



Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Departamento de Estatística - EST

Testes de Significância bayesianos para comparação de duas populações independentes

Túlio Paixão Santos

Orientador: Professor Eduardo Yoshio Nakano

Brasília

2018

Túlio Paixão Santos

**Testes de Significância bayesianos para comparação de
duas populações independentes**

Monografia apresentada para obtenção de título de Bacharel em Estatística, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília.

Orientador: Professor Eduardo Yoshio Nakano

Brasília

2018

Túlio Paixão Santos

Testes de Significância bayesianos para comparação de duas populações independentes/ Túlio Paixão Santos. – Brasília, 2018-
128 páginas .

Orientador: Professor Eduardo Yoshio Nakano

Relatório Final – Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Estatística

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, 2018.

1. Testes paramétricos e não paramétricos. 2. Inferência bayesiana. 3. Testes para comparação de duas populações independentes. 4. Simulações. 5. Conclusões.

Túlio Paixão Santos

Testes de Significância bayesianos para comparação de duas populações independentes

Monografia apresentada para obtenção de título de Bacharel em Estatística, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília.

Trabalho aprovado. Brasília, 02 de julho de 2018:

Professor Eduardo Yoshio Nakano
Orientador

Helton Saulo Bezerra dos Santos
Membro da Banca

André Luiz Fernandes Cançado
Membro da Banca

Brasília
2018

Agradecimentos

Agradeço a Deus, ao meu orientador Nakano, aos meus pais, família e amigos que sempre estiveram do meu lado nessa longa caminhada.

*"Mas não precisamos saber pra onde vamos
Nós só precisamos ir."
Engenheiros do Hawaii*

Resumo

É comum o interesse em comparar duas populações em diversas áreas. O teste mais usado é o teste t (clássico), que precisa de suposição de normalidade para ser aplicado. Mas nem sempre isso é possível, e nesse caso o certo é recorrer a outras alternativas de teste. Este trabalho visa mostrar a aplicação do Teste de Significância Genuinamente Bayesiano (FBST). A metodologia foi desenvolvida com base na visão Bayesiana, utilizando as distribuições Poisson, Bernoulli, Exponencial, Gama, Normal e Weibull. Este trabalho contém um capítulo com exemplos e outro com simulações, calculando o valor-e e valor-p de diferentes testes. Por fim, o presente trabalho disponibiliza rotinas no Software R que permitem a realização de tais procedimentos.

Palavras-chave: Inferência Bayesiana, FBST, valor-e, valor-p, priori, posteriori.

Abstract

The interest in differentiating in several areas is common. The most commonly used test is the t (classical) test, which requires the assumption of normality to be applied. But this is not always possible, and in this case the right thing is to go back to other test alternatives. This work aims to show an application of the Full Bayesian Significance Test (FBST). The methodology was developed within a bayesian context, using the distributions Poisson, Bernoulli, Exponential, Gamma, Normal and Weibull. This work contains a chapter with examples and another one with simulations, calculation of value and value of different tests. Finally, the present work provides routines in Software R (R CORE TEAM, 2017) that allow the accomplishment of such procedures.

Keywords: Bayesian Inference, FBST, e-value, p-value, priori, posteriori.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Região Tangente e e-valor	33
Figura 2 – Densidades Marginais a Posteriori de θ_1 e θ_2	37
Figura 3 – Densidades Marginais a Posteriori de θ_1 e θ_2	41
Figura 4 – Densidades Marginais a Posteriori de θ_1 e θ_2	45
Figura 5 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 1: $\theta_1 = 5$ e $\theta_2 = 6$	69
Figura 6 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 2: $\theta_1 = 10$ e $\theta_2 = 12$	69
Figura 7 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 3: $\theta_1 = 50$ e $\theta_2 = 60$	70
Figura 8 – Valores-p do teste t e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)	71
Figura 9 – Valores-p do teste de WMW e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)	71
Figura 10 – Valor-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 1: $\theta_1 = 0,5$ e $\theta_2 = 0,6$	74
Figura 11 – Valor-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 2: $\theta_1 = 0,4$ e $\theta_2 = 0,6$	74
Figura 12 – Valor-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 3: $\theta_1 = 0,1$ e $\theta_2 = 0,4$	75
Figura 13 – Valores-p do teste Qui-Quadrado e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)	76
Figura 14 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 1: $\theta_1 = 10$ e $\theta_2 = 15$	78
Figura 15 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 2: $\theta_1 = 20$ e $\theta_2 = 35$	78
Figura 16 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 3: $\theta_1 = 100$ e $\theta_2 = 200$	79
Figura 17 – Valores-p do teste t e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)	80

Figura 18 – Valores-p do teste de WMW e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)	82
Figura 19 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 1: $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 5$, $\beta_1 = 3$ e $\beta_2 = 2,5$	82
Figura 20 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 2: $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 10$, $\beta_1 = 5$ e $\beta_2 = 5$	83
Figura 21 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 3: $\alpha_1 = 30$, $\alpha_2 = 40$, $\beta_1 = 10$ e $\beta_2 = 15$	83
Figura 22 – Valores-p do teste t e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)	85
Figura 23 – Valores-p do teste de WMW e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)	86

Lista de tabelas

Tabela 1 – Distribuição de Poisson: Média, Desvio-Padrão e Somatório	37
Tabela 2 – Distribuição de Poisson: Média, Desvio-Padrão e Somatório	38
Tabela 3 – Distribuição de Bernoulli: Média, Desvio-Padrão e Somatório	41
Tabela 4 – Distribuição de Bernoulli: Média, Desvio-Padrão e Somatório	42
Tabela 5 – Distribuição Exponencial: Amostra, Média, Desvio-Padrão e Somatório	44
Tabela 6 – Distribuição Exponencial: Amostra, Média, Desvio-Padrão e Somatório	46
Tabela 7 – Distribuição Normal: Amostra, Média, Desvio-Padrão	50
Tabela 8 – Distribuição Normal: Amostra, Média, Desvio-Padrão	51
Tabela 9 – Distribuição Normal: Amostra, Média, Desvio-Padrão	52
Tabela 10 – Distribuição Gama: Amostra, Média, Desvio-Padrão	56
Tabela 11 – Distribuição Gama: Amostra, Média, Desvio-Padrão	57
Tabela 12 – Distribuição Gama: Amostra, Média, Desvio-Padrão	58
Tabela 13 – Distribuição Weibull: Amostra, Média, Desvio-Padrão	62
Tabela 14 – Distribuição Weibull: Amostra, Média, Desvio-Padrão	63
Tabela 15 – Distribuição Weibull: Amostra, Média, Desvio-Padrão	65
Tabela 16 – Simulação para amostras com distribuição de Poisson	68
Tabela 17 – Simulação para amostras com distribuição de Bernoulli	73
Tabela 18 – Simulação para amostras com distribuição Exponencial	77
Tabela 19 – Simulação para amostras com distribuição Gama	81

Sumário

	Introdução	19
1	TESTES PARAMÉTRICOS E NÃO PARAMÉTRICOS	21
1.1	Teste Z	21
1.2	Teste de variâncias (Teste F)	22
1.3	Teste t	23
1.3.1	Variâncias iguais e desconhecidas	23
1.3.2	Variâncias diferentes e desconhecidas	24
1.4	Teste Qui-Quadrado de Homogeneidade	25
1.5	Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney	26
2	INFERÊNCIA BAYESIANA	29
2.1	Teorema de Bayes	29
2.2	Distribuições a Priori	30
2.3	Estimação pontual	31
2.4	Estimação Intervalar	32
2.5	FBST	33
3	TESTES PARA COMPARAÇÃO DE DUAS POPULAÇÕES INDEPENDENTES	35
3.1	Distribuições Discretas	35
3.1.1	Poisson	35
3.1.1.1	Exemplo: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição de Poisson	37
3.1.2	Bernoulli	39
3.1.2.1	Exemplo: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição de Bernoulli (Comparação de duas proporções)	40
3.2	Distribuições Contínuas	43
3.2.1	Exponencial	43
3.2.1.1	Exemplo: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Exponencial	44
3.2.2	Normal	46
3.2.2.1	Exemplo 1: Comparação de médias de duas Populações Independentes com Distribuição Normal (Variâncias desconhecidas e desiguais)	50
3.2.2.2	Exemplo 2: Comparação de Variâncias de duas Populações Independentes com Distribuição Normal (Médias desconhecidas e desiguais)	51

3.2.2.3	Exemplo 3: Comparação de Distribuições de duas Populações Independentes com Distribuição Normal	52
3.2.3	Gama	53
3.2.3.1	Exemplo 1: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Gama	55
3.2.3.2	Exemplo 2: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Gama	57
3.2.3.3	Exemplo 3: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Gama	58
3.2.4	Weibull	59
3.2.4.1	Exemplo 1: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Weibull	62
3.2.4.2	Exemplo 2: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Weibull	63
3.2.4.3	Exemplo 3: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Weibull	64
4	SIMULAÇÕES	67
4.1	Poisson	67
4.2	Bernoulli	72
4.3	Exponencial	76
4.4	Gama	80
5	CONCLUSÕES	87
	REFERÊNCIAS	89
	ANEXO - PROGRAMAÇÃO EM R	91

Introdução

São comuns estudos cujo interesse é comparar dois grupos de tratamentos não pareados. Existem na literatura vários testes de significância estatísticos para esse fim. Dentre os mais conhecidos da literatura clássica podemos citar o teste t de Student, que é comumente conhecido como um teste para comparação de duas médias [Bussab e Morettin, 2013].

O teste t de Student é recomendado quando as observações dos grupos seguem uma distribuição Normal e/ou quando a amostra observada (de variáveis quantitativas) é grande o suficiente para que se tenha o resultado assintótico assegurado pelo Teorema Central do Limite. No entanto, na prática pode não ser possível garantir nenhuma das duas condições citadas. Na área de saúde, por exemplo, muitos estudos são realizados com amostras de tamanho reduzido e nem sempre é possível supor que as observações seguem uma distribuição normal. Como exemplos podemos citar estudos cuja resposta é uma variável quantitativa de contagem ou um escore em um intervalo limitado. Nestas situações a distribuição dos dados não é, de fato, normal.

Ainda, a adoção de um teste não paramétrico neste caso resultaria em perda de informação por simplificar a escala da variável em estudo (redução da escala quantitativa para a ordinal). A consequência disto é uma possível perda de poder do teste estatístico, pois, em geral, os testes estatísticos paramétricos são mais poderosos do que testes não paramétricos (Conover, 1999). De fato, optar por um teste mais poderoso pode ser definitivo no resultado de um estudo, principalmente quando o mesmo apresenta uma amostra reduzida.

Neste contexto a proposta deste trabalho foi apresentar testes paramétricos bayesianos para comparação de duas populações não pareadas que não dependam da suposição de normalidade dos dados. Os testes serão realizados dentro de um contexto bayesiano por meio do Teste de Significância Genuinamente Bayesiano (FBST - *Full Bayesian Significance Test*), proposto inicialmente por Pereira e Stern (1999). Todos os cálculos e simulações realizados neste trabalho foram feitos por meio do software livre R (R Core Team, 2017).

1 Testes Paramétricos e Não Paramétricos

Neste Capítulo, serão apresentados alguns dos testes mais usados para comparação de duas populações independentes. Os mais comuns no caso paramétrico são teste Z e teste t. Muitas pessoas se confundem em achar que um teste não paramétrico é quando não se usa a distribuição normal, porém esse pensamento é errado. Testes não paramétricos são usados quando não é necessário utilizar uma distribuição à priori para cálculo da estatística do teste. Serão apresentados os seguintes testes não paramétricos: Qui-Quadrado e Wilcoxon-Mann-Whitney. Por um lado, os testes não paramétricos são bons principalmente por justamente não precisarem de distribuições de probabilidade, mas por outro lado sempre há perda de informação, pois os testes são baseados em ranks (posições). Primeiro começaremos com testes paramétricos.

1.1 Teste Z

O objetivo do teste Z é verificar se as médias (μ_1 e μ_2) de duas populações independentes são iguais. Seja X_1, X_2, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória simples de uma Variável Aleatória X com distribuição Normal e variância conhecida σ_1^2 . Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória simples de uma Variável Aleatória Y com distribuição Normal e variância conhecida σ_2^2 . Então tem-se que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Passos para a realização do teste:

- Definir se a hipótese é bilateral, unilateral à esquerda ou unilateral à direita.

Hipóteses do teste bilateral:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

Hipóteses do teste unilateral á direita:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

Hipóteses do teste unilateral á esquerda:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

- Calcular a estatística Z sob H_0 :

$$Z_{obs} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim Z(0, 1), \quad (1.1)$$

onde $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ e $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$.

- Cálculo do p-valor:

Se o teste é bilateral, $valor - p = 2P(Z > |Z_{obs}|)$

Se o teste é unilateral à direita, $valor - p = P(Z > Z_{obs})$

Se o teste é unilateral à esquerda, $valor - p = P(Z < Z_{obs})$

onde $Z \sim N(0, 1)$.

Assim, considerando um nível de significância α , a hipótese nula (H_0) é rejeitada se $valor - p < \alpha$.

1.2 Teste de variâncias (Teste F)

O objetivo do teste F é verificar se as variâncias (σ_1^2 e σ_2^2) de duas populações independentes são iguais. Considere duas populações independentes, e ambas com distribuição Normal. Seja X_1, X_2, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória simples de uma distribuição Normal com variância desconhecida σ_1^2 . Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória simples de uma distribuição Normal com variância desconhecida σ_2^2 . Então tem-se que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Considere que s_1^2 é a variância amostral da população 1 e s_2^2 a variância amostral da população 2.

Para realizar o teste, deve-se seguir os seguintes passos:

- Definir se a hipótese é bilateral, unilateral à esquerda ou unilateral à direita.

Hipóteses do teste bilateral:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

Hipóteses do teste unilateral à direita:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 > \sigma_2 \end{cases}$$

Hipóteses do teste unilateral à esquerda:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 < \sigma_2 \end{cases}$$

- Calcular a estatística F sob H_0 :

$$F_{obs} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}, \quad (1.2)$$

onde $s_1^2 = \frac{1}{(n_1-1)} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2$, $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $s_2^2 = \frac{1}{(n_2-1)} \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2$,
 $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$.

- Cálculo do *valor - p*:

Para o teste bilateral, *valor - p* = $2\min\{P[F > F_{obs}], P[F < F_{obs}]\}$.

Para o teste unilateral à direita, *valor - p* = $P[F > F_{obs}]$.

Para o teste unilateral à esquerda, *valor - p* = $P[F < F_{obs}]$.

onde $F \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$.

Em todos os casos, rejeita-se a hipótese nula se *valor - p* < α .

O teste de variâncias será importante no teste t apresentado a seguir, pois é necessário saber se as variâncias são iguais ou diferentes.

1.3 Teste t

O teste t é usado para verificar se as médias (μ_1 e μ_2) de duas populações independentes são iguais. Existem dois casos: caso em que as variâncias são iguais e desconhecidas e o caso em que as variâncias são diferentes e desconhecidas. Estes dois casos serão vistos a seguir.

1.3.1 Variâncias iguais e desconhecidas

Seja X_1, X_2, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória simples de uma distribuição Normal com variância σ_1^2 desconhecida. Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória simples de uma distribuição Normal com variância σ_2^2 desconhecida. Então tem-se que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Suponha que as variâncias das duas populações são iguais (embora desconhecidas): $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Para realizar o teste, deve-se seguir os seguintes passos:

- Definir se a hipótese é bilateral, unilateral à esquerda ou unilateral à direita.

Hipóteses do teste bilateral:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

Hipóteses do teste unilateral à direita:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

Hipóteses do teste unilateral à esquerda:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

- Calcular a estatística T sob H_0 :

$$T_{obs} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \sim t_{(n_1+n_2-2)}, \quad (1.3)$$

onde $s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$, $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ e $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$.

- Cálculo do *valor - p*:

Se o teste é bilateral, $\text{valor} - p = 2P(T > |T_{obs}|)$

Se o teste é unilateral à direita, $\text{valor} - p = P(T > T_{obs})$

Se o teste é unilateral à esquerda, $\text{valor} - p = P(T < T_{obs})$.

Assim, considerando um nível de significância α , a hipótese nula (H_0) é rejeitada se $\text{valor} - p < \alpha$.

No software R, a hipótese bilateral com $\alpha = 0,05$ é dada por:

```
t.test(x, y, alternative = "two.sided", paired = F,
conf.level = 0.95, var.equal = TRUE)
```

1.3.2 Variâncias diferentes e desconhecidas

Seja X_1, X_2, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória simples de uma distribuição Normal com variância σ_1^2 desconhecida. Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória simples de uma distribuição Normal com variância σ_2^2 desconhecida. Então tem-se que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Agora considere que as variâncias das duas populações são diferentes: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Para realizar o teste, deve-se seguir os seguintes passos:

- Definir se a hipótese é bilateral, unilateral à esquerda ou unilateral à direita.

Hipóteses do teste bilateral:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

Hipóteses do teste unilateral à direita:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

Hipóteses do teste unilateral á esquerda:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

- Calcular a estatística T sob H_0 :

$$T_{obs} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu, \quad (1.4)$$

$$\text{onde } s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}, \bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i \text{ e } \bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j \text{ e } \nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}.$$

- Cálculo do *valor - p*:

Se o teste é bilateral, $\text{valor} - p = 2P(T > |T_{obs}|)$

Se o teste é unilateral à direita, $\text{valor} - p = P(T > T_{obs})$

Se o teste é unilateral à esquerda, $\text{valor} - p = P(T < T_{obs})$.

Assim, considerando um nível de significância α , a hipótese nula (H_0) é rejeitada se $\text{valor} - p < \alpha$.

No software R, a hipótese bilateral com $\alpha = 0,05$ é dada por:

```
t.test(x, y, alternative = "two.sided", paired = F,
conf.level = 0.95, var.equal = FALSE )
```

1.4 Teste Qui-Quadrado de Homogeneidade

O Teste Qui-Quadrado de Homogeneidade serve para testar se diferentes populações tem a mesma proporção de indivíduos com características em comum. Para este trabalho, será considerado apenas o caso com duas populações (X e Y). O teste trata das proporções das populações. Para o teste com 2 populações, espera-se que a proporção esperada seja na razão 1:1. Para a realização do teste, primeiramente é construída a tabela de frequências observadas.

Tabela de frequências observadas :

População	Categoria 1	Categoria 2	Total
X	O_{11}	E_{12}	n_1
Y	O_{21}	E_{22}	n_2

Passos para a realização do teste:

- Considerar a hipótese:

$$\begin{cases} H_0 : P_X = P_Y \\ H_1 : P_X \neq P_Y \end{cases}$$

- Calcular a estatística χ^2 sob H_0 :

$$\chi_{obs}^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi_{1g.l.}^2, \quad (1.5)$$

onde O_{ij} é a frequência observada e E_{ij} é a frequência esperada, definida por:

$$E_{ij} = \frac{(\text{total da linha } i)(\text{total da coluna } j)}{\text{total geral}}.$$

- Cálculo do p-valor:

$$\text{P-valor} = P(\chi^2 > \chi_{obs}^2), \text{ onde } \chi^2 \sim \chi_{(1)}^2$$

Assim, considerando um nível de significância α , a hipótese nula (H_0) é rejeitada se $\text{valor} - p < \alpha$.

1.5 Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney

Considere X_1, X_2, \dots, X_{n_1} Variáveis Aleatórias mutuamente independentes de uma população com distribuição F_x . Considere também Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} mutuamente independentes uma população com distribuição F_y . Considere também que X's e Y's são mutuamente independentes (populações não pareadas).

A hipótese nula do teste de Wilcoxon-Mann-Whitney afirma que a variável X e a variável Y têm a mesma distribuição de probabilidade, mas a distribuição comum não é especificada [Hollander, Wolfe & Chicken, 2014], ou seja:

$$\begin{cases} H_0 : F_x = F_y \\ H_1 : F_x \neq F_y \end{cases}$$

A estatística U para a população Y será:

$$U_y = R_y + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} \quad (1.6)$$

onde R_y é a soma dos postos do grupo Y . O mesmo deve ser feito para a população X .

Quando não existem empates, a estatística do teste de Wilcoxon-Mann-Whitney é dada por:

$$U_{obs} = \min(U_x, U_y) \quad (1.7)$$

- Regra de decisão: se U_{obs} for menor que o valor crítico d (do teste de Mann-Whitney) rejeita-se a hipótese nula.

No caso de empates, a estatística do teste de Wilcoxon-Mann-Whitney sem correção de continuidade é dada por:

$$U = \frac{|U_x - \frac{n_1 n_2}{2}|}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)} \left(\frac{(n_1 + n_2)^3 - n_1 - n_2}{12} - \sum_{i=1}^l \frac{t_i^3 - t_i}{12} \right)}} \approx N(0, 1), \quad (1.8)$$

e a estatística do teste com correção de continuidade é dada por:

$$U = \frac{|U_x - \frac{n_1 n_2}{2}| - 0.5}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)} \left(\frac{(n_1 + n_2)^3 - n_1 - n_2}{12} - \sum_{i=1}^l \frac{t_i^3 - t_i}{12} \right)}} \approx N(0, 1), \quad (1.9)$$

onde l é o número de empates (empates dos postos) e t_j é o número de elementos no j -ésimo empate.

- Cálculo do *valor - p*:

Se o teste é bilateral, $\text{valor} - p = 2P(Z > |U|)$;

Se o teste é unilateral à direita, $\text{valor} - p = P(Z > U)$;

Se o teste é unilateral à esquerda, $\text{valor} - p = P(Z < U)$;

onde $Z \sim N(0, 1)$.

Assim, considerando um nível de significância α , a hipótese nula (H_0) é rejeitada se $\text{valor} - p < \alpha$.

Procedimento no software R:

`wilcox.test(x,y, paired=FALSE, correct=TRUE, exact= TRUE)` para o teste com correção de continuidade e exato. Caso não seja com correção usa-se `correct=FALSE` e Caso não seja o teste exato usa-se `exact=FALSE`.

2 Inferência Bayesiana

Enquanto que na abordagem clássica, o parâmetro (ou vetor) θ , $\theta \in \Theta$, é tratado como um parâmetro fixo, na abordagem bayesiana, θ é uma variável aleatória. Na abordagem bayesiana, o desconhecido é incerto, e tudo pode ser quantificado por meio de cálculo de probabilidades, com o objetivo de minimizar a incerteza.

A intensidade da incerteza a respeito de θ pode assumir diferentes graus. No paradigma Bayesiano, esses diferentes graus de incerteza são representados através de modelos probabilísticos para θ , $P(\theta)$ [Ehlers, 2007], chamados de distribuições a priori, que serão tratadas com mais detalhes adiante.

2.1 Teorema de Bayes

Em teoria das probabilidades e estatística, o teorema de Bayes (alternativamente, a lei de Bayes ou a regra de Bayes) descreve a probabilidade de um evento, baseado em um conhecimento a priori que pode estar relacionado ao evento. O teorema mostra como alterar as probabilidades a priori tendo em vista novas evidências para obter probabilidades a posteriori [Bussab & Morettin, 2010].

