sinal;
2. Ao final de uma iteração a matriz Q é atualizada conforme a variância da reconstrução, seguindo a Equação (3.1);
3. O Filtro de Kalman é dado agora pela Equação (3.4).

4 Resultados e Discussões

Os resultados conseguidos com o conjunto 3 são os mais relevantes obtidos em termos das métricas anteriormente descritas. Portanto, são eles os mais discutidos neste Capítulo. Alguns dos resultados parciais com os conjuntos 1 e 2 também são apresentados de forma sucinta, sem necessariamente explorar todas as métricas disponíveis. Isto será feito com o objetivo de elucidar o processo de desenvolvimento do algoritmo final. Deste modo, consegue-se expor a motivação para as modificações propostas, bem como perceber suas contribuições ao desempenho do algoritmo.

4.1 Sinais sintéticos

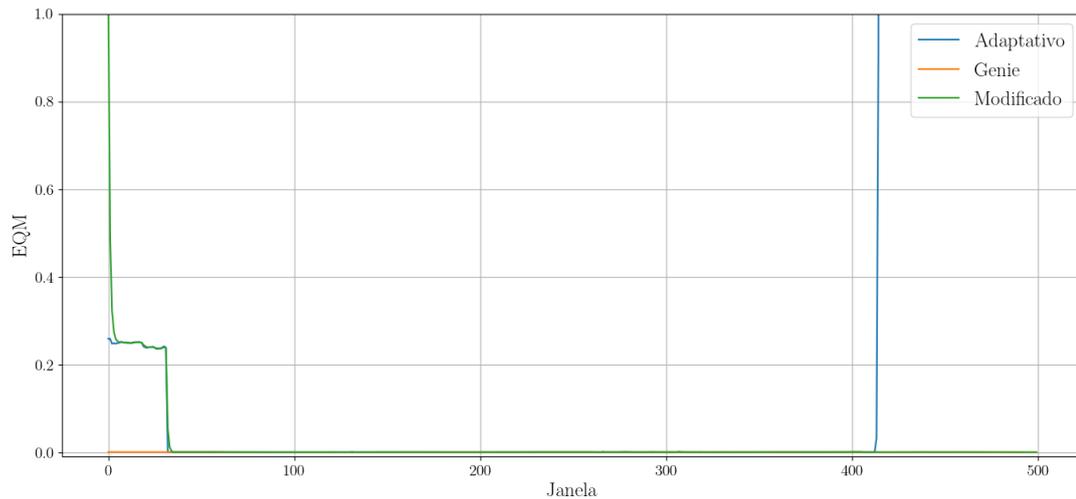
Ao observar a evolução da EQM ao longo das janelas das reconstruções pelo *Adaptive CS-KF* dos sinais do conjunto 1, um comportamento típico é o de se obter erros baixos ao longo das primeiras e a partir de algum instante verificar valores consideravelmente mais altos. Isto indica que, daquela janela em diante, o filtro não consegue reconstruir o sinal adequadamente.

Uma outra versão do *Adaptive CS-KF* é apresentada no trabalho [10]. Este segundo algoritmo alterna a forma de reconstrução entre o filtro de Kalman e *Orthogonal Matching Pursuit*, um método mais lento, porém que consegue uma reconstrução mais acurada. A primeira janela é reconstruída por OMP e posteriormente é utilizado um critério de *threshold* para decidir qual a forma de reconstrução para próxima janela. Esta abordagem foi pensada com o intuito de eliminar a necessidade de uma estimativa inicial para o tamanho do suporte. Apesar disto, ela também contribuí para um comportamento mais estável do EQM ao longo das janelas.

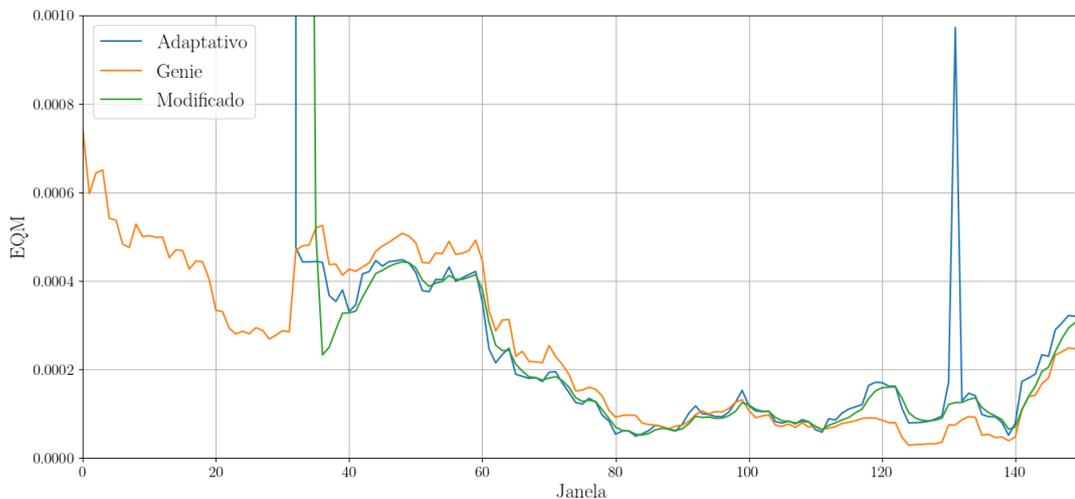
Devido ao fato deste algoritmo usar a OMP para algumas janelas, sua execução pode ter maior exigência computacional a depender do sinal. Portanto, propôs-se outra maneira de se tratar este problema verificado na EQM, que independesse do uso de outro algoritmo nos momentos em que a filtragem de Kalman não consegue convergência. São propostas as seguintes modificações:

1. Atualizar a cada nova janela a matriz de covariâncias \mathbf{Q} a partir da variância σ_Q^2 da reconstrução imediatamente anterior, utilizando também a Equação (3.1). O algoritmo é ainda inicializado com um valor médio de \mathbf{Q} calculado com as janelas do próprio sinal. Devido a grande intersecção entre as janelas, a covariância vista a partir da reconstrução anterior é mais representativa do que um valor médio;

2. Ponderar as parcelas correspondentes às medidas nas equações de atualização do filtro de Kalman com um fator de ponderação entre 0 e 1. Solução semelhante a utilizada em [39] para modelar situações em que há perdas das medidas durante sua transmissão. Isto faz com que o modelo de atualização estatística tenha maior peso no resultado da reconstrução.



(a) Primeiras 500 janelas



(b) Primeiras 150 janelas em detalhe

Figura 7 – Comparação, para as versões Adaptativa (azul), *Genie* (laranja) e Modificada (verde), da evolução do EQM ao longo das 500 primeiras janelas do sinal 10 do conjunto 1.

