



# **PROJETO DE GRADUAÇÃO**

**Análise dinâmica estrutural de asa de aeronave  
protótipo para competição SAE Brasil  
Aerodesign**

Por,

**Victor Emmanuel Liete Gasparetto**

Brasília, 03 de julho de 2019

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

## PROJETO DE GRADUAÇÃO

# **Análise dinâmica estrutural de asa de aeronave protótipo para competição SAE Brasil Aerodesign**

Por,

**Victor Emmanuel Liete Gasparetto**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico

### **Banca Examinadora**

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marcela Rodrigues Machado (Orientadora) \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Sérgio Henrique da Silva Carneiro (Coorientador) \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro \_\_\_\_\_

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Polliana Cândida Oliveira Martins \_\_\_\_\_

Brasília 03 de julho de 2019

# Agradecimentos

De início, gostaria de agradecer imensamente à minha mãe, Tânia Maria, e ao meu pai, Luiz Ernesto, por todo o apoio emocional, amor, atenção e compreensão desde sempre comigo. Eu devo tudo a vocês e não consigo colocar em palavras a grandiosidade do que representam a mim. Se hoje eu pude fazer o que fiz, chegar onde cheguei, e sonhar onde posso estar no futuro foi devido à vocês, meus pais. Eu amo vocês!

Agradeço a toda a minha família, de Brasília (minhas irmãs de coração Flávia, Livia e Sílvia), São Paulo e Região Sul do país, pelo suporte, e por principalmente acreditarem em mim e diariamente me motivarem em seguir a profissão de engenheiro mecânico. Agradeço ao meu pai João, em especial, todos esses anos que, mesmo estando longe fisicamente, sempre se dedicou a mim e nunca deixou que perdêssemos a proximidade um com o outro, sua presença faz muito bem à minha vida e definitivamente contribuiu para formar quem sou hoje. Aos meus vovô Clóvis, vovó Nadir e vovó Chica, vocês são eternamente responsáveis pelo ser humano em que eu me tornei e que quero me tornar! Minhas sinceras desculpas por não poder estar mais próximo e presente na vida de vocês, todos os dias é grande o sentimento de saudade.

À equipe Draco Volans Aerodesign, por me proporcionar a melhor experiência que tive dentro da UnB. Se hoje eu sei que a escolha ideal para minha profissão foi ser um engenheiro mecânico, foi devido à minha participação na equipe. A grandiosidade do que é produzido aí não dá para mensurar. Levarei para a vida as metodologias de trabalho, vontade insaciável por realizar testes, calibrações e otimizações, lembranças das duas competições em que pude estar presente, 2017 e 2018, onde projetamos a **primeira** asa voadora que decolou na competição! Em especial, eu gostaria de agradecer aos meus companheiros de equipe, Gilberto Sousa, William Araújo, Talles, Rogério, André Sol, Hugo Castelo, Fourier, Janoski, Wildemberg. Vocês são os melhores, continuem com garra nesse projeto e na vida, seus monstros! E, claro, **usem e abusem desse PG!** Isso aqui foi feito para vocês, estou 100% aberto para qualquer discussão formulada a partir disso. Contem comigo. VAI DRACO!

À minha companheira, minha melhor amiga, meu referencial, meu *chêro*, Karoline Abreu. Chêro, você de longe é a melhor coisa que aconteceu na minha vida. Não existe outra namorada tão atenciosa, dedicada, objetiva, planejadora, madura, inteligente como você. Tú és responsável por esse trabalho ser realidade, além de todas as conquistas

obtidas hoje. Farei de tudo para nosso plano de vida dar certo, pois como sempre lhe digo: estamos juntos nessa! Eu te amo muito, chêroleibe.

Aos meus amigos de longa data Marco Aurélio, Hudson Eduardo, Antônio Augusto, Túlio Alves, Rodrigo Magalhães, Camila Camargo, Ket e Fefezão. Muito obrigado por existirem na minha vida! Obrigado por todos os encontros, conversas, papos-furados, conselhos, tudo! Não existe um grupo de amizade melhor, vocês são incríveis.

Aos meus chefes engenheiros João Pedro Lottermann, Tiago de Bortoli e Bruno Arruda. Vocês são minha inspiração profissional, e se hoje eu sei alguma coisa sobre a indústria de engenharia é devido à vocês. Muito obrigado!

Agradeço aos membros da banca por acreditarem no potencial e sucesso deste trabalho. Em especial, agradeço à minha professora orientadora, Marcela Machado, por ter o empenho, confiança em minha capacidade e profissionalismo para me orientar neste trabalho, além de ser uma excelente conselheira diversas vezes ao longo de todo esse período! A todos os funcionários da UnB também deixo o meu agradecimento, em especial ao João Paulo que me ajudou muito quando precisei resolver diversos assuntos da Draco e do curso.

Por fim, a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho e a minha caminhada da vida, eu lhes agradeço de coração.

*“Run, rabbit run  
Dig that hole, forget the sun  
And when at last the work is done  
Don’t sit down, it’s time to dig another one”*  
*(Breathe (In the Air), 1973, escrito por Gilmour, D., Waters, R. e Wright, R.)*

# Resumo

Este trabalho apresenta a análise modal da asa de um protótipo de aeronave projetado pela equipe de Aerodesign da Universidade de Brasília. Inicialmente trata-se da modelagem em elementos finitos de estruturas simplificadas que compõe a aeronave, tal como a longarina principal da asa, propondo um método para determinação de rigidez flexural equivalente de vigas utilizando a formulação de Euler-Bernoulli. Segue-se modelando a estrutura completa da aeronave protótipo em *software* comercial ANSYS APDL. A etapa final do trabalho consiste na realização de um *Ground Vibration Testing* no protótipo, onde são caracterizados os parâmetros modais experimentalmente, realizando, por fim, a correlação e calibração entre o modelo teórico e experimental por meio da aplicação do critério de correlação modal M.A.C. (*Modal Assurance Criterion*) obtendo-se uma diferença percentual média de 5,8% entre as cinco primeiras frequências naturais experimentais e numéricas.

**Palavras-chaves:** Análise modal. Modelagem em elementos finitos. Ground Vibration Testing. Aerodesign.

# Abstract

This work presents the modal analysis of an aircraft wing prototype designed by the Aerodesign team of the University of Brasília. Initially, it is studied the finite element modeling of simplified structures that compose the aircraft, such as the main wing spar, proposing a method for determining the equivalent flexural stiffness of beams using the Euler-Bernoulli formulation. The complete structure of the prototype aircraft is then modeled on commercial ANSYS APDL software. The final step of the work consists in the realization of a Ground Vibration Testing in the prototype, where the experimental parameters are characterized, finally performing the correlation and calibration between the theoretical and experimental model by applying the criterion of modal correlation M.A.C. (Modal Assurance Criterion) resulting in an average percentual difference of 5,8% between the first five experimental and numerical natural frequencies.

**Key-words:** Modal analysis. Finite elements modelling. Ground Vibration Testing. Aerodesign.

# Lista de Figuras

Figura 1 – Aviões protótipos confeccionados para a XIX (a) e XX (b) Competição SAE Brasil Aerodesign . . . . .	1
Figura 2 – Detalhe na complexidade de modelagem de estruturas aeronáuticas. Fonte: HyperWorks Altair (2008) . . . . .	2
Figura 3 – A330 Multi Role Transport Tanker real e modelo experimental sensoriado. Fonte: EADS CASA (2007) . . . . .	3
Figura 4 – Ensaio GVT realizado em aeronave Airbus A350, com excitação harmônica de trem de pouso dianteiro (à esquerda) e asa (à direita). Fonte: Airbus (1999) . . . . .	4
Figura 5 – Visualização tridimensional da FRF para o sistema massa-mola amortecido . . . . .	12
Figura 6 – Excitação e leitura de resposta nos possíveis arranjos para um sistema de 2 GDL com amortecimento estrutural . . . . .	13
Figura 7 – Contorno Nyquist de resposta nos possíveis arranjos para um sistema de 2 GDL com amortecimento estrutural . . . . .	14
Figura 8 – Estado de pequenas deformações (acima) e grandes deformações (abaixo)	16
Figura 9 – Elemento de barra com dois nós e um grau de liberdade . . . . .	18
Figura 10 – <i>Setup</i> de sistema de medição para análise modal experimental. Fonte: adaptado de FU; HE (2001) . . . . .	23
Figura 11 – Detalhe no <i>setup</i> de <i>shaker/stinger/transdutor</i> (a) Vista explodida de montagem (b) Conjunto conectado a uma estrutura. Fonte: Avitabile (2017) . . . . .	24
Figura 12 – <i>Setup</i> experimental de retrovisor automotivo com excitação por martelo de impacto manual. Fonte: m+p International (2007) . . . . .	25
Figura 13 – Vista em corte de acelerômetro piezoelétrico de compressão. Fonte: adaptado MMF (2001) . . . . .	26
Figura 14 – Cenários itinerantes num ensaio com (a) <i>shaker</i> e (b) <i>martelo de impacto</i> . Fonte: AVITABILE (2017) . . . . .	27
Figura 15 – Extração de modos vibracionais a partir de ensaio com (a) <i>shaker</i> e (b) martelo de impacto. Fonte: adaptado ELKHATIB (2003) . . . . .	30



Figura 16 – Círculo Nyquist apresentando ângulos relevantes para a análise modal . . . . .	31
Figura 17 – Dimensões CP longarina principal . . . . .	37
Figura 18 – (a) <i>Set-up</i> experimental para ensaio de vibração transiente livre-livre no CP-01, (b) Fixação do acelerômetro em uma extremidade do CP-01, detalhe na utilização da espuma nas laterais do tubo para evitar rotação do tubo, (c) Placa de aquisição de dados modelo VIB-E-220, (d) Martelo de impacto (modelo 086E80) . . . . .	38
Figura 19 – FRF e fase para o CP-01 . . . . .	39
Figura 20 – Modos vibracionais numéricos do CP-01 em condição livre-livre . . . . .	41
Figura 21 – Comparação entre FRF experimental e numérica (elemento BEAM188) para o CP-01 . . . . .	42
Figura 22 – Dimensões CP longarina compósita . . . . .	43
Figura 23 – (a) e (b) <i>Set-up</i> experimental para ensaio de vibração transiente livre-livre no CP-02, (c) Fixação do acelerômetro em uma extremidade do CP-01, (d) Detalhe de fixação do suporte para o martelo de impacto (modelo 086E80) . . . . .	44
Figura 24 – FRF e fase para o CP-02 . . . . .	45
Figura 25 – Fluxograma de análise para atualização do modelo numérico e obtenção da rigidez equivalente para estruturas de vigas . . . . .	46
Figura 26 – Comparação entre FRF experimental e numérica (elemento BEAM188) para o CP-02 . . . . .	47
Figura 27 – Layout estrutural e detalhamento da asa projetada pela equipe Draco Volans Aerodesign . . . . .	48
Figura 28 – Dimensões da asa projetada pela equipe Draco Volans Aerodesign . . . . .	48
Figura 29 – Modelo EF finalizado para processamento no ANSYS . . . . .	51
Figura 30 – Convergência de malha do modelo Asa DV-2017 para todas as frequências numéricas . . . . .	52
Figura 32 – Montagem do experimento. (1) Sistema de aquisição ( <i>hardware</i> e LabVIEW), (2) Conjunto excitação ( <i>shaker</i> ) e resposta (acelerômetro e célula de carga), (3) Asa DV-2017 suspensa em espuma leve, (4) Amplificador de sinais TIRA vib BAA 60, (5) Gerador de sinais Minipa MFG-4205B . . . . .	55
Figura 33 – (a) Detalhe fixação do conjunto de excitação. (1) <i>Shaker</i> Eletrodinâmico TIRA vib 50018, (2) Stinger, (3) Célula de carga ICP® 208C01, (4) Acelerômetro ICP® 352C33. (b) Detalhe na suspensão da asa por meio de espuma leve . . . . .	55
Figura 34 – Placa de aquisição de dados National Instruments NI cDAQ-9174 utilizada no experimento . . . . .	56
Figura 35 – Malha nodal adotada para a estrutura da asa. (a) EasyMod (b) Experimental . . . . .	56
Figura 36 – Detalhe na fixação do <i>shaker</i> nos nós 1 (a) e 9 (b) . . . . .	57

Figura 37 – Diagrama de bloco da aquisição e filtragem dos dados (analisador FFT) no <i>software</i> LabVIEW . . . . .	58
Figura 38 – Configuração da filtragem de dados experimentais no <i>software</i> LabVIEW	58
Figura 39 – Fluxograma de pós-processamento utilizando a <i>toolbox</i> EasyMod . . . . .	59
Figura 40 – Funções de resposta em frequência (magnitude, fase e coerência) para excitação e resposta sob o nó 1 . . . . .	60
Figura 41 – Indicadores modais. (a) Excitação nó 1, (b) Excitação nó 9 . . . . .	61
Figura 42 – Visualização dos 7 primeiros modos vibracionais identificados pelo método Line-Fit . . . . .	62
Figura 43 – Matriz M.A.C. Experimental - Experimental da Asa DV-2017, comparação entre Circle-Fit e Line-Fit . . . . .	63
Figura 44 – Fluxograma de algoritmo de atualização de modelo proposto . . . . .	65
Figura 45 – Matriz M.A.C. Experimental - Numérico da Asa DV-2017 . . . . .	67
Figura 46 – Sistema massa-mola com vários graus de liberdade. Fonte: Rao (1986) . . . . .	79
Figura 47 – Fluxograma de para solução modal. Fonte: adaptado Hatch (2000) . . . . .	84
Figura 48 – Sistema massa-mola com 2 graus de liberdade . . . . .	88
Figura 49 – Excitação e leitura de resposta nos possíveis pontos para um sistema de 2GDL . . . . .	88
Figura 50 – Diagrama de corpo livre (a), diagrama de esforços internos (b) para um elemento de viga. Fonte: Rao (1986) . . . . .	90

# Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação de modelos de formulação para vigas. Fonte: adaptado SEON; BENAROYA; WEI (1999) . . . . .	15
Tabela 2 – Comparação de métodos de extração de autolavor implementados no ANSYS. Fonte: (ANSYS, 2009) . . . . .	21
Tabela 3 – Frequências de ressonância experimentais para o CP-01 . . . . .	39
Tabela 4 – Propriedades mecânicas alumínio 6063. Fonte: MATWEB (2018) . . . . .	40
Tabela 5 – Elemento finito analisado. Fonte: ANSYS (2009) . . . . .	40
Tabela 6 – Comparação entre frequências naturais para CP-01 obtidas experimentalmente e numericamente para o elemento BEAM188 . . . . .	41
Tabela 7 – Frequências de ressonância experimentais para o CP-02 . . . . .	44
Tabela 8 – Frequências de ressonância experimentais para o CP-02 . . . . .	46
Tabela 9 – Comparação de frequências experimentais e numéricas para o CP-02 . . . . .	46
Tabela 10 – Detalhamento de componentes do protótipo . . . . .	49
Tabela 11 – Propriedades dos materiais . . . . .	50
Tabela 12 – Seções dos componentes estruturais da asa modelada . . . . .	50
Tabela 13 – Comparação entre a massa real da estrutura e a massa obtida no modelo numérico . . . . .	51
Tabela 14 – Resultados da análise modal numérica (de 0 a 70 Hz) . . . . .	53
Tabela 15 – Intervalo de frequência analisado para extração de parâmetros modais . . . . .	60
Tabela 16 – Resumo dos resultados experimentais . . . . .	62
Tabela 17 – Seleção de parâmetros para atualização . . . . .	63
Tabela 18 – Discretização dos parâmetros para ajuste do modelo . . . . .	64
Tabela 19 – Resumo e comparação dos resultados experimentais com modelos numéricos antes e depois da atualização . . . . .	67
Tabela 20 – Valores dos parâmetros de ajuste antes e depois do processo iterativo . . . . .	68
Tabela 21 – Propriedades de resposta para FRF. Fonte: Ewins (1984) . . . . .	87
Tabela 22 – Condições de contorno comuns para vibração lateral de vigas. Fonte: Rao (1986) . . . . .	93

# Lista de abreviaturas e siglas

SGDC-1	Satélite Geoestacionário de Defesa e Comunicações Estratégicas - 1
DVXFW-I	Draco Volans Experimental Flying Wing - I
IGES	<i>Initial Graphics Exchange Specification</i>
APDL	<i>ANSYS Parametric Design Language</i>
FRF	Função de Resposta em Frequência
SAE	<i>Society of Automotive Engineers</i>
MEF	<i>Método dos Elementos Finitos</i>
MGDL	Múltiplos Graus de Liberdade
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i>
AME	Análise Modal Experimental
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
GVT	<i>Ground Vibration Testing</i>
UAV	<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>
TPP	Trem de Pouso Principal
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
CAD	<i>Computer Aided Design</i>
GDL	Grau(s) de Liberdade
CC	Condição de Contorno
OD	<i>Outside Diameter</i>

ID	<i>Inside Diameter</i>
CP	Corpo de Prova
RE	Raio Externo
RI	Raio Interno

# Lista de símbolos

## Símbolos Latinos

$[M]$	Matriz de massa
$[C]$	Matriz de amortecimento
$[K]$	Matriz de rigidez
$\{F\}$	Vetor de forçamentos
$\{\ddot{x}\}$	Coordenada para aceleração
$\{\dot{x}\}$	Coordenada para velocidade
$\{x\}$	Coordenada para o deslocamento
$t$	Tempo
$T(t)$	Função de resposta no tempo
$n$	Número de graus de liberdade
$\{X\}$	Vetor modal
$\{q\}$	Vetor de coordenadas normais do sistema
$\{\bar{F}\}$	Vetor força pré-multiplicado pela matriz modal transposta
$[Z(\omega)]$	Matriz de rigidez dinâmica
$[Y(\omega)]$	Matriz de mobilidade
$[A(\omega)]$	Matriz de aceleração ou inertância
$i$	Número imaginário
$[D]$	Matriz de amortecimento estrutural (Seção 2.3.1)
$[D]$	Matriz de elasticidade do material (Seção 2.5.1.2)
$E$	Módulo de elasticidade

$I$	Momento de inércia da seção transversal
$l$	Comprimento da viga
$A$	Área da seção transversal
$W(x)$	Função característica (ou de modo normal) de Euler-Bernoulli
$u(x)$	Função do grau de liberdade do nó
$a$	Constante polinomial da expansão de Taylor
$N(x)$	Função de forma do elemento finito
$[B]$	Matriz de deformação-deslocamento
$G$	Módulo de cisalhamento
$H$	Termo da matriz de receptância
$[ORT]$	Matriz de relação de ortogonalidade
$[MAC]$	Matriz do critério de garantia modal (MAC)
$[I]$	Matriz identidade

### Símbolos Gregos

$\Delta$	Determinante de uma matriz
$\omega$	Frequência natural
$\phi$	Componente da matriz modal normalizada pela matriz de massa (Seção <a href="#">A.5.1</a> )
$\gamma$	Constante pertencente ao conjunto dos Reais ( $\mathbb{R}$ )
$\{\Phi\}$	Vetor modal normalizado com base na matriz de massa
$[\Phi]$	Matriz modal normalizada com base na matriz de massa
$[\alpha(\omega)]$	Matriz de receptância
$\lambda$	Autovalor associado à frequência natural para cada modo vibracional
$\eta$	Fator de amortecimento estrutural
$\rho$	Massa específica
$\beta$	Constante da função característica de vigas de Euler-Bernoulli
$\nu$	Coefficiente de Poisson

## Subscritos

$i$	Componente de linha da matriz
$j$	Componente de coluna da matriz
$r$	Modo vibracional $r$ -ésimo
$s$	Modo vibracional $s$ -ésimo
$xy$	Plano de simetria $xy$
$xz$	Plano de simetria $xz$
$yz$	Plano de simetria $yz$

## Sobrescritos

T	Matriz transposta
AX	Análise - experimental
XX	Experimental - experimental

## Operadores

$[diag(\cdot)]$	Matriz diagonal
$\partial(\cdot)$	Derivada parcial
$f(\cdot)$	Função
$d(\cdot)$	Derivada



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Contextualização e motivação</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Revisão bibliográfica</b>	<b>4</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b>	<b>6</b>
1.3.1	Objetivos Gerais	6
1.3.2	Objetivos Específicos	6
<b>1.4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>7</b>
<b>1.5</b>	<b>Organização do trabalho</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>9</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelagem de sistemas MGDL não amortecidos</b>	<b>9</b>
<b>2.3</b>	<b>Modelagem de sistemas MGDL amortecidos</b>	<b>9</b>
2.3.1	FRF de sistemas MGDL modelados com amortecimento estrutural	10
2.3.2	Propriedades da FRF de sistemas MGDL amortecidos	11
<b>2.4</b>	<b>Modelagem de sistemas contínuos</b>	<b>14</b>
2.4.1	Vibração lateral de vigas	15
2.4.1.1	Hipóteses da teoria de vigas de Euler-Bernoulli	15
2.4.1.2	Formulação da teoria de vigas de Euler-Bernoulli para problemas dinâmicos	16
<b>2.5</b>	<b>Método dos elementos finitos para problemas dinâmicos</b>	<b>17</b>
2.5.1	Teoria geral	17
2.5.1.1	Nó, elemento e função de forma	17
2.5.1.2	Equação do movimento em MEF	19
2.5.2	Modelagem dinâmica estrutural com o ANSYS Mechanical	20
<b>3</b>	<b>ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL</b>	<b>22</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>22</b>
<b>3.2</b>	<b>Sistemas de medição</b>	<b>22</b>
3.2.1	Sistemas de excitação	23
3.2.2	Transdutores	25

3.2.3	Principais diferenças entre ensaios com <i>shaker</i> e martelo de impacto . . . . .	26
<b>3.3</b>	<b>Preparação do ensaio e testes preliminares . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>3.4</b>	<b>Extração de parâmetros modais . . . . .</b>	<b>28</b>
3.4.1	Composição dos modos vibracionais . . . . .	29
3.4.2	Métodos de extração de parâmetros modais . . . . .	30
<b>3.5</b>	<b>Correlação entre modelo teórico e experimental . . . . .</b>	<b>33</b>
3.5.1	Ortogonalidade de vetor modal . . . . .	33
3.5.2	Consistência de vetor modal . . . . .	34
3.5.3	Comparação direta . . . . .	34
<b>3.6</b>	<b><i>Toolbox EasyMod</i> para análise modal experimental . . . . .</b>	<b>35</b>
	<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>4.2</b>	<b>Estudo de caso: estruturas de longarina tubular . . . . .</b>	<b>36</b>
4.2.1	CP Alumínio 6063 - CP-01 . . . . .	37
4.2.2	CP compósito - CP-02 . . . . .	43
<b>4.3</b>	<b>Modelagem da asa protótipo . . . . .</b>	<b>47</b>
4.3.1	Detalhes construtivos e composição da estrutura . . . . .	48
4.3.2	Modelo numérico desenvolvido . . . . .	49
4.3.2.1	Pré-processamento do modelo . . . . .	49
4.3.2.2	Resultados numéricos . . . . .	52
<b>4.4</b>	<b>Análise experimental com <i>Ground Vibration Testing</i> . . . . .</b>	<b>53</b>
4.4.1	<i>Setup</i> do experimento . . . . .	53
4.4.2	Procedimento . . . . .	55
4.4.3	Aquisição de dados . . . . .	57
4.4.4	Pós-processamento dos dados . . . . .	59
4.4.5	Resultados experimentais . . . . .	59
<b>4.5</b>	<b>Ajuste do modelo numérico . . . . .</b>	<b>63</b>
4.5.1	Algoritmo implementado . . . . .	64
4.5.2	Resultados do modelo ajustado . . . . .	66
4.5.3	Sugestões de modificações para os próximos modelos EF . . . . .	69
	<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>5.1</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>5.2</b>	<b>Propostas para trabalhos futuros . . . . .</b>	<b>72</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>74</b>

<b>APÊNDICES</b>	<b>78</b>
<b>APÊNDICE A – MODELAGEM DE SISTEMAS MGD L NÃO AMORTECIDOS</b>	<b>79</b>
A.1	Abordagem modal: o problema do autovalor . . . . . 81
A.2	Ortogonalidade ponderada e normalização dos vetores modais . . . . . 82
A.3	Vibração livre de sistemas não amortecidos . . . . . 83
A.4	Desacoplado equações de movimento com coordenadas normais . . . . . 84
A.5	Função de resposta em frequência de sistemas MGD L não-amortecidos 85
A.5.1	Composição de FRF utilizando parâmetros modais . . . . . 87
A.5.2	Fenômeno de anti-ressonância e mínimo de uma FRF . . . . . 87
<b>APÊNDICE B – TEORIA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI</b>	<b>90</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>94</b>
<b>ANEXO A – EQUIPAMENTOS EXPERIMENTAIS</b>	<b>95</b>
A.1	Martelo de Impacto ICP® 086E80 . . . . . 95
A.2	Acelerômetro ICP® 352A21 . . . . . 96
A.3	Acelerômetro ICP® 352C33 . . . . . 97
A.4	Célula de carga ICP® 208C01 . . . . . 98

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização e motivação

A competição SAE Aerodesign (*Society Automotive Engineers*) estimula estudantes de graduação e pós-graduação a desenvolver uma aeronave rádio-controlada de transporte de carga em escala reduzida, com o objetivo de completar uma missão de voo pré-estabelecida pelo regulamento da competição, minimizando o peso vazio e maximizando a carga paga transportada, cujo valor pode atingir até 7 vezes o peso vazio. Trata-se, portanto, de um projeto que é levado ao limite da eficiência estrutural. A figura 1 mostra dois aviões protótipos da equipe Draco Volans Aerodesign em operação durante a XIX e XX Competição SAE Brasil Aerodesign, respectivamente.