Sejam A e B dois eventos contidos no espaço amostral Ω . A probabilidade de um evento A ocorrer, dado que um outro evento B ocorreu, é chamada probabilidade condicional do evento A dado B . A probabilidade condicional é obtida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \quad (2.1)$$

dado que $P(B) > 0$.

A identidade acima é fundamental para a abordagem bayesiana. Considere θ uma quantidade de interesse desconhecida. $P(\theta)$ é a única informação sobre θ . Seja X uma variável aleatória que tem associação com θ , sendo essa relação denotada por $p(x|\theta)$. Com a distribuição a priori $p(\theta)$ e com a distribuição amostral $p(x|\theta)$, a posteriori é definida como :

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int p(\theta, x)d\theta} \quad (2.2)$$

Tem-se que $p(x|\theta)$ (ou $l(\theta;x)$) é a verossimilhança dos possíveis valores de θ . Note

que $p(x)$ não depende de θ , então o teorema de Bayes pode ser escrito como:

$$p(\theta|x) \propto l(\theta; x)p(\theta). \quad (2.3)$$

Em outras palavras, a posteriori de θ pode ser escrita como

$$\text{posteriori} \propto \text{verossimilhança} \times \text{priori}.$$

Como visto acima, o princípio da abordagem bayesiana diz que para achar a distribuição à posteriori de θ , é preciso de distribuição á priori dessa variável, e de uma verossimilhança que aumente as informações sobre θ .

2.2 Distribuições a Priori

A utilização de informação a priori em inferência bayesiana requer a especificação de uma distribuição a priori para a quantidade de interesse θ . Esta distribuição deve representar (probabilisticamente) o conhecimento que se tem sobre θ antes da realização do experimento [Ehlers, 2007].

A distribuição a priori é na maioria dos casos subjetiva, ou seja, depende do problema a ser tratado. A partir da Priori escolhida, na maioria dos casos fica fácil identificar a posteriori adequada. Definição:

- **Priori conjugada:** Se $F = \{p(x|\theta), \theta \in \Theta\}$ é uma classe de distribuições amostrais então uma classe de distribuições P é conjugada a F se $\forall p(x|\theta) \in F$ e $p(\theta) \in P \Rightarrow p(x|\theta) \in P$.

Em alguns casos, não é fácil identificar uma distribuição a priori, ou seja, não se tem total informação sobre o problema. Isso contraria o princípio bayesiano, que diz que para chegar na posteriori, é preciso ter uma priori. Nesses casos de "não informação", a primeira coisa que se pode fazer é usar a priori com distribuição uniforme, ou seja, todos os valores de θ tem a mesma probabilidade de ocorrer. Mas esta técnica traz um problema: se $\theta \in (-\infty, \infty)$, $P(\theta)$ é imprópria, ou seja,

$$\int p(\theta)d\theta = \infty. \quad (2.4)$$

Para resolver este problema, pode ser usada a priori não informativa proposta por Jeffreys em 1961. Primeiro, vamos definir a medida de informação de Fisher.

- **Medida da informação de Fisher:** Considere uma única observação X com função de (densidade) de probabilidade $p(x|\theta)$. A medida de informação esperada de Fisher de θ através de X é definida como

$$I(\theta) = E \left(-\frac{\partial^2 \log p(x|\theta)}{\partial \theta^2} \right). \quad (2.5)$$

A medida de informação observada de Fisher é definida como

$$J(\theta) = -\frac{\partial^2 \log p(x|\theta)}{\partial \theta^2}. \quad (2.6)$$

A partir daí pode-se definir a priori não informativa de Jeffreys.

- **Priori não informativa de Jeffreys:** Seja uma observação X com função de (densidade) de probabilidade $p(x|\theta)$. A priori não informativa de Jeffreys tem função de densidade dada por

$$p(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}. \quad (2.7)$$

Uma observação importante é que a priori de Jeffreys viola o princípio da verossimilhança, pois a informação de Fisher depende da distribuição amostral. O ponto positivo é que o parâmetro θ pode pertencer a um espaço ilimitado.

2.3 Estimação pontual

O principal objetivo da inferência bayesiana é achar a posteriori, pois ela contém toda a informação probabilística sobre o parâmetro de interesse θ . O caso mais simples é a estimação pontual de θ para o qual se resume a distribuição a posteriori através de $\hat{\theta}$ (valor estimado).

Uma diferença (em relação à estimação) entre a Estatística Clássica e a Bayesiana é que na estimação clássica θ (fixo) é estimado por máxima verossimilhança. Já na estimação bayesiana, adota-se o conceito de Função Perda como auxílio na escolha do estimador de θ .

- **Função Perda:** O risco de uma regra de decisão, denotado por $R(\delta)$, é a perda esperada a posteriori, i.e., $R(\delta) = E_{\theta|x}[L(\delta, \theta)]$.

Os tipos de perda são:

1. **Perda quadrática:** definida como $L(a, \theta) = (a - \theta)^2$. O estimador de Bayes para o parâmetro θ é a média da distribuição a posteriori.

$$\hat{\theta} = E(\theta_i|X) = \int_{\Theta} \theta p(\theta|x) d\theta$$

2. **Perda absoluta:** definida como $L(a, \theta) = |a - \theta|$. $L(a, \theta) = 1$ se $|a - \theta| > \epsilon$ e $L(a, \theta) = 0$ se $|a - \theta| < \epsilon$. O estimador de Bayes para o parâmetro θ é a mediana da distribuição a posteriori.

3. **Perda Tudo ou Nada:** o estimador de bayes para o parâmetro θ é a moda a posteriori e pode ser obtido resolvendo a equação

$$\frac{\partial p(\theta|x)}{\partial \theta} = 0. \quad (2.8)$$

2.4 Estimação Intervalar

Na abordagem clássica, se o intervalo de confiança for de 95%, a interpretação será: a cada 100 amostras, em 95 delas o verdadeiro valor de θ estará contido no intervalo. Na abordagem bayesiana, também com 95% de confiança (ou credibilidade) a interpretação será: a probabilidade de θ estar contido no intervalo é de 95%.

- **Intervalo de Credibilidade:** C é um intervalo de credibilidade de 100 $(1 - \alpha)$ %, ou nível de credibilidade $1 - \alpha$, para θ se $P(\theta \in C) \geq 1 - \alpha$.

Quanto menor for o tamanho do intervalo mais concentrada é a distribuição do parâmetro, ou seja o tamanho do intervalo informa sobre a dispersão de θ . Além disso, a exigência de que a probabilidade acima possa ser maior do que o nível de confiança é essencialmente técnica para os casos em que θ não é absolutamente contínua.

É possível construir uma infinidade de intervalos usando a definição acima mas o interesse está apenas naquele com o menor comprimento possível. Pode-se mostrar que intervalos de comprimento mínimo são obtidos tomando-se os valores de θ com maior densidade a posteriori, e esta ideia é expressa matematicamente na definição de intervalo HPD [Ehlers, 2007]:

- **Intervalo HPD:** Um intervalo de credibilidade C de 100 $(1 - \alpha)$ % para θ é de máxima densidade a posteriori (MDP ou HPD em inglês) se $C = \theta \in \Theta: p(\theta/x) \geq k(\alpha)$ onde $k(\alpha)$ é a maior constante tal que $P(\theta \in C) \geq 1 - \alpha$.

A partir desta definição, todos os pontos dentro do intervalo HPD terão densidade maior do que qualquer ponto fora do intervalo.

2.5 FBST

O FBST (Full Bayesian Significance Test) é um teste Genuinamente Bayesiano que leva em consideração o e-valor, onde o e-valor é a evidência de H_0 (Hipótese Nula).

Este teste depende apenas da distribuição a posteriori e por este motivo é considerado um teste genuinamente bayesiano. O objetivo do teste é testar hipóteses precisas baseadas no cálculo da probabilidade a posteriori da região HPD, que é tangente ao conjunto que define a hipótese nula.

Seja $h(\theta|X)$ a posteriori de θ . O conjunto tangente à hipótese nula é definido por:

$$T(x) = \{\theta \in \Theta : h(\theta|X) > h(\theta^*|X)\}, \quad (2.9)$$

onde $\theta^* = \underset{\theta \in \Theta_0}{\operatorname{argmax}} h(\theta|X)$, isto é, $h(\theta^*|X)$ é o valor máximo de $h(\theta|X)$ sob H_0 .

O e-valor é definido por :

$$e - \text{valor} = 1 - P(\theta \in T(x)|X) \quad (2.10)$$

O e-valor é a área da posteriori no conjunto do espaço paramétrico de θ que consiste nos pontos com densidade menor do que no ponto máximo da densidade à posteriori sob H_0 .

A Figura abaixo mostra a Região Tangente e o e-valor para o teste das hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$:

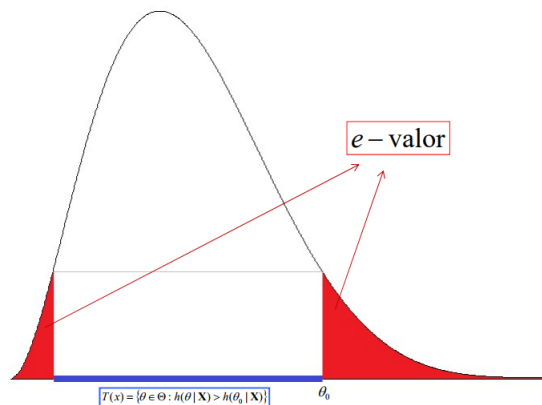


Figura 1 – Região Tangente e e-valor

3 Testes para comparação de duas populações independentes

Neste capítulo, será apresentado o teste FBST para comparação de duas populações independentes utilizando diversas distribuições.

3.1 Distribuições Discretas

3.1.1 Poisson

A distribuição de Poisson é uma distribuição de probabilidade discreta que contabiliza a probabilidade da ocorrência de eventos em determinados períodos de tempo, sendo cada evento independente do anterior.

Se X tem distribuição de Poisson, isto é, $X \sim Poisson(\theta)$, a função de probabilidade de X é dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad (3.1)$$

$x=0,1,2,\dots$ e $\theta \geq 0$.

A média e a Variância da distribuição de Poisson são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \theta,$$

$$Var(X) = \theta.$$

Seja X_1, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória da População 1. $X_1, \dots, X_{n_1} \stackrel{iid}{\sim} Poisson(\theta_1)$. Seja Y_1, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória da População 2. $Y_1, \dots, Y_{n_2} \stackrel{iid}{\sim} Poisson(\theta_2)$. Considere que as amostras são independentes.

O interesse é comparar os dois grupos testando a hipótese de que os parâmetros de ambas populações são iguais, ou seja:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

É importante notar que a hipótese acima equivale a testar se as duas populações têm médias iguais.

A função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned}
L(\theta_1; \theta_2) &= \prod_{i=1}^{n_1} \frac{e^{-\theta_1} \theta_1^{x_i}}{x_i!} \prod_{j=1}^{n_2} \frac{e^{-\theta_2} \theta_2^{y_j}}{y_j!} \\
&= \frac{e^{-(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)} \theta_1^{\sum_{i=1}^{n_1} x_i} \theta_2^{\sum_{j=1}^{n_2} y_j}}{(\prod_{i=1}^{n_1} x_i!) (\prod_{j=1}^{n_2} y_j!)}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Considerando, a Priori, que $\theta_1 \sim \text{Gama}(a_1, b_1)$ e que $\theta_2 \sim \text{Gama}(a_2, b_2)$, a_1, b_1, a_2, b_2 conhecidos e positivos, a posteriori é dada por:

$$\pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{\sum_{i=1}^{n_1} x_i + a_1 - 1} \theta_2^{\sum_{j=1}^{n_2} y_j + a_2 - 1} e^{-(n_1\theta_1 + n_2\theta_2 + b_1\theta_1 + b_2\theta_2)}. \tag{3.3}$$

Isso implica que:

$$\begin{aligned}
\theta_1 | \mathbf{X} &\sim \text{Gama} \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i + a_1, n_1 + b_1 \right), \\
\theta_2 | \mathbf{Y} &\sim \text{Gama} \left(\sum_{j=1}^{n_2} y_j + a_2, n_2 + b_2 \right),
\end{aligned}$$

com $\theta_1 | \mathbf{X}$ independente de $\theta_2 | \mathbf{Y}$. Sob $H_0: \theta_1 = \theta_2$, a posteriori sob H_0 é dada por:

$$\pi_0(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{(\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j + a_1 + a_2 - 2)} e^{-\theta_1(n_1 + n_2 + b_1 + b_2)}. \tag{3.4}$$

Desta maneira, o valor de θ_1 que maximiza $\pi_0(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ é dado por:

$$\theta_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j + a_1 + a_2 - 2}{n_1 + n_2 + b_1 + b_2}. \tag{3.5}$$

Com todas as informações acima, o máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\theta_1^*, \theta_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Assim, a região tangente do teste FBST é dada por:

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in R_+^2 : \pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > \pi^*(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})\},$$

e a evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor-}e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

3.1.1.1 Exemplo: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição de Poisson

Considere uma amostra de tamanho 10 que, dado θ_1 , segue uma $Poisson(\theta_1)$. $X|\theta_1 \sim Poisson(\theta_1)$. Considere uma amostra de tamanho 20 que, dado θ_2 , segue uma $Poisson(\theta_2)$. $Y|\theta_2 \sim Poisson(\theta_2)$.

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias, desvios-padrão e somatório de cada população:

Tabela 1 – Distribuição de Poisson: Média, Desvio-Padrão e Somatório

População	n	Média	Desvio-Padrão	Σ
População 1	10	0,8	0,7888106	8
População 2	20	1	1,025978	20

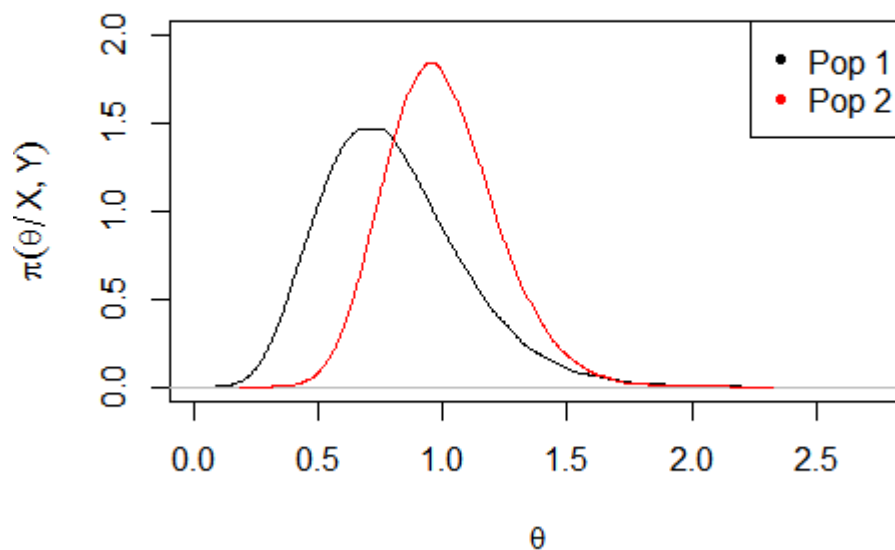
Considere, a priori que $\theta_1 \sim Gama(0,001; 0,001)$ e que $\theta_2 \sim Gama(0,001; 0,001)$. Ou seja, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0,001$. Então :

$$\theta_1|X \sim Gama(8,001; 10,001)$$

e

$$\theta_2|X \sim Gama(20,001; 20,001).$$

A figura abaixo apresenta as densidades marginais a posteriori de θ_1 e θ_2 :

Figura 2 – Densidades Marginais a Posteriori de θ_1 e θ_2

Para comparar as duas populações, as hipóteses a serem consideradas são:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

A posteriori conjunta de $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ é dado por:

$$\pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{8,001-1} \theta_2^{20,001-1} e^{-(10,001\theta_1 + 20,001\theta_2)}.$$

Sob H_0 , a posteriori é dada por:

$$\pi_0(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{28,002-2} e^{-\theta_1(30,002)}.$$

Logo, o valor de θ_1 que maximiza a fórmula acima é dada por:

$$\theta_1^* = \frac{28,002 - 2}{30,002} = 0,8666756.$$

Portanto, o máximo da posteriori sob H_0 é dado por :

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\theta_1^*, \theta_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 2,116474.$$

A região tangente do teste teste FBST é dado por:

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in R_+^2 : \pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > 2,116474\}.$$

O *valor-e* do teste FBST é dado por:

$$\text{valor-e} = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,78154.$$

Não existem evidências para rejeitar a hipótese nula de que os parâmetros das duas populações são iguais (*valor - e* > 0,05).

Considere agora outro exemplo de duas populações com distribuição de Poisson:

Tabela 2 – Distribuição de Poisson: Média, Desvio-Padrão e Somatório

População	n	Média	Desvio-Padrão	Σ
População 1	20	9,20	3,18880	184
População 2	30	13,13	4,24860	394

Neste caso, o *valor - e* do teste FBST é dado por:

$$\text{valor - e} = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,00027,$$

mostrando fortes evidências para rejeitar a hipótese nula de que os parâmetros das duas populações são iguais (*valor* – $e < 0,05$).

3.1.2 Bernoulli

A distribuição de Bernoulli é uma distribuição de probabilidade discreta que assume apenas os valores $\{0, 1\}$. Recebe valor 1 se acontece sucesso com probabilidade θ e recebe valor 0 se acontece fracasso com probabilidade $1 - \theta$.

Se X tem distribuição de Bernoulli, isto é, $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$, a função de probabilidade de X é dada por:

$$P(X = x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}, \quad (3.6)$$

$x=0,1$ e $\theta \in (0, 1)$.

A média e a variância da distribuição de Bernoulli são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \theta,$$

$$\text{Var}(X) = \theta(1 - \theta).$$

Seja X_1, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória da População 1. $X_1, \dots, X_{n_1} \stackrel{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(\theta_1)$. Seja Y_1, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória da População 2. $Y_1, \dots, Y_{n_2} \stackrel{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(\theta_2)$. Considere que as amostras são independentes.

O interesse é comparar os dois grupos testando a hipótese de que os parâmetros de ambas populações são iguais, ou seja:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

É importante notar que a hipótese acima equivale a testar se as duas populações têm proporções iguais.

A função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\theta_1; \theta_2) &= \prod_{i=1}^{n_1} \theta_1^{x_i} (1 - \theta_1)^{1-x_i} \prod_{j=1}^{n_2} \theta_2^{y_j} (1 - \theta_2)^{1-y_j} \\ &= \theta_1^{\sum_{i=1}^{n_1} x_i} (1 - \theta_1)^{n_1 - \sum_{i=1}^{n_1} x_i} \theta_2^{\sum_{j=1}^{n_2} y_j} (1 - \theta_2)^{n_2 - \sum_{j=1}^{n_2} y_j}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Considerando, a priori, que $\theta_1 \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$ e que $\theta_2 \sim \text{Beta}(a_2, b_2)$ ($a_i \geq 0$ e $b_i \geq 0$), a posteriori é dada por:

$$\pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{\sum_{i=1}^{n_1} x_i + a_1 - 1} (1 - \theta_1)^{n_1 - \sum_{i=1}^{n_1} x_i + b_1 - 1} \theta_2^{\sum_{j=1}^{n_2} y_j + a_2 - 1} (1 - \theta_2)^{n_2 - \sum_{j=1}^{n_2} y_j + b_2 - 1} \quad (3.8)$$

Isso implica que:

$$\begin{aligned} \theta_1 | \mathbf{X} &\sim \text{Beta} \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i + a_1, n_1 - \sum_{i=1}^{n_1} x_i + b_1 \right), \\ \theta_2 | \mathbf{Y} &\sim \text{Beta} \left(\sum_{j=1}^{n_2} y_j + a_2, n_2 - \sum_{j=1}^{n_2} y_j + b_2 \right), \end{aligned}$$

com $\theta_1 | \mathbf{X}$ independente de $\theta_2 | \mathbf{Y}$. Sob $H_0: \theta_1 = \theta_2$, a posteriori sob H_0 é dada por:

$$\pi_0(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{(\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j + a_1 + a_2 - 2)} (1 - \theta_1)^{n_1 + n_2 + b_1 + b_2 - \sum_{i=1}^{n_1} x_i - \sum_{j=1}^{n_2} y_j - 2} \quad (3.9)$$

Desta maneira, o valor de θ_1 que maximiza $\pi_0(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ é dado por:

$$\theta_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j + a_1 + a_2 - 2}{n_1 + n_2 + b_1 + b_2 + a_1 + a_2 - 4}. \quad (3.10)$$

Com todas as informações acima, o máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\theta_1^*, \theta_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

A região tangente do teste FBST é :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in R_+^2 : \pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > \pi^*(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})\}.$$

e a evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor-}e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

3.1.2.1 Exemplo: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição de Bernoulli (Comparação de duas proporções)

Considere uma amostra de tamanho 30 que, dado θ_1 , segue uma *Bernoulli*(θ_1). $X | \theta_1 \sim \text{Bernoulli}(\theta_1)$. Considere uma amostra de tamanho 20 que, dado θ_2 , segue uma *Bernoulli*(θ_2). $Y | \theta_2 \sim \text{Bernoulli}(\theta_2)$.

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias, desvios-padrão e somatório de cada população:

Tabela 3 – Distribuição de Bernoulli: Média, Desvio-Padrão e Somatório

População	n	Média	Desvio-Padrão	Σ
População 1	30	0,5	0,5085476	15
População 2	20	0,35	0,4893605	7

A proporção estimada de sucessos para a população 1 é de 0.5 e de 0.35 para a população 2.