A Figura 7 mostra a evolução do EQM para as reconstruções das 500 primeiras janelas do sinal 10 do conjunto 1. Nos gráficos, podemos comparar o resultado de três diferentes algoritmos: (i) *Genie* CS-KF, (ii) *Adaptive* CS-KF e (iii) sua versão modificada aqui proposta, executada com 0,5 como fator de ponderação. Todos eles conseguem

atingir um EQM na ordem de grandeza de 10^{-4} . O filtro (i) apresenta um nível baixo de erro desde a primeira janela. Ele é apresentado apenas como métrica de comparação, já que conhece os conjuntos de suporte. Nota-se que o algoritmo (iii) precisa de algumas janelas a mais para alcançar os níveis mais baixos de erro. Pouco depois da janela 400 há um pico nas curvas. O algoritmo (iii) recupera-se algumas janelas depois, enquanto o algoritmo (i) não consegue reconstruir as janelas a partir de então.

A Figura 8 mostra, a título de ilustração, as reconstruções no domínio do tempo de trechos de duas diferentes janelas do sinal 10. A janela 60 (Figura 8(a)) está no trecho em que os dois algoritmos são bem sucedidos na reconstrução. Por outro lado, o *Adaptive CS-KF* falha ao reconstruir a janela 430 (Figura 8(b)), enquanto sua variação modificada é bem sucedida.

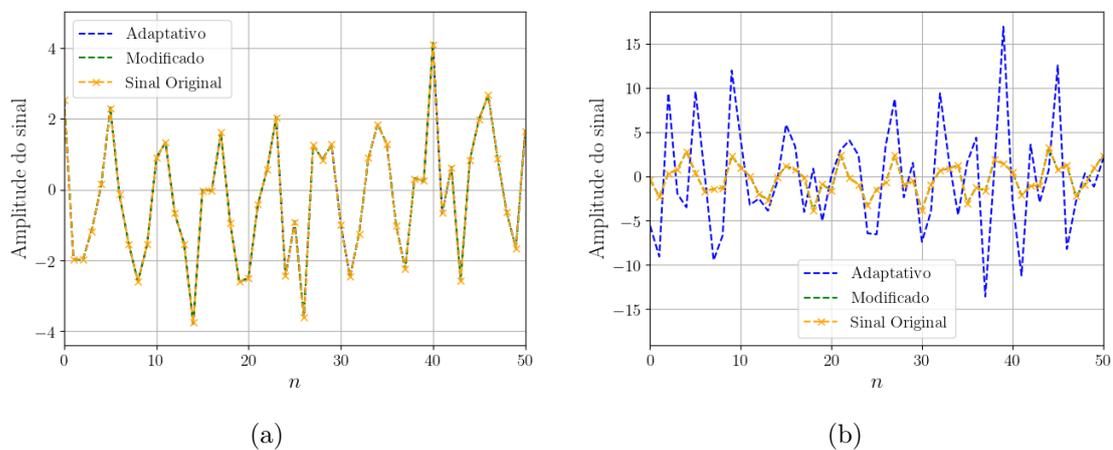


Figura 8 – Trechos das janelas 60 (a) e 440 (b) do sinal 10 do conjunto 1 reconstruídas pelo *Adaptive CS-KF* (azul) e por sua versão modificada com 0,5 como fator de ponderação (verde).

4.2 Sinais reais de ECG

Os sinais de ECG estão distribuídos em dois conjuntos distintos, que foram adquiridos a diferentes taxas. Suas reconstruções foram executadas tomando três possíveis domínios esparificantes. Partiu-se da versão modificada do algoritmo que foi apresentada no tópico anterior, adotando sempre os valores de variância como sendo $\sigma_Q^2 = \sigma_R^2 = 10^{-3}$ calculado com todos os sinais do conjunto em estudo.

4.2.1 Conjunto 2

As reconstruções para o Conjunto 2 foram estudadas em duas situações diferentes. Uma delas com as versões condicionadas para forçar esparsidade no domínio de Fourier; e a outra com os sinais originais no domínio de Daubechies 4.

As realizações no domínio de Fourier foram feitas com o algoritmo modificado. Conforme já comentado, as reconstruções conseguidas neste contexto são insatisfatórias, dado os elevados valores de EQM. Na Figura 9 são mostrados os resultados de duas reconstruções do sinal 8 do conjunto 2. A primeira considerou um fator de ponderação de 10^{-3} , ou seja, a etapa de atualização interfere pouco na saída do filtro, enquanto o modelo estatístico tem maior peso. A segunda execução considerou um fator de 10^{-1} , que ainda é baixo, mas que faz com que as medidas tenham maior influência sobre a resposta.

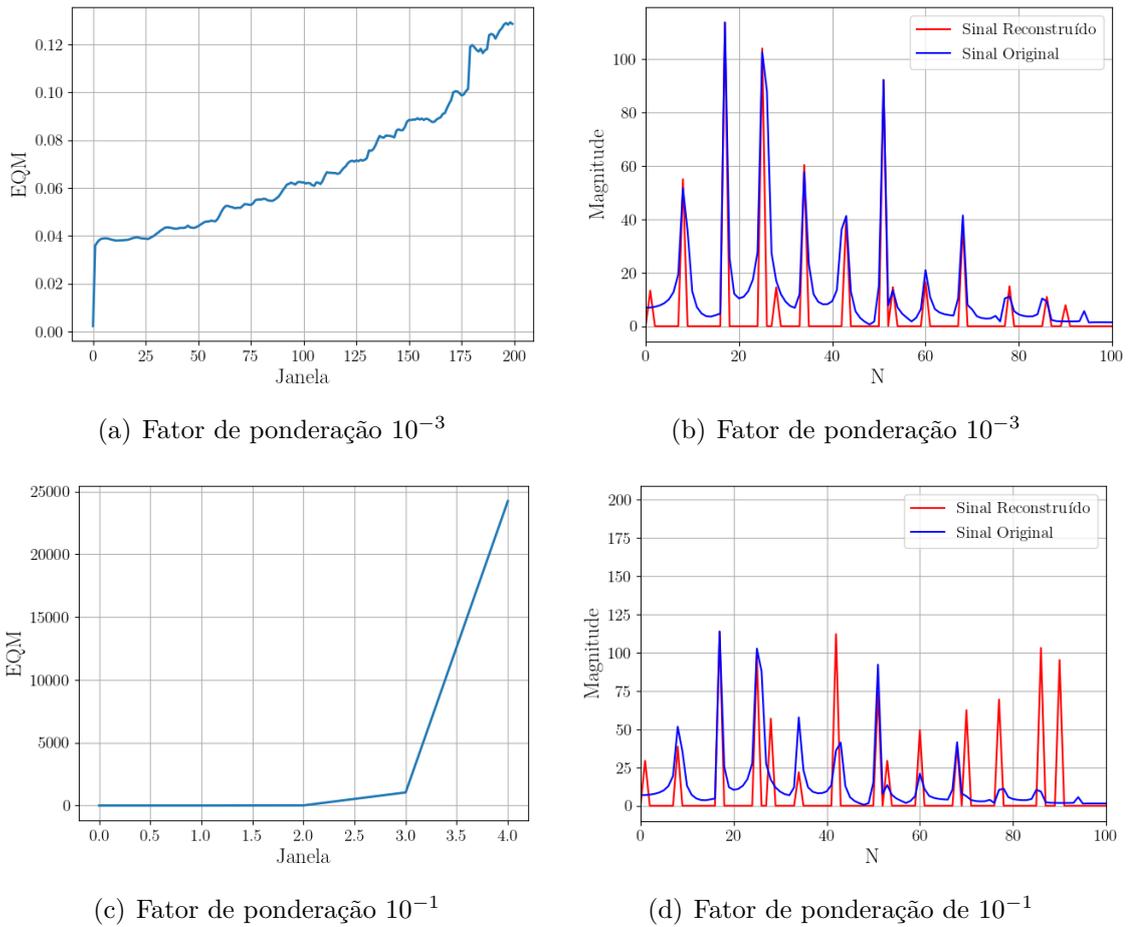
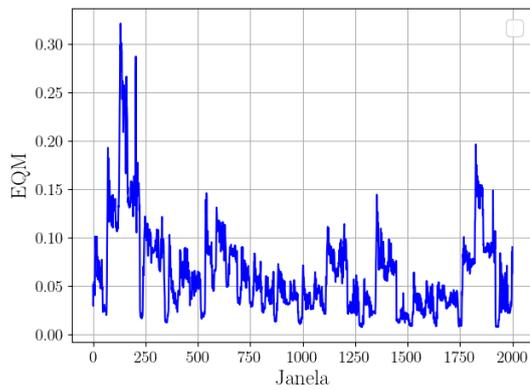