(a)

(b)

Figura 1 – Aviões protótipos confeccionados para a XIX (a) e XX (b) Competição SAE Brasil Aerodesign

As características das aeronaves SAE Aerodesign de baixa massa, devido à utilização de materiais de alta rigidez específica, e estrutura interna otimizada para solicitações sob condições específicas de voo (estrutura modelada como flexível) tornam a aeronave mais susceptível a fenômenos aeroelásticos ou vibrações indesejadas que possam alterar sua estabilidade, limitando o envelope de operação (BISPLINGHOFF, 1996). Existem vários casos registrados em competições passadas onde os fenômenos aeroelásticos foram observados, resultando ou em instabilidade de controle ou em colapso total da estrutura da aeronave em pleno voo, dentre eles a aeronave da equipe Leviatã (LEVIATÃ, 2017) e

da equipe AeroRio ([AERORIO, 2012](#)), demonstrando, portanto, a ocorrência desses casos em aeronaves desse porte.

Para o correto entendimento da resposta às solicitações dinâmicas, além de procurar ratificar segurança ao projeto, seja a nível do Aerodesign ou industrial, é necessário ter conhecimento dos parâmetros modais da estrutura, tais como frequências naturais, fatores de amortecimento e modos vibracionais. Esses parâmetros são obtidos a partir de metodologias de análise dinâmica estrutural. Dessa forma, a análise modal entra como ferramenta essencial no procedimento de determinação desses parâmetros, baseando-se no fato de que a resposta de vibração de um sistema dinâmico linear invariante no tempo pode ser expressa como a combinação linear de um conjunto de movimentos harmônicos simples denominados modos de vibração, que são determinados a partir de propriedades físicas inerentes a um sistema específico e suas distribuições espaciais na geometria ([FU; HE, 2001](#)).

A análise modal é realizada por meio de abordagens teóricas (analíticas ou numéricas) e experimentais. A abordagem teórica fundamenta-se na descrição de um modelo físico que aproxima-se ao máximo da estrutura real, a qual é composta por um sistema dinâmico com massa, rigidez e amortecimento. Este pode ser tratado por meio de um sistema contínuo (formulado por equações diferenciais parciais) ou em termos de suas matrizes de distribuições espaciais. A solução do problema dinâmico pode vir por meio de métodos numéricos, em particular o método de elementos finitos ([PETYT, 2010](#)), que será utilizado no trabalho.

Nos últimos vinte anos avançou-se consideravelmente os estudos e aplicações em relação aos métodos numéricos. Por meio dessa metodologia, o problema possui um domínio finito interconectado, com solução dependente do nível de discretização adotado ([FILHO, 2007](#)). A vantagem da utilização dessa abordagem, comparativamente a métodos analíticos, encontra-se no fato de possibilitar soluções de problemas dinâmicos ou estáticos, lineares ou não-lineares, de sistemas com configurações complexas, tais como o da figura 2, onde diversos tipos de elementos e conexões estruturais devem ser implementadas. Assim, é possível otimizar cada vez mais o dimensionamento estrutural devido à proximidade entre o modelo teórico e a estrutura real.

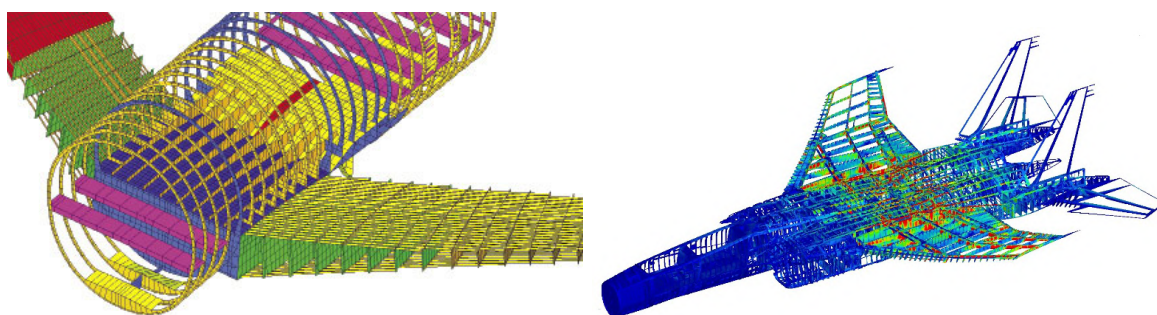


Figura 2 – Detalhe na complexidade de modelagem de estruturas aeronáuticas. Fonte: HyperWorks Altair (2008)

Adicionalmente, diversas aplicações de análises dinâmicas procuram obter resultados satisfatórios a partir de modelos numéricos para estruturas, derivados de modelagem em elementos finitos. O modelo resultante é essencial para aplicações em análise de sensibilidade à variação de parâmetros físicos e previsão de modificações estruturais localizadas. Entretanto, devido à complexidade ou não-linearidades da estrutura é um erro considerar que um modelo EF (Elementos Finitos) seja totalmente fiel e representativo, desconsiderando a necessidade de se correlacionar com os resultados experimentais, objetivando calibrá-lo e validá-lo. [ANSYS \(2009\)](#) destaca diversos fatores que podem ser indicativos responsáveis pelo erro na previsão da resposta dinâmica, dentre eles:

- Falha na estimativa de propriedade dos materiais;
- Imprecisão na modelagem da estrutura;
- Má escolha do tipo de elemento a ser utilizado para cada componente, além da quantidade insuficiente de nós para convergência do resultado;
- Complexidade elevada dos componentes estruturais, principalmente no que tange à modelagem de juntas e conexões.

Assim, as análises experimentais são utilizadas para corrigir o modelo EF, caso discrepâncias ocorram entre eles. Em relação à abordagem experimental, o rápido desenvolvimento tecnológico nas últimas décadas da aquisição e processamento de dados, em especial com o advento do analisador digital de espectro FFT, tornou possível determinar os parâmetros modais a partir dessa metodologia, como apresenta [SCHWARZ; RICHARDSON \(1999\)](#). A vantagem de se realizar experimentos está no fato em que a qualidade dos dados obtida geralmente é alta, considerando que a medição é feita em protótipos que descrevem fielmente as características construtivas e físicas do conjunto que será utilizado em serviço. A figura 3 apresenta um exemplo de modelo experimental desenvolvido para realizar ensaios dinâmicos em um *Airbus A330 Multi Role Transport Tanker* (MRTT), onde foi utilizado um protótipo real como base para os testes.

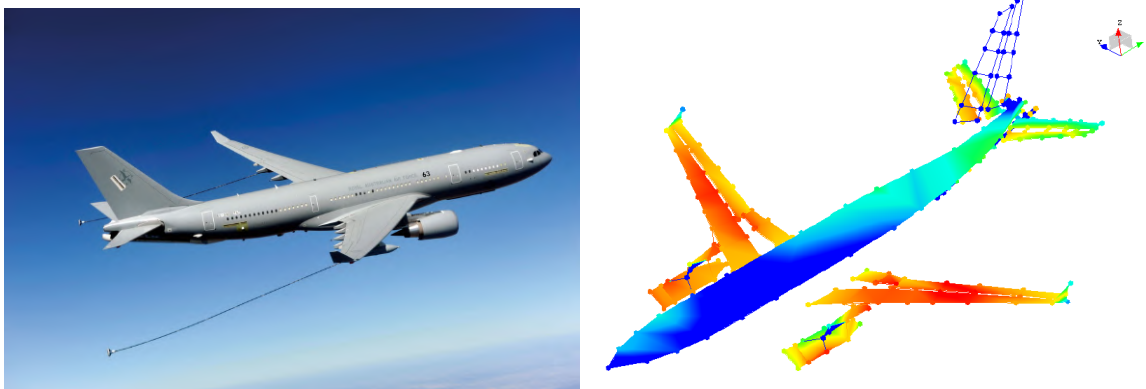


Figura 3 – A330 Multi Role Transport Tanker real e modelo experimental sensoriado.  
Fonte: EADS CASA (2007)

Um tipo de ensaio de análise modal experimental é o *Ground Vibration Testing* (GVT), muito utilizado na indústria aeronáutica em etapas finais do desenvolvimento e certificação do projeto (figura 4), que consiste em determinar os modos vibracionais de baixas frequências da estrutura completa, objetivando validar e aprimorar a modelagem dinâmica CAE, por meio da excitação da estrutura (harmônica, sinais de impulso ou aleatórios) em pontos específicos, extraindo funções de resposta em frequência (FRF) de uma malha sensorial espalhada sobre a superfície (PEETERS; CLIMENT, 2008).



Figura 4 – Ensaio GVT realizado em aeronave Airbus A350, com excitação harmônica de trem de pouso dianteiro (à esquerda) e asa (à direita). Fonte: Airbus (1999)

Com o intuito de conhecer melhor o comportamento do avião submetido a solicitações dinâmicas, criar um modelo numérico que descreva fielmente os parâmetros modais da estrutura é tarefa de suma importância no projeto estrutural, garantindo consistência nos dados obtidos para serem utilizados em análises aeroelásticas futuras.

## 1.2 Revisão bibliográfica

Até aproximadamente 40 anos atrás, o estudo de vibrações em estruturas complexas era feito de maneira a simplificar o modelo por poucos graus de liberdade, o que limitava a avaliação à baixas frequências de excitação. Entretanto, com o avanço da tecnologia de processamento de dados e consequente implementação de métodos numéricos para análise foi, então, possível solucionar problemas reais e complexos de engenharia que dificilmente podem ser expressos por meio de solução analítica (RAO, 1986).

Diversas são as literaturas que fornecem o embasamento conceitual e a teoria experimental para uma análise modal estrutural, dentre elas FU; HE (2001), que exemplifica experimentos de análise modal em estruturas reais, além de apresentar configuração de ensaios. AVITABILE (2017) trata sobre a abordagem experimental passando por conceitos básicos de definição de espaço amostral de coleta de dados (posicionamento sensorial), como se operam os dados coletados, como extrair modos vibracionais de configurações complexas.

A modelagem dinâmica de estruturas em elementos finitos e consequente análise experimental são assuntos de interesse em diversos setores industriais e na academia, principalmente no que tange à correlação de modelos. No Oriente Médio, [SALEHI; ZIAEIRAD \(2007\)](#) avaliaram por meio de ensaios *Ground Vibration Testing* (GVT) a estrutura de um modelo de avião esquemático, objetivando comparar métodos distintos de excitação (aleatório, transiente e senoidal), obtendo ao final do artigo uma excelente correlação entre os métodos utilizados. Objetivando estabelecer uma metodologia de projeto de um GVT, [SIMES \(2015\)](#) apresenta em seu trabalho o processo de análise modal em uma estrutura de um *Unmanned Aerial Vehicle* (UAV) de pequeno porte pela abordagem numérica (modelo EF) e experimental (excitação por impacto e harmônica), realizando, posteriormente a calibração do modelo numérico com diversos parâmetros empregados, dentre eles inércias (flexão e torção), coeficiente de amortecimento estrutural, rigidez equivalente da asa, massa específica, elementos de massa localizada, dentre outros; obtendo excelentes resultados para modos vibracionais de baixas frequências, sendo esses de importância maior para a caracterização dinâmica da estrutura.

[GUPTA; SEILER \(2016\)](#), apresentam em seu trabalho os resultados para ensaios GVT realizado em dois modelos de asa voadora UAV flexível, onde excitaram-se as estruturas suspensas (condição livre-livre) por meio de um *shaker* eletromagnético, medindo-se a resposta no tempo por meio de uma malha sensorial instalada no extradorso da asa, obtendo-se, com o pós-processamento dos dados, as frequências naturais e os modos vibracionais da estrutura. Concluiu-se desse trabalho que a duração do experimento para determinada faixa de frequência de excitação afeta negativamente o ruído nos modos identificados, especialmente para modos de baixa frequência. Além disso, mostrou-se que modos de torção são de difícil identificação e que, no geral, para se identificar com clareza os modos vibracionais deve-se escolher o local de excitação com precisão. Adicionalmente, pequenas mudanças nos procedimentos experimentais, em específico alterar o tipo de fixação do transdutor de forças à estrutura, influenciam na identificação dos parâmetros modais.

[DOMINGUES et al. \(2017\)](#) investigaram os parâmetros modais de um painel HexWeb HIII *honeycomb* em alumínio, faceado com placas de alumínio 2024 T3 utilizada como componente estrutural do Satélite Geoestacionário de Defesa e Comunicações Estratégicas - 1 (SGDC-1) por meio de modelagem numérica em elementos finitos, considerando propriedades ortotrópicas para o material de núcleo e isotrópicas para o de face. Estudou-se a influência da utilização de elementos de casca (quadrilateral linear) e sólido (hexaédrico linear) objetivando-se verificar convergência de resultados. Por fim validou-se e calibrou-se o referente modelo por meio de um ensaio experimental de vibração transiente (martelo de impacto), observando-se que o elemento de casca foi o mais adequado para a modelagem dos painéis. Em contrapartida, [MARTINS \(2008\)](#) apresenta em seu trabalho a modelagem dinâmica do satélite ITASAT, composto por placas-sanduíche com núcleo de colméia e faces isotrópicas, onde utilizou-se elementos sólidos (hexaédrico linear)



para o primeiro e elementos de placa (quadrilateral linear) para o segundo. No trabalho, analisou-se a junção das placas (juntas T, coladas e aparafusadas) e comparou-se resultados para análise de estrutura completa e subestruturada (Síntese Modal de Componentes) obtendo-se boa proximidade entre os resultados. Outros autores que tratam sobre o assunto são [PICKREL \(2002\)](#), [OLSEN; WALTERS \(1977\)](#), [JIA \(2014\)](#), [PEETERS; CLIMENT \(2008\)](#), [LUBRINA et al. \(2014\)](#), [SANTOS \(2003\)](#).

No âmbito do Aerodesign, apesar das missões de voo serem de curta duração e baixa velocidade de operação, o conhecimento do comportamento dinâmico da aeronave é fundamental para garantir a qualidade e confiabilidade do projeto, devido à alta eficiência estrutural empregada, que afeta diretamente a rigidez global consequente da baixa massa dos componentes e *layout* otimizado para situações específicas de solicitação. Os autores [ASSIS et al. \(2015\)](#) investigaram os parâmetros modais de uma asa de aeronave protótipo, por meio de um modelo EF, considerando elementos de massa localizada, placas, rígidos e barra no modelo, e posterior validação experimental (GVT), obtendo-se boa concordância entre os modelos. Aplicaram-se os dados em análises de aeroelasticidade dinâmica, cuja importância é ímpar para determinar as velocidades críticas de operação da aeronave.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivos Gerais

O presente trabalho tem como objetivo determinar os parâmetros modais a partir da modelagem numérica em elementos finitos da estrutura da asa do avião protótipo, projetado pela equipe Draco Volans Aerodesign para a XIX Competição SAE Brasil Aerodesign. Além disso, pretende-se realizar uma análise experimental em um protótipo confeccionado pela equipe, por meio de um *Ground Vibration Testing*, a fim de calibrar e validar o modelo numérico desenvolvido.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Ao final do Projeto de Graduação, almeja-se ter em mãos uma metodologia consolidada para realizar análises dinâmicas estruturais para os projetos futuros da equipe, visando estender o conhecimento sobre o comportamento da estrutura da aeronave. Assim os objetivos específicos são:

- Realizar a análise modal numérica do avião protótipo utilizando o ANSYS;
- Realizar um ensaio experimental do avião protótipo para a obtenção dos parâmetros modais;
- Calibrar o modelo numérico utilizando os dados experimentais.

## 1.4 Metodologia

A teoria analítica por traz da obtenção de FRFs é aplicada e propõe-se um método para obter a rigidez equivalente de vigas por meio de um estudo de caso de um componente com geometria simples que é utilizado como parte estrutural do avião, a longarina principal. Nesse estudo, os parâmetros modais de modo vibracional e frequência natural inerentes ao componente são avaliados por meio de abordagens analíticas, numéricas (modelo EF) e ensaios experimentais por excitação transiente livre-livre, comparando-se resultados numéricos para diferentes tipos de elementos finitos e, por fim, determinando-se um valor de rigidez equivalente para o referente componente.

Em relação ao avião protótipo, são obtidas as frequências naturais e as formas modais para os primeiros modos vibracionais do modelo, utilizando uma geometria CAD que contém os principais elementos que influenciam na rigidez global da estrutura modelada, além de massas concentradas de elementos distribuídos, dentre outros componentes.

Um ensaio *Ground Vibration Testing* do avião protótipo é então elaborado e discutido, objetivando determinar experimentalmente os parâmetros modais e realizar um ajuste no modelo EF desenvolvido, calibrando a modelagem por meio da equivalência entre frequências naturais numéricas e experimentais. Verifica-se, posteriormente, a correlação modal entre modelos teóricos e experimentais utilizando-se o critério M.A.C. (*Modal Assurance Criterion*).

## 1.5 Organização do trabalho

O presente trabalho é dividido em cinco capítulos, cada qual com seus temas, especificidades e seções. O Capítulo 1 apresenta uma introdução ao conceito da Competição SAE Aerodesign, destacando a importância do conhecimento de parâmetros modais em aeronaves cargueiras de pequena escala, apresentando também o tripé de análise para validação de modelos e obtenção desses parâmetros, em destaque para o estado-da-arte do ensaio *Ground Vibration Testing* em aeronaves. Além disso, realiza-se uma breve revisão bibliográfica acerca do tema análise modal numérica e experimental em estruturas, escopo de interesse deste trabalho. O capítulo se encerra com os objetivos deste texto. O Capítulo 2 é destinado à fundamentação teórica do tema. Neste, expõe-se a modelagem dinâmica para obtenção de modos vibracionais e frequências naturais de sistemas MGDNL não-amortecidos e com amortecimento estrutural, apresentando-se os conceitos de formação de uma FRF, no caso para composição da matriz de receptância, dentre outras particularidades. Demonstra-se o equacionamento para vibração lateral de vigas contínuas seguindo a teoria de Euler-Bernoulli, fazendo um paralelo entre esse tipo de sistema e o discretizado. Por fim, o tema de "método de elementos finitos para problemas dinâmicos" é estudado, apresentando a teoria geral para solução de problemas dinâmicos por meio do

referente método variacional, tratando-se também sobre detalhes de modelagem de estruturas utilizando o *software ANSYS Mechanical APDL*, fundamentando-se em [ANSYS, 2009](#). No Capítulo 3 conceitua-se os procedimentos de uma análise modal experimental, desde a preparação do ensaio até a correlação entre o modelo teórico e experimental, baseando-se em [EWINS, 1984](#) e [AVITABILE, 2017](#). É introduzida também a ferramenta de extração de parâmetros modais EasyMod. O Capítulo 4 traz os resultados obtidos nesse trabalho, inicialmente apresentando o estudo de caso para determinação das FRF de estruturas que compõe a aeronave, por meio de abordagens experimentais e numéricas, propondo-se um algoritmo para determinação de rigidez equivalente de estruturas que comportam-se como vigas. Expõe-se também a modelagem em elementos finitos da asa da aeronave protótipo. Em seguida, o ensaio experimental *Ground Vibration Testing* é realizado, apresentando-se os procedimentos e resultados obtidos. Finalmente, o modelo numérico é ajustado com relação aos resultados experimentais, conferindo-se, então, a correlação entre os modos por meio do uso da matriz M.A.C. O Capítulo 5 é reservado às conclusões e proposições de trabalhos futuros.

## 2 Fundamentação teórica

### 2.1 Introdução

Este capítulo apresenta os conceitos básicos de vibrações de sistemas discretos com vários graus de liberdade, tanto para configurações não-amortecidas, quanto para amortecidas, onde, especificamente, o mecanismo de amortecimento estrutural é analisado. Além disso, são apresentadas as formulações dos métodos de extração modal *Circle-Fit* e *Line-Fit*. Apresenta-se também a modelagem de sistemas contínuos, formulando-se a vibração lateral de vigas pela teoria de Euler-Bernoulli para diversas condições de contorno. A teoria geral de elementos finitos para solução de problemas dinâmicos é também introduzida, abordando detalhes acerca da modelagem de estruturas utilizando o software ANSYS *Mechanical* APDL.

### 2.2 Modelagem de sistemas MGDL não amortecidos

Uma revisão completa da literatura de modelagem de sistemas MGDL é apresentada no Apêndice A, baseando-se em Rao (1986). São propostos o problema do autovalor (abordagem modal), a conceituação da ortogonalidade ponderada e normalização dos vetores modais, a resposta de vibração livre de sistemas não amortecidos, o processo de desacoplamento das equações de movimento com coordenadas normais e, por fim, a caracterização de Funções de Resposta em Frequência (FRF) utilizando tanto parâmetros físicos de resposta, quanto os parâmetros modais. Discute-se também as formas de representação de uma FRF.

### 2.3 Modelagem de sistemas MGDL amortecidos

Em estruturas reais sempre existe algum processo de dissipação de energia que atenua a amplitude da vibração livre do sistema, sendo então necessário introduzir o amortecimento no modelo, verificando o efeito nas frequências naturais complexas (autovalores) e em vetores modais (autovetores), como mostra INMAN (2001).

Para descrever as formas de amortecimento de uma estrutura são necessários diversos mecanismos de dissipação de energia, pois muitos sistemas exibem características de amortecimento que resultam na combinação desses mecanismos dissipativos (ADHIKARI, 2000). Os mais comuns para análise são o amortecimento viscoso, estrutural, de Coulomb (atrito seco) e histérico; sendo que nesse trabalho será abordado o estrutural, devido à constituição física do problema a ser estudado.

### 2.3.1 FRF de sistemas MGDL modelados com amortecimento estrutural

A equação do movimento generalizada para se tratar da modelagem de amortecimento estrutural em um sistema MGDL é dada pela equação 2.1.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K + iD]\{x\} = \{F\} \quad (2.1)$$

Onde  $[D]$  é a matriz de amortecimento estrutural, de ordem  $n \times n$ . A solução da equação do movimento é dada por:

$$\{x\} = \{X\} \sin(\lambda t) \quad (2.2)$$

Substituindo-se 2.2 em 2.1 pode-se obter as matrizes de autovalor e autovetores associados ao sistema. O autovalor  $\lambda$  assume a forma de:

$$\lambda_r = \pm \omega_r \sqrt{1 + \eta_r} \quad (2.3)$$

Onde tem-se que  $\omega_r$  é a frequência natural e  $\eta_r$  é o fator de perda do amortecimento estrutural, referente ao  $r$ -ésimo modo. O parâmetro  $\eta$  pode variar de  $2 \times 10^{-5}$  para alumínio puro a 1,0 para borracha dura, como apresenta (BEARDS, 1983).

A etapa seguinte é diagonalizar e normalizar pela matriz de massa as matrizes do sistema, processo semelhante ao desenvolvido anteriormente para sistemas não-amortecidos.

Objetiva-se, então, determinar a matriz de receptância do sistema, com base na entrada de um forçamento harmônico, dado pela equação A.34. Pode-se demonstrar que:

$$\{X\} = ([K] + i[D] - \omega^2[M])^{-1}\{F\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (2.4)$$

Sendo que, agora, a matriz de rigidez dinâmica é dada por:

$$([K] + i[D] - \omega^2[M]) = [\alpha(\omega)]^{-1} \quad (2.5)$$

Multiplicando-se a equação 2.5 pela a matriz modal normalizada pela massa  $[\Phi]$  e pré-multiplicando-se pela transposta da mesma matriz, obtém-se que:

$$[\Phi]^T([K] + i[D] - \omega^2[M])[\Phi] = [\Phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi] \quad (2.6)$$

Onde desenvolve-se a equação 2.6 para se determinar a matriz de receptância:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi][diag(\lambda_r^2 - \omega^2)]^{-1}[\Phi]^T \quad (2.7)$$

A matriz FRF da receptância  $[\alpha(\omega)]$  mantém a propriedade de simetria e o princípio da reciprocidade, de modo que  $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$ . Pode-se, por fim, reescrever a receptância na forma de um somatório, conforme 2.8.

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} \quad (2.8)$$

### 2.3.2 Propriedades da FRF de sistemas MGDL amortecidos

Assim como para o caso do sistema MGDL não-amortecido, é possível plotar a FRF de diferentes formas gráficas, objetivando visualizar completamente suas características. Novamente, utilizou-se o exemplo massa-mola descrito na seção A.5.2 do Apêndice, com as mesmas rigidezes e massas, entretanto agora adicionando o fator de amortecimento estrutural para cada elemento, definido como o seguinte vetor:

$$\eta = [0,025 \quad 0,025] \quad (2.9)$$

Como a receptância FRF é uma função complexa da frequência, é impossível que se represente-a totalmente utilizando-se somente coordenadas bidimensionais. A representação completa é feita por meio de uma curva tridimensional que relaciona a parte real e imaginária com a frequência, cuja reprodução é apresentada na figura 5. Entretanto, essa visualização tridimensional é difícil para ser utilizada na análise modal, pelo fato de que características como ressonância precisam ser visualmente observáveis. A projeção nos planos elucidam diferentes aspectos da FRF, como será observado a seguir.