Considere, a priori que $\theta_1 \sim Beta(1, 1)$ e que $\theta_2 \sim Beta(1, 1)$. Ou seja, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$. Então :

$$\theta_1|X \sim Beta(16, 16)$$

e

$$\theta_2|X \sim Beta(8, 14).$$

A figura abaixo apresenta as densidades marginais a posteriori de θ_1 e θ_2 :

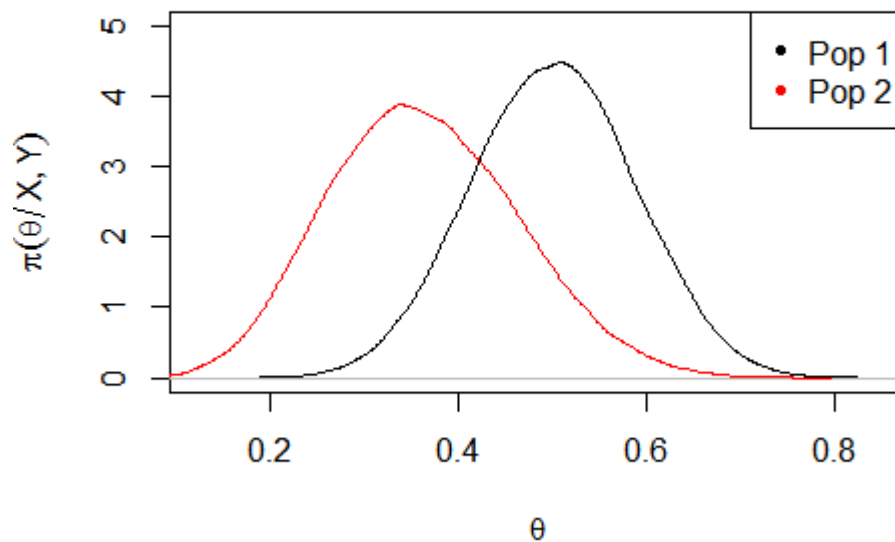


Figura 3 – Densidades Marginais a Posteriori de θ_1 e θ_2

Para comparar as duas populações, as hipóteses a serem consideradas são:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

A posteriori conjunta de $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ é dado por:

$$\pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{15} (1 - \theta_1)^{15} \theta_2^7 (1 - \theta_2)^{13}.$$

Sob H_0 , a posteriori é dada por:

$$\pi_0(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{22} (1 - \theta_1)^{28},$$

logo, o valor de θ_1 que maximiza a fórmula acima é dada por:

$$\theta_1^* = \frac{22}{50} = 0,44.$$

Portanto, o máximo da posteriori sob H_0 é dado por :

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\theta_1^*, \theta_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 9,974227.$$

A região tangente do teste teste FBST é dado por:

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in R_+^2 : \pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > 9,974227\},$$

e o *valor - e* do teste FBST é dado por:

$$\text{valor} - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,556906,$$

levando a concluir que não existem evidências para rejeitar a hipótese nula de que as proporções das duas populações são iguais (*valor - e* $> 0,05$).

Considere agora outro exemplo de duas populações com distribuição de Bernoulli:

Tabela 4 – Distribuição de Bernoulli: Média, Desvio-Padrão e Somatório

População	n	Média	Desvio-Padrão	Σ
População 1	35	0,49	0,50709	17
População 2	30	0,8	1,80803	24

O *valor-e* do teste FBST é dado por:

$$\text{valor-e} = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,02493,$$

mostrando fortes evidências para rejeitar a hipótese nula de que as proporções das duas populações são iguais (*valor - e* $< 0,05$).

3.2 Distribuições Contínuas

3.2.1 Exponencial

A distribuição Exponencial representa o tempo de ocorrência entre dois eventos, com média $\frac{1}{\theta}$, onde θ é a taxa. Se X tem distribuição Exponencial, isto é, $X \sim Exp(\theta)$, a função densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad (3.11)$$

$x \geq 0$ e $\theta > 0$.

A média e a variância da distribuição Exponencial são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \frac{1}{\theta}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

Seja X_1, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória da População 1. $X_1, \dots, X_{n_1} \stackrel{iid}{\sim} Exp(\theta_1)$, onde n_1 é o tamanho da amostra da população 1. Seja Y_1, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória da População 2. $Y_1, \dots, Y_{n_2} \stackrel{iid}{\sim} Exp(\theta_2)$, onde n_2 é o tamanho da amostra da população 2. Considere que as amostras são independentes.

O interesse é comparar os dois grupos testando a hipótese de que os parâmetros de ambas populações são iguais, ou seja:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

É importante notar que a hipótese acima equivale a testar se as duas populações têm taxas iguais.

A função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\theta_1; \theta_2) &= \prod_{i=1}^{n_1} \theta_1^{x_i} e^{-\theta_1 x_i} \prod_{j=1}^{n_2} \theta_2 e^{-\theta_2 y_j} \\ &= \theta_1^{n_1} e^{-\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i} \theta_2^{n_2} e^{-\theta_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considerando, a Priori, que $\theta_1 \sim Gama(a_1, b_1)$ e que $\theta_2 \sim Gama(a_2, b_2)$, a_1, b_1, a_2, b_2 conhecidos e positivos, a posteriori é dada por:

$$\pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{n_1+a_1-1} e^{\theta_1(\sum_{i=1}^{n_1} x_i + b_1)} \theta_2^{n_2+a_2-1} e^{\theta_2(\sum_{j=1}^{n_2} y_j + b_2)}. \quad (3.13)$$

Isso implica que:

$$\theta_1|\mathbf{X} \sim \text{Gama} \left(n_1 + a_1, \sum_{i=1}^{n_1} x_i + b_1 \right),$$

$$\theta_2|\mathbf{Y} \sim \text{Gama} \left(n_2 + a_2, \sum_{j=1}^{n_2} y_j + b_2 \right),$$

com $\theta_1|\mathbf{X}$ independente de $\theta_2|\mathbf{Y}$. Sob $H_0: \theta_1 = \theta_2$, a posteriori sob H_0 é dada por:

$$\pi_0(\theta_1, \theta_2|\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{(n_1+n_2+a_1+a_2-2)} e^{-\theta_1(\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j + b_1 + b_2)}. \quad (3.14)$$

Desta maneira, o valor de θ_1 que maximiza $\pi_0(\theta_1, \theta_2|\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ é dado por:

$$\theta_1^* = \frac{n_1 + n_2 + a_1 + a_2 - 2}{\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j + b_1 + b_2}. \quad (3.15)$$

Com todas as informações acima, o máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2|\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\theta_1^*, \theta_2^*|\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

A região tangente do teste FBST é :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in R_+^2 : \pi(\theta_1, \theta_2|\mathbf{X}, \mathbf{Y}) > \pi^*(\theta_1, \theta_2|\mathbf{X}, \mathbf{Y})\},$$

e a evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor} - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y)|\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

3.2.1.1 Exemplo: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Exponencial

Considere uma amostra de tamanho 100 que, dado θ_1 , segue uma $Exp(\theta_1)$. $X|\theta_1 \sim Poisson(\theta_1)$. Considere uma amostra de tamanho 150 que, dado θ_2 , segue uma $Exp(\theta_2)$. $Y|\theta_2 \sim Poisson(\theta_2)$.

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias, desvios-padrão e somatório de cada população:

Tabela 5 – Distribuição Exponencial: Amostra, Média, Desvio-Padrão e Somatório

População	n	Média	Desvio-Padrão	Σ
População 1	100	0,1908998	0,170785	19,08998
População 2	150	0,12162929	0,112129	18,24439

Considere, a priori que $\theta_1 \sim \text{Gama}(0,001; 0,001)$ e que $\theta_2 \sim \text{Gama}(0,001; 0,001)$. Ou seja, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0,001$. Então :

$$\theta_1|X \sim \text{Gama}(100,001; 19,09098)$$

e

$$\theta_2|X \sim \text{Gama}(150,001; 18,24539).$$

A figura abaixo apresenta as densidades marginais a posteriori de θ_1 e θ_2 :

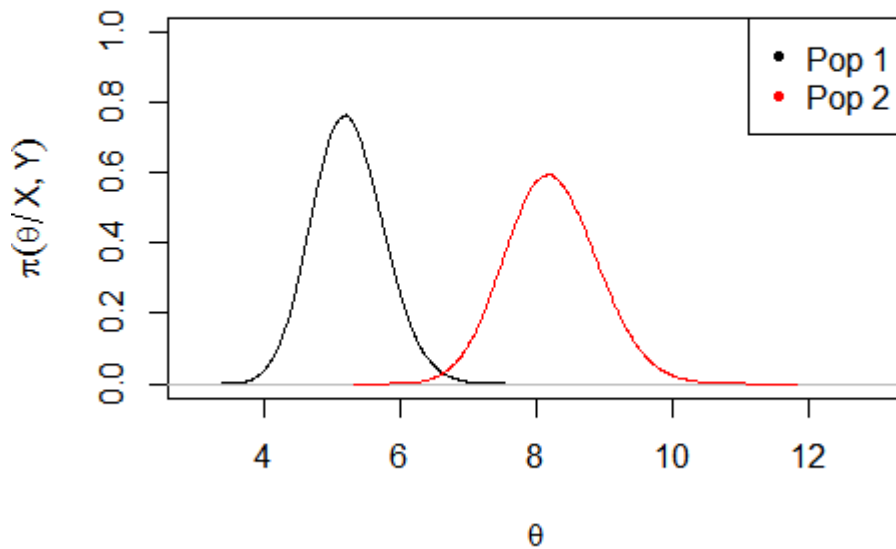


Figura 4 – Densidades Marginais a Posteriori de θ_1 e θ_2

Para comparar as duas populações, as hipóteses a serem consideradas são:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

A posteriori conjunta de $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ é dado por:

$$\pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{100,001-1} \theta_2^{150,001-1} e^{-(19,09098\theta_1 + 18,24539\theta_2)}.$$

Sob H_0 , a posteriori é dada por:

$$\pi_0(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \propto \theta_1^{250,002-2} e^{-\theta_1(37,33637)}.$$

Logo, o valor de θ_1 que maximiza a fórmula acima é dada por:

$$\theta_1^* = \frac{250,002 - 2}{37,33637} = 6,642369.$$

Portanto, o máximo da posteriori sob H_0 é dado por :

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\theta_1^*, \theta_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,0008614538.$$

A região tangente do teste teste FBST é dado por:

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) \in R_+^2 : \pi(\theta_1, \theta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > 0,0008614538\}.$$

O *valor - e* do teste FBST é dado por:

$$\text{valor-e} = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,00193,$$

mostrando fortes evidências para rejeitar a hipótese nula (*valor - e* < 0,05). Portanto as duas Populações têm parâmetros (e conseqüentemente médias) diferentes.

Considere agora outro exemplo de duas populações com distribuição Exponencial:

Tabela 6 – Distribuição Exponencial: Amostra, Média, Desvio-Padrão e Somatório

População	n	Média	Desvio-Padrão	Σ
População 1	100	0,04649	0,05234	4,64894
População 2	100	0,04226	0,04758	4,22631

O *valor - e* do teste FBST é dado por:

$$\text{valor-e} = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,63600,$$

mostrando que não existem evidências para rejeitar a hipótese nula (*valor - e* > 0,05). Portanto as duas populações têm parâmetros (e conseqüentemente médias) iguais.

3.2.2 Normal

Também conhecida como Gaussiana, a distribuição Normal é a distribuição contínua mais importante. É importante, por exemplo, no Teorema Central do Limite, que garante que dados que não seguem distribuição Normal passem a ter a mesma. Se X tem distribuição Normal, isto é, $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, a função densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.16)$$

$x \in (-\infty, \infty)$, $\theta \in (-\infty, \infty)$ e $\sigma^2 > 0$.

A média e a variância da distribuição Normal são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \theta,$$

$$Var(X) = \sigma^2.$$

Seja X_1, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória da População 1. $X_1, \dots, X_{n_1} \stackrel{iid}{\sim} N(\theta_1, \sigma_1^2)$.
Seja Y_1, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória da População 2. $Y_1, \dots, Y_{n_2} \stackrel{iid}{\sim} N(\theta_2, \sigma_2^2)$. Considere que as amostras são independentes.

A função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\theta_1; \theta_2; \sigma_1; \sigma_2) &= \prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{x_i^2 + 2\theta_1 x_i - \theta_1^2}{2\sigma_1^2}} \prod_{j=1}^{n_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{y_j^2 + 2\theta_2 y_j - \theta_2^2}{2\sigma_2^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \right)^{n_1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1 \theta_1^2}{2\sigma_1^2}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \right)^{n_2} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 + 2\theta_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j - n_2 \theta_2^2}{2\sigma_2^2}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Considerando, a priori, que $\theta_1 \sim N(c_1, d_1)$, $\theta_2 \sim N(c_2, d_2)$, $\sigma_1 \sim Gama(a_1, b_1)$ e $\sigma_2 \sim Gama(a_2, b_2)$, $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ conhecidos e positivos, $\theta_1, \theta_2, \sigma_1^2$ e σ_2^2 independentes, a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\theta_1; \theta_2; \sigma_1; \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \right)^{n_1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1 \theta_1^2}{2\sigma_1^2}} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi d_1}} e^{-\frac{(\theta_1 - c_1)^2}{2d_1}} \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} (\sigma_1)^{a_1 - 1} e^{-b_1 \sigma_1} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \right)^{n_2} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 + 2\theta_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j - n_2 \theta_2^2}{2\sigma_2^2}} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi d_2}} e^{-\frac{(\theta_2 - c_2)^2}{2d_2}} \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} (\sigma_2)^{a_2 - 1} e^{-b_2 \sigma_2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Assim, o $\log(\pi)$ é:

$$\begin{aligned}
\log(\pi) &= \left(\frac{-n_1 \log(2\pi\sigma_1^2)}{2} - \left(\frac{-\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1\theta_1^2}{2\sigma_1^2} \right) - \frac{\log(2\pi d_1)}{2} \right) \\
&- \left(\frac{(\theta_1 - c_1)^2}{2d_1} + a_1 \log(b_1) - \log(\Gamma(a_1)) + (a_1 - 1) \log(\sigma_1) - b_1 \sigma_1 \right) \\
&+ \left(\frac{-n_2 \log(2\pi\sigma_2^2)}{2} - \left(\frac{-\sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 + 2\theta_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j - n_2\theta_2^2}{2\sigma_2^2} \right) - \frac{\log(2\pi d_2)}{2} \right) \\
&- \left(\frac{(\theta_2 - c_2)^2}{2d_2} + a_2 \log(b_2) - \log(\Gamma(a_2)) + (a_2 - 1) \log(\sigma_2) - b_2 \sigma_2 \right). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Considere que o interesse seja comparar a média das duas populações. Então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

Sob H_0 , a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned}
\pi_0(\theta_1; \sigma_1; \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \right)^{n_1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1\theta_1^2}{2\sigma_1^2}} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi d_1}} e^{-\frac{(\theta_1 - c_1)^2}{2d_1}} \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} (\sigma_1)^{a_1-1} e^{-b_1 \sigma_1} \\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \right)^{n_2} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 + 2\theta_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j - n_2\theta_2^2}{2\sigma_2^2}} \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi d_2}} e^{-\frac{(\theta_2 - c_2)^2}{2d_2}} \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} (\sigma_2)^{a_2-1} e^{-b_2 \sigma_2}. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

E o $\log(\pi_0)$ é:

$$\begin{aligned}
\log(\pi_0) &= \left(\frac{-n_1 \log(2\pi\sigma_1^2)}{2} - \left(\frac{-\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 + 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i - n_1\theta_1^2}{2\sigma_1^2} \right) - \frac{\log(2\pi d_1)}{2} \right) \\
&- \left(\frac{(\theta_1 - c_1)^2}{2d_1} + a_1 \log(b_1) - \log(\Gamma(a_1)) + (a_1 - 1) \log(\sigma_1) - b_1 \sigma_1 \right) \\
&+ \left(\frac{-n_2 \log(2\pi\sigma_2^2)}{2} - \left(\frac{-\sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 + 2\theta_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j - n_2\theta_2^2}{2\sigma_2^2} \right) - \frac{\log(2\pi d_2)}{2} \right) \\
&- \left(\frac{(\theta_2 - c_2)^2}{2d_2} + a_2 \log(b_2) - \log(\Gamma(a_2)) + (a_2 - 1) \log(\sigma_2) - b_2 \sigma_2 \right). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Os valores de $(\theta_1^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ que maximizam $\pi_0(\theta_1; \theta_2; \sigma_1; \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ não podem ser obtidos analiticamente. Para encontrar tais valores, serão utilizados métodos numéricos, em particular o de Newton-Raphson.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\theta_1^*, \theta_2^*, \sigma_1^*, \sigma_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

A região tangente do teste FBST é :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2) \in R_+^4 : \pi(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > \pi^*(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})\},$$

e a evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor} - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Se o interesse for comparar as variâncias, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

Os valores de $(\theta_1^*, \theta_2^*, \sigma_1^*)$ que maximizam $\pi_0(\theta_1; \theta_2; \sigma_1; \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ não podem ser obtidos analiticamente. Para encontrar tais valores, serão utilizados métodos numéricos, em particular o de Newton-Raphson.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\theta_1^*, \theta_2^*, \sigma_1^*, \sigma_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

A região tangente do teste FBST é :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2) \in R_+^4 : \pi(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > \pi^*(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})\},$$

e a evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor} - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Se o interesse for comparar se as duas populações tem distribuições iguais, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \text{ e } \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \text{ ou } \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

Os valores de (θ_1^*, σ_1^*) que maximizam $\pi_0(\theta_1; \theta_2; \sigma_1; \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ não podem ser obtidos analiticamente. Para encontrar tais valores, serão utilizados métodos numéricos, em particular o de Newton-Raphson.

O máximo da posteriori sob a Hipótese Nula é dado por:

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\theta_1^*, \theta_2^*, \sigma_1^*, \sigma_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

A região tangente do teste FBST é :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2) \in R_+^4 : \pi(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > \pi^*(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})\},$$

e a evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor} - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

3.2.2.1 Exemplo 1: Comparação de médias de duas Populações Independentes com Distribuição Normal (Variâncias desconhecidas e desiguais)

Considere uma amostra de tamanho 50 que dado θ_1 e σ_1 , segue uma $N(\theta_1, \sigma_1^2)$ e considere uma amostra de tamanho 50 que dado θ_2 e σ_2 , segue uma $N(\theta_2, \sigma_2^2)$.

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias e desvios-padrão de cada população:

Tabela 7 – Distribuição Normal: Amostra, Média, Desvio-Padrão

População	n	Média	Desvio-Padrão
População 1	50	49,2775	12,23769
População 2	50	39,33771	11,21789

Considere, a priori, que $\theta_1 \sim N(c_1, d_1)$, $\theta_2 \sim N(c_2, d_2)$, $\sigma_1 \sim Gama(a_1, b_1)$ e $\sigma_2 \sim Gama(a_2, b_2)$. Considere que $c_1 = c_2 = 0$, que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0,001$ e $d_1 = d_2 = 100$.

Se o interesse é comparar as médias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \end{cases}$$

O $\log(\pi_0(\theta_1; \sigma_1; \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ é dado pela equação (3.21). O valor de $(\theta_1^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ que maximiza $\log(\pi_0(\theta_1; \sigma_1; \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ não pode ser obtido analiticamente, apenas por métodos numéricos. Para tal amostra tem-se que $(\theta_1^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = (41,95002; 14,01714; 11,29495)$.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\log(\pi^*(\theta_1, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \log(\pi_0(\theta_1^*, \sigma_1^*, \sigma_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -439,09.$$

A região tangente à hipótese nula do teste FBST é dado pelos valores de $(\theta_1, \sigma_1, \sigma_2)$ cujo logaritmo da posteriori é maior que $\log(\pi_0^*(\theta_1^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*|\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -439,09$, ou seja :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2) \in R_+^4 : \log(\pi(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2|\mathbf{X}, \mathbf{Y})) > -439,09\}.$$

A evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor} - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y)|\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,006.$$

Pode-se concluir que há evidências para rejeitar a hipótese nula de médias iguais, pois $\text{valor} - e < 0,05$.

3.2.2.2 Exemplo 2: Comparação de Variâncias de duas Populações Independentes com Distribuição Normal (Médias desconhecidas e desiguais)

Considere uma amostra de tamanho 30 que dado θ_1 e σ_1 , segue uma $N(\theta_1, \sigma_1^2)$. Considere uma amostra de tamanho 20 que dado θ_2 e σ_2 , segue uma $N(\theta_2, \sigma_2^2)$.

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias e desvios-padrão de cada população:

Tabela 8 – Distribuição Normal: Amostra, Média, Desvio-Padrão

População	n	Média	Desvio-Padrão
População 1	30	75,98169	44,309
População 2	20	87,94711	60,99031

Considere, a priori, que $\theta_1 \sim N(c_1, d_1)$, $\theta_2 \sim N(c_2, d_2)$, $\sigma_1 \sim \text{Gama}(a_1, b_1)$ e $\sigma_2 \sim \text{Gama}(a_2, b_2)$. Considere que $c_1 = c_2 = 0$, que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0,001$ e $d_1 = d_2 = 100$.

Se o interesse é comparar as variâncias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

O valor de $(\theta_1^*, \theta_2^*, \sigma_1^*)$ que maximiza $\log(\pi_0(\theta_1; \theta_2; \sigma_1|\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ não pode ser obtido analiticamente, apenas por métodos numéricos. Para tal amostra tem-se que $(\theta_1^*, \theta_2^*, \sigma_1^*) = (75,99606; 87,95016; 50,52041)$.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\log(\pi^*(\theta_1, \theta_2, \sigma_1|\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \log(\pi_0(\theta_1^*, \theta_2^*, \sigma_1^*|\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -300,5549.$$

A região tangente à hipótese nula do teste FBST é dado pelos valores de $(\theta_1, \theta_2, \sigma_1,)$ cujo logaritmo da posteriori é maior que $\log(\pi_0^*(\theta_1^*, \theta_2^*, \sigma_1^*|\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -300,5549$, ou seja :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2) \in R_+^4 : \log(\pi(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) > -300, 5549\}.$$

A evidência da hipótese nula será:

$$valor - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0, 68722.$$

Pode-se concluir que há evidências para aceitar a hipótese nula de variâncias iguais, pois $valor - e > 0,05$.

3.2.2.3 Exemplo 3: Comparação de Distribuições de duas Populações Independentes com Distribuição Normal

Considere uma amostra de tamanho x que dado θ_1 e σ_1 , segue uma $N(\theta_1, \sigma_1^2)$. Considere uma amostra de tamanho y que dado θ_2 e σ_2 , segue uma $N(\theta_2, \sigma_2^2)$.

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias e desvios-padrão de cada população:

Tabela 9 – Distribuição Normal: Amostra, Média, Desvio-Padrão

População	n	Média	Desvio-Padrão
População 1	100	65,54786	38,35228
População 2	150	72,71036	46,36476

Considere, a priori, que $\theta_1 \sim N(c_1, d_1)$, $\theta_2 \sim N(c_2, d_2)$, $\sigma_1 \sim Gama(a_1, b_1)$ e $\sigma_2 \sim Gama(a_2, b_2)$. Considere que $c_1 = c_2 = 0$, que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0,001$ e $d_1 = d_2 = 100$.

Se o interesse for comparar se as duas populações tem distribuições iguais, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0 : \theta_1 = \theta_2 \text{ e } \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_1 : \theta_1 \neq \theta_2 \text{ ou } \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$$

O valor de (θ_1^*, σ_1^*) que maximiza $\log(\pi_0(\theta_1; \sigma_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ não pode ser obtido analiticamente, apenas por métodos numéricos. Para tal amostra tem-se que $(\theta_1^*, \sigma_1^*) = (60,21002; 44,12739)$.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\log(\pi^*(\theta_1, \sigma_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \log(\pi_0(\theta_1^*, \sigma_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -1367, 071.$$

A região tangente à hipótese nula do teste FBST é dado pelos valores de (θ_1, σ_1) cujo logaritmo da posteriori é maior que $\log(\pi_0^*(\theta_1^*, \sigma_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -1367, 071$, ou seja :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2) \in R_+^4 : \log(\pi(\theta_1, \theta_2, \sigma_1, \sigma_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) > -1367,071\}.$$

A evidência da hipótese nula será:

$$valor-e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,13618.$$

Pode-se concluir que não há evidências para rejeitar a hipótese nula de distribuições iguais, pois $valor-e > 0,05$.