Figura 9 – Erro Quadrático Médio ((a) e (c)) e 100 primeiros valores da janela 1 ((b) e (d)) no domínio de Fourier do sinal 8 do conjunto 2 reconstruídos com diferentes valores para o fator de ponderação utilizando a versão modificado do *Adaptive CS-KF*.

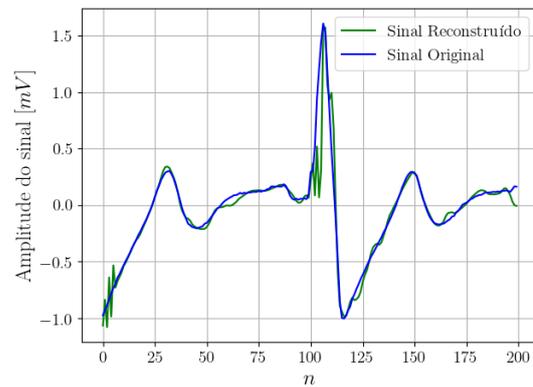
As imagens mostradas à esquerda (Figuras 9(a) e 9(c)) são a evolução do EQM nas duas situações. Ambas curvas são crescentes, porém este comportamento é nitidamente mais suave para o menor fator. É interessante notar que neste caso o gráfico toma um formato de “escada”. Isto se deve ao fato de que a etapa de predição é preponderante e, enquanto há uma intersecção suficiente entre as janelas, o erro mantém-se em um nível semelhante.

Nos gráficos de magnitude das transformadas das janelas, percebemos que o sinal original possui poucos elementos não-nulos. Pode-se ver, sobretudo na Figura 9(b), que o algoritmo consegue acertar as posições do suporte que possuem maior energia, mas erra as oriundas do espalhamento espectral causado pelo janelamento. Tal fato corrobora com a hipótese de que as medidas são insuficientes e que as condições de esparsidade exigidas por CS não são verificadas para estes sinais no domínio de Fourier.

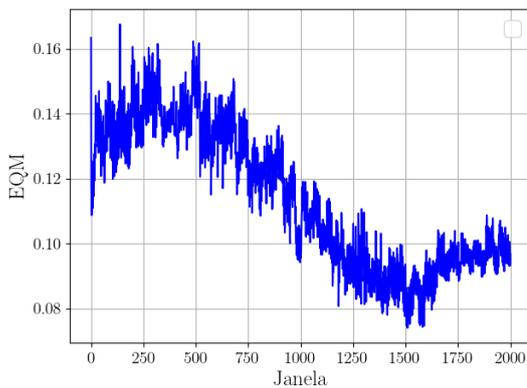
O estudo [40] aponta que as *wavelets* Daubechies 4 são as mais adequadas para representação de ECG em aplicações de *Compressive Sensing*. Para utilizá-la, é necessário definir a quantidade de níveis de filtragem para a elaboração da matriz de mudança de base. Quanto maior a quantidade de níveis mais elementos próximos a zero consegue-se na representação transformada. Entretanto, isto também acarreta distorções no sinal nas operações de transformação inversa. Através da observação dos resultados das reconstruções optou-se por utilizar 3 níveis de decomposição.



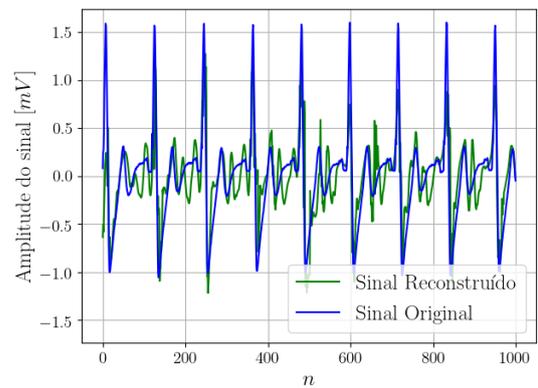
(a) EQM.



(b) Janela 226 no domínio do tempo.



(c) EQM.



(d) Janela 1500 no domínio do tempo.

Figura 10 – Erro Quadrático Médio das 2000 primeiras janelas ((a) e (c)) e janelas reconstruídas pelo *Adaptive CS-KF* Modificado no domínio de Daubechies 4 ((b) e (d)). Em (a) e (b) as medidas foram tomadas com $M = 100$ e $R = 2$, já em (c) e (d) adotou-se $M = 500$ e $R = 2$.

Ao utilizar a transformada de *wavelets*, o tamanho das janelas é um fator que afeta a qualidade da reconstrução. Notou-se que os complexos QRS são as regiões do sinal com maior EQM. Esta é uma forma cuja maior parte da informação está em alta frequência. São estas as posições com valores mais baixos em domínio transformado e eventualmente podem ser consideradas como não pertencentes ao suporte pelo algoritmo. Assim, janelas com menor ocorrência de complexos QRS geralmente fornecem uma reconstrução mais acurada. As imagens da Figura 10 exemplificam este fato para o sinal 8.