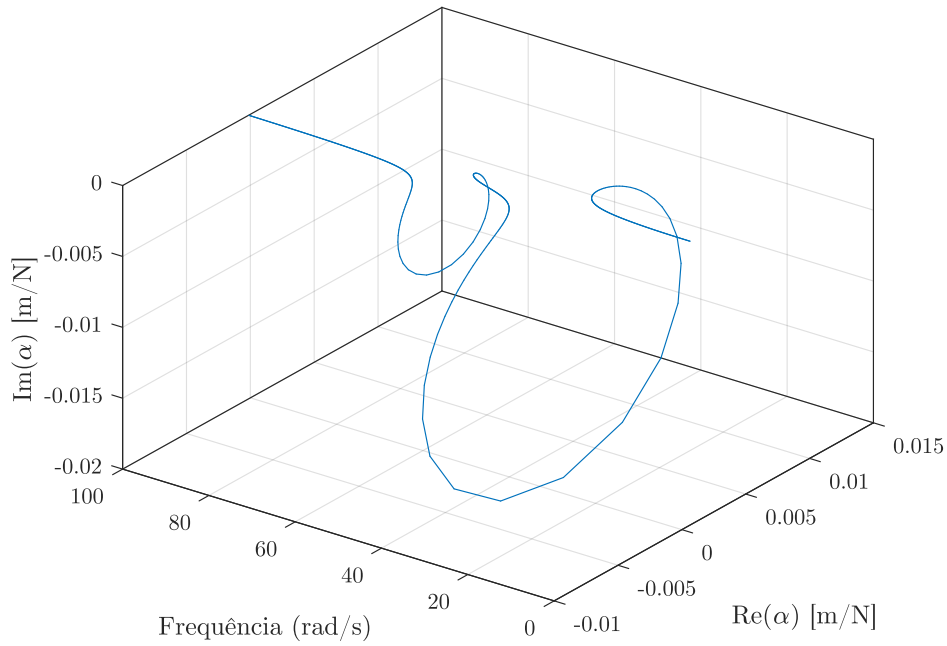


Figura 5 – Visualização tridimensional da FRF para o sistema massa-mola amortecido

É importante ressaltar que essa representação é válida também para sistemas não-amortecidos, entretanto, quando analisa-se sistemas amortecidos, é possível obter outras visualizações gráficas, tal como o contorno Nyquist (projeção no plano  $Re(\alpha) - Im(\alpha)$ ), impossível para o outro sistema devido ao valor nulo da parte imaginária da FRF.

Pela visualização dos eixos da frequência e  $Re(\alpha)$  pode-se observar os resultados de amplitude de deslocamento para a FRF de receptância. A figura 6 apresenta-os, considerando diferentes arranjos de pontos de medição e pontos de excitação, de forma a completar a matriz de receptância. Plotou-se também a fase do deslocamento, função que é intrínseca à FRF do sistema.

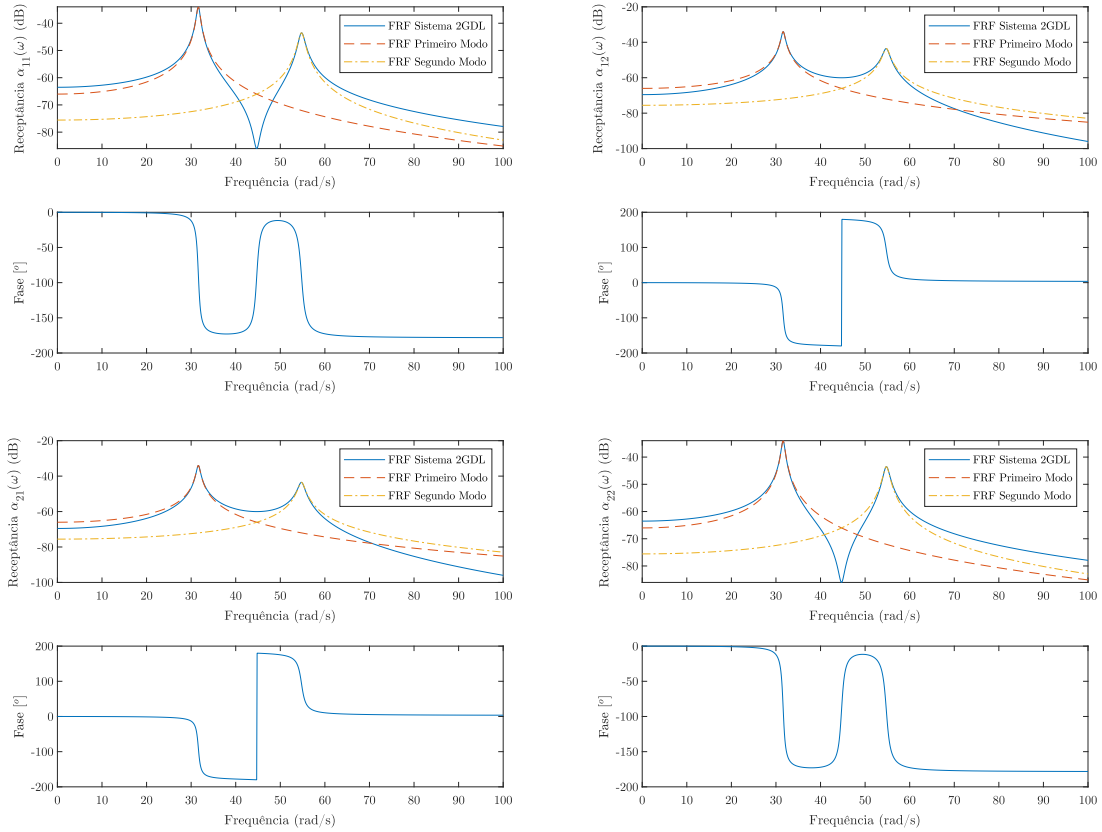


Figura 6 – Excitação e leitura de resposta nos possíveis arranjos para um sistema de 2 GDL com amortecimento estrutural

A partir da figura 6 observa-se uma interessante relação entre a magnitude da FRF e a fase do sistema: quando atinge-se um pico de ressonância a fase decresce em  $180^\circ$  e, quando atinge-se uma antirressonância, cresce em  $180^\circ$ . Para o caso de um mínimo de FRF, observa-se que há uma inversão no sinal da fase, como demonstrado por EWINS (1984). A reciprocidade é válida também para a função de fase.

Outro fato de importância é a influência do amortecimento na atenuação do pico de magnitude de ressonância e na transição suavizada da função de fase, que para o caso não-amortecido apresenta uma descontinuidade, devido à singularidade na determinação da fase. Com o aumento do fator de amortecimento estrutural esses fenômenos são intensificados (INMAN, 2001).

Plotou-se, na figura 7, a representação de Nyquist da FRF de receptância. Sua utilização é interessante para fazer uso da propriedade de circularidade da FRF no plano complexo, cujas características geométricas podem ser utilizadas para um método clássico de análise modal, denominado método *circle fit* (KOUROUSSIS, 2012). Uma explicação mais detalhada sobre a formulação desse método será dada no Capítulo 3.



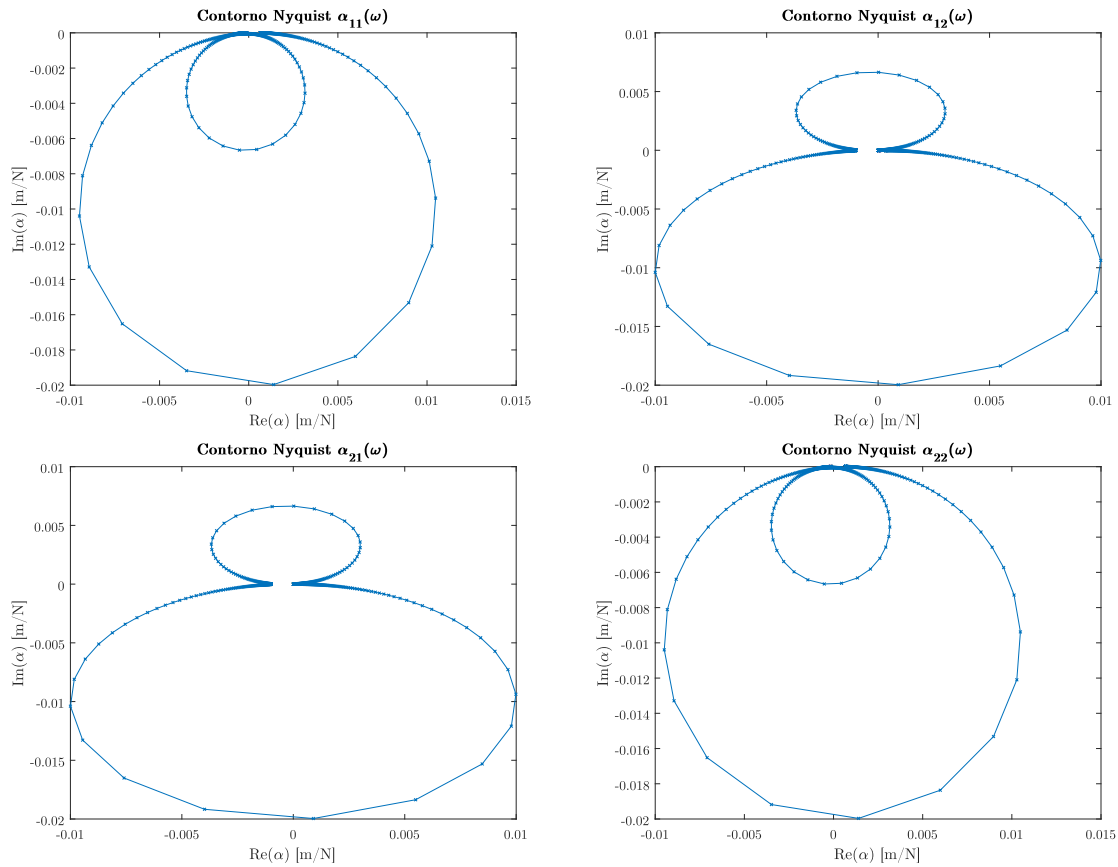


Figura 7 – Contorno Nyquist de resposta nos possíveis arranjos para um sistema de 2 GDL com amortecimento estrutural

## 2.4 Modelagem de sistemas contínuos

Em um sistema contínuo há distribuição contínua de elasticidade e massa, assumindo-se que o corpo seja homogêneo e isotrópico. Devido à continuidade do sistema, são necessários infinitas coordenadas para descrever o deslocamento de cada parte do corpo deformável, assumindo-se, então, infinitos graus de liberdade. Fisicamente, comporta-se semelhantemente a um sistema discreto, pois se for possível concentrar a massa da estrutura numa quantidade finita de pontos, conectadas por elementos elásticos, então o sistema contínuo será tratado como discreto.

Matematicamente, funções de posição e tempo são necessárias para se descrever o movimento de um sistema contínuo, resultando-se, portanto, em equações parciais diferenciais. Quando associadas a geometrias simples como hastes, vigas ou cascas, as EDPs podem ser solucionadas analiticamente. Para solucionar sistemas complexos, deve-se partir para métodos numéricos ou combinações de sistemas contínuos simplificados.

## 2.4.1 Vibração lateral de vigas

Existem várias teorias para formulação de vigas, dentre as principais: Euler-Bernoulli, Rayleigh, Cisalhamento e Timoshenko. Dentre essas, será abordada somente a primeira teoria (comumente denominada "teoria clássica") devido à sua simplicidade de formulação, além de aproximar bons resultados para modos vibracionais de baixa frequência de vigas esbeltas. As outras teorias incrementam o modelo de Euler-Bernoulli a partir de considerações que são apresentadas na tabela 1.

Tabela 1 – Comparação de modelos de formulação para vigas. Fonte: adaptado SEON; BENAROYA; WEI (1999)

Modelos de viga	Momento de flexão lateral	Deflexão lateral	Deformação cisalhante	Momento de inércia de rotação
Euler-Bernoulli	✓	✓	X	X
Rayleigh	✓	✓	X	✓
Cisalhamento	✓	✓	✓	X
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

### 2.4.1.1 Hipóteses da teoria de vigas de Euler-Bernoulli

A teoria de Euler-Bernoulli é formulada para o caso de uma viga em flexão pura (sujeitada a carregamentos laterais) e carrega as seguintes hipóteses (SEON; BENAROYA; WEI, 1999):

1. A viga possui comprimento maior que outras dimensões;
2. Constituída de material elástico e homogêneo;
3. Coeficiente de Poisson é negligenciável;
4. Seção transversal simétrica em relação ao plano vertical, contendo a linha neutra;
5. Planos continuam perpendiculares depois da deformação;
6. Pequenos ângulos de flexão;
7. Os efeitos de momento de inércia de rotação são desprezados;
8. A energia envolvida no cisalhamento é desprezada (o empenamento da seção transversal é desprezado).

No entanto, introduzem-se as tensões cisalhantes na teoria de forma a garantir o equilíbrio da viga. A figura 8 apresenta a característica da hipótese de seções planas (pequenas deformações, sem mudança de forma associado ao elemento infinitesimal) comparando-se com um estado de grandes deformações, onde desconsidera-se essa hipótese.

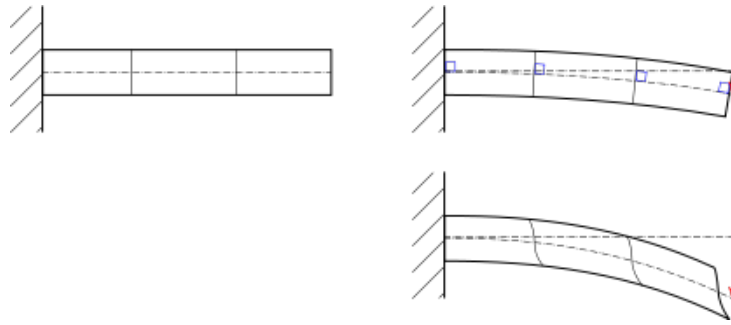


Figura 8 – Estado de pequenas deformações (acima) e grandes deformações (abaixo)

#### 2.4.1.2 Formulação da teoria de vigas de Euler-Bernoulli para problemas dinâmicos

A demonstração para se determinar a função característica (ou de modo normal)  $W(x)$  da viga de Euler-Bernoulli é apresentada no Apêndice B. Para um sistema contínuo, um número infinito de funções de modo podem ser definidas, onde, para cada, associa-se a uma frequência natural. As equações gerais para os referentes parâmetros são:

$$W(x) = C_1(\cos\beta x + \cosh\beta x) + C_2(\cos\beta x - \cosh\beta x) + C_3(\sen\beta x + \sinh\beta x) + C_4(\sen\beta x - \sinh\beta x) \quad (2.10)$$

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (2.11)$$

Aqui,  $C_1, C_2, C_3, C_4$  são constantes que podem ser determinadas por meio das condições de contorno impostas para a solução do sistema proposto, assim como o valor de  $\beta$ ,  $E$  é o módulo de elasticidade equivalente do material,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal da viga,  $\rho$  é a massa específica do material,  $l$  é o comprimento efetivo da viga,  $A$  é a área da seção transversal. Diferentes tipos de condições de contorno e suas soluções para as quatro primeiras formas modais são apresentadas no Apêndice B.

É interessante observar que, assim como na formulação para vários graus de liberdade, a função que descreve a forma modal para uma estrutura contínua é também normalizada, aqui pelo comprimento da viga, sendo então uma função adimensional (RAO, 1986).

A obtenção da matriz de receptância para estruturas contínuas segue a mesma formulação que a equação A.40, onde a resposta  $X_i$  é representada por  $W_i$ , medida em pontos diferentes da estrutura, relacionando com o forçamento  $F_j$  que excita a estrutura também em um determinado ponto. A partir do arranjo das coordenadas pode-se obter a matriz de receptância completa, que mantém as mesmas características descritas anteriormente.

## 2.5 Método dos elementos finitos para problemas dinâmicos

### 2.5.1 Teoria geral

O método de elementos finitos é uma ferramenta numérica que faz uso de formulações variacionais e que utiliza métodos de interpolação para solução de problemas de difícil formulação analítica (PETYT, 2010). O conceito do método é solucionar um problema de equilíbrio onde discretiza-se uma estrutura global complexa em partições, denominadas elementos. Os elementos são então conectados, onde pode-se aplicar condições de contorno de restrição de movimento ou rotação, e de carregamento, solucionando o conjunto por meio de métodos numéricos de aproximação de resultado (SZABÓ; SZABO; BABUŠKA, 1991). Para uma estrutura aeronáutica complexa, que é formada por componentes de diferentes materiais e geometrias, o MEF é útil para se determinar frequências naturais e modos vibracionais.

#### 2.5.1.1 Nó, elemento e função de forma

É matematicamente difícil definir uma estrutura complexa com um conjunto de funções e condições de contorno apropriadas. E é ainda mais difícil resolver analiticamente um conjunto de funções como essas.

O MEF é particularmente útil na resolução de equações diferenciais complicadas com soluções numéricas, por meio da aproximação do formato de uma estrutura com um número finito de segmentos geométricos menores para os quais as funções analíticas podem ser definidas e resolvidas. O comportamento global da estrutura é determinado solucionando-se essas funções, onde cada segmento geométrico, denominado elemento, é conectado por nós, que possuem um número específico de graus de liberdade a depender de sua formulação. O grau de liberdade pode ser caracterizado por uma unidade física que deve ser determinado a partir da solução da equação diferencial governante do problema, como por exemplo deslocamento, velocidade ou pressão. Um nó ou elemento pode ter diferentes tipos de GDLs. Por exemplo, um elemento de 4 nós 8 GDL pode ter dois GDLs translacionais ou um GDL translacional e um GDL rotacional em cada nó. A função que interpola os resultados entre os nós é definida como função de forma, usualmente com formato polinomial que varia o grau (linear, quadrática, etc) de acordo com a necessidade de precisão do resultado, entretanto, quanto maior o grau do polinômio mais custoso é computacionalmente para a sua solução.

Dada uma equação diferencial assumindo a forma:

$$f(u(x), u(\dot{x}), u(\ddot{x}), x) = 0 \quad (2.12)$$

A solução aproximada  $u(x)$  pode ser aproximada por meio do truncamento de  $n$

termos de sua expansão polinomial de Taylor:

$$u(x) \simeq a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i \quad (2.13)$$

Pode-se definir a solução aproximada, também, por meio da representação de um conjunto de GDL nos nós, dado pela seguinte equação:

$$u(x) \simeq N_1(x)u_1(x) + N_2(x)u_2(x) + N_3(x)u_3(x) + \cdots + N_n(x)u_n(x) = \sum_{i=0}^n N_i(x)u_i(x) \quad (2.14)$$

Onde  $N_i(x)$  é a função de forma no nó  $i$  e  $u_i(x)$  é o deslocamento nodal, ou de forma mais geral o GDL nodal, no nó  $i$ .

Para um estudo inicial do método será considerado um elemento de barra simples, com um grau de liberdade e dois nós com interpolação linear. A figura 9 apresenta a esquematização do elemento com suas características.

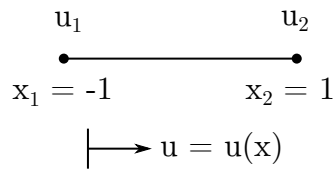


Figura 9 – Elemento de barra com dois nós e um grau de liberdade

A solução aproximada para esse elemento, considerando o truncamento da expansão polinomial de Taylor é dada por:

$$u(x) \simeq a_0 + a_1x \quad (2.15)$$

Onde  $u(x)$  é a solução global,  $x$  é a variável global e  $a_0$ ,  $a_1$  são coeficientes que podem ser expressados a partir das coordenadas nodais. O elemento pode, então, ser representado em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Onde têm-se que  $u_1 = u(x_1)$  e  $u_2 = u(x_2)$ . A solução para  $a_0$  e  $a_1$  do sistema 2.16, aplicando-se na Equação 2.15 resulta em:

$$u(x) = \frac{1-x}{2}a_1 + \frac{1+x}{2}a_2 = N_1(x)a_1 + N_2a_2 \quad (2.17)$$

As funções de forma do elemento são representadas, portanto, como:

$$N = \begin{bmatrix} \frac{1-x}{2} & \frac{1+x}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Neste caso, tem-se o elemento de barra unidimensional com dois nós e um grau de liberdade em cada nó, caso mais simples de análise para se determinar as funções de forma. Em problemas práticos de engenharia, os elementos bidimensionais e tridimensionais são usados com muita frequência. Em um software comercial, um elemento 2D geralmente pode ter até 8 nós e 48 GDL, e um elemento 3D geralmente pode ter até 27 nós e 60 GDLs (os GDLs rotacionais do elemento 3D são frequentemente omitidos). Não importa quão grande seja o elemento, é sempre necessário encontrar uma expressão para as funções de forma pois são utilizadas para calcular as matrizes de massa e rigidez do elemento, como será demonstrado ao longo do texto. SERAFIM (1998) apresenta uma biblioteca com funções de forma definidas para diversos elementos bidimensionais e tridimensionais, considerando interpolações quadráticas e lineares.

### 2.5.1.2 Equação do movimento em MEF

Considerando o problema de autovalor e autovetor estabelecido para um sistema MGDG onde desconsidera-se o amortecimento e analisa-se a resposta livre, a equação é dada por:

$$([K] - \omega_i^2[M])\{X_i\} = 0 \quad (2.19)$$

Para solucionar a equação 2.19, as matrizes  $[K]$  e  $[M]$  devem ser determinadas para cada elemento componente da discretização adotada. Determina-se por meio das seguintes expressões, obtidas a partir da formulação variacional do método de elementos finitos (PETYT, 2010):

$$[M_i] = \int_V [N_i]^T \rho [N_i] dV \quad (2.20)$$

$$[K_i] = \int_V [B_i]^T [D] [B_i] dV \quad (2.21)$$

Definindo-se,

$$[B_i] = \frac{\partial N}{\partial x_i} \quad (2.22)$$

Onde  $[B_i]$  é a matriz de deformação-deslocamento,  $[N_i]$  é a matriz de função de forma, definidos para um elemento  $i$  do conjunto global, e  $[D]$  é a matriz de elasticidade do material, que depende de parâmetros do tipo módulo de Young e de cisalhamento, e

coeficiente de Poisson. Descreve-se a matriz de elasticidade para materiais isotrópicos e ortotrópicos nas seguintes equações (JONES, 1998):

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $G$  é o módulo de cisalhamento, com relação aos planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  e seus simétricos. Como todos os parâmetros podem ser explicitamente determinados, a equação pode ser resolvida diretamente. Um conjunto de frequências naturais para cada modo pode então ser calculado. Os autovetores de cada frequência natural, que são deslocamentos de cada nó sob um determinado modo, também podem ser calculados, solucionando-se o problema dinâmico proposto.

## 2.5.2 Modelagem dinâmica estrutural com o ANSYS Mechanical

De forma geral, *softwares* MEF dividem a análise em três etapas principais: pré-processamento, processamento e pós-processamento.

A etapa de pré-processamento inclui a definição dos tipos de elementos, a malha do sistema, a atribuição de propriedades do material a cada elemento, a definição das condições de contorno e das cargas. A compreensão dos princípios físicos por trás do problema é sempre mais importante do que a própria técnica de modelagem em si. Se as condições de contorno estiverem incorretas ou se o tipo de elemento não for escolhido corretamente, os resultados poderão estar incorretos.

A etapa de processamento é onde o MEF é aplicado computacionalmente no modelo confeccionado previamente. O modelo pré-processado é importado para um solucionador que, em seguida, montará a matriz de rigidez e calculará todos os graus de liberdade (GDLs), além de resolver o problema de extração de autovalor e autovetor, por meio de metodologias numéricas, sendo as principais Block Lanczos, PCG Lanczos, *Supernode*, Redução (Householder), como apresenta ANSYS, 2009. A tabela 2 expõe uma comparação na aplicação desses métodos. Apresentadas as aplicações dos métodos, optou-se por se utilizar o método Block Lanczos nas simulações desenvolvidas no trabalho.

O processo de extração de autovalores pode levar de segundos a vários dias, dependendo do número de elementos e da capacidade computacional do computador onde a análise é solucionada.

Tabela 2 – Comparação de métodos de extração de autolavor implementados no ANSYS.  
Fonte: (ANSYS, 2009)

<i>Eigensolver</i>	Aplicação	Memória RAM requisitada	Armazenamento Hard Drive requisitado
Block Lanczos	Empregado para se determinar poucos modos (até 40) de modelos grandes. Recomendado quando o modelo consiste em elementos sólidos e casca de baixa qualidade de formação. O solucionador tem boa performance quando o modelo é formado por uma combinação de elementos de casca e sólidos	Médio	Alto
PCG Lanczos	Empregado para se determinar poucos modos (até 100) de modelos com muitos GDLs (500K+). O solucionador tem boa performance quando emprega-se elementos sólidos com boa qualidade para se determinar os modos iniciais	Médio	Baixo
<i>Supernode</i>	Empregado para se determinar muitos modos (10K+) eficientemente. Utilizado em problemas com elementos 2-D plano ou casca/viga (pelo menos 100 modos ou mais) e com elementos 3-D sólidos (pelo menos 250 modos ou mais)	Médio	Baixo
Reduzido	Empregado para se determinar os modos de pequenos a médios modelos (menos de 10K GDL). Pode ser utilizado também para se determinar poucos modos (até 40) de grandes modelos com a correta seleção de elementos master GDL, onde a acurácia do resultado para frequências depende fortemente dessa seleção	Baixo	Baixo

A etapa de pós-processamento permite a visualização dos dados calculados. Com base nos GDLs obtidos, gráficos diferentes podem ser plotados com base na preferência do usuário. Por exemplo, pode-se escolher o estresse ou a distribuição de deformação ou deslocamento, onde o último é útil para a visualização dos modos vibracionais (magnitude de deslocamento).