3.2.3 Gama

A distribuição Gama é uma das mais gerais, já que várias distribuições são casos particulares da Gama. Como exemplo têm-se a distribuição Exponencial, Qui-Quadrado, entre outras. A principal aplicação é direcionada à área de análise do tempo de vida de produtos. Se X tem distribuição Gama, isto é, $X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$, a função densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad (3.22)$$

$$x \geq 0, \alpha, \beta > 0.$$

A média e a variância da distribuição Gama são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Seja X_1, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória da População 1. $X_1, \dots, X_{n_1} \stackrel{iid}{\sim} \text{Gama}(\alpha_1, \beta_1)$.
Seja Y_1, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória da População 2. $Y_1, \dots, Y_{n_2} \stackrel{iid}{\sim} \text{Gama}(\alpha_2, \beta_2)$. Considere que as amostras são independentes.

A função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha_1; \alpha_2; \beta_1; \beta_2) &= \prod_{i=1}^{n_1} \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} (x_i)^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1 x_i} \prod_{j=1}^{n_2} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} (y_j)^{\alpha_2-1} e^{-\beta_2 y_j} \\ &= \left(\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \right)^{n_1} \left(\prod_{i=1}^{n_1} x_i \right)^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i} \\ &\times \left(\frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \right)^{n_2} \left(\prod_{j=1}^{n_2} y_j \right)^{\alpha_2-1} e^{-\beta_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Considerando, à Priori, que $\alpha_1 \sim Gama(a_1, b_1)$, $\beta_1 \sim Gama(c_1, d_1)$, $\alpha_2 \sim Gama(a_2, b_2)$ e $\beta_2 \sim Gama(c_2, d_2)$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ conhecidos e positivos, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ e β_2 independentes, a Posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \left(\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \right)^{n_1} \left(\prod_{i=1}^{n_1} x_i \right)^{\alpha_1-1} e^{-(\beta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i)} \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \\ & \times \frac{d_1^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \beta_1^{c_1-1} e^{-(d_1 \beta_1)} \left(\frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \right)^{n_2} \left(\prod_{j=1}^{n_2} y_j \right)^{\alpha_2-1} e^{-\beta_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j} \\ & \times \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha_2^{a_2-1} e^{-(b_2 \alpha_2)} \frac{d_2^{c_2}}{\Gamma(c_2)} \beta_2^{c_2-1} e^{-d_2 \beta_2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

E o $\log(\pi)$ é:

$$\begin{aligned} \log(\pi) &= n_1 \log \left(\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \right) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^{n_1} \log(x_i) - \beta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i + \log \left(\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \right) \\ &+ \log \left(\frac{d_1^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \beta_1^{c_1-1} e^{-d_1 \beta_1} \right) + n_2 \log \left(\frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \right) + (\alpha_2 - 1) \sum_{j=1}^{n_2} \log(y_j) - \beta_2 \sum_{j=1}^{n_2} y_j \\ &+ \log \left(\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2} \right) + \log \left(\frac{d_2^{c_2}}{\Gamma(c_2)} \beta_2^{c_2-1} e^{-d_2 \beta_2} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Considere que o interesse seja comparar se as duas populações tem distribuições iguais. Então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{10} : \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } \beta_1 = \beta_2 \\ H_{11} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ ou } \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}$$

Sob H_0 , a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi_0(\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \left(\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \right)^{n_1} \left(\prod_{i=1}^{n_1} x_i \right)^{\alpha_1-1} e^{-(\beta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i)} \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \\ & \times \frac{d_1^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \beta_1^{c_1-1} e^{-(d_1 \beta_1)} \left(\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \right)^{n_2} \left(\prod_{j=1}^{n_2} y_j \right)^{\alpha_1-1} e^{-\beta_1 \sum_{j=1}^{n_2} y_j} \\ & \times \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha_1^{a_2-1} e^{-(b_2 \alpha_1)} \frac{d_2^{c_2}}{\Gamma(c_2)} \beta_1^{c_2-1} e^{-d_2 \beta_1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

E o $\log(\pi_0)$ é:

$$\begin{aligned}
\log(\pi_0) &= n_1 \log\left(\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\right) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^{n_1} \log(x_i) - \beta_1 \sum_{i=1}^{n_1} x_i + \log\left(\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1}\right) \\
&+ \log\left(\frac{d_1^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \beta_1^{c_1-1} e^{-d_1 \beta_1}\right) + n_2 \log\left(\frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\right) + (\alpha_1 - 1) \sum_{j=1}^{n_2} \log(y_j) - \beta_1 \sum_{j=1}^{n_2} y_j \\
&+ \log\left(\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha_1^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_1}\right) + \log\left(\frac{d_2^{c_2}}{\Gamma(c_2)} \beta_1^{c_2-1} e^{-d_2 \beta_1}\right). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Os valores de (α_1^*, β_1^*) que maximizam $\pi_0(\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ não podem ser obtidos analiticamente. Para encontrar tais valores, serão utilizados métodos numéricos, em particular o de Newton-Raphson.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\pi^*(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\alpha_1^*, \beta_1^*, \alpha_2^*, \beta_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

A região tangente do teste FBST é :

$$T(X, Y) = \{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in R_+^4 : \pi(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > \pi^*(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})\},$$

e a evidência da hipótese nula será:

$$valor - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Se o interesse for comparar apenas as médias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{20} : \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ H_{21} : \frac{\alpha_1}{\beta_1} \neq \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{cases}$$

Note que $H_{10} \subseteq H_{20}$, isto é, se H_{10} é verdadeira então é certo que H_{20} também será verdadeira. Assim, $valor - e(H_{10}) \leq valor - e(H_{20})$.

3.2.3.1 Exemplo 1: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Gama

Considere uma amostra de tamanho 40 que dado α_1 e β_1 , segue uma $Gama(\alpha_1, \beta_1)$. Considere uma amostra de tamanho 50 que dado α_2 e β_2 , segue uma $Gama(\alpha_2, \beta_2)$.

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias e desvios-padrão de cada população:

Considere, a priori, que $\alpha_1 \sim Gama(a_1, b_1)$, $\beta_1 \sim Gama(c_1, d_1)$, $\alpha_2 \sim Gama(a_2, b_2)$ e $\beta_2 \sim Gama(c_2, d_2)$. Considere que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,001$.

Tabela 10 – Distribuição Gama: Amostra, Média, Desvio-Padrão

População	n	Média	Desvio-Padrão
População 1	40	2,171312	1,014826
População 2	50	1,45235	0,7611533

Se o interesse for comparar se as duas populações tem distribuições iguais, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{10} : \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } \beta_1 = \beta_2 \\ H_{11} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ ou } \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}$$

O valor de (α_1^*, β_1^*) que maximiza $\log(\pi_0(\alpha_1; \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ não pode ser obtido analiticamente, apenas por métodos numéricos. Para tal amostra tem-se que $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*) = (2,903157; 1,483311)$.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\log(\pi^*(\alpha_1, \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \log(\pi_0(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -156,2066.$$

A região tangente à hipótese nula do teste FBST é dado pelos valores de (α_1, β_1) cujo logaritmo da posteriori é maior que $\log(\pi_0^*(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -156,2066$, ou seja :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in R_+^4 : \log(\pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) > -156,2066\},$$

e a evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor} - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,00002,$$

mostrando fortes evidências para rejeitar a hipótese Nula de Distribuições Iguais, pois $\text{valor} - e < 0,05$.

Para a mesma amostra, se o interesse for comparar apenas as médias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{20} : \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ H_{21} : \frac{\alpha_1}{\beta_1} \neq \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{cases}$$

A evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor} - e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,00004,$$

mostrando fortes evidências para rejeitar a hipótese nula de médias iguais, pois $\text{valor} - e < 0,05$.

Neste exemplo, a média das duas populações são diferentes. Consequentemente, as distribuições também são diferentes.

3.2.3.2 Exemplo 2: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Gama

Considere uma amostra de tamanho 50 que dado α_1 e β_1 , segue uma $Gama(\alpha_1, \beta_1)$. Considere uma amostra de tamanho 50 que dado α_2 e β_2 , segue uma $Gama(\alpha_2, \beta_2)$.

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias e desvios-padrão de cada população:

Tabela 11 – Distribuição Gama: Amostra, Média, Desvio-Padrão

População	n	Média	Desvio-Padrão
População 1	50	2,71414	1,26853
População 2	50	3,41003	1,24565

Considere, à Priori, que $\alpha_1 \sim Gama(a_1, b_1)$, $\beta_1 \sim Gama(c_1, d_1)$, $\alpha_2 \sim Gama(a_2, b_2)$ e $\beta_2 \sim Gama(c_2, d_2)$. Considere que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,001$.

Se o interesse for comparar se as duas populações tem ditribuições iguais, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{10} : \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } \beta_1 = \beta_2 \\ H_{11} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ ou } \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}$$

O valor de (α_1^*, β_1^*) que maximiza $\log(\pi_0(\alpha_1; \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ não pode ser obtido analiticamente, apenas por métodos numéricos. Para tal amostra tem-se que $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*) = (5,02666; 1,63494)$.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\log(\pi^*(\alpha_1, \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \log(\pi_0(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -194,773.$$

A região tangente à hipótese nula do teste FBST é dado pelos valores de (α_1, β_1) cujo logaritmo da posteriori é maior que $\log(\pi_0^*(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -194,773$, ou seja :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in R_+^4 : \log(\pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) > -194,773\}.$$

A evidência da hipótese nula será:

$$valor-e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,03258,$$

mostrando fortes evidências para rejeitar a hipótese Nula de Distribuições Iguais, pois $valor - e < 0,05$.

Para a mesma amostra, se o interesse for comparar apenas as médias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{20} : \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ H_{21} : \frac{\alpha_1}{\beta_1} \neq \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{cases}$$

A evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor-}e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,16532,$$

levando a concluir que não há evidências para rejeitar a hipótese nula de médias iguais, pois $\text{valor} - e > 0,05$.

Neste exemplo, mesmo apresentando médias iguais, as distribuições das duas populações são diferentes.

3.2.3.3 Exemplo 3: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Gama

Considere uma amostra de tamanho 70 que dado α_1 e β_1 , segue uma $Gama(\alpha_1, \beta_1)$. Considere uma amostra de tamanho 0 que dado α_2 e β_2 , segue uma $Gama(\alpha_2, \beta_2)$.

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias e desvios-padrão de cada população:

Tabela 12 – Distribuição Gama: Amostra, Média, Desvio-Padrão

População	n	Média	Desvio-Padrão
População 1	70	5,25341	0,72363
População 2	80	5,04939	0,71640

Considere, a priori, que $\alpha_1 \sim Gama(a_1, b_1)$, $\beta_1 \sim Gama(c_1, d_1)$, $\alpha_2 \sim Gama(a_2, b_2)$ e $\beta_2 \sim Gama(c_2, d_2)$. Considere que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,001$.

Se o interesse for comparar se as duas populações tem ditribuições iguais, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{10} : \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } \beta_1 = \beta_2 \\ H_{11} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ ou } \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}$$

O valor de (α_1^*, β_1^*) que maximiza $\log(\pi_0(\alpha_1; \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ não pode ser obtido analiticamente, apenas por métodos numéricos. Para tal amostra tem-se que $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*) = (46,44231; 9,02484)$.

O máximo da posteriori sob a Hipótese Nula é dado por:

$$\log(\pi^*(\alpha_1, \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \log(\pi_0(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -205,428.$$

A região tangente à hipótese nula do teste FBST é dado pelos valores de (α_1, β_1) cujo logaritmo da posteriori é maior que $\log(\pi_0^*(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -205,428$, ou seja :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in R_+^4 : \log(\pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) > -205,428\}.$$

A evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor-}e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,58296,$$

levando a concluir que não há evidências para rejeitar a hipótese Nula de Distribuições Iguais, pois $\text{valor} - e > 0,05$.

Para a mesma amostra, se o interesse for comparar apenas as médias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{20} : \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \\ H_{21} : \frac{\alpha_1}{\beta_1} \neq \frac{\alpha_2}{\beta_2} \end{cases}$$

A evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor-}e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,58576,$$

levando a concluir que não há evidências para rejeitar a hipótese nula de médias iguais, pois $\text{valor} - e > 0,05$.

Neste exemplo, as distribuições das duas populações não são diferentes. Consequentemente, as médias também não são diferentes.

3.2.4 Weibull

A distribuição Weibull é usada para estimar o tempo de vida de produtos industriais. A distribuição apresenta uma propriedade básica: a sua função de taxa de falha é crescente, decrescente ou constante. Se X tem distribuição Weibull, isto é, $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$, a função densidade de probabilidade de X é dada por:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, \quad (3.28)$$

$$x \geq 0, \alpha, \beta > 0.$$

A média e a variância da distribuição Weibull são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right),$$

$$\text{Var}(X) = \beta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma(1 + (1 + \alpha))^2 \right].$$

Seja X_1, \dots, X_{n_1} uma amostra aleatória da População 1. $X_1, \dots, X_{n_1} \stackrel{iid}{\sim} Weibull(\alpha_1, \beta_1)$.
Seja Y_1, \dots, Y_{n_2} uma amostra aleatória da População 2. $Y_1, \dots, Y_{n_2} \stackrel{iid}{\sim} Weibull(\alpha_2, \beta_2)$. Considere que as amostras são independentes.

A função de verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha_1; \alpha_2; \beta_1; \beta_2) &= \prod_{i=1}^{n_1} \frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}} (x_i)^{\alpha_1-1} e^{-\left(\frac{x_i}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}} \prod_{j=1}^{n_2} \frac{\alpha_2}{\beta_2^{\alpha_2}} (y_j)^{\alpha_2-1} e^{-\left(\frac{y_j}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}} \\ &= \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}}\right)^{n_1} \left(\prod_{i=1}^{n_1} x_i\right)^{\alpha_1-1} e^{-\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{\alpha_1}} \\ &\times \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2^{\alpha_2}}\right)^{n_2} \left(\prod_{j=1}^{n_2} y_j\right)^{\alpha_2-1} e^{-\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \sum_{j=1}^{n_2} y_j^{\alpha_2}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Considerando, a priori, que $\alpha_1 \sim Gama(a_1, b_1)$, $\beta_1 \sim Gama(c_1, d_1)$, $\alpha_2 \sim Gama(a_2, b_2)$ e $\beta_2 \sim Gama(c_2, d_2)$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ conhecidos e positivos, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ e β_2 independentes, a Posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}}\right)^{n_1} \left(\prod_{i=1}^{n_1} x_i\right)^{\alpha_1-1} e^{-\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{\alpha_1}} \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1} \\ &\times \frac{d_1^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \beta_1^{c_1-1} e^{-d_1 \beta_1} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2^{\alpha_2}}\right)^{n_2} \left(\prod_{j=1}^{n_2} y_j\right)^{\alpha_2-1} e^{-\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \sum_{j=1}^{n_2} y_j^{\alpha_2}} \\ &\times \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2} \frac{d_2^{c_2}}{\Gamma(c_2)} \beta_2^{c_2-1} e^{-d_2 \beta_2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

E o $\log(\pi)$ é:

$$\begin{aligned} \log(\pi) &= n_1 \log\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}}\right) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^{n_1} \log(x_i) - \frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{\alpha_1} + \log\left(\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha_1^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha_1}\right) \\ &+ \log\left(\frac{d_1^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \beta_1^{c_1-1} e^{-d_1 \beta_1}\right) + n_2 \log\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2^{\alpha_2}}\right) + (\alpha_2 - 1) \sum_{j=1}^{n_2} \log(y_j) - \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \sum_{j=1}^{n_2} y_j^{\alpha_2} \\ &+ \log\left(\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha_2^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha_2}\right) + \log\left(\frac{d_2^{c_2}}{\Gamma(c_2)} \beta_2^{c_2-1} e^{-d_2 \beta_2}\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Considere as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_{10} : \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } \beta_1 = \beta_2 \\ H_{11} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ ou } \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}$$

Note que a hipótese acima equivale a testar se as duas populações têm médias iguais.

Sob H_0 , a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} \pi_0(\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}} \right)^{n_1} \left(\prod_{i=1}^{n_1} x_i \right)^{\alpha_1 - 1} e^{-\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{\alpha_1}} \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha_1^{a_1 - 1} e^{-b_1 \alpha_1} \\ &\times \frac{d_1^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \beta_1^{c_1 - 1} e^{-(d_1 \beta_1)} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}} \right)^{n_2} \left(\prod_{j=1}^{n_2} y_j \right)^{\alpha_1 - 1} e^{-\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} \sum_{j=1}^{n_2} y_j^{\alpha_1}} \\ &\times \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha_1^{a_2 - 1} e^{-(b_2 \alpha_1)} \frac{d_2^{c_2}}{\Gamma(c_2)} \beta_1^{c_2 - 1} e^{-d_2 \beta_1}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

E o $\log(\pi_0)$ é:

$$\begin{aligned} \log(\pi_0) &= n_1 \log \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}} \right) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^{n_1} \log(x_i) - \frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{\alpha_1} + \log \left(\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha_1^{a_1 - 1} e^{-b_1 \alpha_1} \right) \\ &+ \log \left(\frac{d_1^{c_1}}{\Gamma(c_1)} \beta_1^{c_1 - 1} e^{-d_1 \beta_1} \right) + n_2 \log \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}} \right) + (\alpha_1 - 1) \sum_{j=1}^{n_2} \log(y_j) - \frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} \sum_{j=1}^{n_2} y_j^{\alpha_1} \\ &+ \log \left(\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha_1^{a_2 - 1} e^{-b_2 \alpha_1} \right) + \log \left(\frac{d_2^{c_2}}{\Gamma(c_2)} \beta_1^{c_2 - 1} e^{-d_2 \beta_1} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Os valores de (α_1^*, β_1^*) que maximizam $\pi_0(\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ não podem ser obtidos analiticamente. Para encontrar tais valores, serão utilizados métodos numéricos, em particular o de Newton-Raphson.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\pi^*(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \pi_0(\alpha_1^*, \beta_1^*, \alpha_2^*, \beta_2^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

A região tangente do teste FBST é :

$$T(X, Y) = \{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in R_+^4 : \pi(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) > \pi^*(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})\},$$

e a evidência da hipótese nula será:

$$e - \text{valor} = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

Se o interesse for comparar apenas as médias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{20} : E(X) = E(Y) \\ H_{21} : E(X) \neq E(Y) \end{cases}$$

Note que $H_{10} \subseteq H_{20}$, isto é, se H_{10} é verdadeira então é certo que H_{20} também será verdadeira. Assim, $valor - e(H_{10}) \leq valor - e(H_{20})$.

3.2.4.1 Exemplo 1: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Weibull

Considere uma amostra de tamanho 20 que dado α_1 e β_1 , segue uma Weibull (α_1, β_1) . Considere uma amostra de tamanho 30 que dado α_2 e β_2 , segue uma Weibull (α_2, β_2) .

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias e desvios-padrão de cada população:

Tabela 13 – Distribuição Weibull: Amostra, Média, Desvio-Padrão

População	n	Média	Desvio-Padrão
População 1	20	2,171312	1,014826
População 2	30	1,45235	0,7611533

Considere, a priori, que $\alpha_1 \sim Gama(a_1, b_1)$, $\beta_1 \sim Gama(c_1, d_1)$, $\alpha_2 \sim Gama(a_2, b_2)$ e $\beta_2 \sim Gama(c_2, d_2)$. Considere que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,001$.

Se o interesse for comparar se as duas populações tem distribuições iguais, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{10} : \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } \beta_1 = \beta_2 \\ H_{11} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ ou } \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}$$

O valor de (α_1^*, β_1^*) que maximiza $\log(\pi_0(\alpha_1; \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ não pode ser obtido analiticamente, apenas por métodos numéricos. Para tal amostra tem-se que $(\alpha_1^*, \beta_1^*) = (3,301929; 2,669790)$.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\log(\pi^*(\alpha_1, \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \log(\pi_0(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -89,00753.$$

A região tangente à hipótese nula do teste FBST é dado pelos valores de (α_1, β_1) cujo logaritmo da posteriori é maior que $\log(\pi_0^*(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -89,00753$, ou seja :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in R_+^4 : \log(\pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) > -89,00753\}$$

A evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor-}e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,0011,$$

levando a concluir que há evidências para rejeitar a hipótese nula de distribuições iguais, pois $\text{valor} - e < 0,05$.

Se o interesse for comparar apenas as médias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{20} : E(X) = E(Y) \\ H_{21} : E(X) \neq E(Y) \end{cases}$$

A evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor-}e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,00152,$$

levando a concluir que há evidências para rejeitar a hipótese nula de médias iguais, pois $\text{valor} - e < 0,05$.

Neste exemplo, a média das duas populações são diferentes. Consequentemente, as distribuições também são diferentes.

3.2.4.2 Exemplo 2: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Weibull

Considere uma amostra de tamanho 70 que dado α_1 e β_1 , segue uma Weibull (α_1, β_1) . Considere uma amostra de tamanho 60 que dado α_2 e β_2 , segue uma Weibull (α_2, β_2) .

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias e desvios-padrão de cada população:

Tabela 14 – Distribuição Weibull: Amostra, Média, Desvio-Padrão

População	n	Média	Desvio-Padrão
População 1	70	4,83540	0,33716
População 2	60	2,80913	0,40117

Considere, a priori, que $\alpha_1 \sim \text{Gama}(a_1, b_1)$, $\beta_1 \sim \text{Gama}(c_1, d_1)$, $\alpha_2 \sim \text{Gama}(a_2, b_2)$ e $\beta_2 \sim \text{Gama}(c_2, d_2)$. Considere que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,001$.

Se o interesse for comparar se as duas populações tem distribuições iguais, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{10} : \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } \beta_1 = \beta_2 \\ H_{11} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ ou } \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}$$

O valor de (α_1^*, β_1^*) que maximiza $\log(\pi_0(\alpha_1; \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ não pode ser obtido analiticamente, apenas por métodos numéricos. Para tal amostra tem-se que $(\alpha_1^*, \beta_1^*) = (4,26360; 4,29704)$.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\log(\pi^*(\alpha_1, \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \log(\pi_0(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -224,0449.$$

A região tangente à hipótese nula do teste FBST é dado pelos valores de (α_1, β_1) cujo logaritmo da posteriori é maior que $\log(\pi_0^*(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -224,0449$, ou seja :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in R_+^4 : \log(\pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) > -224,0449\}.$$

A evidência da hipótese nula será:

$$valor-e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,04826,$$

mostrando evidências para rejeitar a hipótese Nula de Distribuições Iguais, pois $valor - e < 0,05$.

Se o interesse for comparar apenas as médias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{20} : E(X) = E(Y) \\ H_{21} : E(X) \neq E(Y) \end{cases}$$

A evidência da hipótese nula será:

$$valor-e = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,05344,$$

levando a concluir que não há evidências para rejeitar a hipótese nula de médias iguais, pois $valor - e > 0,05$.