Os gráficos das Figuras 10(a) e 10(b) são de reconstruções cujas medidas foram adquiridas com $M = 100$ e $R = 2$, de forma que a maior parte das janelas contempla apenas um complexo QRS. Já para as Figuras 10(c) e 10(d) correspondem a medidas com $M = 500$ e $R = 2$ que abrangem cerca de 10 complexos QRS. Com o domínio de *wavelets*, as curvas de EQM não apresentam mais um comportamento crescente, mas que oscilam em uma faixa de valores: próximos a $5 \cdot 10^{-2}$, no caso de $M = 100$; e abaixo de 0,18, no caso de $M = 500$. Também, comparando as formas de onda (Figuras 10(b) e 10(d)) nota-se, por inspeção visual, que a reconstrução da janela menor consegue acompanhar melhor o sinal original. Dadas estas observações, definiu-se que, para o uso de Daubechies 4, as aquisições devem ser feitas de modo que as janelas compreendam aproximadamente um ciclo cardíaco completo.

4.2.2 Conjunto 3

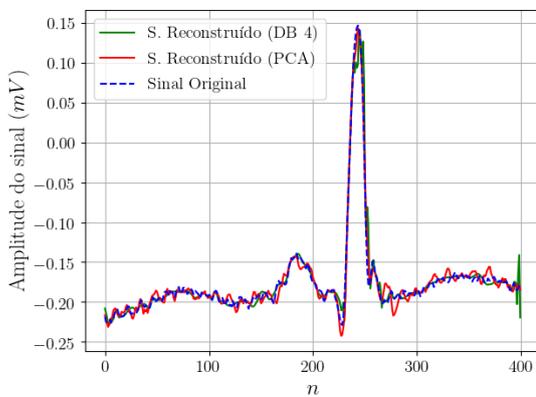
Optou-se por utilizar o conjunto 3 para realizar a construção da transformada por Análise de Componentes Principais. Estes sinais foram adquiridos com maior frequência de amostragem e, conseqüentemente, observa-se maior correlação entre os coeficientes, o que favorece a elaboração do domínio esparcificante. As reconstruções no domínio dado por PCA são realizadas a partir das mesmas medidas que as utilizadas com o domínio de *wavelets*. A execução ocorre da mesma forma nas duas situações, que diferem-se apenas pela matriz de mudança de base dada ao algoritmo.

As medidas de todos os sinais foram feitas tomando os parâmetros $M = 200$ e $R = 2$. Portanto, cada janela reconstruída possui 400 amostras do sinal, que correspondem a pouco mais de 1 segundo. A Figura 11 mostra os resultados da reconstrução do sinal 201 do conjunto 3 e possibilita a comparação dos dois domínios neste caso específico. A janela 800 foi escolhida a título de ilustração e foi obtida relações sinal ruído de 24,8 dB (*wavelets*) e de 27,6 dB (PCA).

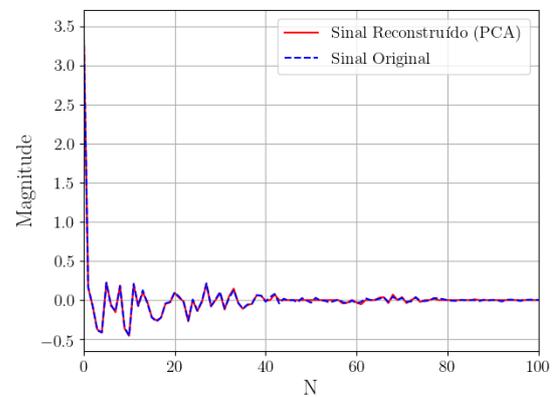
Nota-se na Figura 11(a) que a reconstrução utilizando *wavelets* possui pior desempenho no complexo QRS e nas extremidades da janela. É percebido, também, um comportamento mais suave ao longo de todo o sinal, como se o processo de reconstrução realizasse uma filtragem dos componentes de mais alta frequência. Por outro lado, a reconstrução que se utilizou de PCA têm seu erro distribuído de forma mais uniforme entre

os coeficientes.

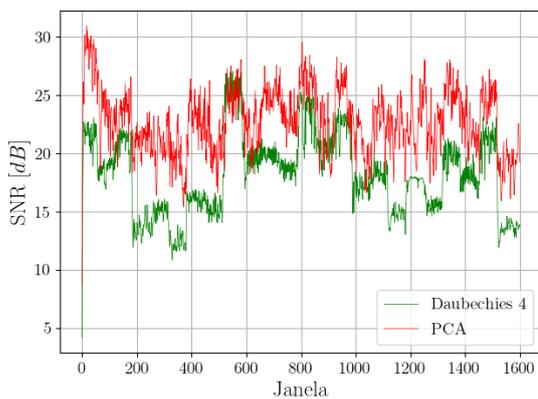
As 100 primeiras posições da janela 800, representadas no domínio oriundo de PCA, são vistas na Figura 11(b). Percebe-se que a energia concentra-se principalmente nas primeiras 60 amostras. Neste intervalo vê-se que o sinal reconstruído consegue acertar a maior parte dos valores. Por último, as Figuras 11(c) e 11(d) dizem respeito à qualidade da reconstrução ao longo das janelas. Os domínios apresentam gráficos com comportamento semelhante entre si, porém na maior parte do tempo a representação por PCA consegue melhores valores de SNR e de EQM. Há alguns trechos em que as duas abordagens registram uma relação sinal ruído próximas entre si, porém em alguns outros a reconstrução por *wavelets* é pior em até 5 dB.



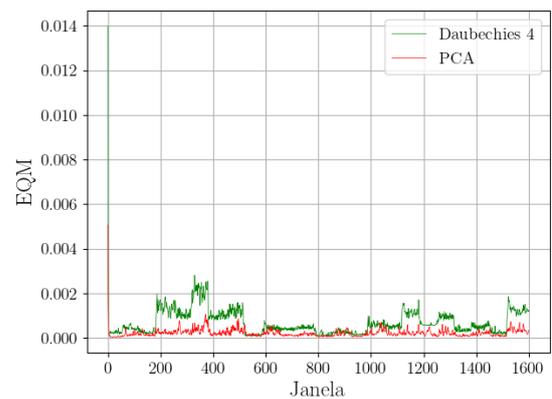
(a) Janela 800 no domínio do tempo.



(b) Trecho da janela 800 reconstruída no domínio dado por PCA.



(c) SNR.



(d) EQM.

Figura 11 – Resultados da reconstrução do sinal 201 utilizando *Adaptive CS-KF* com o domínio de Daubechies 4 (verde) e o dado por PCA (vermelho). Em (a) vê-se no tempo as reconstruções da janela 800, em (b) é mostrada a mesma janela no domínio de PCA. A evolução da SNR (c) e EQM (d) também são mostradas para ambos os domínios.

Os resultados mostrados para o sinal 201 são semelhantes aos que são conseguidos para maior parte dos demais sinais do mesmo grupo. Em termos gerais, as observações

feitas sobre estas reconstruções são representativas para o conjunto 3. A evolução da SNR, por exemplo, tem comportamento similar em todos os sinais, mas com diferentes níveis médios. Em uma seção futura será feita uma análise estatística das reconstruções do conjunto como um todo. Assim, pode-se verificar mais consistentemente que, no contexto apresentado, o domínio vindo de PCA tem melhor desempenho que o de Daubechies 4.