# 3 Análise Modal Experimental

## 3.1 Introdução

Análise modal experimental (AME) é um processo usado para analisar um modelo dinâmico de uma estrutura ou sistema que seja linear e invariante no tempo, denominado modelo modal, que é caracterizado por parâmetros modais, ou seja, por frequências naturais, taxa de amortecimento e modos vibracionais (EWINS, 1984). Com esses parâmetros é possível extrair a matriz de massa, de amortecimento e de rigidez do modelo modal completo. Uma das várias aplicações para utilização da abordagem experimental em análise modal está relacionada com a calibração e correlação de resultados obtidos por meio de modelos teóricos, caso de interesse do referente trabalho. Para a efetiva execução da análise utiliza-se conhecimentos de diversas áreas tais como técnicas de instrumentação, processamento digital de sinais, teoria de vibrações e identificação de sistemas.

Quando realiza-se análises modais experimentais deve-se levar em consideração algumas premissas básicas acerca do sistema mecânico ou da estrutura, são elas:

- A estrutura é assumida como linear, o que significa que a resposta à aplicação simultânea de forçamento na estrutura é a soma de respostas locais (individuais) relacionada a cada forçamento atuante;
- Os parâmetros da estrutura são invariantes com o tempo;
- A estrutura obedece à condição de reciprocidade. Em outras palavras, a FRF entre os pontos 1 e 2 pode ser determinada por meio de excitação no ponto 1 e medindo-se no ponto 2, devendo corresponder à mesma FRF quando realizado o oposto.

## 3.2 Sistemas de medição

O *setup* de uma AME inclui quatro componentes principais: um *sistema de excitação*, que promove uma entrada de forçamento mensurável, em uma *estrutura de teste*, um *transdutor* que transforme a vibração mecânica do sistema (dado em termos de deslocamento, velocidade ou aceleração) em um sinal elétrico, e, finalmente, de um *analisador*,

para processamento de sinal, de forma a obter funções de resposta em frequência. A figura 10 esquematiza os elementos que compõe um sistema de medição para AME.

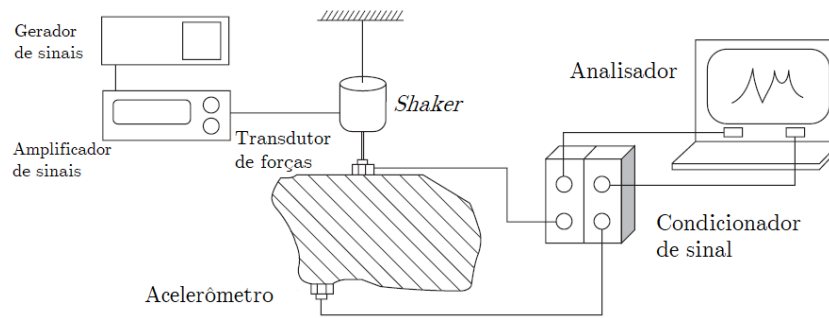


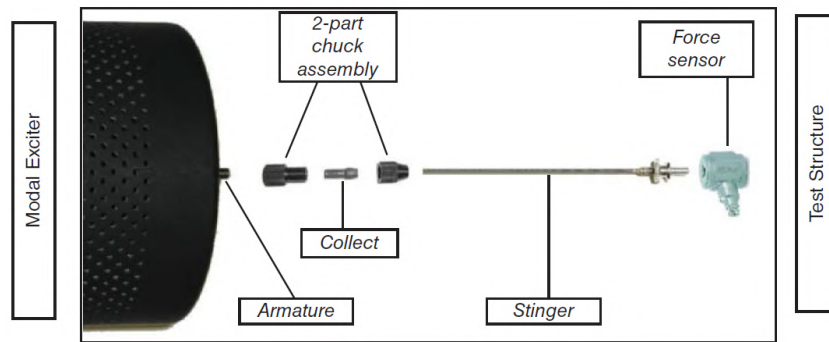
Figura 10 – *Setup* de sistema de medição para análise modal experimental. Fonte: adaptado de [FU; HE \(2001\)](#)

### 3.2.1 Sistemas de excitação

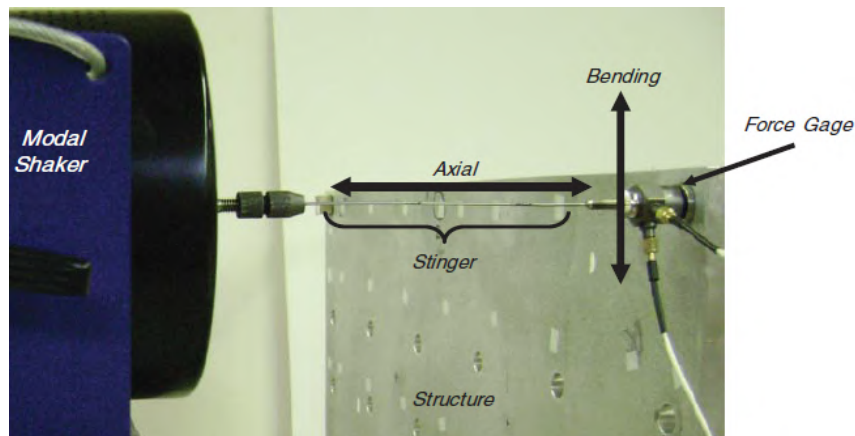
O sistema de excitação é responsável pelo forçamento externo da estrutura, durante a AME, fornecendo um sinal de entrada conhecido e controlado, cuja resposta do sistema é monitorada.

A escolha de um excitador específico depende de fatores tais como amplitude de forçamento desejado, propriedades físicas do excitador e acessibilidade da estrutura a ser ensaiada. Os tipos de excitadores mais comuns utilizados são por meio de *shakers* eletrodinâmicos, eletrohidráulicos ou inerciais, e martelos de impacto manuais ou automáticos, como apresenta [EWINS \(1984\)](#). Apesar de existirem diversos tipos de *shakers*, a explicação de cada tipo transcende o escopo do trabalho, tratando-se aqui somente do eletrodinâmico. A partir da figura 11 apresenta-se um modelo real de *shaker* eletrodinâmico instalado em um experimento, cujo princípio de funcionamento baseia-se na produção de força axial que é proporcional à corrente elétrica de entrada no sistema, controlada por meio de sinais digitais. Essa corrente elétrica circula em uma bobina que converte-a em campo magnético, atuando um eixo concêntrico à mesma. A força fornecida pelo equipamento é, portanto, proporcional ao fluxo magnético e à corrente que passa através da bobina, e ao comprimento do fio dentro do campo de fluxo ([LANG; SNYDER, 2001](#)).

Um detalhe acerca da construção de experimentos com *shakers* está na união entre a estrutura a ser medida e o equipamento, que normalmente é realizada por meio de um acoplamento de *stinger* e transdutor, que quando não utilizado pode acabar acrescentando o modelo com massa não original à estrutura. A utilização de *stingers* auxilia no isolamento da massa inerente ao *shaker* à parte da estrutura a ser excitada. Por fim, a utilização de *shakers* permite a aplicação de uma variedade de excitações com sinais periódicos, transiente e aleatórios a serem utilizados na estrutura de teste ([AVITABILE, 2017](#)).



(a)



(b)

Figura 11 – Detalhe no *setup* de *shaker/stinger/transdutor* (a) Vista explodida de montagem (b) Conjunto conectado a uma estrutura. Fonte: Avitabile (2017)

Outro tipo de excitação comumente utilizada é a por meio de martelo de impacto, sendo este manual ou automático, conforme apresenta a figura 12. Sua utilização elimina o acréscimo de massa na estrutura por parte do aparato experimental de excitação. O equipamento consiste basicamente em um transdutor de forças atrelado à ponta do martelo, onde os sinais da força de entrada são lidos e amplificados. A amplitude do forçamento de entrada depende do peso do martelo, o tipo de ponta utilizada (aço, plástico, borracha) e da velocidade de impacto. O ensaio utilizando o martelo de impacto requer uma preparação mais simples que aquele que utiliza *shaker* como fonte de excitação, entretanto, para o martelo manual, a produção de impulsos repetíveis é comprometida, principalmente em questão da excitação em locais diferentes, com amplitudes de forçamento distintos e por conta de repiques inerentes ao impacto (AVITABILE, 2017). Conseqüentemente, a medição usualmente não é repetível. A utilização de martelos de impacto automáticos entra com a vantagem de se impor consistência na coleta de dados, pois garante repetibilidade nos impactos, além de poder ajustar a faixa de amplitude de forçamento a ser inserido.

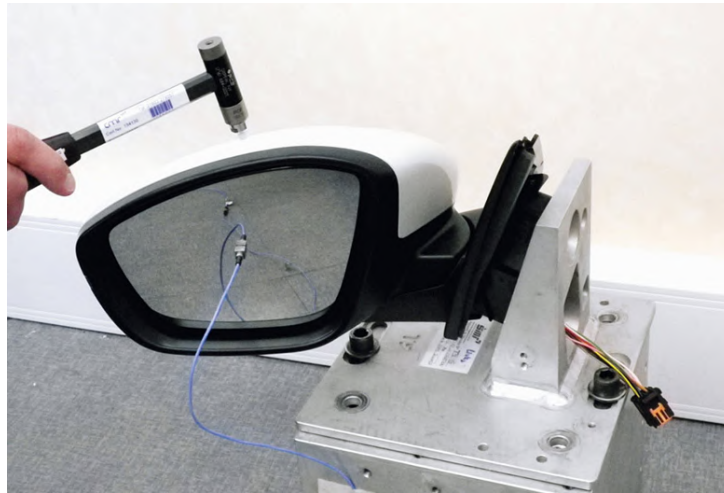


Figura 12 – *Setup* experimental de retrovisor automotivo com excitação por martelo de impacto manual. Fonte: m+p International (2007)

### 3.2.2 Transdutores

Para medir a resposta e a entrada de forçamento durante a AME, os transdutores são necessários, sendo os mais comumente empregados feitos de materiais piezoelétricos, como cristais sintéticos. Acelerômetros, medidores de força e cabeças de impedância são três tipos de transdutores piezoelétricos disponíveis (EWINS, 1984). A discussão detalhada de todos esses tipos de transdutores piezoelétricos está além do escopo do trabalho, portanto, limita-se apenas a acelerômetros.

Materiais piezoelétricos produzem carga elétrica quando submetidos a estresse mecânico. Transdutores feitos de materiais piezoelétricos induzem um sinal de tensão proporcional à quantidade sendo medida, força ou aceleração (MMF, 2001).

Normalmente, a resposta dinâmica de uma estrutura de teste excitada é medida por um ou mais acelerômetros piezoelétricos conectados à estrutura. Acelerômetros são dispositivos de medição de aceleração com um amplificador integrado. Geralmente consiste em duas massas (massa sísmica e corpo). Força de inércia da massa sísmica é exercida sobre os cristais durante a vibração, que agem de forma semelhante a molas rígidas. Enquanto a massa sísmica e o corpo se moverem juntos, a saída do transdutor será proporcional à aceleração do corpo e da estrutura à qual ele está conectado (EWINS, 1984), a figura 13 apresenta uma vista em corte de um acelerômetro piezoelétrico de compressão, especificando os componentes associados. Três características principais que tipicamente influenciam a escolha de um acelerômetro são: massa, sensibilidade e faixa de frequência. A mais alta sensibilidade possível é necessária para testes estruturais, no entanto, quanto maior a sensibilidade, mais pesado o transdutor. Para medições de resposta muito baixas, acelerômetros de alta sensibilidade podem ser necessários, enquanto para testes estruturais leves são necessários acelerômetros leves. A frequência medida é geralmente dentro da faixa de frequência de ressonância dos acelerômetros. Como os acelerômetros

piezoelétricos são dispositivos de saída de alta impedância que produzem tensões muito baixas, devem ser empregados condicionadores de sinal, como amplificadores de tensão.

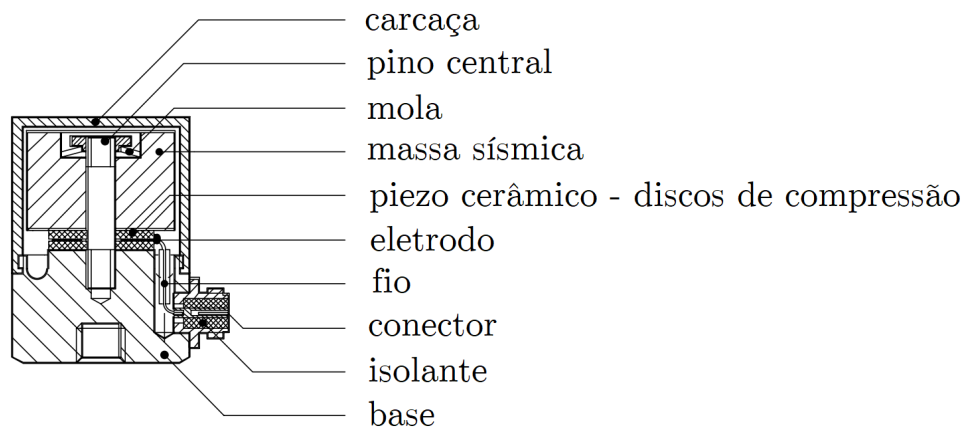


Figura 13 – Vista em corte de acelerômetro piezoelétrico de compressão. Fonte: adaptado MMF (2001)

### 3.2.3 Principais diferenças entre ensaios com *shaker* e martelo de impacto

Para compreender as diferenças entre os ensaios por excitação de *shaker* e martelo de impacto é interessante montar a matriz de transferência (receptância). Para considerações práticas, os índices adotados para a matriz de transferência referem-se ao ponto de medição de resposta e à aplicação de forçamento, respectivamente. Sendo assim, por exemplo, o termo  $H_{XY}$  representa a medição de resposta no ponto X, aplicando-se o forçamento no ponto Y. Os valores que compõe a matriz de transferência foram decididos para uma quantidade específica de pontos de amostragem na montagem do procedimento experimental, distribuídos de forma equidistante na estrutura. Assim, a mesma é descrita pela seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Uma notável diferença na configuração dos referentes métodos de excitação é que, para a medição com *shaker*, comumente realizava-se analisando uma das colunas da matriz de transferência, ou seja, excita-se no mesmo ponto, medido os deslocamentos nodais com transdutores em diferentes pontos, conforme apresenta a figura 14 (a). Para o método de excitação com martelo de impacto, comumente analisa-se uma das linhas da matriz de transferência, ou seja, mede-se o deslocamento da estrutura em um ponto específico, excitando-a em diferentes locais, conforme é demonstrado na figura 14 (b).

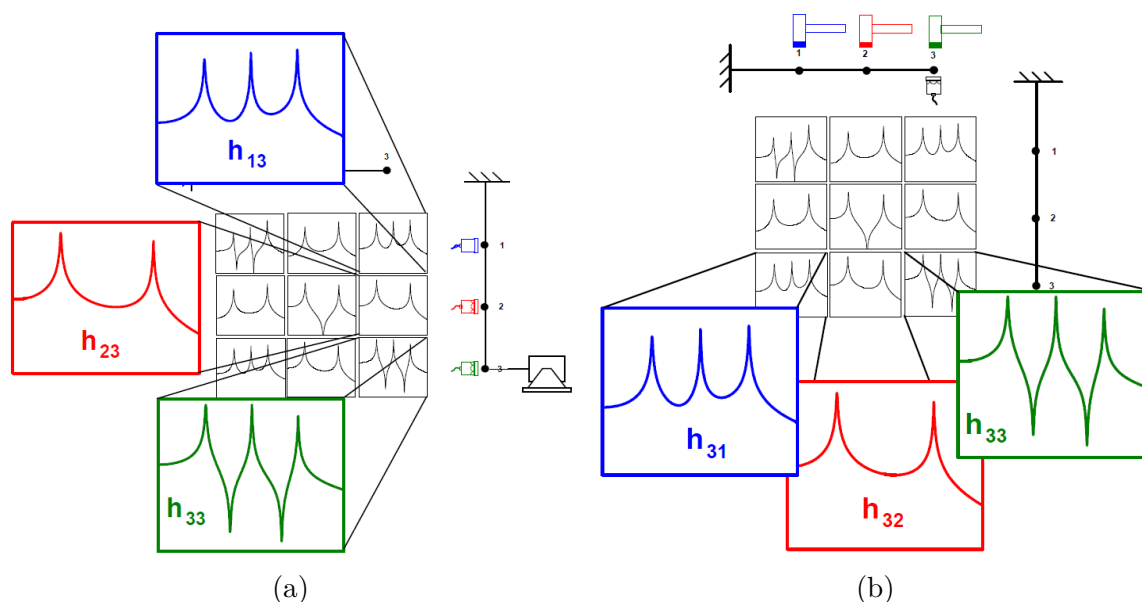


Figura 14 – Cenários itinerantes num ensaio com (a) *shaker* e (b) *martelo de impacto*.  
 Fonte: AVITABILE (2017)

Em questão de resultados das FRFs, pela teoria não há diferença entre a excitação ser por *shaker* ou martelo de impacto, os resultados devem ser os mesmos. Entretanto, o sistema submetido a testes está sujeito à massa adicional da suspensão da estrutura e dos transdutores montados, ou o acréscimo de rigidez local devido à inclusão do arranjo *shaker-stinger*, por exemplo. Dessa forma, por mais que a teoria não indique diferenças entre as formas de excitação, aspectos práticos influenciam nos resultados (AVITABILE, 2017).

### 3.3 Preparação do ensaio e testes preliminares

Diversos aspectos práticos são empregados na preparação do ensaio quando se objetiva extrair resultados realistas, como apresenta EWINS (2000). Dentre eles, pode-se citar:

- A escolha dos locais de excitação e medida de respostas, além da faixa de frequência de interesse de análise, devem ser especificados. Baseia-se a decisão na quantidade e nos tipos de modos que deseja-se caracterizar, sendo uma recomendação prática efetuar uma modelagem teórica preliminar para orientar as decisões;
- A forma de introduzir a vibração na estrutura é um aspecto fundamental no projeto do experimento. A escolha do tipo de excitação é baseada no tamanho da estrutura, quantidade de medidas do ensaio, disponibilidade de equipamentos. Como foi apresentado, as ferramentas mais usuais para excitação são o martelo de impacto (vibração transiente) e o *shaker* eletrodinâmico, que permite inserir uma variedade de sinais (senoidal, *chirp*, aleatório, dentre outros);

- A condição de contorno é etapa ímpar na configuração do experimento. Em suma, o modelo teórico e experimental devem estar submetidos às mesmas condições de contorno de operação da estrutura real, visando obter resultados realistas. Todavia, dificuldades práticas na definição de fixações rígidas (a exemplo restrições de deslocamento, rotação ou engaste<sup>1</sup>) tornam a escolha da condição livre-livre mais susceptível, devido à facilidade de reprodução, normalmente feita utilizando suspensões flexíveis. Nesses casos de escolhas de condições de contorno diferentes das reais, ajusta-se o modelo teórico ao apoio simplificado e, posteriormente, impõe-se a condição de contorno real;
- A instalação da instrumentação na estrutura deve ser realizada de maneira cautelosa para que não se gere um erro sistemático na medição, principalmente em testes com grande quantidade de pontos de medida. O tipo de sensoriamento utilizado, sua instalação na estrutura e um mapeamento completo do modelo instrumentado são procedimentos de importância ímpar para garantir qualidade dos resultados de uma análise modal experimental.

### 3.4 Extração de parâmetros modais

A extração de parâmetros modais é uma técnica de análise modal experimental que requer os dados de FRF medidos de um sistema dinâmico, associando-os com os três parâmetros modais (frequência, amortecimento e modo vibracional), existindo algoritmos de identificação tanto no domínio do tempo quanto no da frequência. EWINS (1984) apresenta vários procedimentos existentes, com graus de complexidade distintos, que envolvem a análise, ou ajuste de curva, para parte de uma FRF, depois para uma curva abrangendo várias ressonâncias e, finalmente, para um conjunto de FRFs relacionadas na mesma estrutura.

Dentre esses métodos desenvolvidos, pode-se citar os de *um grau de liberdade*, onde os parâmetros modais são obtidos para modos isolados, analisando-se FRFs individualmente, *métodos de múltiplos graus de liberdade (local curve fitting)*, onde parâmetros modais são definidos considerando-se a influência de outros modos vibracionais simultaneamente, sendo essa análise útil quando frequência e amortecimento não são constantes entre as medidas (AVITABILE, 2017); os *métodos globais (global curvefitting)*, que permitem identificar modos simultaneamente de FRFs distintas, a partir de uma mesma referência ou ponto de excitação (linha ou coluna da matriz de transferência), e, por fim, os *métodos de polireferência (polyreference curvefitting)*, que são métodos globais que permitem o processamento de FRFs distintas relativas a vários pontos de referência (mais de uma linha ou coluna da matriz de transferência). Embora com diferentes complexidades

---

<sup>1</sup> Condição de contorno que restringe todos os graus de liberdade de deslocamentos e rotação, dificilmente reproduzíveis em procedimentos experimentais devido à existência de folgas, dentre outros erros sistemáticos presentes

de modelagem e processamento de dados, o fundamento dos métodos descritos consiste em obter um equacionamento que reproduza por trechos ou integralmente as FRFs obtidas experimentalmente.

É importante ressaltar que não existe, entretanto, um método ideal para solucionar qualquer sistema dinâmico, devendo-se analisar as aplicações caso a caso. Para fins de aplicação prática, é interessante que exista acessibilidade a mais de um método durante a condução de ensaios.

### 3.4.1 Composição dos modos vibracionais

Duas questões essenciais quando emprega-se métodos de extração de parâmetros modais são: quantos modos vibracionais entre um intervalo de frequência podem ser obtidos e, se um pico de ressonância específico de uma FRF realmente representa o deslocamento de um ponto do sistema para caracterizar a forma modal.

Na Seção [A.5.2](#) apresentou-se diferentes formas de representação de uma FRF, sendo esse um procedimento essencial para correta identificação dos modos, pois alguns deles permitem obter a amplitude de deslocamento de um ponto da estrutura. A identificação dos modos é possível quando utiliza-se a escala de módulo (absoluto) em função da frequência para plotar uma FRF, entretanto, há dois cenários em que deve-se fazer uma ressalva: nem todo modo vibracional pode ser representado por qualquer que seja o conjunto de FRF analisado, e nem todo pico de ressonância caracteriza um modo da estrutura. Uma explicação para o primeiro cenário é que o ponto de referência (medição de resposta) não pode estar localizado no nó de um modo, caso contrário o referente modo não poderá ser observado nas FRF medidas e, por conseguinte, não será determinado ([AVITABILE, 2017](#)).

A identificação dos modos deve ser feita, portanto, baseando-se em várias curvas FRF dispostas com mesmas escalas, isso garantirá que os modos de vibração tornem-se mais destacados no gráfico total, não prevalecendo os picos que não representam os modos ([FU; HE, 2001](#)). A figura [15](#) esquematiza a composição modal a partir de dois experimentos: com excitação de entrada utilizando-se um (a) *shaker* e (b) martelo de impacto.



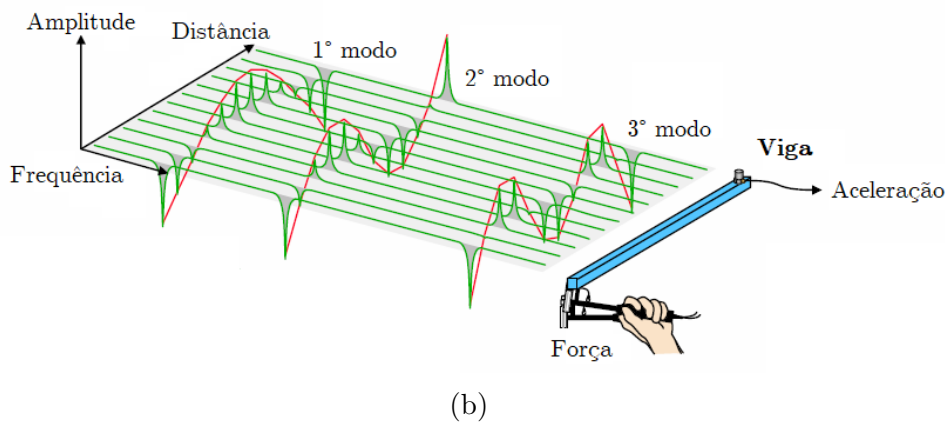
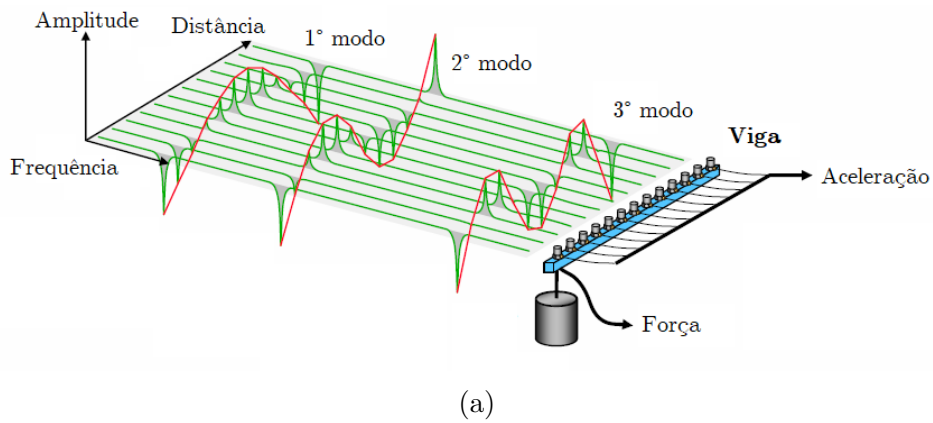


Figura 15 – Extração de modos vibracionais a partir de ensaio com (a) *shaker* e (b) martelo de impacto. Fonte: adaptado [ELKHATIB \(2003\)](#)

### 3.4.2 Métodos de extração de parâmetros modais

Esta seção tem por finalidade apresentar a teoria para extração de parâmetros modais que melhor representam a característica de resposta de uma estrutura testada. Mais detalhes de diferentes métodos são apresentados em [Ewins \(1984\)](#).