Neste exemplo, mesmo apresentando médias iguais, as distribuições das duas populações são diferentes.

3.2.4.3 Exemplo 3: Comparação de duas Populações Independentes com Distribuição Weibull

Considere uma amostra de tamanho 50 que dado α_1 e β_1 , segue uma Weibull (α_1, β_1) . Considere uma amostra de tamanho 50 que dado α_2 e β_2 , segue uma Weibull (α_2, β_2) .

Na tabela abaixo estão os tamanhos de amostra, médias e desvios-padrão de cada população:

Tabela 15 – Distribuição Weibull: Amostra, Média, Desvio-Padrão

População	n	Média	Desvio-Padrão
População 1	50	4,80791	0,38542
População 2	50	4,75230	0,50069

Considere, a priori, que $\alpha_1 \sim Gama(a_1, b_1)$, $\beta_1 \sim Gama(c_1, d_1)$, $\alpha_2 \sim Gama(a_2, b_2)$ e $\beta_2 \sim Gama(c_2, d_2)$. Considere que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,001$.

Se o interesse for comparar se as duas populações tem distribuições iguais, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{10} : \alpha_1 = \alpha_2 \text{ e } \beta_1 = \beta_2 \\ H_{11} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ ou } \beta_1 \neq \beta_2 \end{cases}$$

O valor de (α_1^*, β_1^*) que maximiza $\log(\pi_0(\alpha_1; \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y}))$ não pode ser obtido analiticamente, apenas por métodos numéricos. Para tal amostra tem-se que $(\alpha_1^*, \beta_1^*) = (14,24969; 4,96431)$.

O máximo da posteriori sob a hipótese nula é dado por:

$$\log(\pi^*(\alpha_1, \beta_1 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \log(\pi_0(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -87,11125.$$

A região tangente à hipótese nula do teste FBST é dado pelos valores de (α_1, β_1) cujo logaritmo da posteriori é maior que $\log(\pi_0^*(\alpha_1^*, \beta_1^* | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) = -87,11125$, ou seja :

$$T(X, Y) = \{\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in R_+^4 : \log(\pi(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 | \mathbf{X}, \mathbf{Y})) > -87,11125\}$$

A evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor-e} = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,55338,$$

levando a concluir que não há evidências para rejeitar a hipótese Nula de Distribuições Iguais, pois $\text{valor} - e > 0,05$.

Se o interesse for comparar apenas as médias das duas populações, então as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_{20} : E(X) = E(Y) \\ H_{21} : E(X) \neq E(Y) \end{cases}$$

A evidência da hipótese nula será:

$$\text{valor-e} = 1 - P(\theta \in T(X, Y) | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0,9792,$$

levando a concluir que não há evidências para rejeitar a hipótese nula de médias iguais, pois $\text{valor} - e > 0,05$.

Neste exemplo, as distribuições das duas populações não são diferentes. Consequentemente, as médias também não são diferentes.

4 Simulações

Este capítulo apresenta simulações de Monte Carlo ilustrando os resultados dos testes de comparação de duas populações independentes. O método consistiu em realizar 10000 vezes (número de réplicas de Monte Carlo) o cálculo do valor-e do FBST, do valor-p do teste t e do valor-p do teste de Wilcoxon-Mann-Whitney e computar a média desses valores. As simulações consideraram diferentes distribuições para as populações (Poisson, Bernoulli, Exponencial e Gama). No caso das populações gama, a distribuição a posteriori dos parâmetros foram obtidas via MCMC- Markov Chain Monte Carlo (Gelman e Lopes, 2006).

4.1 Poisson

Seja X_1, X_2, \dots, X_{n_1} uma amostra de uma população X que, dado θ_1 , segue uma distribuição Poisson(θ_1). Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} uma amostra de uma população Y que, dado θ_2 , segue uma distribuição Poisson(θ_2). Considere que X e Y são independentes.

Considere os seguintes testes para comparação das duas populações X e Y :

- 1: FBST (e) (da hipótese $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ vs $H_0 : \theta_1 \neq \theta_2$);
- 2: Teste t (p) (Supondo normalidade e variâncias diferentes);
- 3: Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (WMW).

A tabela 16 e as figuras 5, 6 e 7 apresentam os valores-p (do teste t e WMW) e o valor-e (do FBST) do teste de comparação de duas populações Poisson em três cenários e diferentes tamanhos de amostra (iguais para as duas populações: $n_1 = n_2 = n$).

Tabela 16 – Simulação para amostras com distribuição de Poisson

Cenário	$\theta_1=5$ e $\theta_2=6$			$\theta_1=10$ e $\theta_2=12$			$\theta_1=50$ e $\theta_2=60$		
	e	p	WMW	e	p	WMW	e	p	WMH
5	0,6251	0,4429	0,4860	0,5623	0,3912	0,4323	0,2247	0,1465	0,1781
10	0,5608	0,3814	0,4010	0,4476	0,2913	0,3102	0,0741	0,0416	0,0502
15	0,5013	0,3292	0,3423	0,3550	0,2171	0,2326	0,0243	0,0122	0,0159
20	0,4447	0,2838	0,2953	0,2831	0,1654	0,1775	0,0072	0,0034	0,0045
25	0,4003	0,2488	0,2585	0,2262	0,1263	0,1380	0,0022	0,0010	0,0015
30	0,3615	0,2202	0,2323	0,1839	0,0989	0,1069	0,0007	0,0003	0,0005
35	0,3125	0,1842	0,1942	0,1398	0,0713	0,0787	0,0003	0,0001	0,0002
40	0,2836	0,1639	0,1750	0,1140	0,0567	0,0634	0,0001	0,0000	0,0001
45	0,2465	0,1388	0,1484	0,0952	0,0463	0,0512	0,0000	0,0000	0,0000
50	0,2272	0,1252	0,1343	0,0726	0,0337	0,0389	0,0000	0,0000	0,0000
55	0,2030	0,1095	0,1183	0,0582	0,0262	0,0302	0,0000	0,0000	0,0000
60	0,1791	0,0935	0,1026	0,0464	0,0204	0,0237	0,0000	0,0000	0,0000
65	0,1609	0,0823	0,0907	0,0348	0,0146	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000
70	0,1410	0,0706	0,0780	0,0291	0,0121	0,0143	0,0000	0,0000	0,0000
75	0,1261	0,0628	0,0696	0,0230	0,0092	0,0112	0,0000	0,0000	0,0000
80	0,1177	0,0574	0,0649	0,0184	0,0071	0,0087	0,0000	0,0000	0,0000
85	0,1014	0,0495	0,0556	0,0141	0,0054	0,0067	0,0000	0,0000	0,0000
90	0,0920	0,0436	0,0493	0,0123	0,0046	0,0060	0,0000	0,0000	0,0000
95	0,0807	0,0373	0,0425	0,0096	0,0036	0,0044	0,0000	0,0000	0,0000
100	0,0713	0,0320	0,0366	0,0076	0,0028	0,0036	0,0000	0,0000	0,0000
105	0,0687	0,0310	0,0348	0,0059	0,0021	0,0027	0,0000	0,0000	0,0000
110	0,0586	0,0258	0,0304	0,0049	0,0018	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000
115	0,0502	0,0218	0,0258	0,0039	0,0014	0,0018	0,0000	0,0000	0,0000
120	0,0452	0,0198	0,0235	0,0032	0,0011	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000
125	0,0415	0,0176	0,0206	0,0024	0,0008	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000
130	0,0378	0,0158	0,0187	0,0018	0,0006	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000
135	0,0333	0,0137	0,0162	0,0016	0,0005	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
140	0,0305	0,0124	0,0149	0,0012	0,0004	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
145	0,0271	0,0112	0,0134	0,0009	0,0003	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
150	0,0237	0,0096	0,0114	0,0008	0,0003	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
155	0,0197	0,0076	0,0092	0,0007	0,0002	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
160	0,0194	0,0074	0,0092	0,0004	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
165	0,0167	0,0065	0,0079	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
170	0,0144	0,0054	0,0068	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
175	0,0122	0,0044	0,0055	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
180	0,0120	0,0045	0,0055	0,0002	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
185	0,0108	0,0041	0,0052	0,0002	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
190	0,0095	0,0035	0,0044	0,0001	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
195	0,0085	0,0031	0,0038	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
200	0,0073	0,0026	0,0033	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

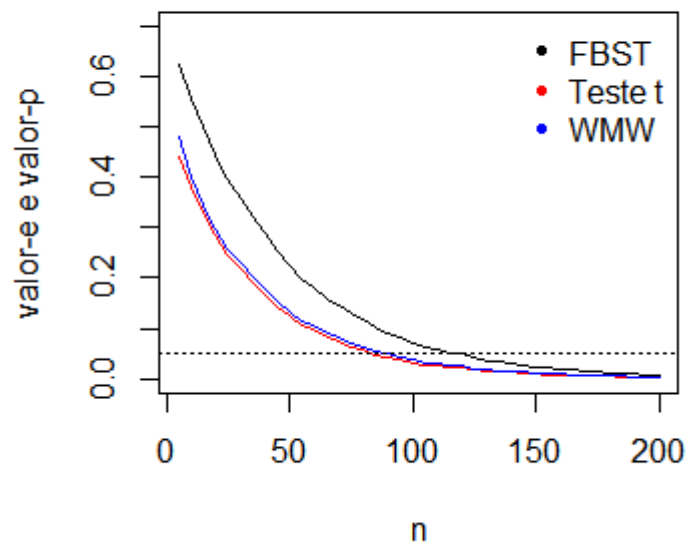


Figura 5 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 1: $\theta_1 = 5$ e $\theta_2 = 6$

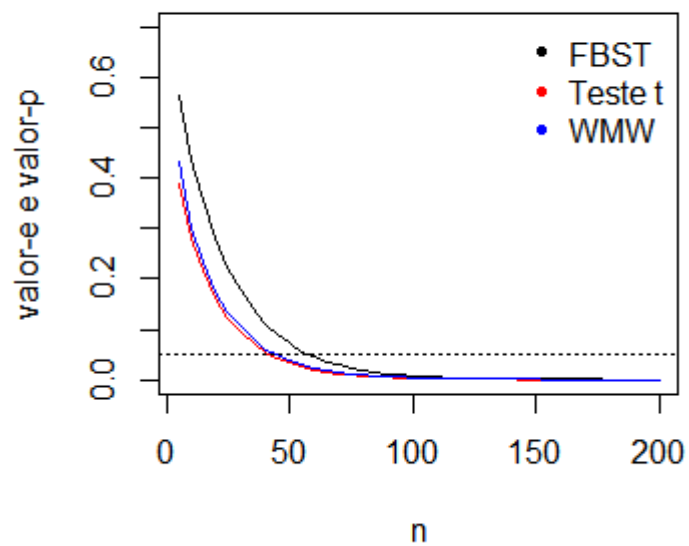


Figura 6 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 2: $\theta_1 = 10$ e $\theta_2 = 12$

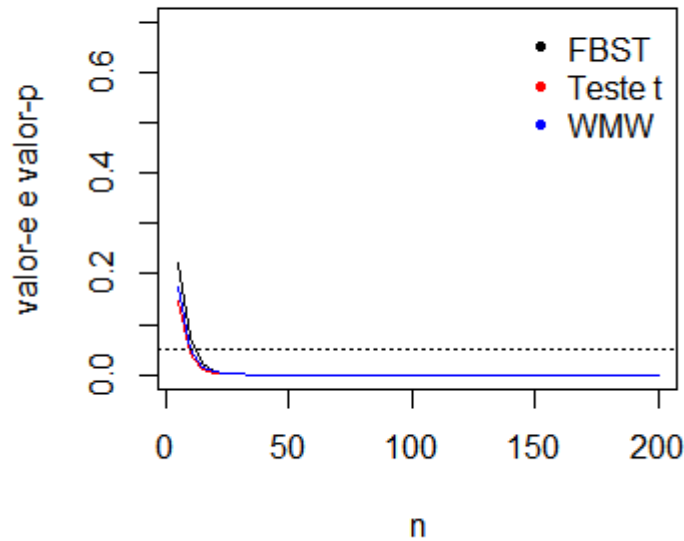


Figura 7 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 3: $\theta_1 = 50$ e $\theta_2 = 60$

Para o Primeiro Cenário ($\theta_1 = 5$ e $\theta_2 = 6$), nota-se que o valor-e é maior que valor-p do teste T e do teste de WMW. À medida em que o tamanho da amostra aumenta, os valores ficam bem próximos. Para o Segundo Cenário ($\theta_1 = 10$ e $\theta_2 = 12$), nota-se que as evidências contra H_0 dos três teste caem mais rapidamente que no Primeiro Cenário. Mas valor-e ainda continua superior aos valores-p. No terceiro Cenário ($\theta_1 = 50$ e $\theta_2 = 60$), tanto o valor-e como os valores-p estão bem próximos, com um tamanho de amostra 20 já é possível rejeitar a hipótese nula.

Agora serão apresentados dois gráficos com o objetivo de comparar valor-p do teste t com valor-e, e valor-p do teste de WMW com valor-e, para os 3 cenários mostrados anteriormente:

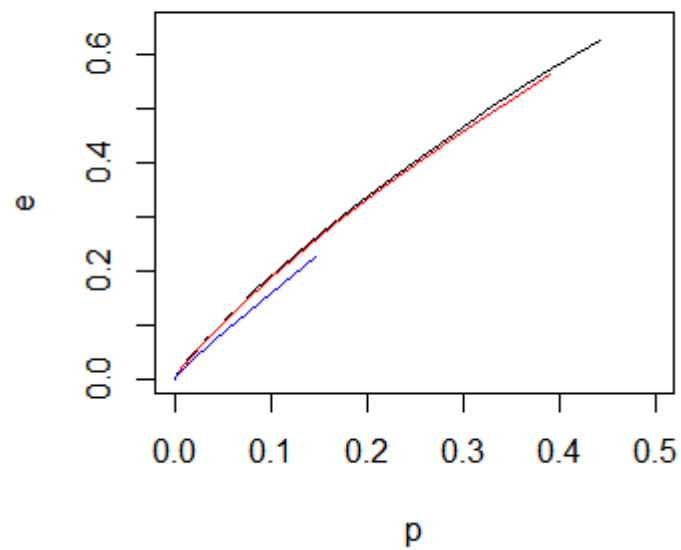


Figura 8 – Valores-p do teste t e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)

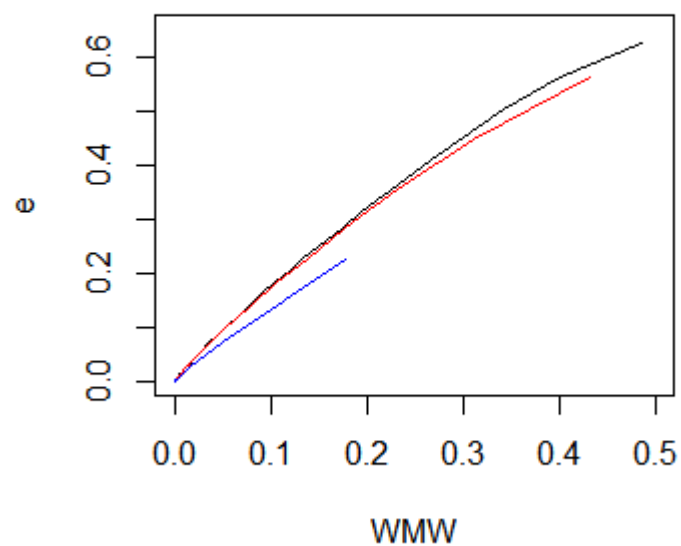


Figura 9 – Valores-p do teste de WMW e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)

4.2 Bernoulli

Seja X_1, X_2, \dots, X_{n_1} uma amostra de uma população X que, dado θ_1 , segue uma distribuição de Bernoulli(θ_1). Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} uma amostra de uma população Y que, dado θ_2 , segue uma distribuição de Bernoulli(θ_2). Considere que X e Y são independentes.

Considere os seguintes testes para comparação das duas populações X e Y :

- 1: FBST (e);
- 2: Teste Qui-Quadrado (p).

A tabela 17 e as figuras 10, 11 e 12 apresentam o valor-p (do teste Qui-Quadrado) e o valor-e (do FBST) do teste de comparação de duas populações Bernoulli em três cenários e diferentes tamanhos de amostra (iguais para as duas populações: $n_1 = n_2 = n$).

Tabela 17 – Simulação para amostras com distribuição de Bernoulli

Cenário	$\theta_1=0,5$ e $\theta_2=0,6$		$\theta_1=0,4$ e $\theta_2=0,6$		$\theta_1=0,1$ e $\theta_2=0,4$	
	e	p	e	p	e	p
10	0,6311	0,6801	0,5332	0,5752	0,3403	-
20	0,6202	0,5925	0,4534	0,4223	0,1701	0,1621
30	0,5998	0,5391	0,3712	0,3144	0,0888	0,0733
40	0,5653	0,4845	0,3072	0,2445	0,0465	0,0344
50	0,5355	0,4454	0,2481	0,1856	0,0237	0,0160
60	0,5108	0,4130	0,2023	0,1427	0,0128	0,0080
70	0,4968	0,3927	0,1663	0,1123	0,0068	0,0041
80	0,4614	0,3565	0,1327	0,0850	0,0035	0,0020
90	0,4467	0,3378	0,1115	0,0693	0,0017	0,0009
100	0,4298	0,3208	0,0907	0,0545	0,0009	0,0005
110	0,4025	0,2947	0,0725	0,0414	0,0005	0,0002
120	0,3833	0,2759	0,0567	0,0313	0,0002	0,0001
130	0,3635	0,2564	0,0510	0,0279	0,0001	0,0001
140	0,3449	0,2402	0,0389	0,0203	0,0001	0,0000
150	0,3255	0,2232	0,0342	0,0178	0,0000	0,0000
160	0,3097	0,2088	0,0275	0,0139	0,0000	0,0000
170	0,2966	0,1980	0,0219	0,0108	0,0000	0,0000
180	0,2858	0,1882	0,0183	0,0087	0,0000	0,0000
190	0,2654	0,1722	0,0151	0,0073	0,0000	0,0000
200	0,2604	0,1679	0,0123	0,0057	0,0000	0,0000
210	0,2406	0,1530	0,0107	0,0048	0,0000	0,0000
220	0,2217	0,1378	0,0077	0,0034	0,0000	0,0000
230	0,2159	0,1338	0,0067	0,0028	0,0000	0,0000
240	0,2084	0,1277	0,0053	0,0022	0,0000	0,0000
250	0,1964	0,1183	0,0041	0,0016	0,0000	0,0000
260	0,1869	0,1116	0,0035	0,0014	0,0000	0,0000
270	0,1728	0,1019	0,0032	0,0013	0,0000	0,0000
280	0,1750	0,1034	0,0027	0,0011	0,0000	0,0000
290	0,1624	0,0941	0,0021	0,0008	0,0000	0,0000
300	0,1563	0,0904	0,0015	0,0006	0,0000	0,0000
310	0,1473	0,0844	0,0013	0,0005	0,0000	0,0000
320	0,1439	0,0814	0,0010	0,0004	0,0000	0,0000
330	0,1334	0,0749	0,0008	0,0003	0,0000	0,0000
340	0,1236	0,0679	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
350	0,1224	0,0679	0,0005	0,0002	0,0000	0,0000
360	0,1128	0,0604	0,0006	0,0002	0,0000	0,0000
370	0,1071	0,0576	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
380	0,1010	0,0536	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
390	0,0955	0,0504	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
400	0,0937	0,0489	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000

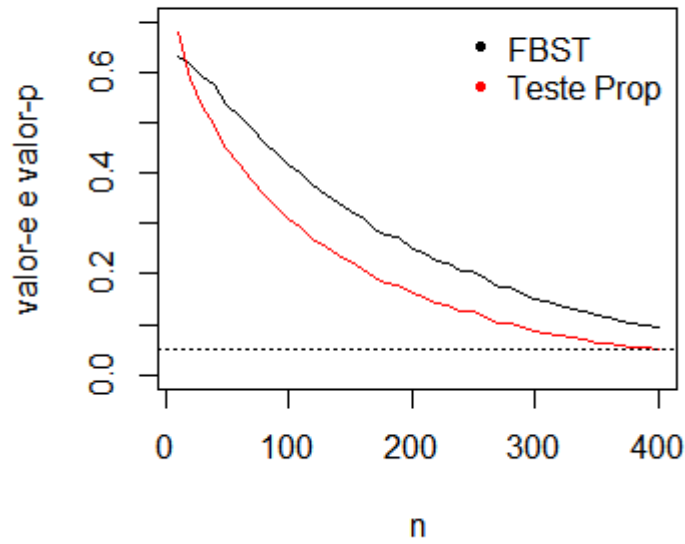


Figura 10 – Valor-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 1:
 $\theta_1 = 0,5$ e $\theta_2 = 0,6$

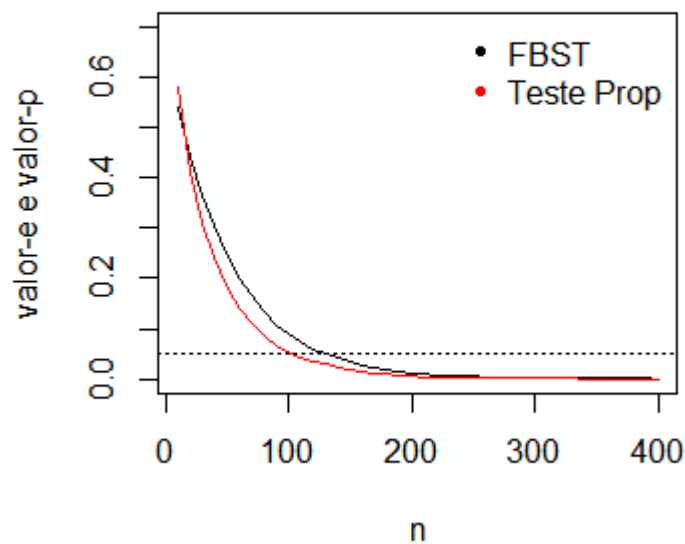


Figura 11 – Valor-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 2:
 $\theta_1 = 0,4$ e $\theta_2 = 0,6$

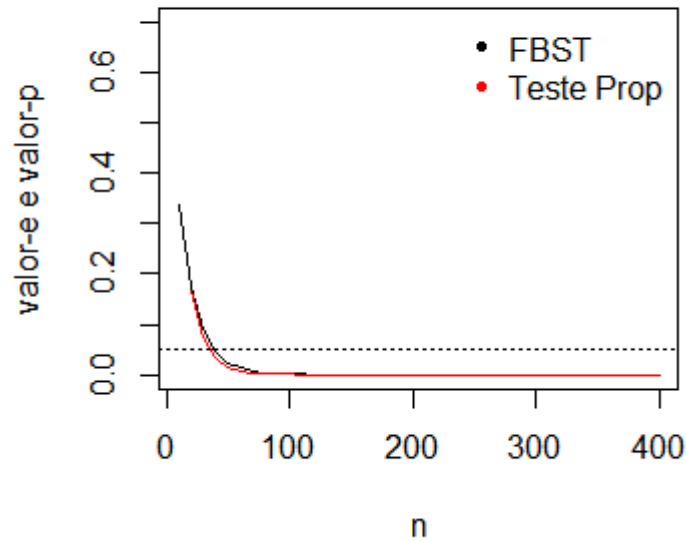


Figura 12 – Valor-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 3: $\theta_1 = 0,1$ e $\theta_2 = 0,4$

Para o Primeiro Cenário ($\theta_1 = 0,5$ e $\theta_2 = 0,6$), nota-se que o valor-e é maior que valor-p do teste de Proporções. Como é de se esperar, à medida em que o tamanho da amostra aumenta, valor-e e valor-p decrescem, mas aparenta decrescer paralelamente. Para o Segundo Cenário ($\theta_1 = 0,4$ e $\theta_2 = 0,6$), nota-se que as evidências contra H_0 dos dois testes caem mais rapidamente que no Primeiro Cenário, já considerando que n vai até 200. Valor-e ainda continua superior ao valor-p, e começa a se igualarem depois de $n=150$. No terceiro Cenário ($\theta_1 = 0,1$ e $\theta_2 = 0,4$), tanto o valor-e como o valor-p estão bem próximos, e com um tamanho de amostra 50 já é possível rejeitar a hipótese nula.