4.2.2.1 Avaliação em cenários ruidosos

As análises feitas até aqui consideraram uma condição favorável de ruído. Somouse às medidas um vetor aleatório gerado com uma distribuição normal com média zero e desvio padrão um. Este vetor, que simula o efeito de ruído, foi ponderado por um fator de 10^{-5} . Afim de avaliar o desempenho do filtro em condições mais adversas de ruído, foram realizadas algumas reconstruções com outros fatores multiplicativos no ruído somado às medidas. As discussões a seguir foram feitas com base no sinal 186 do conjunto 3.

O gráfico da Figura 12 nos permite comparar o desempenho do *Adaptive* CS-KF modificado em diferentes condições de ruído na aquisição. Cada uma das curvas foi obtida através de reconstruções com a mesma realização de ruído somada às medidas, porém em cada uma delas utilizou-se um fator multiplicativo de 0 , $5 \cdot 10^{-4}$, $5 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-2}$ ou 10^{-1} .

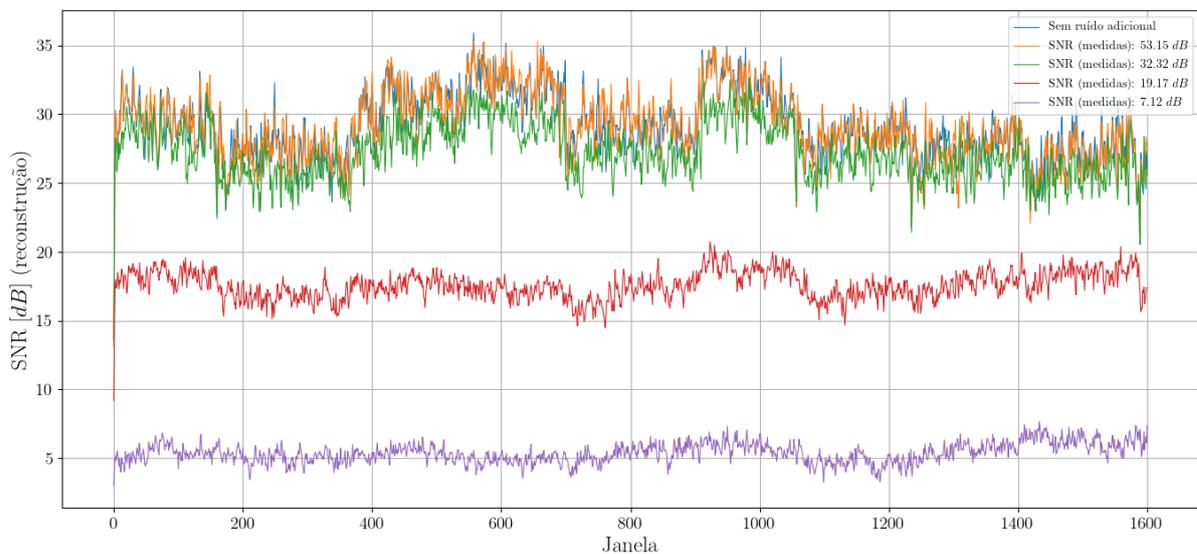


Figura 12 – Evolução da SNR de reconstruções com amostras em diferentes condições de ruído (53, 15 dB; 32, 32 dB; 19, 17 dB; 7, 12 dB e sem ruído adicional) ao longo das janelas do sinal 186 do conjunto 3.

As diferentes situações estão indicadas no gráfico pelos valores de SNR calculados entre as medidas e o ruído a elas adicionado. Portanto, tais valores, que identificam as curvas, dizem respeito apenas ao ruído que foi posteriormente adicionado às medidas, visto que não foi feita nenhuma avaliação quanto ao ruído intrínseco ao processo de aquisição.

O eixo vertical também se refere a relações sinal ruído, porém calculadas entre a janela original e sua reconstrução. Dentre os cenários avaliados, conseguiu-se reconstruir o sinal com SNR acima de 15 dB quando se verificou nas medidas uma SNR de pelo menos $19,1 \text{ dB}$. Uma pequena melhora na qualidade dos resultados é percebida quando a SNR nas medidas vai de $32,32 \text{ dB}$ para $53,15 \text{ dB}$. Neste último caso, como o nível de ruído está em uma ordem de grandeza próxima à resolução computacional, algumas janela obtêm um melhor resultado comparado ao da situação em que não há ruído nas medidas.

4.2.2.2 Avaliação estatística do conjunto

O desempenho (em termos de SNR) da versão modificada do *Adaptive CS-KF* quando executado no domínio de *wavelets* ou por PCA também foi avaliado estatisticamente sobre o conjunto 3. Como foram amostrados no AIC com $M = 200$ e $R = 2$, cada um dos 282 sinais possui 1601 janelas. Executou-se, nos dois domínios, a reconstrução de todas elas. As análises seguintes tomam como espaço amostral as relações sinal ruído destas reconstruções.

A Figura 13 mostra as dispersões, para PCA e Daubechies 4, por meio de histogramas. É perceptível que a reconstrução por PCA tem uma maior concentração de janelas com SNR acima de 20 dB ao mesmo tempo que atinge, em algumas poucas janelas, SNR's próximas a 40 dB . Aproximadamente 25% das janelas reconstruídas com PCA estão abaixo de 10 dB , para *waveletes* este índice é de cerca de 35%.

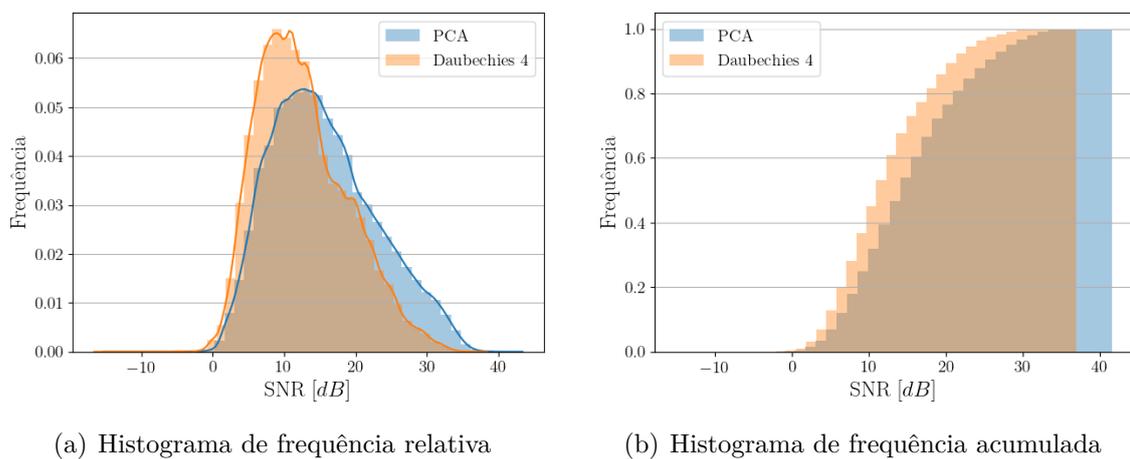


Figura 13 – Distribuição dos valores de SNR conseguidos na reconstrução de todas as janelas de todos os sinais do conjunto 3 pelo *Adaptive CS-KF* Modificado nos domínios Daubechies 4 e definido por PCA.