Um método muito bem estabelecido é o de ajuste de curva de um grau de liberdade (1GDL), conhecido por *Circle-Fit*. O método, em essência, baseia-se no fato de que, em frequências próximas à natural, a função mobilidade pode ser aproximada a um sistema de 1GDL adicionada a um termo de compensação constante que corresponde pelos outros modos. O procedimento funciona ajustando a curva de um círculo aos pontos de dados medidos e aproximando-se do gráfico polar de fase do sistema da função de resposta de frequência que tem uma natureza circular (gráfico de Nyquist). O método é bastante versátil, entretanto deve-se ter cuidado ao utilizá-lo em estruturas que possuem modos muito próximos ou que sejam muito amortecidos, que pode causar falta da seção circular completa ([EWINS, 1984](#)).

O método Circle-Fit é baseado na circularidade do contorno de Nyquist. Considerando-se amortecimento estrutural, a função de receptância  $\alpha(\omega)$  (dada pela equação 2.8) per-

corre um contorno circular perfeito, descrito pela seguinte equação

$$[Re(\alpha)]^2 + \left(Im(\alpha) + \frac{1}{2h}\right)^2 = \frac{1}{2h} \quad (3.2)$$

Onde  $h$  é o amortecimento hysterético ou estrutural.

Pode-se assumir que nas vizinhanças de um modo vibracional, a contribuição de todos os outros modos pode ser negligenciada. A FRF de receptância de um sistema MGDL amortecido estruturalmente é dada na forma da equação 3.3.

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_{jr}\Phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_r^2)} \quad (3.3)$$

Caso deseje-se analisar o  $r$ -ésimo modo, têm-se que

$$H_{jk}(\omega) = \frac{\Phi_{jr}\Phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_r^2)} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^N \frac{\Phi_{jr}\Phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_r^2)} \quad (3.4)$$

O termo à direita de soma pode ser aproximado à uma constante complexa, resultando em

$$H_{jk}(\omega) = \frac{\Phi_{jr}\Phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r\omega_r^2)} + B_{jk} \quad (3.5)$$

Assim, a circularidade do contorno de Nyquist não mudará, exceto que o círculo é deslocado a uma distância da origem do plano complexo pela constante complexa  $B_{jk}$ .

O procedimento consiste em primeiro encontrar a frequência natural, em seguida, derivar o fator de amortecimento e, finalmente, a constante modal. A precisão deste método é significativamente melhorada em comparação com o método *Peak-Picking* (FU; HE, 2001). Após a seleção dos pontos da FRF na vizinhança do pico de ressonância, a frequência natural pode ser encontrada no local onde ocorre a mudança máxima de arco no círculo de Nyquist. A figura 16 apresenta a representação de um círculo de Nyquist.

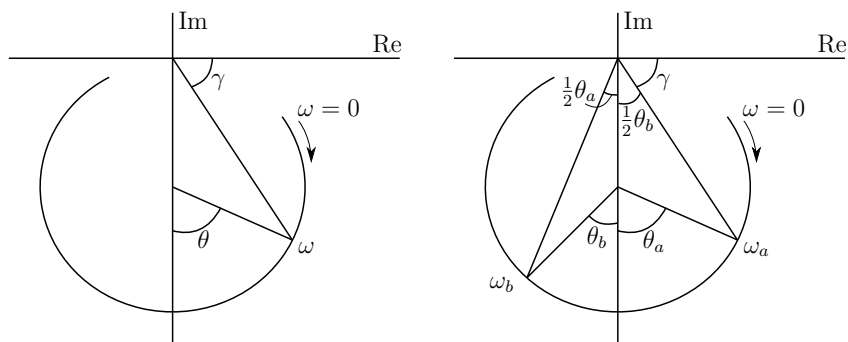


Figura 16 – Círculo Nyquist apresentando ângulos relevantes para a análise modal

Para os ângulos relevantes apresentados, têm-se que

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan(90^\circ - \gamma) = \frac{\omega_r^2 - \omega^2}{\omega_r^2 \eta_r} \quad (3.6)$$

De onde obtém-se,

$$\omega^2 = \omega_r^2 \left(1 - \eta_r \tan\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.7)$$

Diferenciando a equação 3.7 em relação à  $\theta$  obtém-se uma função que descreve a taxa de variação do arco de círculo. A mesma é dada por

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} = -\frac{\omega_r^2 \eta_r}{2} \left[1 + \left(\frac{1 - (\omega/\omega_r)^2}{\eta_r}\right)^2\right] \quad (3.8)$$

Que assume valor máximo quando  $\omega = \omega_r$ , isso pode ser demonstrado por meio de uma seguinte derivação da equação 3.8 com respeito à frequência e igualando-a a zero (ponto crítico da função), como mostra a seguinte expressão

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\omega^2}{d\theta}\right) = 0, \quad \text{quando} \quad (\omega_r^2 - \omega^2) = 0 \quad (3.9)$$

O fator de amortecimento pode ser determinado a partir dos pontos cartesianos da FRF (a exemplo aqui o ponto "a" da figura 16) utilizando a equação 3.6 reescrita como

$$\eta_r = \frac{\omega_r^2 - \omega_a^2}{\omega_r^2} \frac{1}{\tan(\theta_a/2)} \quad (3.10)$$

Teoricamente, o fator de perda de amortecimento deve ser constante. No entanto, devido ao ruído de medição, não-linearidade e erros, o fator de perda de amortecimento estimado varia para diferentes pontos de dados (EWINS, 1984). Essa variação pode ser útil para indicar a precisão da análise.

A última grandeza que pode ser extraída do contorno Nyquist é a constante modal, que pode ser expressa utilizando as formas modais

$$A_{r_{jk}} = \Phi_{jr} \Phi_{kr} \quad (3.11)$$

A constante modal pode ser obtida a partir do diâmetro  $D_{r_{jk}}$ , que é convenientemente quantificado na localização da frequência natural (consequentemente têm-se também o ângulo de fase modal)

$$D_{r_{jk}} = \frac{A_{r_{jk}}}{\omega_r^2 \eta_r} \quad \text{ou} \quad A_{r_{jk}} = D_{r_{jk}} \omega_r^2 \eta_r \quad (3.12)$$

## 3.5 Correlação entre modelo teórico e experimental

Uma vez que os parâmetros modais tenham sido extraídos, é comum que se realize uma comparação entre o comportamento dinâmico previsto da estrutura de teste e aqueles observados em experimentos. O processo de verificação da precisão dos parâmetros dinâmicos preditos e medidos experimentalmente é denominado como validação de um modelo (EWINS, 1984). Alguns dos métodos comumente utilizados são:

- Ortogonalidade de vetor modal;
- Consistência de vetor modal (MAC - *Modal Assurance Criterion*);
- Comparação direta.

### 3.5.1 Ortogonalidade de vetor modal

Essa metodologia é composta pela utilização de vetores modais e da matriz de massa derivada de modelagem em FEM, os quais são utilizados para verificar a ortogonalidade entre os vetores modais obtidos experimentalmente. Os vetores modais experimentais e analíticos são reduzidos para que os termos diagonais da matriz de massa modal sejam unitários. Com esta forma de redução, espera-se que os valores dos termos não-diagonais na matriz de massa modal sejam inferiores a 0,1 (10 por cento dos termos da diagonal).

A teoria mostra, em termos de amortecimento proporcional, que cada um dos sistemas de vetores modais será ortogonal a todos os outros quando ponderados por massa, rigidez ou matriz de amortecimento. Entretanto, em termos práticos, essas matrizes são acessíveis principalmente por meio da análise de elementos finitos e, como a matriz de massa é considerada o termo mais preciso, outras discussões suplementares relativas à ortogonalidade são feitas com referência à ponderação da matriz de massa. Como resultado, a relação de ortogonalidade é dada por:

$$[ORT^{AX}] = [\Phi^A]^T [M^A] [\Phi^X] \quad (3.13)$$

Onde  $[\Phi^A]$  e  $[\Phi^X]$  são as matrizes modais para a análise teórica e experimental, respectivamente, e  $[M^A]$  a matriz de massa generalizada dos modos, obtida por meio de análise teórica. Resultados de  $[ORT^{AX}]$  que se aproximem da matriz identidade  $[I]$  indicam um modelo melhor. Experimentalmente, a multiplicação referente à Equação 3.13 raramente retorna valores nulos fora da diagonal, entretanto, resultados até um décimo da magnitude da massa generalizada de cada modo são considerados aceitáveis, critério esse adotado na indústria aeroespacial (ALLEMANG, 2003).

A relação de ortogonalidade também pode ser definida entre os modos experimentais, novamente em relação à matriz de massa teórica, valendo-se também de que  $[ORT]$  mais próximo da matriz  $[I]$  seja o ideal. A relação é descrita pelo seguinte equacionamento:

$$[ORT^{XX}] = [\Phi^X]^T [M^A] [\Phi^X] \quad (3.14)$$

### 3.5.2 Consistência de vetor modal

A matriz de função de resposta de frequência típica contém dados indesejados com referência a um vetor modal, e isso pode ser atribuído a alterações nos locais de excitação ou técnicas de extração de dados modais. Portanto, a consistência dos vetores modais estimados pode ser útil ao avaliar vetores modais experimentais (ALLEMANG, 2003), onde os resultados podem ser contrastados por meio de um critério de garantia modal escalar.

O critério de garantia modal (MAC - *Modal Assurance Criterion*) valora o grau de consistência, ou linearidade, entre os vetores modais estimados, e é dado pela seguinte equação:

$$MAC_{ij}^{AX} = \frac{|\{\Phi_i^X\}^T \{\Phi_j^A\}|^2}{\{\Phi_i^X\}^T \{\Phi_i^X\} \{\Phi_j^A\}^T \{\Phi_j^A\}} \quad (3.15)$$

Onde,  $\{\Phi^X\}$  é o vetor modal associado à análise experimental e modo  $i$ ,  $\{\Phi^A\}$  é o vetor modal associado à análise teórica e modo  $j$ .

O critério retorna valores de zero (representando nenhuma correspondência consistente) até um (representando, portanto, uma correspondência consistente). Dessa forma, se os vetores modais sob consideração realmente exibem uma relação linear consistente, o critério de garantia modal deve se aproximar da unidade, por conseguinte,  $[MAC] \simeq [I]$ . É importante ressaltar que o critério MAC não indica medida efetiva ou ortogonalidade entre os modos, mas sim correspondência consistente.

Pode-se também definir o critério MAC para verificar a correspondência entre os modos experimentais, valendo-se das mesmas características descritas anteriormente. A equação que descreve o critério com parâmetros experimentais é dada por:

$$MAC_{ij}^{XX} = \frac{|\{\Phi_i^X\}^T \{\Phi_j^X\}|^2}{\{\Phi_i^X\}^T \{\Phi_i^X\} \{\Phi_j^X\}^T \{\Phi_j^X\}} \quad (3.16)$$

### 3.5.3 Comparação direta

Para que seja possível aplicar métodos de ajuste de modelo, objetivando validá-lo, é necessário realizar uma comparação entre resultados numéricos e experimentais, que

pode ser de natureza quantitativa ou qualitativa. Alguns procedimentos comuns para se realizar o método, conforme [EWINS, 1984](#), são:

- Comparação entre frequências naturais teóricas e experimentais por meio de ferramentas estatísticas de correlação de dados, um gráfico com eixos que relacionem as duas medidas de naturezas distintas, onde o resultado para melhor correlação entre modelos é quando se obtém uma reta com inclinação de  $45^\circ$ ; o benefício desta técnica é que, não só se vê o nível de correlação entre os dois conjuntos de resultados, mas também a natureza das discrepâncias existentes. Para inclinações diferentes da especificada, consideram-se erros sistemáticos no sistema, já para pontos espalhados, pode-se assumir falta de correlação entre as medições;
- Comparar as FRFs experimentais e teóricas, por meio de gráficos superpostos, aplicando-se as taxas de amortecimento obtidas experimentalmente na FRF teórica;
- A comparação entre modos naturais pode ser feita de maneira qualitativa, onde pode-se sobrepor, utilizando ferramentas computacionais, os modos teóricos e experimentais da estrutura deformada. Além disso, pode-se tratar a comparação de maneira quantitativa, fazendo uso dos parâmetros de ortogonalidade e consistência de vetor modal (MAC).

### 3.6 *Toolbox* EasyMod para análise modal experimental

EasyMod é uma *toolbox open-source*, integrada ao MATLAB e Scilab, para realização de análise modal. Essa ferramenta possui uma série de funções que permitem a identificação dos parâmetros modais e suas subsequentes validações. Atualmente, têm-se disponíveis as funções que realizam os cálculos utilizando os métodos *Circle-Fit*, *Line-Fit* e *Least Square Complex Exponential*. Além disso, algumas funções relevantes são oferecidas para completar uma análise modal: operações na função de resposta de frequência (FRF), geração de FRF a partir de matrizes de massa, amortecimento e rigidez, critério M.A.C. e colinearidade modal ([KOUROUSSIS et al., 2012](#)).

Devido à praticidade e à confiabilidade do uso da ferramenta para a realização de extração de parâmetros modais de uma AME clássica, optou-se pelo seu uso no desenvolvimento deste trabalho. Os seguintes trabalhos utilizaram o EasyMod como ferramenta para extração de parâmetros modais [DOMINGUES et al. \(2017\)](#), [KRATTIGER et al. \(2016\)](#), [MOLINA-VIEDMA et al. \(2018\)](#), dentre muitos outros.

Um guia completo da utilização da ferramenta foi disponibilizado no trabalho de [KOUROUSSIS et al. \(2012\)](#), por onde é possível compreender a utilização da *toolbox* no que tange à sua ativação no MATLAB, toda a parte de pré-processamento e pós-processamento dos dados de entrada.

# 4 Resultados e discussões

## 4.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se um estudo de caso para determinação das funções de resposta em frequência de uma estrutura que é comumente utilizada na manufatura de protótipos para testes, que é a longarina principal tubular da asa, por meio de abordagens experimentais e numéricas. Com o estudo, mostra-se a convergência de resultados numéricos para diferentes níveis de discretização de elementos finitos, comparando-os com as soluções experimentais, apresentando também etapas para atualizar o modelo numérico de forma que seus resultados estejam em concordância com os experimentais.

Apresenta-se também a modelagem em elementos finitos da asa do protótipo confeccionado pela equipe Draco Volans Aerodesign, detalhando a composição e aspectos construtivos em comparação com as simplificações adotadas para o modelo numérico. Os resultados dos parâmetros modais para os primeiros modos do modelo são apresentados.

Em seguida, apresenta-se os procedimentos, execução e resultados do *Ground Vibration Testing* (GVT) realizado. A etapa final é propor um algoritmo de atualização de modelo numérico que aproxime-os aos resultados experimentais.

Todos os resultados numéricos apresentados foram obtidos por meio de um *notebook* Intel Core i7-5500U, 2.40 GHz, dispondo de 8 GB de RAM (DDR3), com sistema operacional Windows 10, utilizando-se o *software ANSYS Mechanical APDL 18.1 Academic*.

## 4.2 Estudo de caso: estruturas de longarina tubular

Na aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para análise de estruturas reais são diversos os componentes que apresentam comportamentos regidos por formulações de viga, casca, sólido, dentre outras. Dessa forma, como o objetivo é fazer uma representação aproximada de um corpo de característica contínua, sendo ele subdividido ou não, deve-se considerar dois aspectos de importância para análise: o tipo de elemento finito utilizado para descrever a estrutura e suas conexões, e a quantidade dos mesmos que deve ser empregada para aproximar suficientemente a resposta, como apresenta [BRAN-](#)

CHEAU (2015).

Seguindo esse aspecto, longarinas são vigas estruturais que fornecem rigidez à flexão e torção em asas, sendo os elementos que mais contribuem para essa característica, o que significa que devem ser capazes de suportar esforços distribuídos ao longo da asa, peso concentrado da própria estrutura e outros carregamentos que eventualmente são transmitidos (RAYMER, 2012). No âmbito do Aerodesign, é comum utilizar tipos de materiais com alta resistência específica para a confecção desse componente, dentre eles madeira balsa, espuma estrutural de alta densidade, materiais compósitos (fibra de vidro ou carbono), metais de baixa densidade (alumínio, por exemplo). Além disso, a geometria da seção (viga tubular circular, caixão, etc) é outro parâmetro de projeto levado em consideração, sempre visando maximizar a rigidez flexural/torcional e minimizar a massa do componente.

O presente estudo de caso objetiva verificar a aplicação da teoria desenvolvida para vibração lateral de vigas, pela abordagem numérica, associada a um procedimento experimental para determinação da FRF de aceleração por excitação transiente em um Corpo de Prova (CP) que representasse a estrutura de uma longarina principal com geometria e dimensões comumente utilizadas pela equipe Draco Volans na confecção de protótipos. Inicialmente faz-se um estudo em um material simplificado para validação do método (tubo de alumínio 6063, CP-01), e, posteriormente, analisa-se uma longarina laminada com fibra de carbono (compósito, CP-02).

Em ambos os casos definiu-se a condição de contorno livre-livre para análise, não restringindo nenhum grau de liberdade da estrutura, justificado pela facilidade de montagem do ensaio experimental.

#### 4.2.1 CP Alumínio 6063 - CP-01

O CP analisado é composto por um tubo de alumínio 6063 de seção circular com diâmetro, comprimento e espessura de parede apresentados na figura 17.

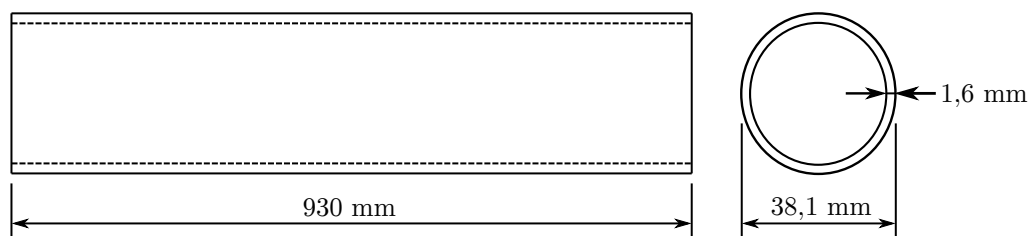


Figura 17 – Dimensões CP longarina principal

Ensaio de vibração transiente por meio da aplicação de um forçamento de impulso foram realizados nos CPs, em condição de contorno livre-livre (suspenso em espuma leve), como já especificado. O forçamento foi aplicado a partir de um martelo de impacto (modelo



086E80) e a aceleração medida utilizando-se um acelerômetro cerâmico uniaxial (modelo ICP® 352A21). Informações técnicas sobre os dois sensores encontram-se nos Anexos A.1 e A.2. O sensor e o martelo de impacto são conectados à placa de aquisição de dados (*hardware* modelo VIB-E-220) e, por meio do *software Polytec Vibrometer*, que contém o analisador FFT, pôde-se obter a FRF da excitação na estrutura, que, por conseguinte, nos possibilita determinar as primeiras frequências de ressonância da estrutura, que se aproximam da frequência natural da estrutura (RAO, 1986). Realizou-se um conjunto de 5 repetições de medição objetivando garantir consistência nos padrões de resposta de vibração, conforme recomenda AVITABILE (2017).

Para se realizar a medição, colou-se o acelerômetro, com cera especificada pelo fabricante, a uma distância de aproximadamente 10% do comprimento da viga, excitando-se na extremidade oposta, à mesma proporção de distância, utilizando-se um suporte para que a sucessão de impactos fosse realizada o mais próximo possível do mesmo ponto (garantindo coerência de análise). A medição realizada dessa forma tem a finalidade de poder identificar a maior quantidade de frequências de ressonância, tendo em vista a característica da matriz de receptância em representar a FRF de formas diferentes para pontos de excitação e coleta de dados distintos, de acordo com EWINS (1984). A figura 18 apresenta o *set-up* do ensaio.

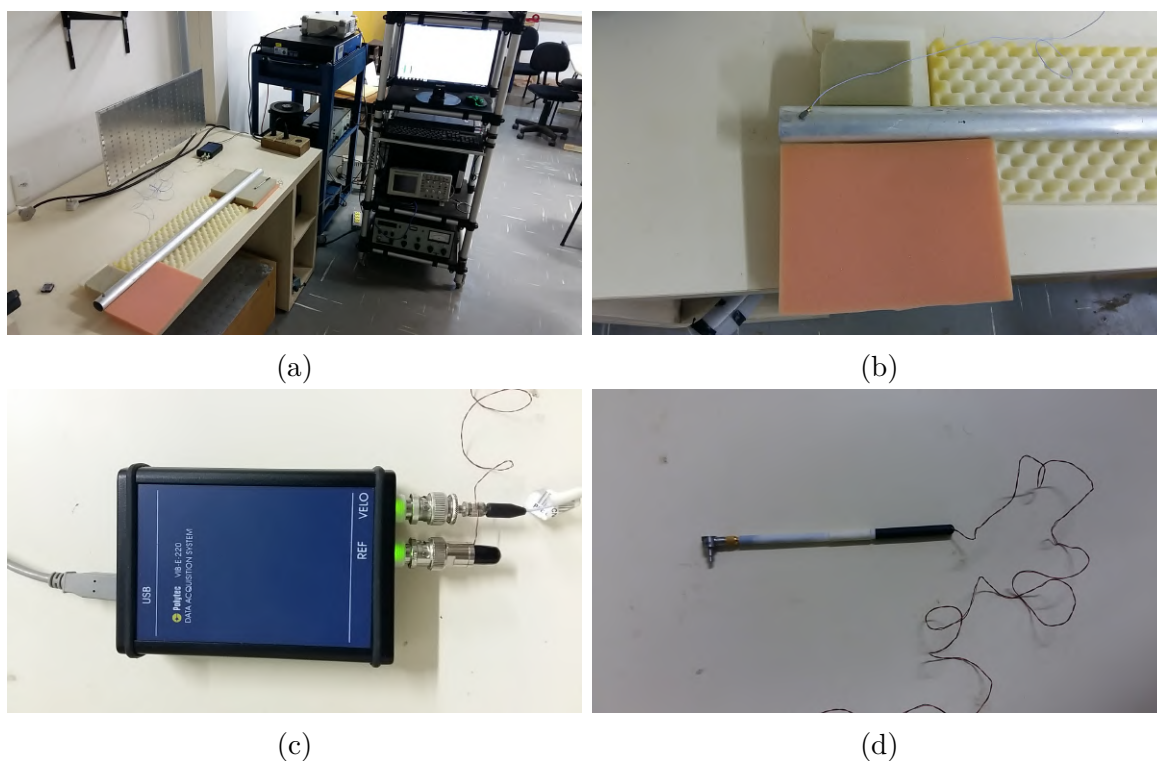


Figura 18 – (a) *Set-up* experimental para ensaio de vibração transiente livre-livre no CP-01, (b) Fixação do acelerômetro em uma extremidade do CP-01, detalhe na utilização da espuma nas laterais do tubo para evitar rotação do tubo, (c) Placa de aquisição de dados modelo VIB-E-220, (d) Martelo de impacto (modelo 086E80)

Os resultados do experimento (FRF e fase), para a média das medidas, são apre-

sentados na figura 19.

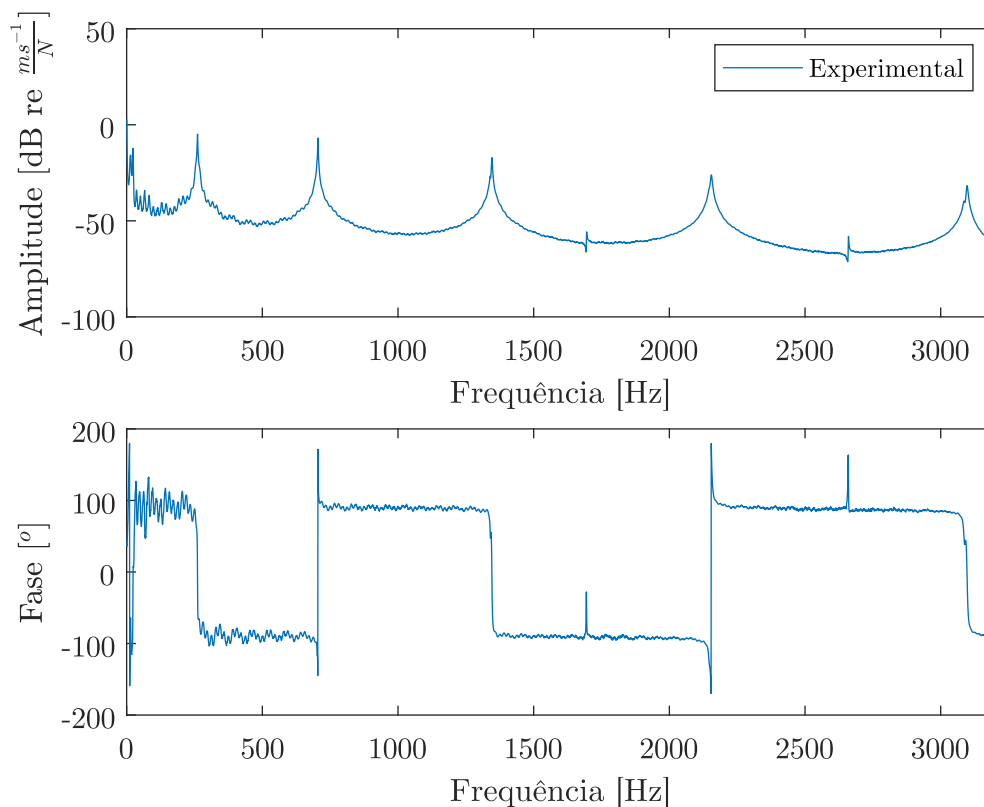


Figura 19 – FRF e fase para o CP-01

A partir da figura 19 as frequências de ressonância podem ser observadas nos picos de amplitude associada à visualização do gráfico de fase, que resulta em uma inversão em  $180^\circ$  quando ocorre a ressonância. A clareza do resultado é característica de materiais isotrópicos com baixo amortecimento estrutural, tal como o alumínio (MEVADA; PATEL, 2015). A tabela 3 resume os resultados obtidos.