Agora serão apresentados os gráficos que comparam valor-p do teste Z com valor-e, para os 3 cenários mostrados anteriormente:

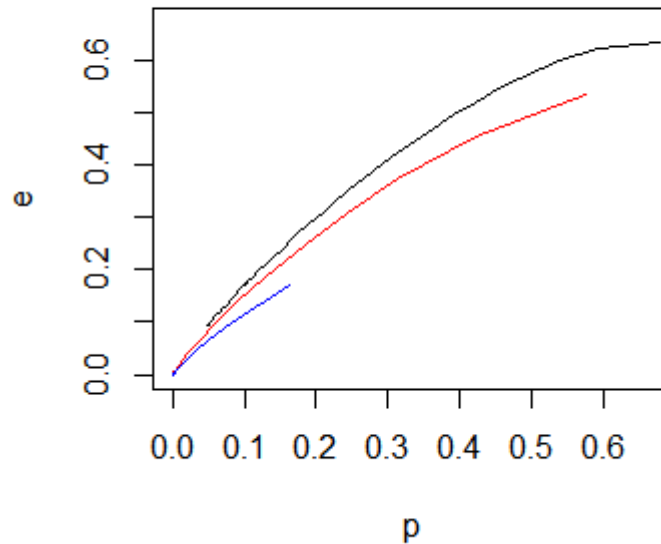


Figura 13 – Valores-p do teste Qui-Quadrado e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)

4.3 Exponencial

Seja X_1, X_2, \dots, X_{n_1} uma amostra de uma população X que, dado θ_1 , segue uma distribuição Exponencial(θ_1). Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} uma amostra de uma população Y que, dado θ_2 , segue uma distribuição Exponencial(θ_2). Considere que X e Y são independentes.

Considere os seguintes testes para comparação das duas populações X e Y :

- 1: FBST (e);
- 2: Teste t (p);
- 3: Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (WMW).

A tabela 18 e as figuras 14, 15 e 16 apresentam os valores-p (do teste t e WMW) e o valor-e (do FBST) do teste de comparação de duas populações com distribuição Exponencial em três cenários e diferentes tamanhos de amostra (iguais para as duas populações: $n_1 = n_2 = n$).

Tabela 18 – Simulação para amostras com distribuição Exponencial

Cenário	$\theta_1=10$ e $\theta_2=15$			$\theta_1=20$ e $\theta_2=35$			$\theta_1=100$ e $\theta_2=200$		
	e	p	WMW	e	p	WMW	e	p	WMH
5	0,6808	0,4427	0,5126	0,6321	0,4041	0,4744	0,5942	0,3710	0,4381
10	0,6016	0,3887	0,4339	0,5117	0,3205	0,3736	0,4246	0,2551	0,3070
15	0,5407	0,3468	0,3859	0,4067	0,2455	0,2965	0,3114	0,1794	0,2304
20	0,4833	0,3029	0,3459	0,3411	0,1993	0,2530	0,2354	0,1318	0,1793
25	0,4466	0,2773	0,3226	0,2750	0,1564	0,2070	0,1694	0,0901	0,1339
30	0,3921	0,2376	0,2870	0,2299	0,1277	0,1779	0,1246	0,0650	0,1019
35	0,3505	0,2078	0,2570	0,1866	0,0989	0,1462	0,0916	0,0458	0,0784
40	0,3205	0,1851	0,2370	0,1526	0,0782	0,1224	0,0680	0,0333	0,0601
45	0,2848	0,1616	0,2115	0,1291	0,0659	0,1047	0,0496	0,0232	0,0446
50	0,2579	0,1430	0,1934	0,1037	0,0510	0,0870	0,0380	0,0178	0,0383
55	0,2374	0,1314	0,1787	0,0887	0,0431	0,0755	0,0279	0,0126	0,0276
60	0,2135	0,1147	0,1642	0,0703	0,0328	0,0613	0,0212	0,0093	0,0225
65	0,1879	0,0992	0,1469	0,0589	0,0278	0,0531	0,0150	0,0064	0,0171
70	0,1717	0,0884	0,1344	0,0483	0,0217	0,0453	0,0108	0,0046	0,0132
75	0,1566	0,0801	0,1228	0,0402	0,0182	0,0376	0,0092	0,0040	0,0113
80	0,1373	0,0688	0,1088	0,0323	0,0141	0,0310	0,0064	0,0027	0,0085
85	0,1288	0,0637	0,1056	0,0266	0,0112	0,0268	0,0044	0,0018	0,0063
90	0,1146	0,0556	0,0938	0,0210	0,0087	0,0219	0,0034	0,0013	0,0047
95	0,1005	0,0479	0,0833	0,0179	0,0075	0,0194	0,0027	0,0011	0,0041
100	0,0917	0,0430	0,0775	0,0145	0,0059	0,0166	0,0019	0,0008	0,0033
105	0,0825	0,0384	0,0713	0,0128	0,0053	0,0142	0,0016	0,0006	0,0025
110	0,0765	0,0357	0,0672	0,0096	0,0038	0,0116	0,0009	0,0004	0,0021
115	0,0679	0,0309	0,0582	0,0081	0,0032	0,0099	0,0008	0,0003	0,0015
120	0,0604	0,0267	0,0526	0,0067	0,0026	0,0082	0,0005	0,0002	0,0013
125	0,0552	0,0243	0,0489	0,0060	0,0023	0,0079	0,0004	0,0002	0,0010
130	0,0507	0,0223	0,0455	0,0048	0,0018	0,0065	0,0003	0,0001	0,0008
135	0,0447	0,0193	0,0422	0,0037	0,0014	0,0054	0,0003	0,0001	0,0006
140	0,0413	0,0176	0,0385	0,0031	0,0011	0,0048	0,0001	0,0001	0,0005
145	0,0350	0,0145	0,0340	0,0024	0,0009	0,0038	0,0002	0,0001	0,0004
150	0,0311	0,0126	0,0308	0,0024	0,0009	0,0036	0,0001	0,0000	0,0004
155	0,0293	0,0122	0,0293	0,0016	0,0006	0,0031	0,0001	0,0000	0,0002
160	0,0257	0,0104	0,0267	0,0014	0,0005	0,0025	0,0001	0,0000	0,0002
165	0,0246	0,0098	0,0246	0,0011	0,0004	0,0021	0,0000	0,0000	0,0001
170	0,0214	0,0086	0,0234	0,0011	0,0004	0,0021	0,0000	0,0000	0,0001
175	0,0199	0,0079	0,0217	0,0008	0,0003	0,0013	0,0000	0,0000	0,0001
180	0,0172	0,0068	0,0178	0,0007	0,0003	0,0013	0,0000	0,0000	0,0001
185	0,0161	0,0064	0,0173	0,0006	0,0002	0,0011	0,0000	0,0000	0,0001
190	0,0143	0,0055	0,0168	0,0004	0,0001	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
195	0,0132	0,0050	0,0147	0,0004	0,0001	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
200	0,0120	0,0045	0,0134	0,0002	0,0001	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000

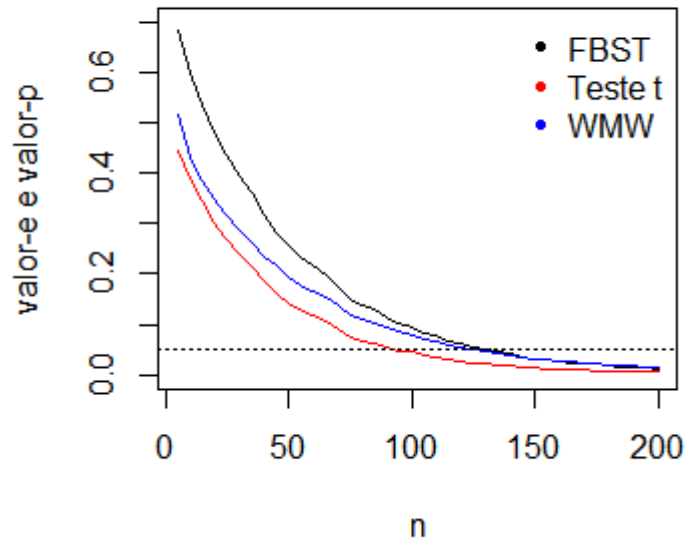


Figura 14 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 1:
 $\theta_1 = 10$ e $\theta_2 = 15$

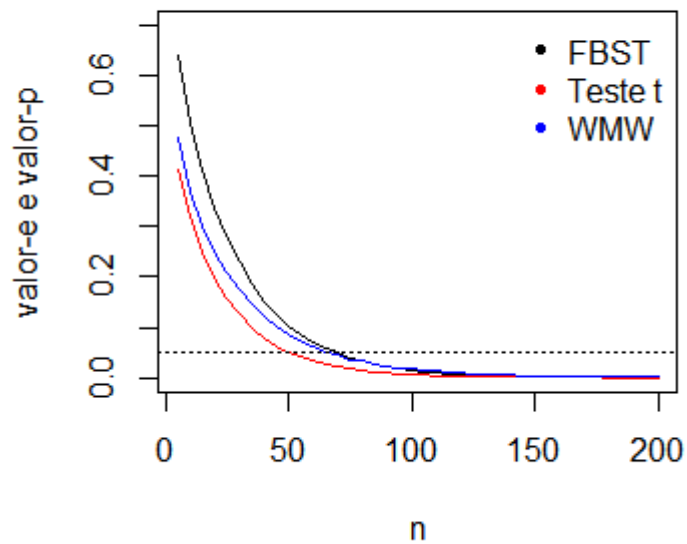


Figura 15 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 2:
 $\theta_1 = 20$ e $\theta_2 = 35$

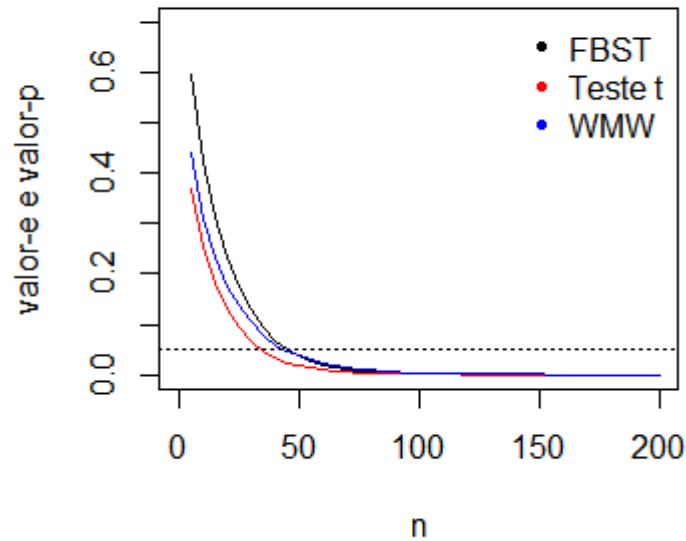


Figura 16 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 3: $\theta_1 = 100$ e $\theta_2 = 200$

Para o Primeiro Cenário ($\theta_1 = 10$ e $\theta_2 = 15$), nota-se que o valor-e é maior que valor-p, como acontece com as outras distribuições. Como é de se esperar, à medida em que o tamanho da amostra aumenta, valor-e e valor-p decrescem, e parecem se igualar apenas quando $n=200$. Para o Segundo Cenário ($\theta_1 = 20$ e $\theta_2 = 35$), nota-se que as evidências contra H_0 dos dois testes caem mais rapidamente que no Primeiro Cenário, mas valor-e ainda continua superior ao valor-p, e começa a se igualarem depois de $n=120$. No terceiro Cenário ($\theta_1 = 100$ e $\theta_2 = 200$), tanto o valor-e como o valor-p estão mais próximos, e com um tamanho de amostra 50 já é possível rejeitar a hipótese nula.

Agora serão apresentados dois gráficos com o objetivo de comparar valor-p do teste t com valor-e, e valor-p do teste de WMW com valor-e, para os 3 cenários mostrados anteriormente:

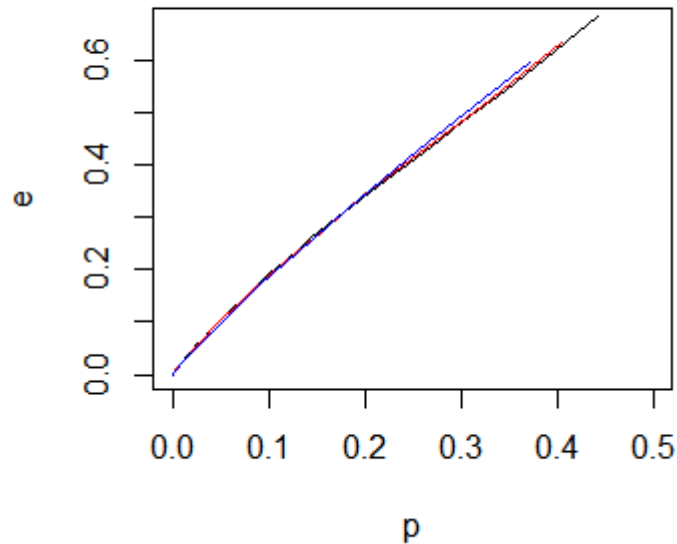


Figura 17 – Valores-p do teste t e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)

4.4 Gama

Seja X_1, X_2, \dots, X_{n_1} uma amostra de uma população X que, dado α_1 e β_1 , segue uma distribuição $\text{Gama}(\alpha_1, \beta_1)$. Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} uma amostra de uma população Y que, dado α_2 e β_2 , segue uma distribuição $\text{Gama}(\alpha_2, \beta_2)$. Considere que X e Y são independentes.

Considere os seguintes testes para comparação das duas populações X e Y :

- 1: FBST (e) da hipótese $H_0: \alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$;
- 2: Teste t (p);
- 3: Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney (WMW).

A tabela 19 e as figuras 19, 20 e 21 apresentam os valores-p (do teste t e WMW) e o valor-e (do FBST) do teste de comparação de duas populações com distribuição Exponencial em três cenários e diferentes tamanhos de amostra (iguais para as duas populações: $n_1 = n_2 = n$).

Tabela 19 – Simulação para amostras com distribuição Gama

Cenário	$\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 5,$ $\beta_1 = 3$ e $\beta_2 = 2, 5$			$\alpha_1 = 12, \alpha_2 = 10,$ $\beta_1 = 5$ e $\beta_2 = 5$			$\alpha_1 = 30, \alpha_2 = 40,$ $\beta_1 = 10$ e $\beta_2 = 15$		
	e	p	WMW	e	p	WMW	e	p	WMW
10	0,7978	0,4131	0,4468	0,711	0,2754	0,2973	0,6571	0,2413	0,2753
15	0,7088	0,3475	0,3691	0,5532	0,2074	0,2181	0,5045	0,1786	0,2022
20	0,6485	0,3122	0,3325	0,4693	0,162	0,17	0,3831	0,1198	0,141
25	0,5753	0,2615	0,2829	0,3853	0,1288	0,1338	0,3096	0,0887	0,1048
30	0,5503	0,2453	0,2662	0,3175	0,09	0,0969	0,2337	0,065	0,0851
35	0,5016	0,2205	0,2456	0,2498	0,0641	0,0674	0,1732	0,0436	0,0556
40	0,4603	0,1861	0,2042	0,2057	0,0597	0,0596	0,1222	0,0251	0,0327
45	0,4098	0,1615	0,1823	0,1714	0,0418	0,0436	0,1001	0,023	0,0303
50	0,3891	0,1527	0,1684	0,1439	0,0313	0,0348	0,0759	0,0152	0,0217
55	0,3523	0,1338	0,1503	0,1158	0,0242	0,026	0,0582	0,0097	0,0146
60	0,3294	0,1113	0,1239	0,102	0,0203	0,0206	0,0478	0,0092	0,0132
65	0,2959	0,1027	0,1203	0,0816	0,0169	0,018	0,0342	0,0048	0,0074
70	0,2914	0,0953	0,1146	0,0695	0,0143	0,014	0,025	0,0044	0,0069
75	0,2442	0,0691	0,0854	0,0556	0,01	0,0105	0,0241	0,0043	0,0063
80	0,228	0,0645	0,0785	0,0484	0,0076	0,0078	0,0143	0,0018	0,0032
85	0,2056	0,0534	0,0644	0,0349	0,0046	0,005	0,0115	0,0015	0,0027
90	0,2036	0,0556	0,0665	0,0312	0,0044	0,0046	0,0078	0,0009	0,0018
95	0,1785	0,0491	0,0604	0,0257	0,0035	0,0038	0,0053	0,0007	0,0012
100	0,1748	0,0475	0,0546	0,0201	0,0025	0,0026	0,0054	0,0009	0,0015
105	0,1504	0,0388	0,0499	0,0153	0,0017	0,0022	0,004	0,0004	0,0008
110	0,1389	0,0354	0,046	0,0133	0,0018	0,0018	0,0018	0,0002	0,0005
115	0,1243	0,0268	0,0351	0,0129	0,0013	0,0014	0,0021	0,0003	0,0005
120	0,122	0,0299	0,0359	0,0092	0,001	0,0009	0,0008	0,0002	0,0004
125	0,1053	0,0208	0,029	0,0072	0,0006	0,0006	0,0015	0,0002	0,0003
130	0,0993	0,0187	0,0237	0,0061	0,0006	0,0005	0,0007	0,0001	0,0002
135	0,0962	0,0193	0,0262	0,0045	0,0003	0,0004	0,0004	0	0,0002
140	0,088	0,0175	0,0222	0,003	0,0003	0,0003	0,0004	0	0,0001
145	0,0746	0,0144	0,0201	0,0025	0,0002	0,0002	0,0006	0	0,0001
150	0,0761	0,0133	0,0197	0,0032	0,0005	0,0005	0,0004	0,0001	0,0002
155	0,068	0,014	0,018	0,0014	0,0001	0,0001	0,0002	0	0,0001
160	0,0591	0,011	0,0153	0,002	0,0002	0,0002	0,0001	0	0,0001
165	0,0559	0,0098	0,0133	0,0011	0,0001	0,0001	0,0001	0	0
170	0,0508	0,0086	0,0126	0,0008	0,0001	0,0001	0,0001	0	0
175	0,0459	0,0075	0,0113	0,0007	0,0001	0,0001	0	0	0
180	0,0417	0,0064	0,0099	0,0006	0,0001	0,0001	0	0	0
185	0,0387	0,0057	0,0074	0,0002	0	0	0	0	0
190	0,0365	0,006	0,0098	0,0002	0	0	0,0002	0	0
195	0,0299	0,0043	0,0065	0,0003	0	0	0	0	0
200	0,0303	0,0042	0,0061	0,0003	0	0	0	0	0

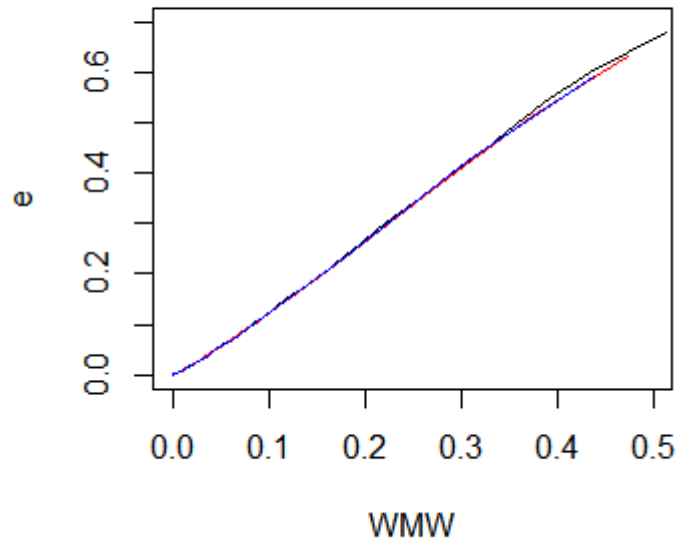


Figura 18 – Valores-p do teste de WMW e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)

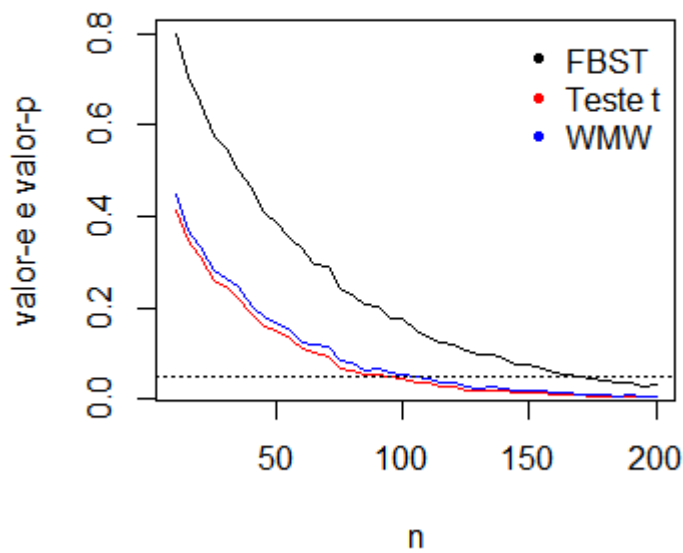


Figura 19 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 1: $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 5$, $\beta_2 = 3$ e $\beta_2 = 2, 5$

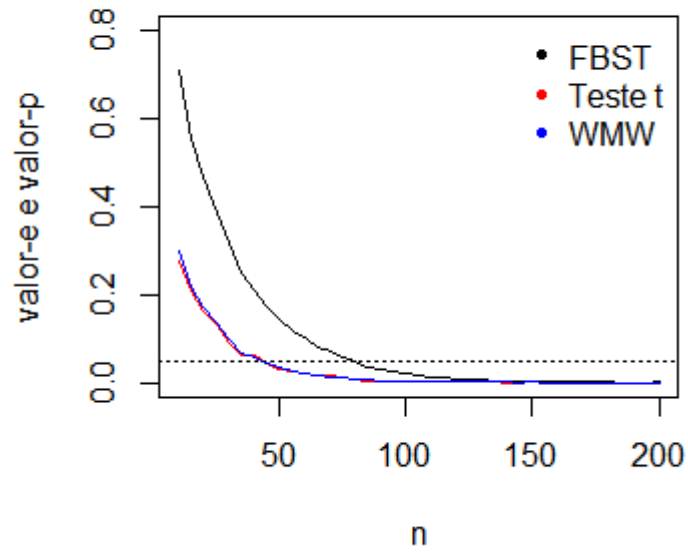


Figura 20 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 2: $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 10$, $\beta_1 = 5$ e $\beta_2 = 5$

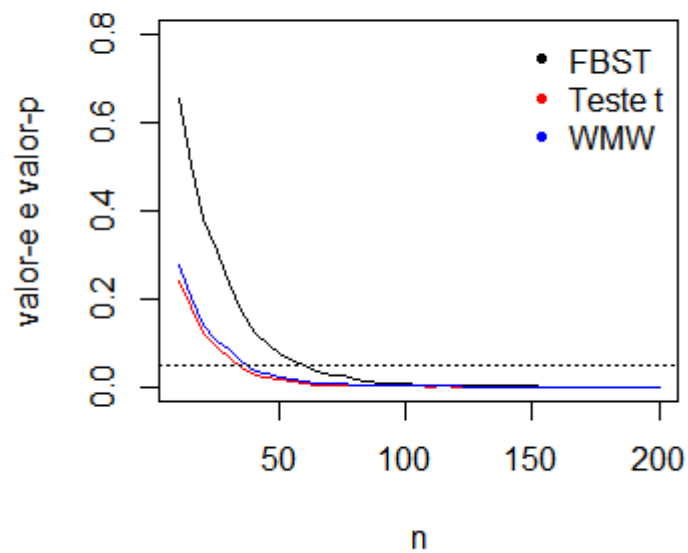


Figura 21 – Valores-p e valor-e do teste de comparação de duas populações. Cenário 3: $\alpha_1 = 30$, $\alpha_2 = 40$, $\beta_1 = 10$ e $\beta_2 = 15$

Para o Primeiro Cenário, nota-se que o valor-e é maior que valor-p do teste T e do teste de WMW, e é maior quando comparado às outras distribuições. Para a hipótese

nula se rejeitada com o teste t e WMW, precisa-se de uma amostra em torno de 80, enquanto que com o FBST, a amostra deve ser no mínimo 150. Para o Segundo Cenário, nota-se que as evidências contra H_0 dos três testes caem mais rapidamente que no Primeiro Cenário, mas valor-e ainda continua superior aos valores-p. No terceiro Cenário, valor-e como os valores-p estão mais próximos, com um tamanho de amostra 40 já é possível rejeitar a hipótese nula com o teste t e WMW, enquanto que para ser rejeitada com o FBST, é necessária uma amostra de tamanho 60.