Os valores de tendência central também podem ser usados para comparar o desempenho dos domínios. Enquanto as reconstruções que usaram Daubechies 4 atingiram uma média de $12,6 \text{ dB}$, as que utilizaram PCA têm media de $15,6 \text{ dB}$. Em ambos casos

a mediana é inferior à média (11,7 dB e 14,7 dB, respectivamente), indicando que as distribuições são um pouco mais concentradas à esquerda.

As distribuições vistas na Figura 13 indicam, portanto, que o domínio desenvolvido por PCA consegue, em média, melhores reconstruções que o domínio de *wavelets*. De fato, pode-se verificar por meio de testes de hipóteses que o domínio de PCA obteve melhores resultados que Daubechies 4. Inicialmente, realizou-se, para ambas distribuições, o teste de Lilliefors assumindo como hipótese nula que as amostras em análise obedecem uma distribuição normal. Para as duas transformadas, essa hipótese foi rejeitada. Assim, prosseguiu-se a um novo teste de hipóteses não-paramétrico para comparar as medianas das distribuições pareadas. Realizou-se o teste de Wilcoxon tomando como hipótese nula a igualdade entre a mediana das duas distribuições. Novamente, a hipótese foi rejeitada, indicando que o domínio dado por PCA apresenta estatisticamente melhores reconstruções, dado que a mediana calculada sobre suas amostras é maior do que a verificada nas reconstruções com Daubechies 4.

Por outro lado, em ambas as situações, os resultados ainda podem ser melhorados, visto a quantidade significativa de janelas reconstruídas com SNR abaixo de 10 dB. Neste sentido, formas mais eficientes de se estimar o suporte e modelos para o filtro de Kalman que se aproveitem de características específicas desses novos domínios são possibilidades de desenvolvimento.

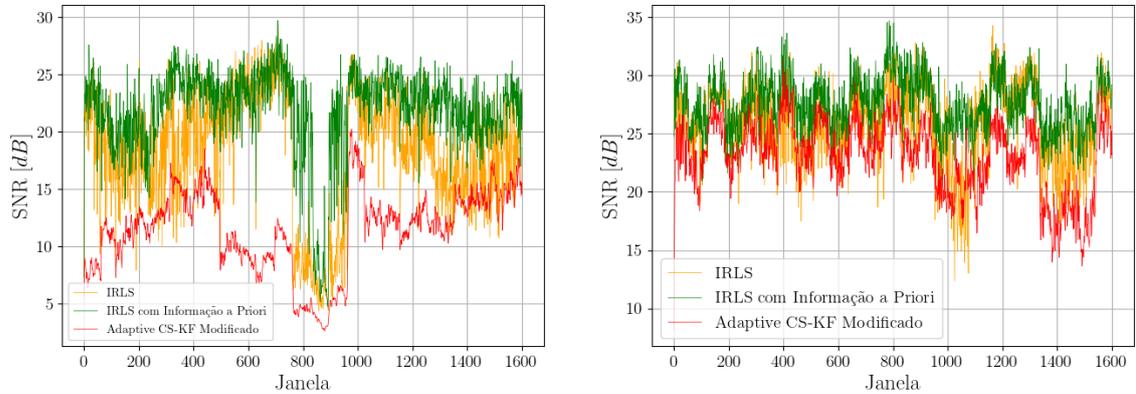
4.2.2.3 Comparação com IRLS

O IRLS é um algoritmo de otimização não-convexa. Consegue-se reconstruções com altos valores de SNR a partir da minimização da ℓ_p ($0 < p < 1$) aproximada iterativamente por execuções de mínimos quadrados ponderado. Em [26] é apresentada uma formulação para o IRLS com Informação *a Priori*. Isto permite utilizar a mesma lógica de funcionamento da versão modificada do *Adaptive CS-KF* substituindo o filtro de Kalman pelo IRLS com a estimação de suporte usada como Informação *a Priori*.

Os resultados da versão modificada do *Adaptive CS-KF* são comparados com duas implementações diferentes do IRLS: (i) aplicando o algoritmo a cada uma das janelas independentemente sem Informação *a Priori* e (ii) IRLS com Informação *a Priori* conforme descrito acima. Estes três algoritmos foram executados utilizando o domínio criado com PCA; em ambas adotou-se $\ell_{0,5}$. Para a comparação, foram escolhidos os sinais 35 e 200 do conjunto 3. A Figura 14 mostra a evolução da SNR para os algoritmos avaliados.

As duas abordagens com IRLS atingiram, para maior parte das janelas, os melhores níveis de relação sinal ruído, próximos a 30 dB no sinal 200 e a 20 dB no sinal 35. O filtro de Kalman está geralmente de 5 dB a 10 dB abaixo dos métodos com IRLS. O caso que usa Informação *a Priori* registra níveis superiores e varia em um intervalo menor. Houve algumas janelas do sinal 200, entre a 1000 e 1100, para as quais o *Adaptive CS-KF* obteve

melhores resultados. Como o filtro depende de uma boa estimativa inicial, a SNR para as primeiras janelas não reconstróem efetivamente o sinal, fato não observado com IRLS que, desde o início, obtém a qualidade de reconstrução observada em todas as janelas.

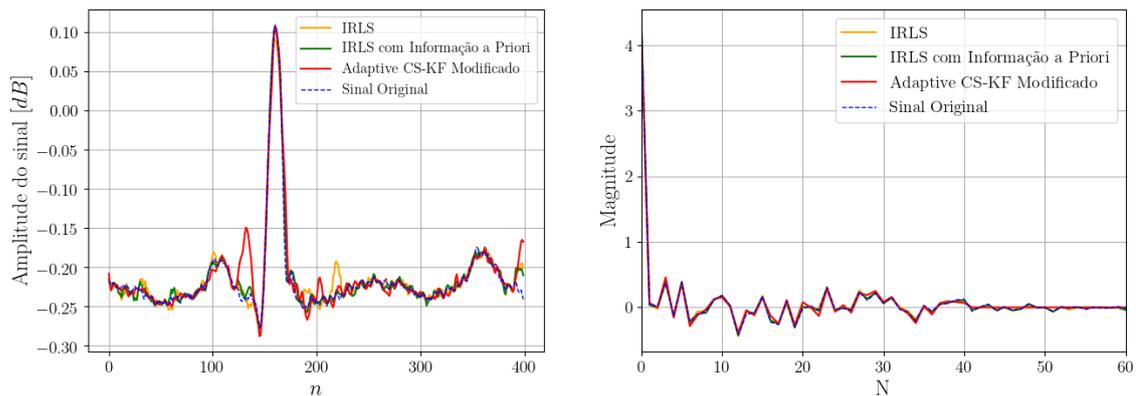


(a) Sinal 35 do conjunto 3.