Tabela 3 – Frequências de ressonância experimentais para o CP-01

Frequência de Ressonância	Experimental [Hz]
$\omega_1$	261.3
$\omega_2$	705
$\omega_3$	1346
$\omega_4$	2155
$\omega_5$	3098

A partir do ensaio foi possível observar que, na figura 19, há uma oscilação inicial na resposta em frequência, não sendo possível distinguir os dados. Isso deve-se principalmente pelo fato de que a excitação com o martelo de impacto apresentou um repique entre as três excitações realizadas no experimento.

Além disso, foi possível identificar 5 frequências de ressonância principais, representadas pelos maiores picos de amplitude. Entre os picos 3 e 4, e 4 e 5 observou-se o registro de um aumento local de amplitude. A hipótese para este fato, que foi confirmada a partir da visualização dos modos obtidos numericamente, são que esses picos caracterizam modos de torção da estrutura.

Por fim, após o 5º pico de amplitude que caracterizou bem a frequência de ressonância, observou-se perda de qualidade nos resultados, tornando-os inviáveis para determinação por inspeção visual. Uma hipótese para explicar esse fenômeno baseia-se no fato que a energia de impacto do martelo se dissipou por ação do amortecimento estrutural, reduzindo as amplitudes de aceleração captadas pelo acelerômetro (EWINS, 1984).

A determinação numérica dos parâmetros modais do CP-01 deu-se implementando a geometria apresentada acima, considerando as propriedades mecânicas listadas na tabela 4, na plataforma *ANSYS Mechanical APDL 18.1*.

Tabela 4 – Propriedades mecânicas alumínio 6063. Fonte: MATWEB (2018)

Propriedade	Valor
$E$ (GPa)	68,9
$\nu$	0,33
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2700

Como a estrutura pode ser caracterizada por uma viga devido ao seu índice de esbeltez maior que 30 (ANSYS, 2019), fez-se a análise numérica para um elemento de viga linear disponibilizado no pacote do *software* ANSYS APDL, cujas características são apresentadas na tabela 5.

Tabela 5 – Elemento finito analisado. Fonte: ANSYS (2009)

Elemento Finito	Descrição
BEAM188	Elemento linear (2 nós) 6 graus de liberdade em cada nó (translação e rotação)

Os resultados para as simulações de análise modal, comparando-se com a solução experimental e considerando-se o nível de discretização adotado (tabela 6) são apresentadas a seguir. São apresentados, adicionalmente, na figura 20 os modos vibracionais e frequências naturais obtidos para a simulação numérica, com a finalidade de se observar os deslocamentos nodais, sendo possível, então, caracterizar modos de flexão da viga.

Tabela 6 – Comparação entre frequências naturais para CP-01 obtidas experimentalmente e numericamente para o elemento BEAM188

Frequência	Experimental [Hz]	BEAM188	
		[Hz]	ERR%
1	261.3	265.58	1.64
2	705	716.41	1.62
3	1346	1362.4	1.22
4	2155	2168.8	0.64
5	3098	3103.5	0.18
<b>Número de EF para convergência do resultado</b>		186	

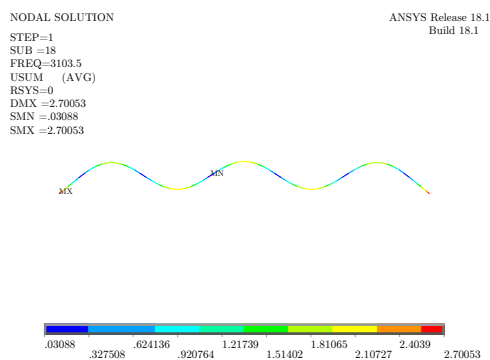
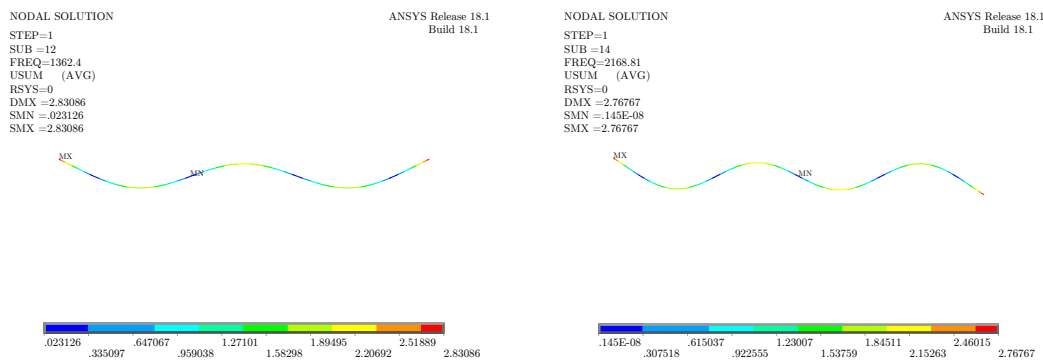
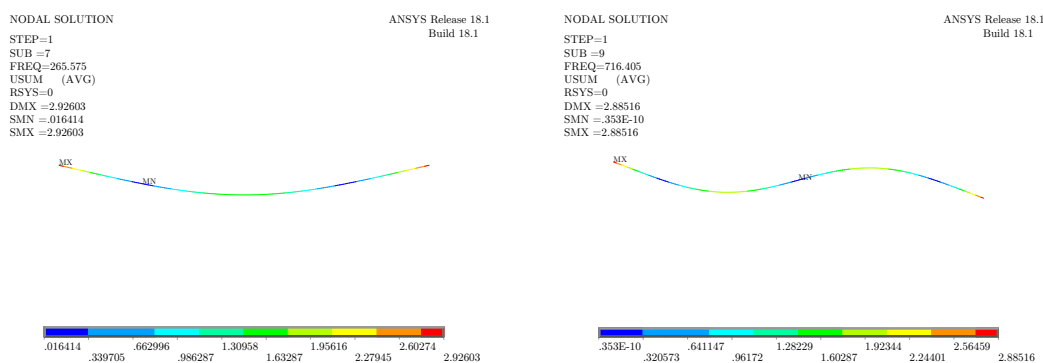


Figura 20 – Modos vibracionais numéricos do CP-01 em condição livre-livre

A fim de visualizar a proximidade dos resultados entre as funções de resposta em frequência experimental e numérica, realizou-se uma nova simulação numérica do CP-01, utilizando o elemento de linear BEAM188, com as mesmas condições de contorno e nível de discretização de malha para convergência de resultado com o referido elemento. Aplicou-se, agora, um forçamento harmônico de 0,35 N (valor próximo do utilizado no experimento), abrangendo o intervalo de frequência captado pelo ensaio experimental. A excitação foi aplicada em uma extremidade da viga, medindo-se a amplitude de resposta de aceleração transversal na extremidade oposta da viga.

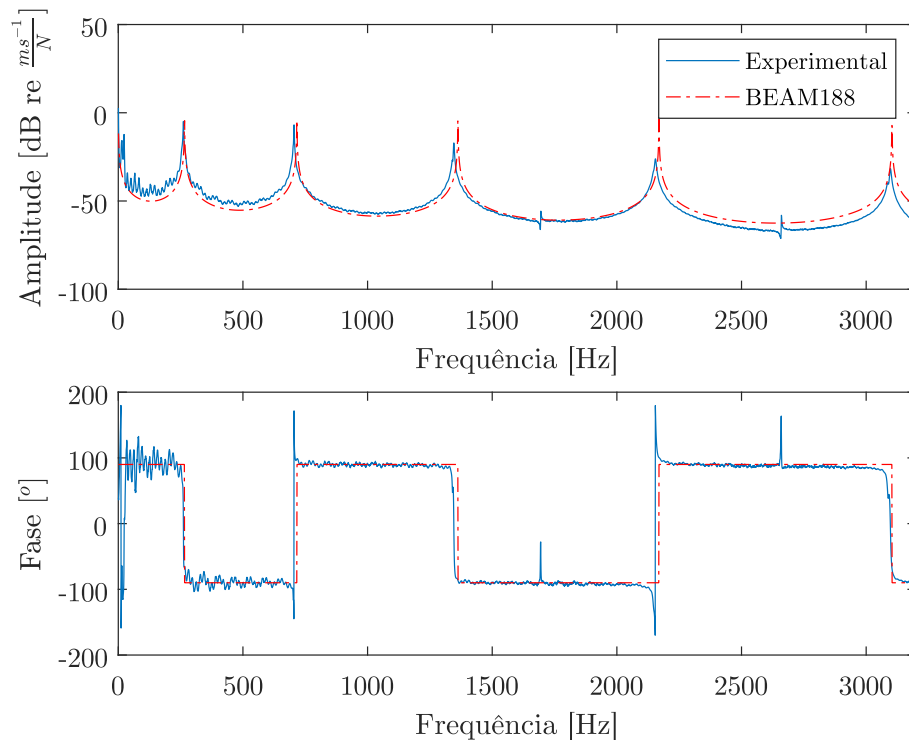


Figura 21 – Comparação entre FRF experimental e numérica (elemento BEAM188) para o CP-01

Acerca do estudo realizado foi possível concluir alguns aspectos. Observou-se que os maiores picos de frequência ressonância obtidos representam os modos de vibração flexural da viga, sendo que o pico que se localiza entre o a segunda e a terceira frequências de ressonância, de baixa amplitude, representa o primeiro modo de torção da viga.

Em relação à comparação entre as FRFs experimental e numérica, apresentadas na figura 21, pode-se concluir que houve uma diferença aparente na convergência dos resultados, isso deve-se ao fato de que não se implementou o amortecimento estrutural na simulação numérica, tratando-a, portanto, como um corpo não amortecido. Todavia, como apresenta a tabela 6, é possível observar que o erro máximo entre as frequências de ressonância (experimentais) e naturais (numéricas) assume o valor de 1,64%, aceitável para análises de engenharia.

Os valores de frequência natural podem ser utilizados para a determinação de pro-

priedades mecânicas, tais como o módulo de elasticidade do material, fazendo-se uso de alguma teoria de cálculo de deformações (viga, casca, placa, etc) cujas restrições da formulação se adequem à geometria analisada (RAO, 1986). Para o caso, pode-se utilizar a formulação de vigas de Euler-Bernoulli, apresentada no trabalho. Isola-se "E" na equação B.21, obtendo-o com os valores experimentais de frequência natural e massa específica, além da condição de contorno definida e dimensões da seção e do corpo (comprimento). Para o referente estudo de caso, o "E" médio entre as frequências de ressonância experimentais (que se aproximam das naturais da estrutura) resultou num valor de 68,7 GPa, que representa um erro relativo de 0,29% do valor que se tem em literatura (MATWEB, 2018), concluindo-se, então, que os resultados do ensaio foram precisos e acurados. Esse é um procedimento muito importante e que será utilizado frequentemente neste trabalho, principalmente no que tange à determinação de rigidezes equivalentes para modelagem de estruturas complexas, tais como os materiais compósitos e madeira balsa utilizados na confecção da aeronave.

#### 4.2.2 CP compósito - CP-02

O CP analisado é composto por um tubo laminado com fibra de carbono trançada *twill* e resina epóxi AMPREG A-26 SLOW, de seção circular com diâmetro, comprimento, espessura de parede, número de camadas e orientação de fibras apresentados na figura 22.

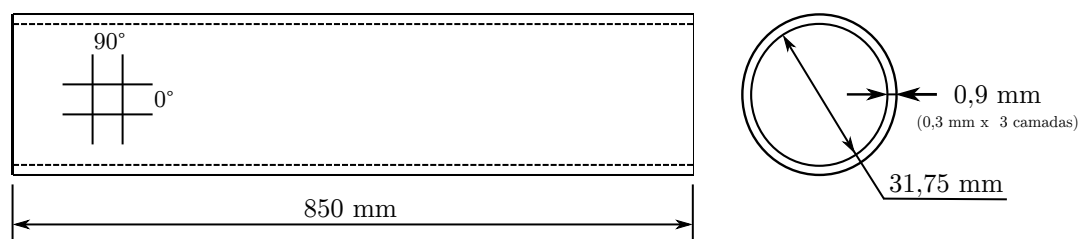


Figura 22 – Dimensões CP longarina compósita

Assim como no CP-01, realizou-se um ensaio de vibração por excitação transitente no CP-02, utilizando as mesmas condições de contorno empregadas anteriormente. Os equipamentos de ensaio também foram os mesmos, tal qual especificado na seção 4.2.1. Todos os procedimentos experimentais adotados foram os mesmos, com exceção do posicionamento do martelo de impacto, que teve de ser realizado a uma distância da extremidade de aproximadamente 30% do comprimento total da viga, devido à qualidade das medições não estarem adequadas em outros posicionamentos analisados. A figura 23 apresenta o *set-up* do ensaio realizado para o CP-02.

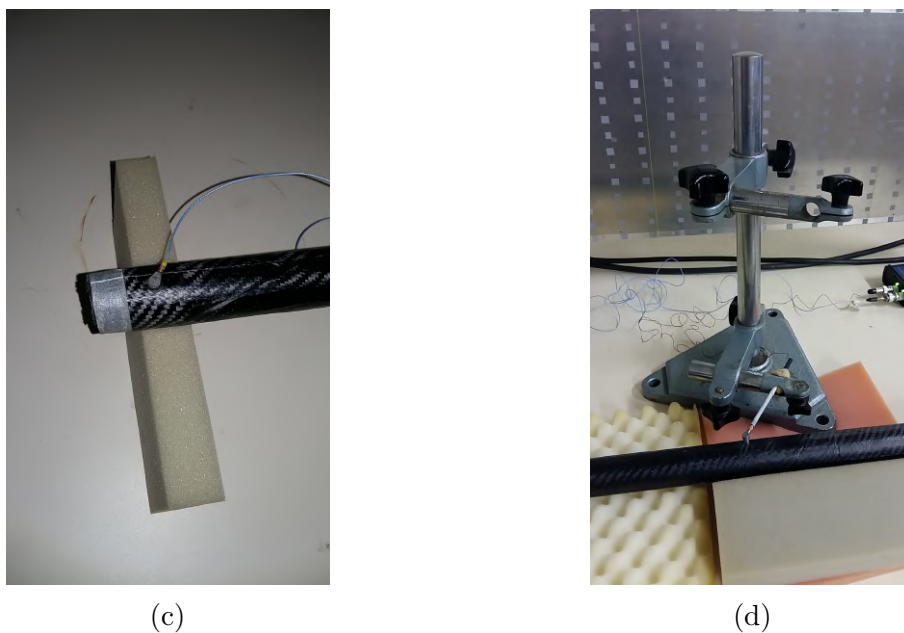


Figura 23 – (a) e (b) *Set-up* experimental para ensaio de vibração transiente livre-livre no CP-02, (c) Fixação do acelerômetro em uma extremidade do CP-01, (d) Detalhe de fixação do suporte para o martelo de impacto (modelo 086E80)

Os resultados do experimento (FRF e fase) são apresentados na figura 24. Nela é possível determinar as duas primeiras frequências de ressonância da viga analisada, que são apresentadas na tabela 7.

Tabela 7 – Frequências de ressonância experimentais para o CP-02

Frequência de Ressonância	Experimental [Hz]
$\omega_1$	288,8
$\omega_2$	746,3

Com base nos resultados do ensaio, a partir do terceiro pico de frequência de ressonância observou-se influência significativa do amortecimento estrutural do material compósito, impossibilitando a determinação dos valores de frequência de ressonância à frente. Uma possível solução para se obter melhores dados da FRF baseia-se na ideia de fornecer mais energia de impacto na estrutura, ou seja, aumentando o módulo do

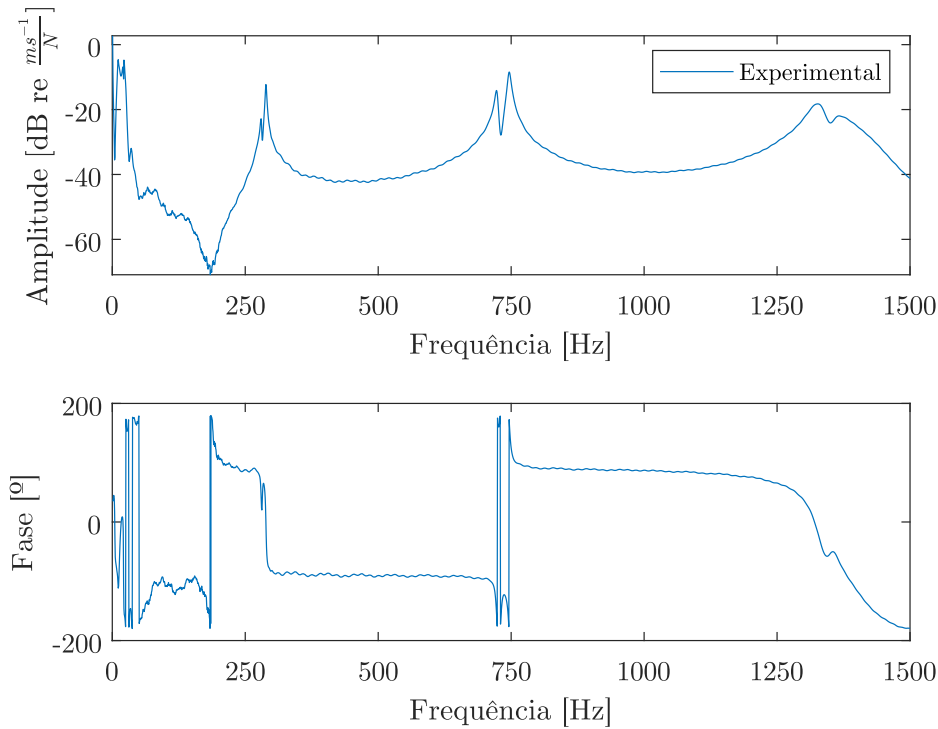


Figura 24 – FRF e fase para o CP-02

forçamento transiente aplicado ou utilizando outra forma de excitação, como por exemplo harmônico utilizando um *shaker*, como mostra AVITABILE (2017).

A partir da obtenção das frequências de ressonância (que se aproximam das naturais), realizou-se o procedimento de determinar o módulo de elasticidade equivalente da viga compósita para comportamento de flexão. O procedimento realizado foi o mesmo aplicado no estudo de caso do CP-01 (seção 4.2.1), obtendo um valor médio de rigidez equivalente, utilizado como parâmetro variável no processo de ajuste das FRFs experimental e numérica. A última foi obtida a partir de uma simulação onde aplicou-se um forçamento harmônico de 0,70 N, abrangendo o intervalo de frequência determinado pelo ensaio experimental. A iteração numérica seguiu até que se definisse um valor de erro relativo menor ou igual a 2% entre os picos de frequência de ressonância e as frequências naturais numéricas. O fluxograma apresentado na figura 25 resume o procedimento de análise para atualização do modelo numérico e obtenção da rigidez equivalente para estruturas de vigas.

Para o referente estudo, as rigidezes estimadas a partir das duas frequências naturais, considerando a geometria descrita na figura 22, assumem os valores apresentados na tabela 8.



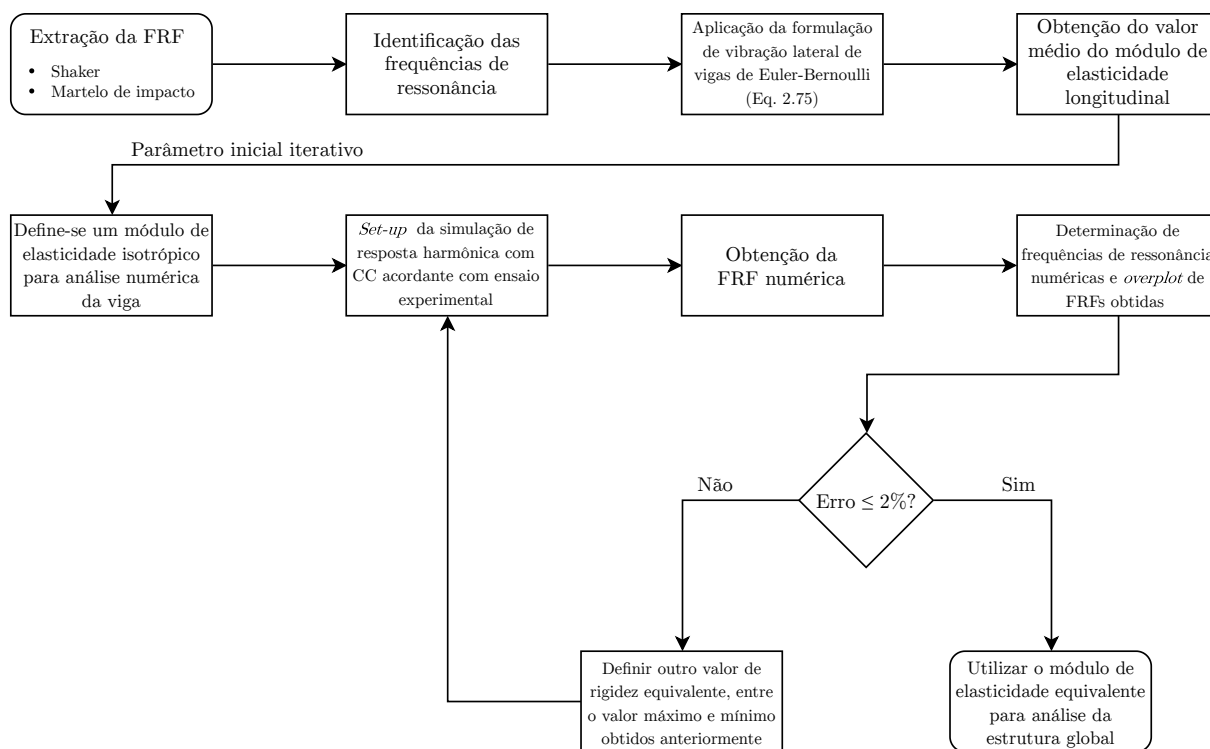


Figura 25 – Fluxograma de análise para atualização do modelo numérico e obtenção da rigidez equivalente para estruturas de vigas

Tabela 8 – Frequências de ressonância experimentais para o CP-02

Frequência de ressonância	Módulo de Elasticidade Equivalente Estimado [GPa]
$\omega_1 = 288,8$ Hz	24,95
$\omega_2 = 746,3$ Hz	21,93

A média entre os valores resultantes é 23,44 GPa, sendo este o parâmetro de aproximação inicial para as iterações. A etapa seguinte, de acordo com o fluxograma, é utilizar esse valor para realizar a simulação numérica, variando-o até que se adeque ao critério de parada estabelecido. Para o referente estudo, a rigidez que satisfaz os resultados equivale a 24,95 GPa, valor esse dentro do intervalo médio de análise, onde comparam-se os resultados numéricos e experimentais na tabela 9, de forma a visualizar a adequação ao critério de parada. A superposição das FRFs e fase numérica e experimental é apresentada na figura 26.