Agora serão apresentados dois gráficos com o objetivo de comparar valor-p do teste t com valor-e, e valor-p do teste de WMW com valor-e, para os 3 cenários mostrados anteriormente:

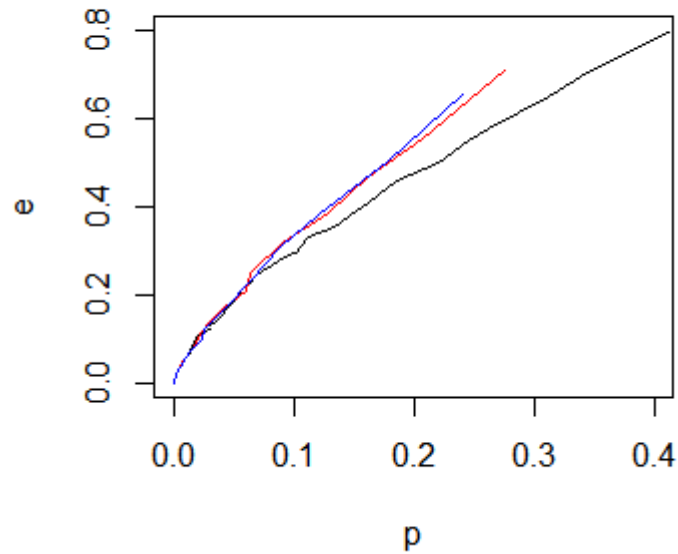


Figura 22 – Valores-p do teste t e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)

Como observado no artigo original (Pereira e Stern, 1999), o FBST apresenta maiores valores-e (benefício da dúvida). Para a distribuição de Poisson não houve muita diferença entre teste t e WMW devido ao fato da distribuição ser aproximadamente simétrica. Quando o valor de θ aumenta, o teste FBST gera resultados parecidos com o teste t. Portanto com amostras suficientemente grandes, o teste t já seria uma ótima saída. Para a distribuição Bernoulli valor-e e valor-p são parecidos. Já para a distribuição Exponencial nota-se maior divergência entre FBST, teste t e WMW. O principal motivo é que mesmo com altos valores de θ , a distribuição não é simétrica, fazendo com que o teste paramétrico FBST seja mais indicado do que o teste t. Para a distribuição Gama, valor-e é bem maior que valor-p do teste t e WMW. Isso se explica pelo fato de que quatro parâmetros estão sendo testados no FBST, enquanto que no teste t e teste de WMW isso não é levado em conta.

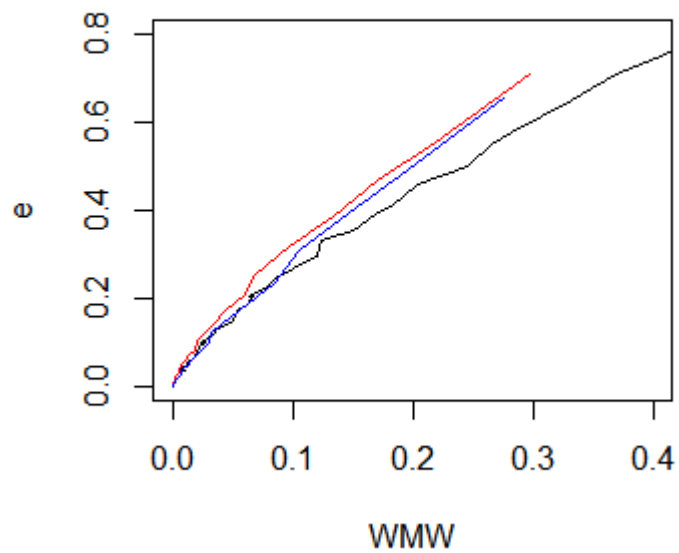


Figura 23 – Valores-p do teste de WMW e valores-e do FBST para os testes de comparação de duas populações para o Cenário 1 (em preto), Cenário 2 (em vermelho) e Cenário 3(em azul)

5 Conclusões

Atualmente é muito comum se deparar com estudos onde o principal interesse é comparar dois grupos (ou duas populações) nas mais diferentes áreas. O teste mais usado para essa finalidade é o teste t , mas em alguns casos ele não é recomendado, como nos casos em que a suposição de normalidade não é atendida. Com isso, pode-se fazer uso de testes não paramétricos, mas há perda de informação nestes testes. Com isso, este trabalho mostrou uma alternativa ao teste t e aos testes não paramétricos: o Teste de Significância Genuinamente Bayesiano (FBST - *Full Bayesian Significance Test*), proposto inicialmente por Pereira e Stern (1999).

O FBST se mostrou uma ótima alternativa aos testes tradicionais, pois o teste é paramétrico. Um erro comum é achar que se a distribuição dos dados não for normal, qualquer outro teste utilizado que não seja o teste t , será um teste não paramétrico. O FBST é um teste paramétrico pois leva em consideração a distribuição dos dados, seja qual for a distribuição.

Como citado por Pereira e Stern(1999), o valor- e quase sempre será maior que o valor- p , e isso é visto claramente nas simulações . Mas à medida em que o tamanho da amostra aumenta, o valor- e e o valor- p se equilibram. Quanto à utilização do FBST, teste t e WMW, podemos tirar algumas conclusões: no caso da distribuição de Poisson, quanto maior o valor de θ , mais a distribuição se aproxima da normalidade, e isso significa que mesmo com amostras pequenas, o teste t já seria uma ótima alternativa. Para a distribuição Exponencial acontece o contrário: mesmo com tamanho de amostra suficientemente grande, os dados não parecem apresentar normalidade, fazendo com que o FBST seja a escolha mais segura nesse caso. No caso da distribuição de Bernoulli, valor- e e valor- p são mais equilibrados. Com a distribuição Gama, valor- e é bem superior ao valor- p .

Como citado por Petri (2007), existe quase que uma relação 1:1 entre valor- e e valor- p , como é mostrado nos gráficos valor- e vs valor- p e valor- e vs WMW. Isso significa que os pontos de corte não devem ser os mesmos e isso depende de qual teste será utilizado. O critério de corte deve ser analisado para cada caso e distribuição. Se a relação entre valor- e e valor- p estiver bem definida, é possível saber a que valor- e corresponde um dado valor- p .

Mas se existe uma equivalência entre valor- e e valor- p , por que utilizar a inferência bayesiana e gastar mais tempo com o teste? A resposta é que no caso em que se tem uma distribuição conhecida dos dados, é possível ter a distribuição a posteriori, o que é suficiente para a realização do teste bayesiano. Se não é possível ter um desempenho superior que aos testes frequentistas, no mínimo teremos resultados comparáveis.

Referências

- [1] CONOVER, W. J. *"Practical Nonparametric Statistics"*. Editora: Wiley, 1999.
- [2] EHLERS, R. S. *"Inferência Bayesiana"*. 2011.
- [3] GAMERMAN, D.; LOPES, H. F. *"Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference"*. Ed.2. Editora: Chapman and Hall/CRC Texts in Statistical Science, 2006.
- [4] HOLLANDER, M.; WOLFE, D. A.; CHICKEN, E. *"Nonparametric Statistical Methods"*. Editora: Wiley, 1999.
- [5] MORETTIN, P.; O.BUSSAB, W. *"Estatística Básica"*. Editora: Saraiva, 2013.
- [6] Paulino, C. D.; Turkman, M. A. A.; Murteira, B. *"Estatística Bayesiana"*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.
- [7] PEREIRA, C. A.; STERN, J. . M. *"Evidence and credibility: full Bayesian significance test of precise hypothesis"*. Editora: Entropy, 1999.
- [8] PETRI, C. *"Relação entre os níveis de significância Bayesiano e frequentista: e-value e p-value em tabelas de contingência"*. 2007.
- [9] R Development Core Team. *"R: A Language and Environment for Statistical Computing"*. Vienna, Austria, 2017. ISBN 3-900051-07-0. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>.

ANEXO - Programação em R

```
##### Distribuicao de Poisson #####
##### Exemplos #####
#exemplo1
#definindo as amostras
x <- c(1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 2)
y <- c(1, 1, 2, 0, 3, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 2, 1)

evalor_poisson <- function(x, y) {
  n1 <- length(x)
  n2 <- length(y)
  a1 <- 10 ^ -3
  a2 <- 10 ^ -3
  b1 <- 10 ^ -3
  b2 <- 10 ^ -3
  m <- 1000000
  set.seed(8)
  theta1 <- rgamma(m, a1 + sum(x), b1 + n1)
  set.seed(8)
  theta2 <- rgamma(m, a2 + sum(y), b2 + n2)

  post <- function(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2) {
    dgamma(theta1, a1 + sum(x), b1 + n1) *
    dgamma(theta2, a2 + sum(y), b2 +
                                                    n2)
  }

  theta_max <- (sum(x) + sum(y) + a1 + a2 - 2) / (n1 + n2 + b1 + b2)

  post_max <- post(theta_max, theta_max, x, y, a1, a2, b1, b2)

  posteriori <- post(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2)

  valor.e <- 1 - mean(posteriori > post_max)

  saida <- c("Populacao 1", "Populacao 2")
  Media <- c(mean(x), mean(y))
}
```

```

Desvio <- c(sqrt(var(x)), sqrt(var(y)))
z <- cbind(saida, Media, Desvio, valor.e)

return(z)

}

evalor_poisson(x, y)

# exemplo2
set.seed(6)
x <- rpois(20, 10)
sum(x)
set.seed(6)
y <- rpois(30, 14)
sum(y)
evalor_poisson(x, y)

#####Dados#####
x <- c(1, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 2)
y <- c(1, 1, 2, 0, 3, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 2, 1)

#####Posteriori#####
set.seed(7)
post_pop1 = rgamma(100000, 8.001, 10.001)

set.seed(7)
post_pop2 = rgamma(100000, 20.001, 20.001)
plot(
  density(post_pop1),
  main = " ",
  xlab = expression(theta),
  ylab = expression(pi(theta / X, Y)),
  ylim = c(0, 2)
)
lines(density(post_pop2), col = "red")
legend(
  'topright',

```

```

c("Pop 1", "Pop 2"),
,
col = c("black", "red"),
pch = rep(20, 1)
)

##### Simulacao #####

evalor_poisson <- function(x, y) {
  n1 <- length(x)
  n2 <- length(y)
  a1 <- 10 ^ -3
  a2 <- 10 ^ -3
  b1 <- 10 ^ -3
  b2 <- 10 ^ -3
  m <- 1000
  # set.seed(8)
  theta1 <- rgamma(m, a1 + sum(x), b1 + n1)
  # set.seed(8)
  theta2 <- rgamma(m, a2 + sum(y), b2 + n2)

  post <- function(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2) {
    dgamma(theta1, a1 + sum(x), b1 + n1) *
    dgamma(theta2, a2 + sum(y), b2 +
                                                    n2)
  }

  theta_max <- (sum(x) + sum(y) + a1 + a2 - 2) / (n1 + n2 + b1 + b2)

  post_max <- post(theta_max, theta_max, x, y, a1, a2, b1, b2)

  posteriori <- post(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2)

  valor.e <- 1 - mean(posteriori > post_max)

  return(valor.e)
}

n <- seq(5, 200, 5)    ## tamanho maximo da amostra
M <- 10000            ### numero de replicas
theta1 <- 5

```

```

theta2 <- 6

nn <- length(n)  ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 4)
e[, 1] <- n

#### menor amostra = 5

for (j in 1:nn) {
  valor <- testet <- npar <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rpois(n[j], theta1)
    y <- rpois(n[j], theta2)
    valor[i] <- valor_poisson(x, y)
    testet[i] <- t.test(x, y)$p.value
    npar[i] <- wilcox.test(x, y, paired = F)$p.value
  }

  e[j, 2] <- mean(valor)
  e[j, 3] <- mean(testet)
  e[j, 4] <- mean(npar)
  cat(j / nn, "\n")
}

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  ylim = c(0, .7),
  xlim = c(5, 200),
  xlab = "n",
  ylab = "valor-e e valor-p"
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
points(e[, 1], e[, 4], type = "l", col = 4)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste t", "WMW"),
  col = c("black", "red", "blue"),

```



```

    pch = rep(20, 1),
    bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

#####
#####

n <- seq(5, 200, 5)    ## tamanho maximo da amostra
M <- 10000    ### numero de replicas
theta1 <- 10
theta2 <- 12

nn <- length(n)    ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 4)
e[, 1] <- n

##### menor amostra = 5

for (j in 1:nn) {
  valor <- testet <- npar <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rpois(n[j], theta1)
    y <- rpois(n[j], theta2)
    valor[i] <- valor_poisson(x, y)
    testet[i] <- t.test(x, y)$p.value
    npar[i] <- wilcox.test(x, y, paired = F)$p.value
  }

  e[j, 2] <- mean(valor)
  e[j, 3] <- mean(testet)
  e[j, 4] <- mean(npar)
  cat(j / nn, "\n")
}

```

```

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  ylim = c(0, .7),
  xlab = "n",
  ylab = "valor-e e valor-p"
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
points(e[, 1], e[, 4], type = "l", col = 4)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste t", "WMW"),
  col = c("black", "red", "blue"),
  pch = rep(20, 1),
  bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

#####
#####

n <- seq(5, 200, 5)    ## tamanho maximo da amostra
M <- 10000            ### numero de replicas
theta1 <- 50
theta2 <- 60

nn <- length(n)      ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 4)
e[, 1] <- n

##### menor amotra = 5

```

```

for (j in 1:nn) {
  evalor <- testet <- npar <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rpois(n[j], theta1)
    y <- rpois(n[j], theta2)
    evalor[i] <- evalor_poisson(x, y)
    testet[i] <- t.test(x, y)$p.value
    npar[i] <- wilcox.test(x, y, paired = F)$p.value
  }

  e[j, 2] <- mean(evalor)
  e[j, 3] <- mean(testet)
  e[j, 4] <- mean(npar)
  cat(j / nn, "\n")
}

```

```

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  ylim = c(0, .7),
  xlab = "n",
  ylab = "valor-e e valor-p"
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
points(e[, 1], e[, 4], type = "l", col = 4)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste t", "MMM"),
  col = c("black", "red", "blue"),
  pch = rep(20, 2),
  bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

```

```
##### e vs p #####
```

```
dados=read.csv2(file.choose(), header = T)
```

dados

```
attach(dados)
```

```
plot(p1, e1, type = "l", ylim = c(0, .65), xlim = c(0.0, .5),
      xlab = "p", ylab = "e")
points(p2, e2, type = "l", col = 2)
points(p3, e3, type = "l", col = 4)
```

```
##### e vs WMM #####
```

```
plot(WMM1, e1, type = "l", ylim = c(0, .65), xlim = c(0.0, .5),
      xlab = "WMM", ylab = "e")
points(WMM2, e2, type = "l", col = 2)
points(WMM3, e3, type = "l", col = 4)
```

```
##### Distribuicao de Bernoulli #####
```

```
##### exemplo 1 #####
```

```
#gerando as amostras
```

```
set.seed(7)
```

```
x <- c(0,1,0,1,1,1,0,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0,0,1,1,0)
```

```
y <- c(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)
```

```
evalor_bernoulli <- function(x, y) {
  n1 <- length(x)
  n2 <- length(y)
  a1 <- 1
  a2 <- 1
  b1 <- 1
  b2 <- 1
  m <- 1000000
  set.seed(7)
  theta1 <- rbeta(m, a1 + sum(x), n1 - sum(x) + b1)
  set.seed(7)
  theta2 <- rbeta(m, a2 + sum(y), n2 - sum(y) + b2)
```

```
post <- function(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2) {
  dbeta(theta1, a1 + sum(x), n1 - sum(x) + b1) *
  dbeta(theta2, a2 + sum(y), n2 - sum(y) + b2)
```

```

    dbeta(theta2, a2 + sum(y), n2 - sum(y) + b2)
  }

theta_max <- (sum(x) + sum(y) + a1 + a2 - 2) / (n1 + n2 + b1 + b2 + a1 +
                                              a2 - 4)

post_max <- post(theta_max, theta_max, x, y, a1, a2, b1, b2)

posteriori <- post(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2)

valor.e <- 1 - mean(posteriori > post_max)

saida <- c("Populacao 1", "Populacao 2")
Media <- c(mean(x), mean(y))
Desvio <- c(sqrt(var(x)), sqrt(var(y)))
z <- cbind(saida, Media, Desvio, valor.e)

return(z)
}

evalor_bernoulli(x, y)

# exemplo2
#gerando as amostras
x <-c(0,1,0,1,1,1,0,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,1,0,1,0,0)
sum(x)
length(x)
y <- c(1,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,1)
sum(y)
length(y)
evalor_bernoulli(x, y)

#####
#posteriori

set.seed(7)
post_pop1 = rbeta(100000, 16, 16)
set.seed(7)
post_pop2 = rbeta(100000, 8, 14)

```

```

plot(
  density(post_pop1),
  main = " ",
  xlab = expression(theta),
  ylab = expression(pi(theta / X, Y)),
  ylim = c(0, 5)
)
lines(density(post_pop2), col = "red")
legend(
  'topright',
  c("Pop 1", "Pop 2"),
  ,
  col = c("black", "red"),
  pch = rep(20, 1)
)

```

```
##### Simulacao #####
```

```

evalor_bernoulli <- function(x, y) {
  n1 <- length(x)
  n2 <- length(y)
  a1 <- 1
  a2 <- 1
  b1 <- 1
  b2 <- 1
  m <- 1000

  theta1 <- rbeta(m, a1 + sum(x), n1 - sum(x) + b1)
  theta2 <- rbeta(m, a2 + sum(y), n2 - sum(y) + b2)

  post <- function(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2) {
    dbeta(theta1, a1 + sum(x), n1 - sum(x) + b1) *
    dbeta(theta2, a2 + sum(y), n2 - sum(y) + b2)
  }

  theta_max <- (sum(x) + sum(y) + a1 + a2 - 2) / (n1 + n2 + b1 + b2 + a1 +
  a2 - 4)

  post_max <- post(theta_max, theta_max, x, y, a1, a2, b1, b2)

  posteriori <- post(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2)

```

```
valor.e <- 1 - mean(posteriori > post_max)

return(valor.e)

}

n <- seq(10, 400, 10)  ## tamanho maximo da amostra
M <- 10000  ### numero de replicas
theta1 <- 0.5
theta2 <- 0.6

nn <- length(n)  ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 3)
e[, 1] <- n

#### menor amostra = 10

for (j in 1:nn) {
  evalor <- teste <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rbinom(n[j], 1, theta1)
    y <- rbinom(n[j], 1, theta2)
    evalor[i] <- evalor_bernoulli(x, y)
    teste[i] <-
      prop.test(c(sum(x), sum(y)), c(length(x), length(y)),
        correct = T)$p.value
  }

  e[j, 2] <- mean(evalor)
  e[j, 3] <- mean(teste)
  cat(j / nn, "\n")
}

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  ylim = c(0, .7),
  xlab = "n",
```

```

    ylab = "valor-e e valor-p",
    xlim = c(10, 400)
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste Prop"),
  col = c("black", "red"),
  pch = rep(20, 1),
  bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

#####
#####

n <- seq(10, 400, 10)  ## tamanho maximo da amostra
M <- 10000  ### numero de replicas
theta1 <- 0.4
theta2 <- 0.6

nn <- length(n)  ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 3)
e[, 1] <- n

#### menor amostra = 10

for (j in 1:nn) {
  evalor <- teste <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rbinom(n[j], 1, theta1)
    y <- rbinom(n[j], 1, theta2)
    evalor[i] <- evalor_bernoulli(x, y)
    teste[i] <-
      prop.test(c(sum(x), sum(y)), c(length(x), length(y)),

```



```

        correct = T)$p.value
    }

    e[j, 2] <- mean(avalor)
    e[j, 3] <- mean(teste)
    cat(j / nn, "\n")
}

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  ylim = c(0, .7),
  xlab = "n",
  ylab = "valor-e e valor-p",
  xlim = c(10, 400)
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste Prop"),
  col = c("black", "red"),
  pch = rep(20, 1),
  bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

#####
#####

n <- seq(10, 400, 10)  ## tamanho maximo da amostra
M <- 10000  ### numero de replicas
theta1 <- 0.1
theta2 <- 0.4