(b) Sinal 200 do conjunto 3.

Figura 14 – Gráficos de SNR comparando reconstruções por IRLS aplicado independentemente a cada janela (amarelo) e com Informação *a Priori* (verde) e *Adaptive CS-KF* Modificado (vermelho).

Todos os algoritmos tiveram resultados piores para o sinal 35 em relação aos do sinal 200. Tal fato é um indicativo de que o processo de aquisição das medidas foi mais eficiente para o sinal 200 do que para o 35. Por fim, as reconstruções da janela 40 do sinal 200 são mostradas no domínio do tempo e transformado na Figura 15.



(a) Domínio do tempo

(b) Primeiras 60 posições no domínio dado por PCA

Figura 15 – Comparação das reconstruções por IRLS aplicado independentemente a cada janela (amarelo) e com Informação *a Priori* (verde) e *Adaptive CS-KF* Modificado (vermelho) da janela 40 do sinal 200 do conjunto 3.

Ao observar as Figuras 14 e 15, nota-se que o IRLS consegue melhores resultados em termos de erro de reconstrução. Porém sua execução é consideravelmente mais demo-

rada. As discussões feitas nesta seção basearam-se em 3202 janelas reconstruídas pelos três algoritmos em análise. Os tempos médios de reconstrução por janela são de: 0,12 segundos para o *Adaptive* CS-KF modificado, 16,2 segundos para IRLS sem Informação a Priori e 15,4 segundos com Informação a Priori.

Neste trabalho não foram realizados estudos de complexidade computacional para nenhum dos algoritmos. Também, os códigos foram escritos sem que houvesse a preocupação de otimizá-los para uma execução mais rápida. Entretanto, o tempo demandado pelo IRLS é muito superior ao necessário para o *Adaptive* CS-KF modificado. Todas as execuções ocorreram em um mesmo computador e em condições semelhantes. Os tempos levados para as reconstruções das janelas foram apresentados com o objetivo de mostrar esta grande diferença de tempos, mas não podem ser utilizados para comparar a qualidade dos algoritmos em termos de tempo execução, visto que isto deve ser feito a partir de um número maior de realizações e obedecendo uma metodologia mais rígida.

5 Conclusão

O desenvolvimento do algoritmo de reconstrução de sinais em *Compressive Sensing* descrito neste trabalho partiu do *Adaptive CS-KF* [10]. Inicialmente, seu funcionamento foi reproduzido nas condições descritas no artigo original. Entretanto, este é um cenário específico e controlável, já que os sinais aplicados foram gerados sinteticamente. Assim, a esparsidade no domínio de Fourier (para o qual o filtro foi elaborado) é sempre garantida.

Decidiu-se por utilizar sinais de ECG para avaliar o comportamento do algoritmo em condições menos controladas. A partir das observações de resultados parciais, modificações foram propostas. Durante o desenvolvimento, foram utilizados três conjuntos distintos de sinais. Entretanto, os resultados finais, aqueles com maior significado, foram obtidos apenas com o último dos conjuntos.

5.1 Contribuições e possíveis trabalhos futuros

Ao se propor adaptar o algoritmo para aplicação de sinais de eletrocardiografia, três principais pontos foram tratados: (i) o algoritmo precisaria comportar outros domínios esparsificantes, (ii) nem sempre uma informação acurada a respeito do tamanho do suporte está disponível e (iii) as covariâncias do modelo matemático do sistema poderiam ser atualizadas a cada iteração do filtro com o objetivo de melhorar as reconstruções futuras. Elenca-se as contribuições aqui realizadas:

- Elaboração de um algoritmo para geração aleatória de sinais sintéticos com janelas deslizantes esparsas no domínio de Fourier;
- Realização de testes que verificaram a não efetividade do *Adaptive CS-KF* para reconstrução de sinais de ECG utilizando Fourier como transformada esparsificante;
- Implementação de modificações ao algoritmo que conferiram maior estabilidade de erro e que possibilitaram o uso de outros domínios para representação esparsa;
- Validação do *Adaptive CS-KF Modificado* aplicado a sinais de ECG.

Apesar de obter certos avanços, o algoritmo aqui apresentado ainda pode atingir resultados mais consistentes, sobretudo no que se diz respeito à avaliação estatística apresentada (Seção 4.2.2.2). A quantidade de janelas reconstruídas com SNR abaixo de 15 dB, por exemplo, ainda é significativa. Também, os erros de reconstrução nas bordas das janelas e nos complexos QRS podem ser melhor tratados. Portanto, algumas outras possibilidades de trabalho passam a ser vislumbradas:

- Avaliação de matrizes de covariância para ECG que aproveitem melhor as correlações existentes no sinal;
- Avaliação do uso da aquisição com janelas diferentes da retangular com o objetivo de amenizar os erros observado nas bordas;
- Estudo de representações esparsas mais eficientes para sinais de ECG;
- Avaliação do efeito de intersecções menores entre as janelas sobre a qualidade da reconstrução;

Trabalhos como o de [41] indicam arquiteturas para implementação do *Analog to Information Converter* no contexto de sinais biomédicos. Assim, analisar o algoritmo considerando o *hardware* de aquisição é naturalmente um dos passos futuros no sentido de viabilizar o desenvolvimento de um sistema de eletrocardiografia que se baseie em *Compressive Sensing*.