Tabela 9 – Comparação de frequências experimentais e numéricas para o CP-02

Frequência de ressonância (experimental) [Hz]	Frequência natural (numérica) [Hz]	Erro percentual
288,8	283,0	2,0%
746,3	747,0	0,094%

A partir do estudo foi possível concluir que apesar do CP-02 ser classificado como

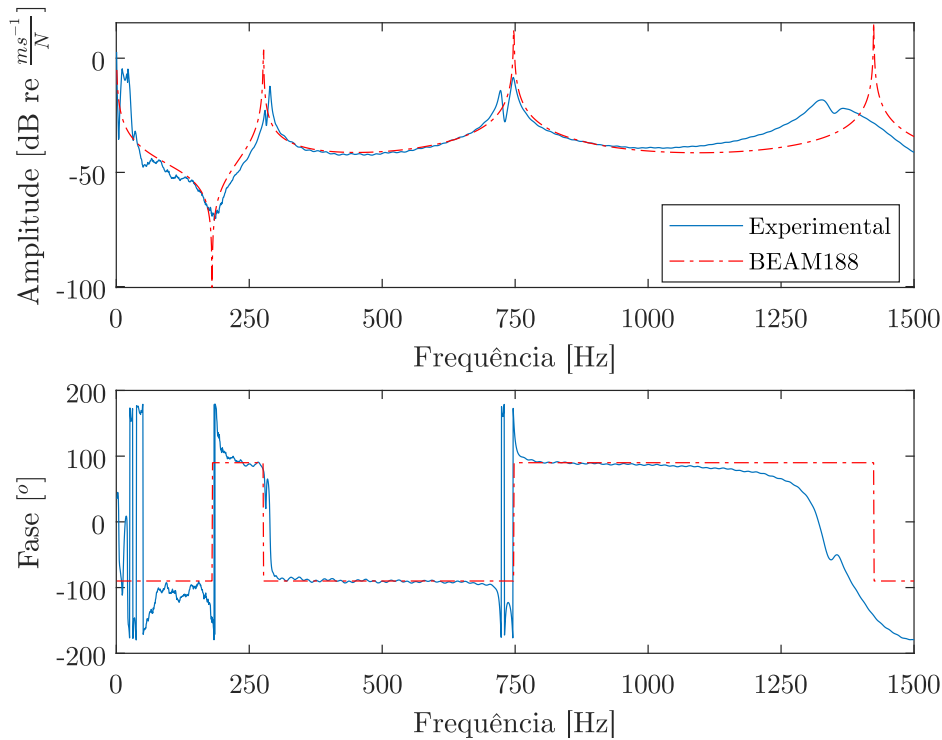


Figura 26 – Comparação entre FRF experimental e numérica (elemento BEAM188) para o CP-02

um material compósito ortotrópico (propriedades direcionais e planos de simetria do material (MENDONÇA, 2005)), observou-se boa convergência dos resultados experimentais e numéricos para as duas primeiras frequências naturais, fazendo-se uso do elemento BEAM188 e modelando-se o material como isotrópico, obtendo-se o maior erro percentual em 2%, para a primeira frequência de ressonância. Como o interesse da aplicação da longarina compósita é para analisar modos de baixa frequência de uma montagem global, pode-se afirmar que a simplificação é fiel à realidade, sendo então utilizada essa característica na confecção do modelo completo da aeronave.

### 4.3 Modelagem da asa protótipo

A aeronave projetada pela equipe Draco Volans, para atender às especificações estabelecidas no regulamento da XIX Competição SAE Aerodesign, assumiu um conceito de avião convencional, o qual apresenta vantagens de performance em diversas áreas em relação a outros conceitos de aeronave para o regulamento imposto. O projeto é composto por duas partes independentes, uma é a estrutura da fuselagem e *tailboom*, a outra é composta pela asa, objeto de estudo do trabalho. A seguir são apresentados detalhes construtivos, as propriedades dos materiais utilizados, a modelagem em elementos finitos e, finalmente, os resultados obtidos.

### 4.3.1 Detalhes construtivos e composição da estrutura

A estrutura da aeronave possui envergadura de 2126 mm, corda na raiz de 496 mm, corda na ponta de 291 mm e foi dimensionada objetivando resistir a situações críticas de carregamento em voo e pouso forçado, além de possuir um compartimento para acomodação da aviãoica embarcada e da carga transportada. São elementos que compõem a estrutura principal nervuras centrais de placas laminadas sanduíche de espuma estrutural e fibra de carbono, tubos de carbono pultrudados para as longarinas da ponta da asa, tubo de parede fina laminado com fibra de carbono bidirecional como longarina principal, nervuras e bordos de ataque e fuga em madeira balsa, além de uma parte do bordo de ataque ser confeccionado em isopor F7. O layout estrutural final é apresentado na figura 27. As dimensões principais da estrutura são apresentadas na figura 28. São listados e detalhados os componentes e suas localizações na asa, na tabela 10.

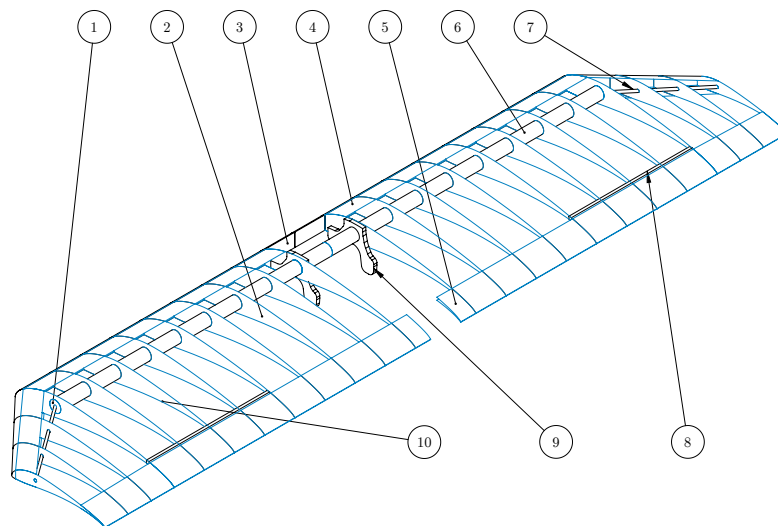


Figura 27 – Layout estrutural e detalhamento da asa projetada pela equipe Draco Volans Aerodesign

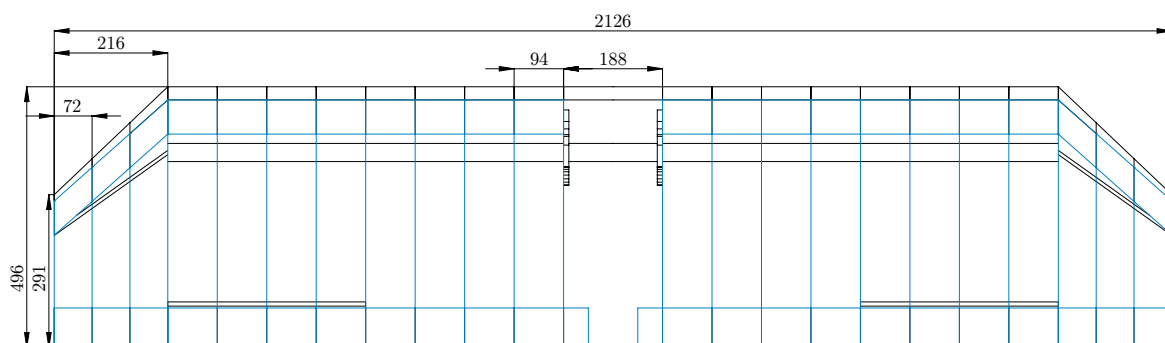


Figura 28 – Dimensões da asa projetada pela equipe Draco Volans Aerodesign

Tabela 10 – Detalhamento de componentes do protótipo

Item	Especificação
1	Bucha para encaixe da longarina secundária (espessura: 25 mm, 2 unidades)
2	Nervura em madeira balsa (espessura: 3 mm)
3	Bordo de ataque em isopor F7
4	Bordo de ataque em madeira balsa (espessura: 1 mm)
5	Bordo de fuga em madeira balsa (espessura: 1 mm)
6	Longarina principal (laminado fibra de carbono e resina epóxi)
7	Longarina secundária (tubo pultrudado de fibra de carbono - OD 8 mm ID 5,5 mm)
8	Longarina Aileron
9	Perfil central (2 unidades)
10	Servo Aileron (2 unidades)

O entelamento da asa é feito com plástico adesivo do tipo *MicroLite*. Todos os componentes da seção lateral são fixados por meio de cola de cura rápida *TEKBOND 793*, que preenche folgas de até 0,1 mm, de acordo com o fabricante ([TEKBOND, 2014](#)). Os componentes da seção central foram unidos por meio da aplicação de resina *AMPREG A-26 SLOW*, devido à sua maior resistência em comparação com a cola.

### 4.3.2 Modelo numérico desenvolvido

O objetivo agora é apresentar a confecção do modelo EF, baseando-se nas etapas de pré-processamento de uma simulação numérica ([ANSYS, 2009](#)). Posteriormente serão apresentados os resultados obtidos para os primeiros modos vibracionais.

#### 4.3.2.1 Pré-processamento do modelo

Resumem-se as propriedades mecânicas de rigidez e massa específica dos materiais que compõe a estrutura do protótipo na tabela 11. É importante ressaltar que a massa total de entelagem foi considerada junto da densidade utilizada para a madeira balsa. Realizou-se a suposição de que à cada nervura adiciona-se a massa de metade da seção de entelagem para cada lado. Obteve-se, dessa forma, uma densidade de balsa e entelagem integradas ao final.

Tabela 11 – Propriedades dos materiais

Material	Módulo de Elasticidade (GPa)	Massa específica ( $kg/m^3$ )
Madeira balsa (baixa massa específica) <sup>1</sup>	3,4	160
Entelagem Microlite <sup>1</sup>	-	200
Tubo-carbono pultrudado <sup>2</sup>	134	1500
TekBond <sup>3</sup>	-	1,05
Isopor F7 <sup>4</sup>	2,78	1050
Laminado carbono/epóxi (bidirecional)	24,95	969

<sup>1</sup> Dados obtidos a partir de ensaios realizados pela equipe

<sup>2</sup> Dados fornecidos pelo fabricante (ACP, 2018)

<sup>3</sup> Dados fornecidos pelo fabricante (TEKBOND, 2014)

<sup>4</sup> Dados fornecidos pelo fabricante (KNAUF, 2019)

Foram selecionados três tipos de elementos a serem utilizados, que são o BEAM188 (elemento linear - 2 nós - com 6 graus de liberdade em cada nó - translação e rotação), o SHELL181 (elemento quadrilateral - 4 nós - com 2 graus de liberdade em cada nó - somente translação) e o MASS21 (elemento pontual de massa estrutural com 6 graus de liberdade - translação e rotação). O último elemento foi associado a diferentes tipos de componentes tratados como massas pontuais na estrutura da asa, que são descritos na tabela 12.

Seções foram associadas a cada parte da geometria a ser desenhada. Uma simplificação implementada foi um estudo de equivalência de massa entre as nervuras de madeira balsa. As mesmas foram modeladas como seções retangulares contínua, onde manteve-se o comprimento e espessura iguais às da estrutura original, variando-se somente a altura da seção, mantendo constante a massa global do componente. O mesmo foi feito com o bordo de ataque confeccionado em isopor F7 (item 3, figura 27), agora estabelecendo uma seção quadrada para manter a massa equivalente do componente, uma para a seção reta e outra para a seção enflechada. A tabela 12 apresenta as seções utilizadas na modelagem.

Tabela 12 – Seções dos componentes estruturais da asa modelada

Componente	Elemento	Seção	Valor	Material
Longarina principal	BEAM188	Circular Vazada	17,275(RE) 17,025(RI) mm	Laminado carbono-epóxi
Longarina secundária	BEAM188	Circular Vazada	4(RE) 2,75(RI) mm	Fibra de carbono pultrudada
Isopor bordo ataque (seção reta)	BEAM188	Quadrada	24,865 × 24,865 mm	Isopor F7
Isopor bordo ataque (seção afilada)	BEAM188	Quadrada	12 × 12 mm	Isopor F7
Perfis seção reta	BEAM188	Retangular	28,99 × 3 mm (alt. × espess.)	Madeira balsa
Primeiro perfil afilamento	BEAM188	Retangular	24,77 × 3 mm (alt. × espess.)	Madeira balsa
Segundo perfil afilamento	BEAM188	Retangular	19,16 × 3 mm (alt. × espess.)	Madeira balsa
Terceiro perfil afilamento	BEAM188	Retangular	13,70 × 3 mm (alt. × espess.)	Madeira balsa
Longarina balsa Aileron	BEAM188	Quadrada	10 × 10 mm	Madeira balsa
Balsa bordo ataque e fuga	SHELL181	Casca	2 mm (Espessura)	Madeira balsa
Servo Aileron	MASS21	-	6 g	-
Bucha fixação longarina secundária	MASS21	-	10 g	-
Perfil central	MASS21	-	15 g	-

A tabela 13 traz a comparação entre a massa da estrutura real e a massa do modelo numérico desenvolvido, apresentando boa proximidade.

Tabela 13 – Comparação entre a massa real da estrutura e a massa obtida no modelo numérico

Massa medida (g)	Massa numérica (g)	Err%
645,60	644,78	0,13%

A geometria do modelo foi inteiramente feita dentro do *design modeler* do ANSYS APDL. Fazer a geometria dentro do *software* EF traz vantagens em relação ao fato de poder definir a numeração dos nós a serem gerados na malha de elementos, além de tornar a simulação menos custosa computacionalmente em comparação com uma importação de geometria em formato IGES, STEP ou PARASOLID (ANSYS, 2009). O segundo é um ponto de importância ímpar devido ao fato que a rotina desenvolvida será utilizada num algoritmo de iteração, que necessitará utilizar o ANSYS APDL como solucionador das equações de equilíbrio do MEF. Sendo assim, quanto menor o tempo de processamento da simulação, mais rápido a solução ótima será determinada. A figura 29 apresenta o modelo produzido com as seções e materiais associados.

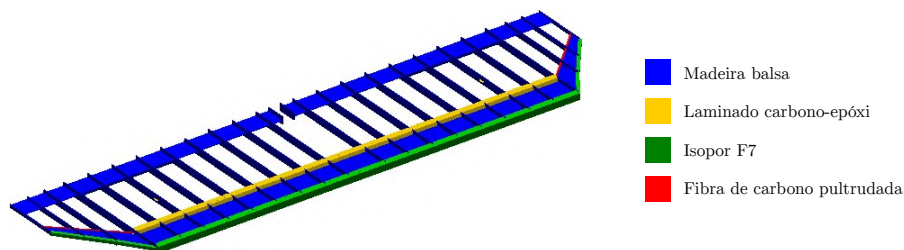


Figura 29 – Modelo EF finalizado para processamento no ANSYS

A etapa seguinte consiste na criação da malha de elementos finitos e estabelecimento do nível de discretização para convergência da resposta minimizando o custo computacional. Após um estudo de convergência de malha, os gráficos da figura 30 foram obtidos, chegando-se à conclusão que um total de 6031 nós são necessários para se convergir o resultado do modelo até a quarta casa decimal das frequências calculadas.

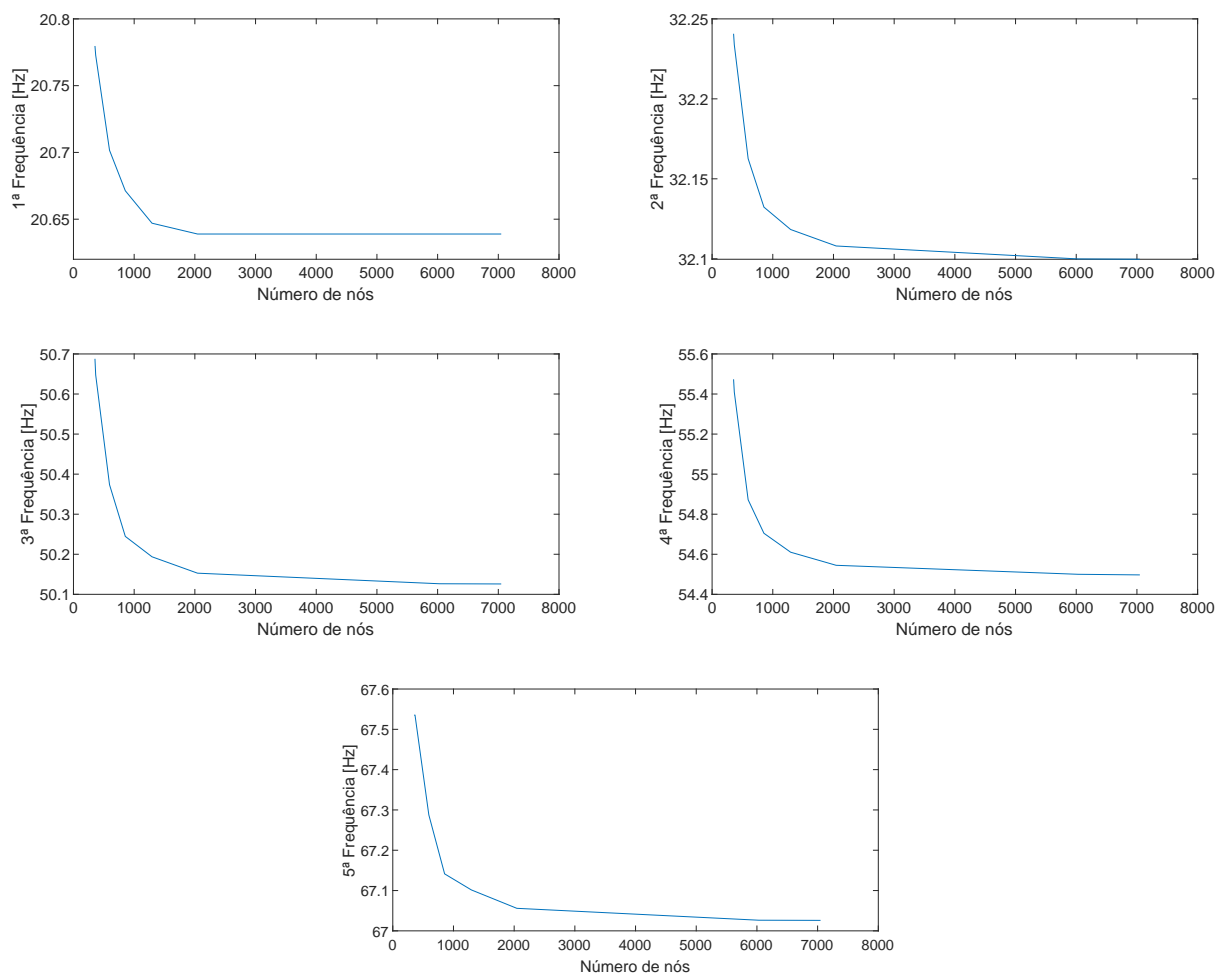
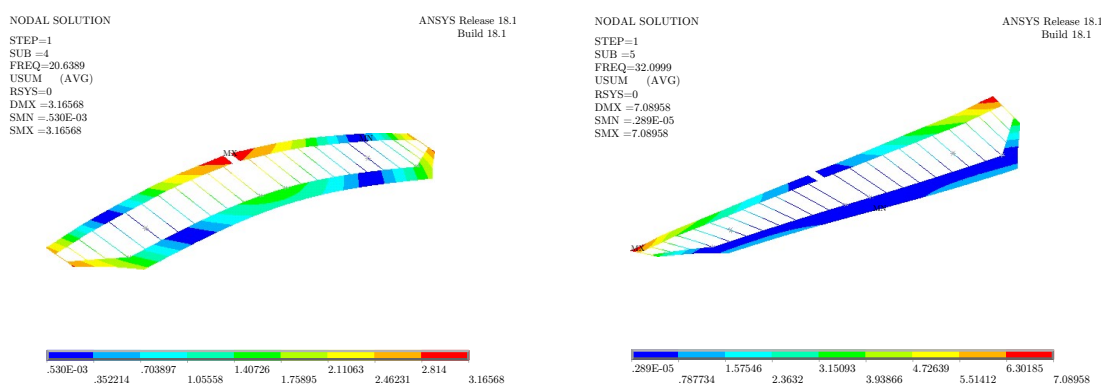


Figura 30 – Convergência de malha do modelo Asa DV-2017 para todas as frequências numéricas

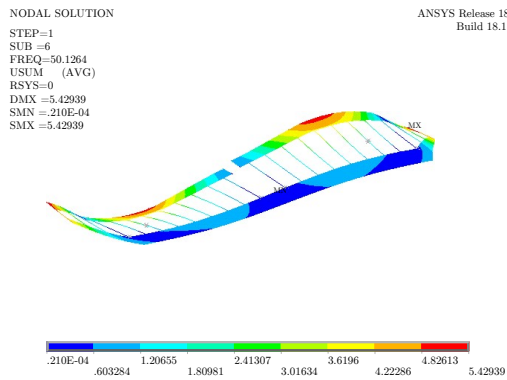
#### 4.3.2.2 Resultados numéricos

São apresentados os resultados para a análise modal numérica em condição de contorno livre-livre do modelo desenvolvido. Os modos identificados estão numa faixa de frequência de 0 a 70 Hz, e são resumidos também na tabela 14.

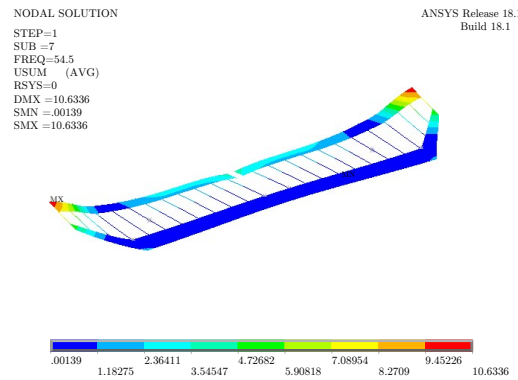


(a) Primeiro modo de flexão

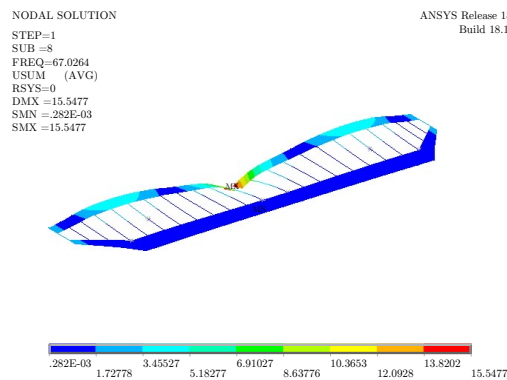
(b) Primeiro modo de torção



(c) Segundo modo de flexão



(d) Segundo modo de torção



(e) Terceiro modo de flexão

Tabela 14 – Resultados da análise modal numérica (de 0 a 70 Hz)

Modo Característico	Frequência [Hz]
Primeiro modo de flexão	20,6389
Primeiro modo de torção	32,0999
Segundo modo de flexão	50,1264
Segundo modo de torção	54,5000
Terceiro modo de flexão	67,0264

## 4.4 Análise experimental com *Ground Vibration Testing*

### 4.4.1 *Setup* do experimento

O *setup* para o GVT é apresentado nas figuras 32 e 33. Todas as especificações técnicas estão contidas no Anexo A. A asa DV-2017 foi suspensa por meio de espuma leve, de forma que a baixa rigidez do apoio não interfere na primeira frequência natural da estrutura, que está próximo de 11,7 Hz. Além disso, optou-se pela utilização da espuma para suspensão devido à facilidade de montagem e manuseio do experimento.

A força de excitação pode ser fornecida de diversas formas. Por exemplo, por meio do uso de um martelo de impacto, como já descrito anteriormente. Em contrapartida,



utilizar um *shaker* permite que se excite com um variado leque de possibilidades, como por exemplo uma varredura de seno. O impulso produzido pelo martelo promove somente uma excitação instantânea, enquanto que o *shaker* "persiste" na excitação por um determinado período de tempo. Outra vantagem da excitação por meio do *shaker* para essa estrutura consiste no fato de que pode-se fazer uma média com várias medições, reduzindo, portanto, o ruído da medição. Tendo conhecimento dos tipos de sinais de excitação fornecidos pelo *shaker*, o seno varrido (*chirp*) em escala logarítmica é uma opção interessante por ser um sinal contínuo que pode excitar tanto as baixas frequências da estrutura quanto as mais altas (AVITABILE, 2017). Dessa forma, a referida forma de excitação foi escolhida.

O experimento foi conduzido com excitações não simétricas na estrutura, fora da linha elástica da asa. Esses locais de excitação serão apresentados à frente no trabalho, na figura 36. Como os pontos escolhidos para excitar a estrutura foram em regiões com elevada rigidez, não houve influência da conexão com o *shaker* no experimento. Os nós de leitura de aceleração foram escolhidos sobre as nervuras da asa, sendo que cada nervura analisada teve 2 nós: um acima da longarina principal, o outro próximo ao bordo de fuga.

A figura 33 (a) apresenta a fixação do conjunto de excitação à estrutura, onde o *shaker* utilizado gera forças de até 18 N e possui uma faixa de frequências de 2 a 18000 Hz. O mesmo é conectado à estrutura da asa por meio de um *stinger* e de uma célula de carga. Inicialmente, a célula de carga modelo ICP® 208C01 é colada ao local de excitação utilizando-se cera. Esse processo garante que a superfície da asa não seja danificada durante o experimento. A célula de carga utilizada mede forças tanto de tração quanto de compressão e opera numa faixa de frequências de 0,01 Hz a 3600 Hz e amplitude variando entre  $\pm 44,5$  N. A seguir, o *stinger* é posicionado entre o *shaker* e a célula de carga. Sua função é transmitir somente carregamentos axiais à estrutura, reduzindo a possibilidade de inserir forças transversais. Esse é um detalhe importante para a correta excitação de uma estrutura complexa tal qual é a asa, pois isso pode interferir com a excitação de modos de interesse, como os de flexão e torção.