```

```

nn <- length(n)  ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 3)
e[, 1] <- n

##### menor amostra = 10

for (j in 1:nn) {
  valor <- teste <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rbinom(n[j], 1, theta1)
    y <- rbinom(n[j], 1, theta2)
    valor[i] <- valor_bernoulli(x, y)
    teste[i] <-
      prop.test(c(sum(x), sum(y)), c(length(x), length(y)),
        correct = T)$p.value
  }

  e[j, 2] <- mean(valor)
  e[j, 3] <- mean(teste)
  cat(j / nn, "\n")
}

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  ylim = c(0, 0.7),
  xlab = "n",
  ylab = "valor-e e valor-p",
  xlim = c(10, 400)
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste Prop"),
  col = c("black", "red"),
  pch = rep(20, 1),
  bty = "n"
)

```

```
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

##### e vs p #####
dados=read.csv2(file.choose(),header = T)
dados

plot(dados$p1,dados$e1,type = "l", ylim = c(0, .67),xlim = c(0.0,.67),
      xlab = "p",ylab = "e")
points(dados$p2, dados$e2, type = "l", col = 2)
points(dados$p3, dados$e3, type = "l", col = 4)

##### Distribuicao Exponencial #####
##### exemplo 1 #####
set.seed(7)
x <- rexp(100, 5)
mean(x)
sum(x)

set.seed(7)
y <- rexp(150, 7.5)
mean(y)
sum(y)

evalor_exp <- function(x, y) {
  n1 <- length(x)
  n2 <- length(y)
  a1 <- 10 ^ -3
  a2 <- 10 ^ -3
  b1 <- 10 ^ -3
  b2 <- 10 ^ -3
  m <- 1000000
  set.seed(7)
  theta1 <- rgamma(m, n1 + a1, b1 + sum(x))
  set.seed(7)
  theta2 <- rgamma(m, a2 + n2, b2 + sum(y))
}
```

```

post <- function(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2) {
  dgamma(theta1, n1 + a1, b1 + sum(x)) *
  dgamma(theta2, a2 + n2, b2 + sum(y))
}

theta_max <- (n1 + n2 + a1 + a2 - 2) / (sum(x) + sum(y) + b1 + b2)

post_max <- post(theta_max, theta_max, x, y, a1, a2, b1, b2)

posteriori <- post(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2)

valor.e <- 1 - mean(posteriori > post_max)

saida <- c("Populacao 1", "Populacao 2")
Media <- c(mean(x), mean(y))
Desvio <- c(sqrt(var(x)), sqrt(var(y)))
z <- cbind(saida, Media, Desvio, valor.e)

return(z)
}

evalor_exp(x, y)

#exemplo 2
set.seed(8)
x <- rexp(100, 20)
mean(x)
sum(x)

set.seed(8)
y <- rexp(100, 22)
mean(y)
sum(y)

evalor_exp(x, y)

#####

```

```
# Posteriori
set.seed(7)
post_pop1 = rgamma(1000000, 100.001, 19.09098)

set.seed(7)
post_pop2 = rgamma(1000000, 150.001, 18.24539)
plot(
  density(post_pop1),
  main = " ",
  xlab = expression(theta),
  ylab = expression(pi(theta / X, Y)),
  ylim = c(0, 1),
  xlim = c(3, 13)
)
lines(density(post_pop2), col = "red")
legend(
  'topright',
  c("Pop 1", "Pop 2"),
  ,
  col = c("black", "red"),
  pch = rep(20, 1)
)

##### Simulacao #####

evalor_exp <- function(x, y) {
  n1 <- length(x)
  n2 <- length(y)
  a1 <- 10 ^ -3
  a2 <- 10 ^ -3
  b1 <- 10 ^ -3
  b2 <- 10 ^ -3
  m <- 1000
  theta1 <- rgamma(m, n1 + a1, b1 + sum(x))
  theta2 <- rgamma(m, a2 + n2, b2 + sum(y))

  post <- function(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2) {
    dgamma(theta1, n1 + a1, b1 + sum(x)) *
    dgamma(theta2, a2 + n2, b2 + sum(y))
  }
}
```

```

theta_max <- (n1 + n2 + a1 + a2 - 2) / (sum(x) + sum(y) + b1 + b2)

post_max <- post(theta_max, theta_max, x, y, a1, a2, b1, b2)

posteriori <- post(theta1, theta2, x, y, a1, a2, b1, b2)

valor.e <- 1 - mean(posteriori > post_max)

return(valor.e)
}

n <- seq(5, 200, 5)    ## tamanho maximo da amostra
M <- 10000            ### numero de replicas
theta1 <- 10
theta2 <- 15

nn <- length(n)      ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 4)
e[, 1] <- n

##### menor amostra = 5

for (j in 1:nn) {
  evalor <- testet <- npar <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rexp(n[j], theta1)
    y <- rexp(n[j], theta2)
    evalor[i] <- evalor_exp(x, y)
    testet[i] <- t.test(x, y)$p.value
    npar[i] <- wilcox.test(x, y, paired = F)$p.value
  }

  e[j, 2] <- mean(evalor)
  e[j, 3] <- mean(testet)
  e[j, 4] <- mean(npar)
  cat(j / nn, "\n")
}

```

```

}

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  ylim = c(0, .7),
  xlab = "n",
  ylab = "valor-e e valor-p"
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
points(e[, 1], e[, 4], type = "l", col = 4)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste t", "WMW"),
  col = c("black", "red", "blue"),
  pch = rep(20, 1),
  bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

#####
#####

n <- seq(5, 200, 5)    ## tamanho maximo da amostra
M <- 10000    ### numero de replicas
theta1 <- 20
theta2 <- 35

nn <- length(n)    ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 4)
e[, 1] <- n

##### menor amostra = 5

```

```

for (j in 1:nn) {
  evalor <- testet <- npar <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rexp(n[j], theta1)
    y <- rexp(n[j], theta2)
    evalor[i] <- evalor_exp(x, y)
    testet[i] <- t.test(x, y)$p.value
    npar[i] <- wilcox.test(x, y, paired = F)$p.value
  }

  e[j, 2] <- mean(evalor)
  e[j, 3] <- mean(testet)
  e[j, 4] <- mean(npar)
  cat(j / nn, "\n")
}

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  ylim = c(0, .7),
  xlab = "n",
  ylab = "valor-e e valor-p"
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
points(e[, 1], e[, 4], type = "l", col = 4)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste t", "WMW"),
  col = c("black", "red", "blue"),
  pch = rep(20, 1),
  bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

```



```
#####  
#####
```

```
n <- seq(5, 200, 5)  ## tamanho maximo da amostra  
M <- 10000  ### numero de replicas  
theta1 <- 100  
theta2 <- 200
```

```
nn <- length(n)  ### numero de linhas na matriz
```

```
e <- matrix(0, nn, 4)  
e[, 1] <- n
```

```
#### menor amostra = 5
```

```
for (j in 1:nn) {  
  evalor <- testet <- npar <- numeric(M)  
  for (i in 1:M) {  
    x <- rexp(n[j], theta1)  
    y <- rexp(n[j], theta2)  
    evalor[i] <- evalor_exp(x, y)  
    testet[i] <- t.test(x, y)$p.value  
    npar[i] <- wilcox.test(x, y, paired = F)$p.value  
  }  
  
  e[j, 2] <- mean(evalor)  
  e[j, 3] <- mean(testet)  
  e[j, 4] <- mean(npar)  
  cat(j / nn, "\n")  
}
```

```
plot(  
  e[, 1],  
  e[, 2],
```

```

    type = "l",
    ylim = c(0, .7),
    xlab = "n",
    ylab = "valor-e e valor-p",
    xlim = c(0, 200)
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
points(e[, 1], e[, 4], type = "l", col = 4)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste t", "WMW"),
  col = c("black", "red", "blue"),
  pch = rep(20, 1),
  bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

```

```
##### e vs p #####
```

```
dados=read.csv2(file.choose(), header = T)
dados
```

```

plot(dados$p1, dados$e1, type = "l", ylim = c(0, .67), xlim = c(0.0, .5),
     xlab = "p", ylab = "e")
points(dados$p2, dados$e2, type = "l", col = 2)
points(dados$p3, dados$e3, type = "l", col = 4)

```

```
##### e vs WMW #####
```

```

plot(dados$WMW1, dados$e1, type = "l", ylim = c(0, .7), xlim = c(0.0, .5),
     xlab = "WMW", ylab = "e")
points(dados$WMW2, dados$e2, type = "l", col = 2)
points(dados$WMW3, dados$e3, type = "l", col = 4)

```

```
##### Distribuicao Gama #####
```

```

set.seed(8)
x <- rgamma(40, 5, 2)

```



```
#####
#exemplo1
#####

#####
### hipotese: alpha1=alpha2 e beta1=beta2 ###
#####

post1 <- function(par, x, y) {
  alpha1 <- par[1]
  beta1 <- par[2]

  if ((alpha1 > 0) && (beta1 > 0))
    return(-1 * (
      sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      sum(dgamma(y, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
      dgamma(alpha1, a2, b2, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c2, d2, log = TRUE)
    ))
  else
    return(-Inf)
}

## ponto que maximiza a posteriori sob H01
max.H01 <- optim(c(3, 3), post1, x = x, y = y)$par
max.H01 <- c(max.H01[1], max.H01[1], max.H01[2], max.H01[2])

## maximo do log a posteriori sob H01
max.post.H01 <- post(max.H01, x, y)

### calculo do valor-e
cont <- 0
for (i in 1:M) {
  if (post(theta[i, ], x, y) < max.post.H01)
    cont <- cont + 1
}

```

```

valor.e1 <- cont / M
valor.e1

#####
##### alpha1\beta1=alpha2\beta2
#####

post2 <- function(par, x, y) {
  alpha1 <- par[1]
  alpha2 <- par[2]
  beta1 <- par[3]
  beta2 <- alpha2 * beta1 / alpha1

  if ((alpha1 > 0) && (alpha2 > 0) && (beta1 > 0))
    return(-1 * (
      sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      sum(dgamma(y, alpha2, beta2, log = TRUE)) +
      dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
      dgamma(alpha2, a2, b2, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
      dgamma(beta2, c2, d2, log = TRUE)
    ))
  else
    return(-Inf)
}

## ponto que maximiza a posteriori sob H01
max.H01 <- optim(c(3, 3, 3), post2, x = x, y = y)$par
max.H01
max.H01 <- c(max.H01, max.H01[2] * max.H01[3] / max.H01[1])
max.H01

## maximo do log a posteriori sob H01
max.post.H01 <- post(max.H01, x, y)

### calculo do valor-e
cont <- 0
for (i in 1:M) {

```

```

    if (post(theta[i, ], x, y) < max.post.H01)
      cont <- cont + 1
  }

valor.e2 <- cont / M
valor.e2

#####
#####
##### exemplo 2 #####
#####
#####
#####
set.seed(8)
x <- rgamma(50, 5, 2)
mean(x)
sd(x)

set.seed(8)
y <- rgamma(50, 10, 3)
mean(y)
sd(y)

#####
post <- function(par, x, y) {
  alpha1 <- par[1]
  alpha2 <- par[2]
  beta1 <- par[3]
  beta2 <- par[4]

  if ((alpha1 > 0) && (alpha2 > 0) && (beta1 > 0) && (beta2 > 0))
    return(
      sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      sum(dgamma(y, alpha2, beta2, log = TRUE)) +
      dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
      dgamma(alpha2, a2, b2, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
      dgamma(beta2, c2, d2, log = TRUE)
    )
  else

```

```

    return(-Inf)
}

require(MCMCpack)
chute <- c(5, 4, 2, 3)

### gerando a posteriori
M <- 50000      ### tamanho da cadeia MCMC
theta <- MCMCmetrop1R(post,
                      chute,
                      x = x,
                      y = y,
                      mcmc = M)

#####
post1 <- function(par, x, y) {
  alpha1 <- par[1]
  beta1 <- par[2]

  if ((alpha1 > 0) && (beta1 > 0))
    return(-1 * (
      sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      sum(dgamma(y, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
      dgamma(alpha1, a2, b2, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c2, d2, log = TRUE)
    ))
  else
    return(-Inf)
}

## ponto que maximiza a posteriori sob H01
max.H01 <- optim(c(3, 3), post1, x = x, y = y)$par
max.H01 <- c(max.H01[1], max.H01[1], max.H01[2], max.H01[2])

## maximo do log a posteriori sob H01
max.post.H01 <- post(max.H01, x, y)

### calculo do valor-e
cont <- 0
for (i in 1:M) {
  if (post(theta[i, ], x, y) < max.post.H01)

```

```

    cont <- cont + 1
  }

valor.e1 <- cont / M
valor.e1

#####
##### alpha1\beta1=alpha2\beta2
#####

post2 <- function(par, x, y) {
  alpha1 <- par[1]
  alpha2 <- par[2]
  beta1 <- par[3]
  beta2 <- alpha2 * beta1 / alpha1

  if ((alpha1 > 0) && (alpha2 > 0) && (beta1 > 0))
    return(-1 * (
      sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      sum(dgamma(y, alpha2, beta2, log = TRUE)) +
      dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
      dgamma(alpha2, a2, b2, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
      dgamma(beta2, c2, d2, log = TRUE)
    ))
  else
    return(-Inf)
}

## ponto que maximiza a posteriori sob H01
max.H01 <- optim(c(3, 3, 3), post2, x = x, y = y)$par
max.H01
max.H01 <- c(max.H01, max.H01[2] * max.H01[3] / max.H01[1])
max.H01

## maximo do log a posteriori sob H01
max.post.H01 <- post(max.H01, x, y)

### calculo do valor-e

```



```
cont <- 0
for (i in 1:M) {
  if (post(theta[i, ], x, y) < max.post.H01)
    cont <- cont + 1
}

valor.e2 <- cont / M
valor.e2

#####
#####
##### exemplo 3 #####
#####
#####
#####
set.seed(7)
x <- rgamma(70, 50, 10)
mean(x)
sd(x)

set.seed(7)
y <- rgamma(80, 43, 9)
mean(y)
sd(y)

#####
post <- function(par, x, y) {
  alpha1 <- par[1]
  alpha2 <- par[2]
  beta1 <- par[3]
  beta2 <- par[4]

  if ((alpha1 > 0) && (alpha2 > 0) && (beta1 > 0) && (beta2 > 0))
    return(
      sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      sum(dgamma(y, alpha2, beta2, log = TRUE)) +
      dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
      dgamma(alpha2, a2, b2, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
```

```

        dgamma(beta2, c2, d2, log = TRUE)
    )
else
    return(-Inf)
}

require(MCMCpack)
chute <- c(5, 4, 2, 3)

### gerando a posteriori
M <- 50000      ### tamanho da cadeia MCMC
theta <- MCMCmetrop1R(post,
                      chute,
                      x = x,
                      y = y,
                      mcmc = M)

#####
post1 <- function(par, x, y) {
  alpha1 <- par[1]
  beta1 <- par[2]

  if ((alpha1 > 0) && (beta1 > 0))
    return(-1 * (
      sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      sum(dgamma(y, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
      dgamma(alpha1, a2, b2, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c2, d2, log = TRUE)
    ))
  else
    return(-Inf)
}

### ponto que maximiza a posteriori sob H01
max.H01 <- optim(c(3, 3), post1, x = x, y = y)$par
max.H01 <- c(max.H01[1], max.H01[1], max.H01[2], max.H01[2])

### maximo do log a posteriori sob H01
max.post.H01 <- post(max.H01, x, y)

### calculo do valor-e

```

```

cont <- 0
for (i in 1:M) {
  if (post(theta[i, ], x, y) < max.post.H01)
    cont <- cont + 1
}

valor.e1 <- cont / M
valor.e1

#####
##### alpha1\beta1=alpha2\beta2
#####

post2 <- function(par, x, y) {
  alpha1 <- par[1]
  alpha2 <- par[2]
  beta1 <- par[3]
  beta2 <- alpha2 * beta1 / alpha1

  if ((alpha1 > 0) && (alpha2 > 0) && (beta1 > 0))
    return(-1 * (
      sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      sum(dgamma(y, alpha2, beta2, log = TRUE)) +
      dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
      dgamma(alpha2, a2, b2, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
      dgamma(beta2, c2, d2, log = TRUE)
    ))
  else
    return(-Inf)
}

## ponto que maximiza a posteriori sob H01
max.H01 <- optim(c(3, 3, 3), post2, x = x, y = y)$par
max.H01
max.H01 <- c(max.H01, max.H01[2] * max.H01[3] / max.H01[1])
max.H01

## maximo do log a posteriori sob H01

```

```

max.post.H01 <- post(max.H01, x, y)

### calculo do valor-e
cont <- 0
for (i in 1:M) {
  if (post(theta[i, ], x, y) < max.post.H01)
    cont <- cont + 1
}

valor.e2 <- cont / M
valor.e2

##### Simulacao #####

a1 <- a2 <- b1 <- b2 <-
  c1 <- c2 <- d1 <- d2 <- 10 ^ -3 ##### hiperparametros gamma
require(MCMCpack)

post <- function(par, x, y) {
  alpha1 <- par[1]
  alpha2 <- par[2]
  beta1 <- par[3]
  beta2 <- par[4]

  if ((alpha1 > 0) && (alpha2 > 0) && (beta1 > 0) && (beta2 > 0))
    return(
      sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
      sum(dgamma(y, alpha2, beta2, log = TRUE)) +
      dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
      dgamma(alpha2, a2, b2, log = TRUE) +
      dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
      dgamma(beta2, c2, d2, log = TRUE)
    )
  else
    return(-Inf)
}

post1 <- function(par, x, y) {

```

```

alpha1 <- par[1]
beta1 <- par[2]

if ((alpha1 > 0) && (beta1 > 0))
  return(-1 * (
    sum(dgamma(x, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
    sum(dgamma(y, alpha1, beta1, log = TRUE)) +
    dgamma(alpha1, a1, b1, log = TRUE) +
    dgamma(alpha1, a2, b2, log = TRUE) +
    dgamma(beta1, c1, d1, log = TRUE) +
    dgamma(beta1, c2, d2, log = TRUE)
  ))
else
  return(-Inf)
}

e.valor.gama <- function(x, y) {
  chute <- c(1, 1, 1, 1)
  M <- 1000      ### tamanho da cadeia MCMC
  theta <- MCMCmetrop1R(
    post,
    chute,
    x = x,
    y = y,
    mcmc = M,
    logfun = T
  )
  max.H01 <- optim(c(1, 1), post1, x = x, y = y)$par
  max.H01 <- c(max.H01[1], max.H01[1], max.H01[2], max.H01[2])
  max.post.H01 <- post(max.H01, x, y)
  cont <- 0
  for (i in 1:M) {
    if (post(theta[i, ], x, y) < max.post.H01)
      cont <- cont + 1
  }

  valor.e1 <- cont / M
  return(valor.e1)
}
#####

```

```

## cenário 1 ##

n <- seq(10, 200, 5)  ## tamanho maximo da amostra
M <- 1000  ### numero de replicas

nn <- length(n)  ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 4)
e[, 1] <- n

#### menor amostra = 5

for (j in 1:nn) {
  evalor <- testet <- npar <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rgamma(n[j], 5, 3)
    y <- rgamma(n[j], 5, 2.5)
    evalor[i] <- e.valor.gama(x, y)
    testet[i] <- t.test(x, y)$p.value
    npar[i] <- wilcox.test(x, y, paired = F)$p.value
  }

  e[j, 2] <- mean(evalor)
  e[j, 3] <- mean(testet)
  e[j, 4] <- mean(npar)
  cat(j / nn, "\n")
}

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  xlim = c(10, 200),
  xlab = "n",
  ylab = "valor-e e valor-p"
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
points(e[, 1], e[, 4], type = "l", col = 4)
legend(
  'topright',

```

```

c("FBST", "Teste t", "WMW"),
col = c("black", "red", "blue"),
pch = rep(20, 1),
bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

#####
## cenario 2 ##

n <- seq(10, 200, 5)  ## tamanho maximo da amostra
M <- 1000  ### numero de replicas

nn <- length(n)  ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 4)
e[, 1] <- n

for (j in 1:nn) {
  valor <- testet <- npar <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rgamma(n[j], 12, 5)
    y <- rgamma(n[j], 10, 5)
    valor[i] <- e.valor.gama(x, y)
    testet[i] <- t.test(x, y)$p.value
    npar[i] <- wilcox.test(x, y, paired = F)$p.value
  }

  e[j, 2] <- mean(valor)
  e[j, 3] <- mean(testet)
  e[j, 4] <- mean(npar)
  cat(j / nn, "\n")
}

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",

```

```

ylim = c(0, 0.8),
xlab = "n",
ylab = "valor-e e valor-p"
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
points(e[, 1], e[, 4], type = "l", col = 4)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste t", "WMW"),
  col = c("black", "red", "blue"),
  pch = rep(20, 1),
  bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

#####
## cenário 3 ##

n <- seq(10, 200, 5)  ## tamanho maximo da amostra
M <- 1000  ### numero de replicas

nn <- length(n)  ### numero de linhas na matriz

e <- matrix(0, nn, 4)
e[, 1] <- n

for (j in 1:nn) {
  evalor <- testet <- npar <- numeric(M)
  for (i in 1:M) {
    x <- rgamma(n[j], 30, 10)
    y <- rgamma(n[j], 40, 15)
    evalor[i] <- e.valor.gama(x, y)
    testet[i] <- t.test(x, y)$p.value
    npar[i] <- wilcox.test(x, y, paired = F)$p.value
  }
}

```



```

}

e[j, 2] <- mean(evalor)
e[j, 3] <- mean(testet)
e[j, 4] <- mean(npar)
cat(j / nn, "\n")
}

plot(
  e[, 1],
  e[, 2],
  type = "l",
  ylim = c(0, 0.8),
  xlab = "n",
  ylab = "valor-e e valor-p"
)
points(e[, 1], e[, 3], type = "l", col = 2)
points(e[, 1], e[, 4], type = "l", col = 4)
legend(
  'topright',
  c("FBST", "Teste t", "WMW"),
  col = c("black", "red", "blue"),
  pch = rep(20, 1),
  bty = "n"
)
abline(h = 0.05, lty = 3)

round(e, digits = 4)

##### e vs p #####
dados=read.csv2(file.choose(),header = T)
dados

plot(dados$p1,dados$e1,type = "l", ylim = c(0, .8),xlim = c(0.0,.4),
      xlab = "p",ylab = "e")
points(dados$p2, dados$e2, type = "l", col = 2)
points(dados$p3, dados$e3, type = "l", col = 4)

##### e vs WMW #####

```

```
plot(dados$WMM1, dados$e1, type = "l", ylim = c(0, .8), xlim = c(0.0, .4),  
      xlab = "WMM", ylab = "e")  
points(dados$WMM2, dados$e2, type = "l", col = 2)  
points(dados$WMM3, dados$e3, type = "l", col = 4)
```