Referências

- 1 Donoho, D. L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 52, n. 4, p. 1289–1306, April 2006. ISSN 0018-9448. Citado 3 vezes nas páginas [14](#), [18](#) e [19](#).
- 2 SHIN, Y.-J. Digital signal processing and control for the study of gene networks. In: *Scientific reports*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado na página [14](#).
- 3 ZHAO, L.; KANG, L.; YAO, S. Research and application of acoustic emission signal processing technology. *IEEE Access*, v. 7, p. 984–993, 2019. Citado na página [14](#).
- 4 Shannon, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, v. 27, n. 3, p. 379–423, July 1948. ISSN 0005-8580. Citado 2 vezes nas páginas [14](#) e [17](#).
- 5 BARANIUK, R. G. Compressive sensing. In: *CISS*. [S.l.: s.n.], 2008. Citado na página [14](#).
- 6 CANDÈS, E. J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. In: . [S.l.: s.n.], 2008. Citado 3 vezes nas páginas [14](#), [18](#) e [19](#).
- 7 VASWANI, N.; ZHAN, J. Recursive Recovery of Sparse Signal Sequences from Compressive Measurements: A Review. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 64, n. 13, p. 3523–3549, 2016. ISSN 1053587X. Citado 3 vezes nas páginas [15](#), [21](#) e [22](#).
- 8 Freris, N. M.; Öçal, O.; Vetterli, M. Compressed sensing of streaming data. In: *2013 51st Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton)*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1242–1249. Citado 3 vezes nas páginas [15](#), [18](#) e [26](#).
- 9 Vaswani, N. Kalman filtered compressed sensing. In: *2008 15th IEEE International Conference on Image Processing*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 893–896. ISSN 1522-4880. Citado 4 vezes nas páginas [15](#), [26](#), [34](#) e [38](#).
- 10 Li, H. et al. Adaptive kalman filtered compressive sensing for streaming signals. In: *2013 IEEE 78th Vehicular Technology Conference (VTC Fall)*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1–5. ISSN 1090-3038. Citado 9 vezes nas páginas [15](#), [17](#), [22](#), [26](#), [29](#), [35](#), [39](#), [40](#) e [52](#).
- 11 REDDY, K. G.; VIJAYA, D. P. A. Ecg signal characterization and correlation to heart abnormalities. In: . [S.l.: s.n.], 2017. Citado 2 vezes nas páginas [15](#) e [32](#).
- 12 CLIFFORD, G. D. Ecg statistics , noise , artifacts , and missing data. In: . [S.l.: s.n.], 2006. Citado na página [15](#).
- 13 Craven, D. et al. Compressed sensing for bioelectric signals: A review. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, v. 19, n. 2, p. 529–540, March 2015. ISSN 2168-2208. Citado na página [15](#).
- 14 Mamaghanian, H. et al. Compressed sensing for real-time energy-efficient ecg compression on wireless body sensor nodes. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 58, n. 9, p. 2456–2466, Sep. 2011. ISSN 0018-9294. Citado na página [15](#).

- 15 MAMAGHANIAN, H.; VANDERGHEYNST, P. Ultra-low-power ecg front-end design based on compressed sensing. *2015 Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE)*, p. 671–676, 2015. Citado na página 15.
- 16 Rani, M.; Dhok, S. B.; Deshmukh, R. B. A systematic review of compressive sensing: Concepts, implementations and applications. *IEEE Access*, v. 6, p. 4875–4894, 2018. ISSN 2169-3536. Citado na página 16.
- 17 MANGIA, M. et al. *Adapted Compressed Sensing for Effective Hardware Implementations: A Design Flow for Signal-Level Optimization of Compressed Sensing Stages*. Springer International Publishing, 2017. ISBN 9783319613734. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=gdksDwAAQBAJ>>. Citado na página 17.
- 18 Mishali, M.; Eldar, Y. C. Sub-nyquist sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 28, n. 6, p. 98–124, Nov 2011. ISSN 1053-5888. Citado na página 17.
- 19 M.F.DUARTE; Y.C.ELDAR. Structured compressed sensing: from theory to applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 59, n. 9, p. 4053–4085, 2011. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2011arXiv1106.6224D>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.
- 20 FOUCART, S.; RAUHUT, H. *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. Springer New York, 2013. (Applied and Numerical Harmonic Analysis). ISBN 9780817649487. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=zB28BAAQBAJ>>. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 19 e 21.
- 21 CANDES, E. J.; WAKIN, M. B.; BOYD, S. P. Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization. *Journal of Fourier analysis and applications*, Springer, v. 14, n. 5-6, p. 877–905, 2008. Citado na página 18.
- 22 DONOHO, D. L. Neighborly polytopes and sparse solution of underdetermined linear equations. In: . [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 18.
- 23 DAUBECHIES, I. et al. Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery. In: . [S.l.: s.n.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- 24 CANDÈS, E.; RECHT, B. Exact matrix completion via convex optimization. *Communications of the ACM*, v. 55, n. 6, p. 111–119, 2012. ISSN 00010782. Citado na página 19.
- 25 QAISAR, S. et al. Compressive sensing: From theory to applications, a survey. *Journal of Communications and Networks*, v. 15, n. 5, p. 443–456, 2013. ISSN 12292370. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- 26 MIOSSO, C. J. et al. Compressive sensing reconstruction with prior information by iteratively reweighted least-squares. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 57, p. 2424–2431, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 49.
- 27 SEIBERT, J. A. *Archiving: Fundamentals of Storage Technology, Chapter 2: Medical Image Data Characteristics*. Online. Disponível em: <https://siim.org/page/archiving_chapter2>. Citado na página 21.
- 28 Graps, A. An introduction to wavelets. *IEEE Computational Science and Engineering*, v. 2, n. 2, p. 50–61, Summer 1995. ISSN 1558-190X. Citado na página 23.

- 29 RAFIEE, J. et al. Wavelet basis functions in biomedical signal processing. *Expert Syst. Appl.*, v. 38, p. 6190–6201, 2011. Citado na página 23.
- 30 JOLLIFFE, I. *Principal Component Analysis*. [S.l.]: Springer Verlag, 1986. Citado na página 23.
- 31 SIMON, D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley, 2006. ISBN 9780470045336. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=UiMVoP_7TZkC>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- 32 SÄRKKÄ, S. *Bayesian Filtering and Smoothing*. Cambridge University Press, 2013. (Bayesian Filtering and Smoothing). ISBN 9781107030657. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5VlsAAAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- 33 SIMON, D. Kalman filtering. *Embedded systems programming*, v. 14, n. 6, p. 72–79, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- 34 MEINHOLD, R. J.; SINGPURWALLA, N. D. Understanding the kalman filter. *The American Statistician*, Taylor & Francis Group, v. 37, n. 2, p. 123–127, 1983. Citado na página 25.
- 35 Asif, M. S.; Romberg, J. Sparse recovery of streaming signals using ℓ_1 -homotopy. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 62, n. 16, p. 4209–4223, Aug 2014. ISSN 1053-587X. Citado na página 26.
- 36 POLLARD TOM J ABD JOHNSON, A. E. *The MIMIC-II Clinical Database*. 2016. <<https://mimic.physionet.org/>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- 37 PLAWIAK, P. *ECG signals (1000 fragments)*. Mendeley, 2017. Disponível em: <<https://data.mendeley.com/datasets/7dybx7wyfn/3>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- 38 Kachuee, M. et al. Cuffless blood pressure estimation algorithms for continuous health-care monitoring. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 64, n. 4, p. 859–869, April 2017. ISSN 1558-2531. Citado na página 32.
- 39 KARIMI, H. S.; NATARAJAN, B. Kalman filtered compressive sensing with intermittent observations. *Signal Processing*, Elsevier B.V., v. 163, p. 49–58, 2019. ISSN 01651684. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.05.004>>. Citado na página 41.
- 40 WANG, Y.; HEINEN, S.; LEONHARDT, S. Low power wearable wireless ecg system for long-term homecare. In: . [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 44.
- 41 Pareschi, F. et al. Hardware-algorithms co-design and implementation of an analog-to-information converter for biosignals based on compressed sensing. *IEEE Transactions on Biomedical Circuits and Systems*, v. 10, n. 1, p. 149–162, Feb 2016. ISSN 1940-9990. Citado na página 53.