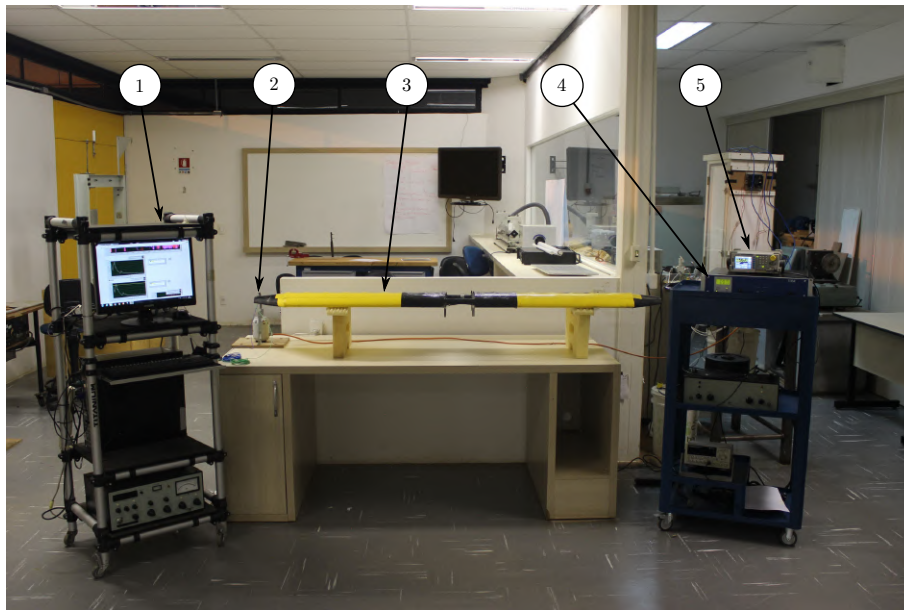


Figura 32 – Montagem do experimento. (1) Sistema de aquisição (*hardware* e LabVIEW), (2) Conjunto excitação (*shaker*) e resposta (acelerômetro e célula de carga), (3) Asa DV-2017 suspensa em espuma leve, (4) Amplificador de sinais TIRA vib BAA 60, (5) Gerador de sinais Minipa MFG-4205B

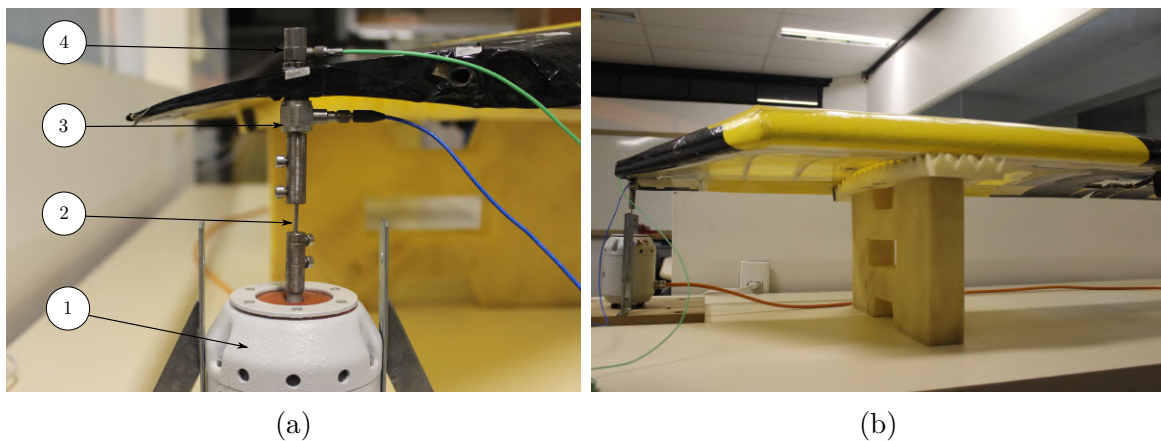


Figura 33 – (a) Detalhe fixação do conjunto de excitação. (1) *Shaker* Eletrodinâmico TIRA vib 50018, (2) Stinger, (3) Célula de carga ICP® 208C01, (4) Acelerômetro ICP® 352C33. (b) Detalhe na suspensão da asa por meio de espuma leve

#### 4.4.2 Procedimento

Utiliza-se dois dos quatro canais do *hardware* de aquisição de dados, como apresenta a figura 34. O canal 1 é utilizado para a entrada de dados da célula de carga (fio azul). O segundo canal é destinado para a entrada de dados do acelerômetro (fio verde). As medidas foram realizadas em 25 nós, numa malha distribuída sobre a superfície da asa, incluindo o ponto de excitação. A malha foi distribuída de forma que cada nervura tivesse dois pontos de medida, um sobre a longarina e outro no bordo de fuga. Com essa configu-

ração, a malha é capaz de registrar tanto modos de flexão quanto de torção (PEETERS; CLIMENT, 2008). A figura 35 apresenta a configuração adota.

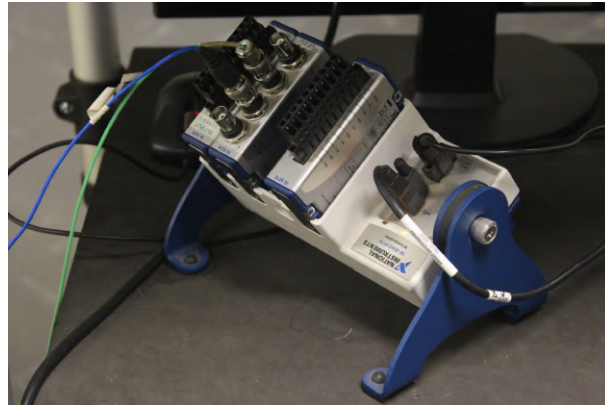
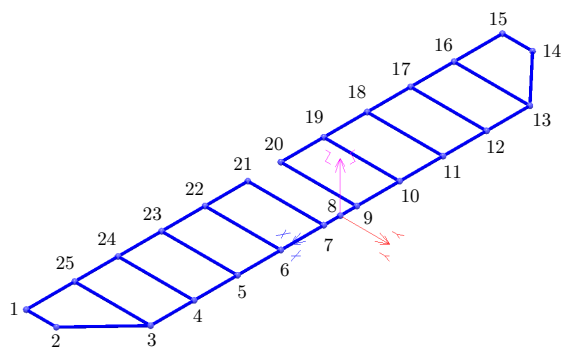
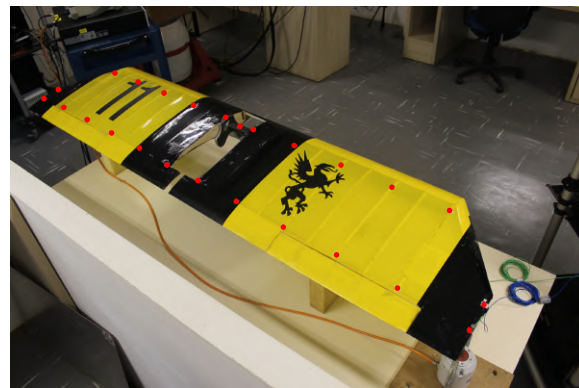


Figura 34 – Placa de aquisição de dados National Instruments NI cDAQ-9174 utilizada no experimento



(a)



(b)

Figura 35 – Malha nodal adotada para a estrutura da asa. (a) EasyMod (b) Experimental

Como procedimento adotado, antes do início de cada coleta de dados do GVT, a asa era submetida à vibração de entrada por um período de 10 segundos. Isso garante que efeitos transientes de vibrações sejam superados pelo regime permanente de operação. Os experimentos iniciais realizados introduziram um sinal de varredura linear de seno, abrangendo um espectro de frequências de 2 a 500 Hz, com duração de 1 segundo. Entretanto, com o refino do experimento, observou-se a necessidade de aumentar o tempo de duração do sinal, mudar o tipo de varredura de linear para logarítmica e diminuir a faixa de frequência objetivando aprimorar a qualidade dos dados. Por se tratar de uma estrutura leve, porém com grandes dimensões, as primeiras frequências previstas são baixas (INMAN, 2001). O uso da varredura logarítmica permite que as baixas frequências sejam excitadas por um período maior de tempo. A diminuição do espectro de frequências de entrada segue a mesma ideia. Essas alterações resultaram em dados com menos ruído e uma medição mais precisa, conforme especificado em GUPTA; SEILER (2016). Assim, o sinal de entrada adotado foi um seno com varredura logarítmica, abrangendo um espectro de frequências de 2 a 150 Hz, com duração de 4 segundos.

Outra alteração feita está relacionada com o posicionamento das espumas de suspensão da asa. Nos ensaios iniciais, as mesmas encontravam-se próximas ao centro da asa. Isso causava um desequilíbrio na movimentação, resultando num constante descolamento do conjunto de excitação da estrutura, sendo então necessário parar o ensaio diversas vezes. A solução adotada foi espaçar as espumas, aproximando-as da metade da envergadura dos ailerons, como pode ser observado na figura 33 (b).

Diversos posicionamentos de excitação e medida de resposta foram testados, de forma a melhorar a qualidade dos resultados e permitir excitar a maior quantidade de modos. Dois nós de excitação mostraram-se mais adequados, o primeiro deles sendo o **nó 1** (bordo de fuga da extremidade direita da asa) e o segundo sendo o **nó 9** (acima do perfil central esquerdo). Como será apresentado à frente, excitando no **nó 1** foi possível obter os modos de 1º, 2º, 3º de flexão e 1º de torção. Já excitando no **nó 9**, foi possível excitar o modo de 2º de torção. A figura 36 apresenta os nós selecionados.

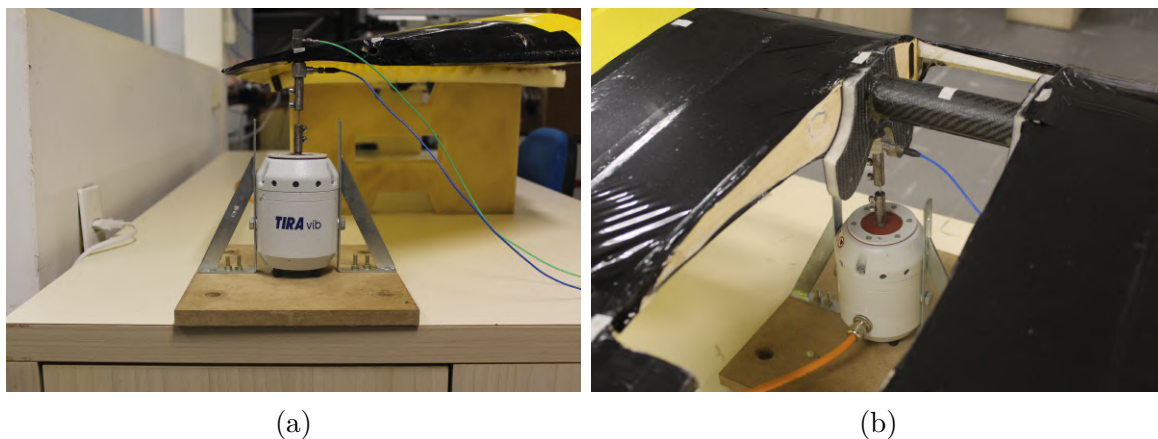


Figura 36 – Detalhe na fixação do *shaker* nos nós 1 (a) e 9 (b)

O experimento completo, portanto, consiste num GVT com 25 medições realizadas sucessivamente. A duração de cada ensaio foi de aproximadamente 2 minutos. Procurou-se manter a mesma excitação para todos os nós, de forma a garantir constância nos resultados. Os dados coletados são tratados por meio do analisador FFT do *software* LabVIEW, como foi apresentado no esquema da figura 37. A FRF e a função de Coerência são salvos em arquivos de texto individuais e posteriormente tratados na *toolbox* EasyMod, dentro do *software* MATLAB, por onde são extraídos os parâmetros modais.

#### 4.4.3 Aquisição de dados

A aquisição de dados deu-se por meio da utilização de dois sensores: uma célula de carga ICP® 208C01 e um acelerômetro ICP® 352C33. O primeiro sensor possui sensibilidade de 112,41 mV/kN, alcançando uma faixa de medição de 0,01 a 36000 Hz. O segundo sensor possui sensibilidade de 10,2 mV/(m/s<sup>2</sup>), alcançando uma faixa de medição

de 0,5 a 10000 Hz. Demais especificações técnicas relevantes dos sensores e equipamentos utilizados, de forma a tornar o experimento reproduzível, encontram-se no Anexo A.

De forma a dispor dos dados no domínio da frequência utilizou-se um analisador FFT, disponível no *software* LabVIEW. A figura 37 apresenta o diagrama de blocos desenvolvido para a entrada de dois sinais, um caracterizado pela grandeza de aceleração, o outro pela grandeza de força. Além da FRF, também obtiveram-se as funções de fase (*Phase*) e coerência (*Coherence*). A figura 38 apresenta o *setup* do analisador, onde considerou-se a saída da Magnitude em dB, a saída da Fase em graus, janelamento do tipo *Hamming*, e a utilização de média RMS com ponderação exponencial dos sinais obtidos. Foi adotado um total de 10 sinais para cálculo da média por ensaio. A taxa de amostragem utilizada para os sensores foi de 1,024k dados por segundo, sendo definido um total de 4,092k dados a serem medidos. Portanto, a partir dessa configuração adotada, cada sinal de análise teve a duração total de 4 segundos.

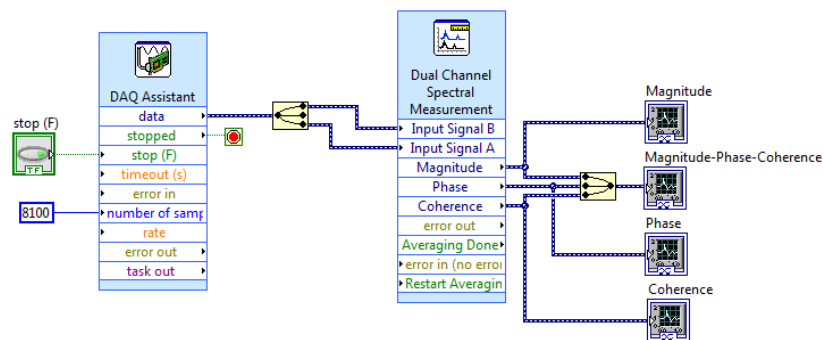


Figura 37 – Diagrama de bloco da aquisição e filtragem dos dados (analisador FFT) no *software* LabVIEW

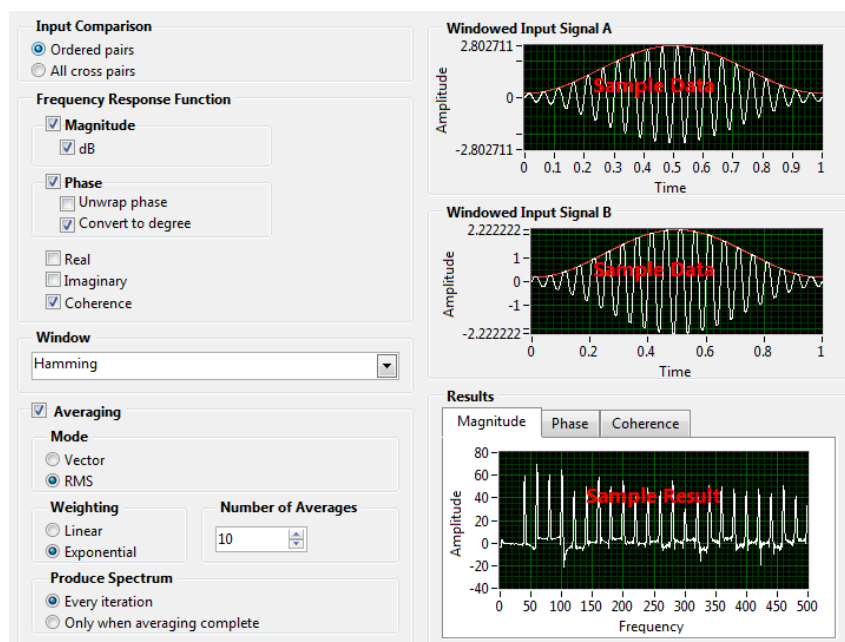


Figura 38 – Configuração da filtragem de dados experimentais no *software* LabVIEW

#### 4.4.4 Pós-processamento dos dados

Com os dados experimentais em mãos, essa etapa consiste em utilizar o EasyMod e suas funções implementadas de forma a extrair os parâmetros modais, seguindo-se KOU-ROUSSIS et al. (2012). O fluxograma da figura 39 apresenta as etapas de configuração para obter os parâmetros modais e aplicar o critério M.A.C. para correlação dos modos vibracionais obtidos.

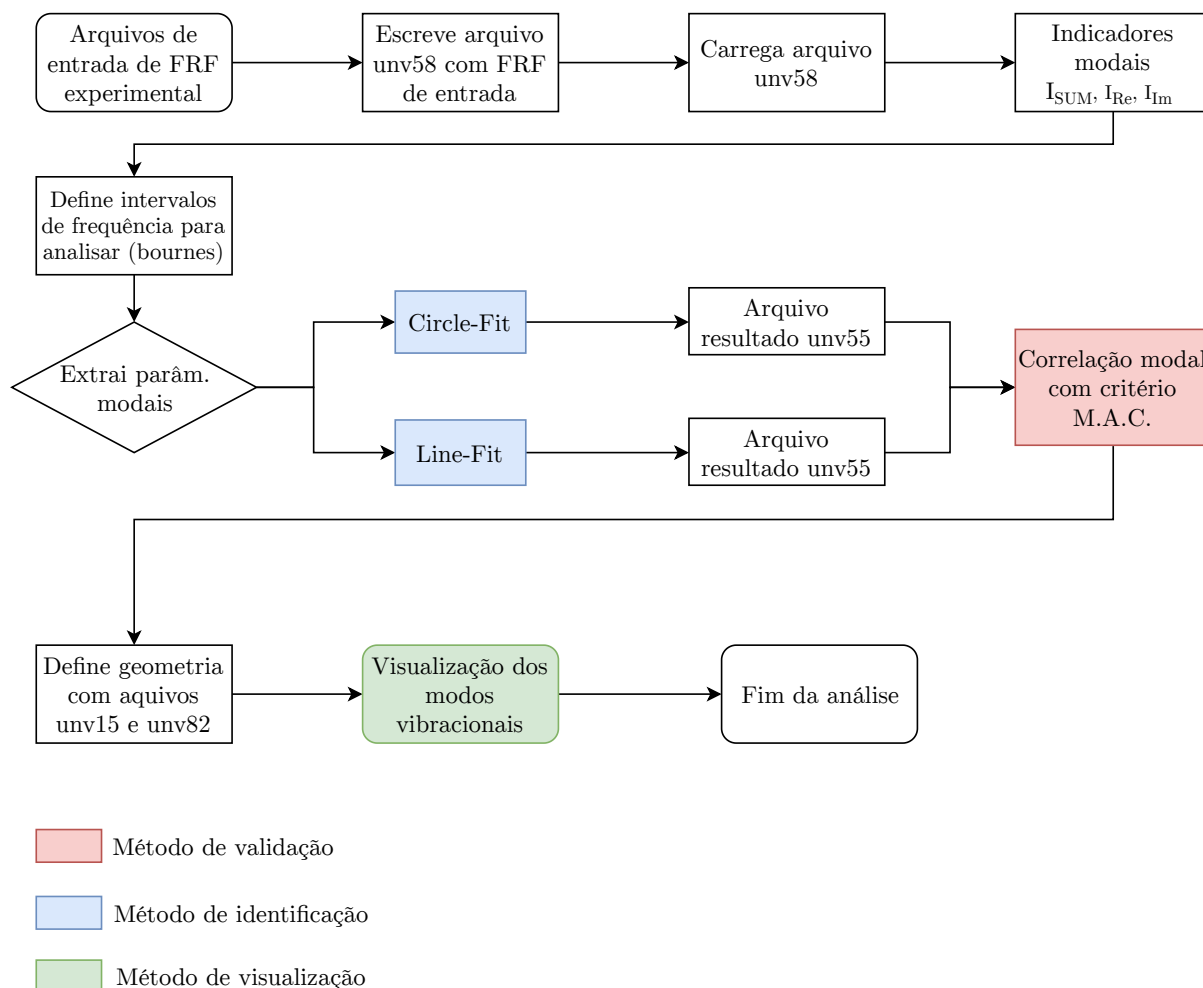


Figura 39 – Fluxograma de pós-processamento utilizando a *toolbox* EasyMod

#### 4.4.5 Resultados experimentais

Um resumo dos resultados experimentais obtidos a partir do GVT é apresentado nessa seção.

A fim de observar a qualidade dos resultados obtidos experimentalmente, um exemplo de espectro de resposta foi plotado em gráficos de magnitude (acelerância), fase e coerência para uma excitação e resposta obtidos no nó 1, na figura 40.

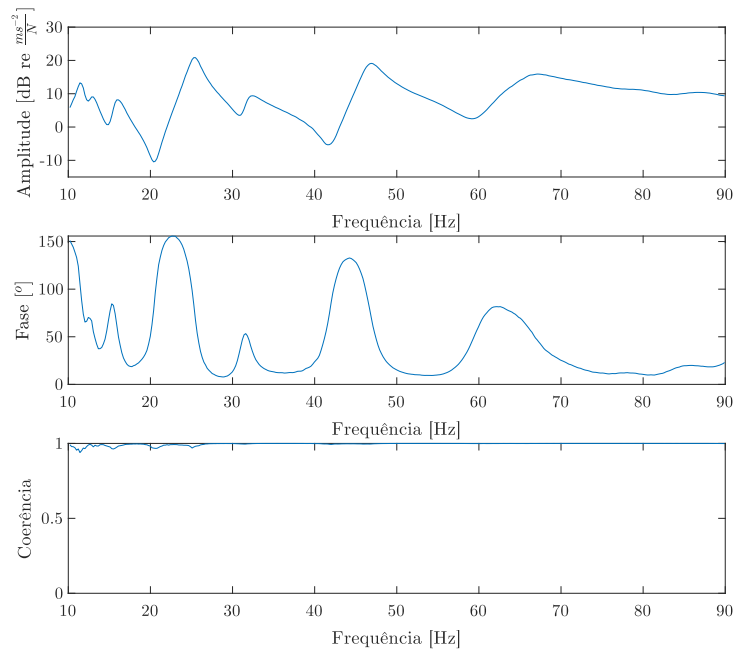


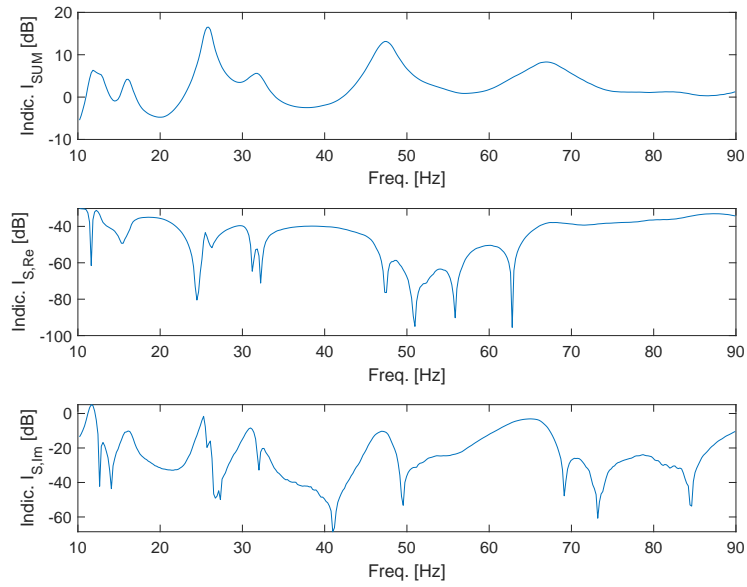
Figura 40 – Funções de resposta em frequência (magnitude, fase e coerência) para excitação e resposta sob o nó 1

Observa-se que, na figura 40, após a frequência de 70 Hz o amortecimento domina muito a resposta da estrutura, atenuando o pico de frequência de ressonância, o que resulta numa dificuldade em estimar parâmetros modais a partir desse valor de frequência.

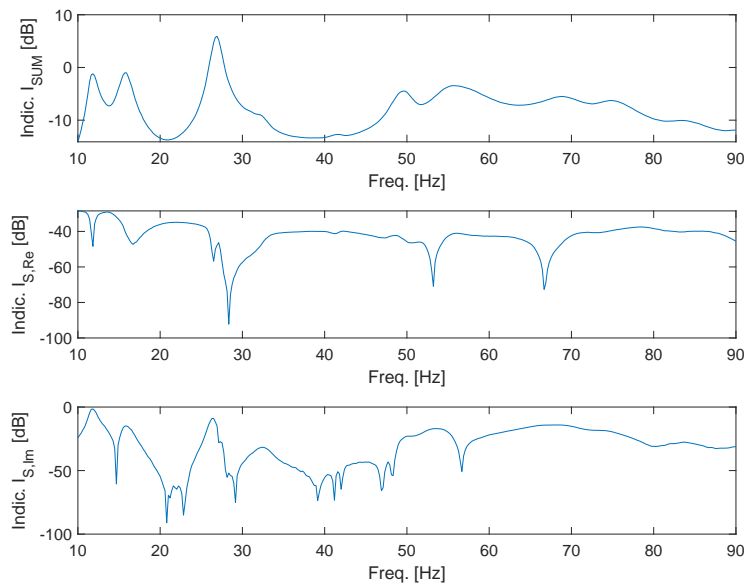
Como foi descrito anteriormente, ambos os métodos Line-Fit e Circle-Fit foram utilizados para fazer a extração dos parâmetros modais. A partir do gráfico de indicadores modais, que é apresentado na figura 41, pode-se determinar os intervalos de frequência a serem analisados pelos métodos de extração modal. A tabela 15 mostra os intervalos considerados para análise.

Tabela 15 – Intervalo de frequência analisado para extração de parâmetros modais

Nó de excitação	Intervalo de frequência [Hz]
1	11,21 - 13,46
1	15,29 - 16,72
1	23,24 - 28,25
1	29,77 - 33,85
1	43,23 - 50,16
9	53,42 - 58,11
1	61,99 - 71,16



(a)



(b)

Figura 41 – Indicadores modais. (a) Excitação nó 1, (b) Excitação nó 9

A figura 42 contém a visualização dos modos vibracionais obtidos a partir do método Line-Fit. Ambos os métodos utilizados retornaram valores similares de frequência e taxa de amortecimento, como apresenta a tabela 16.



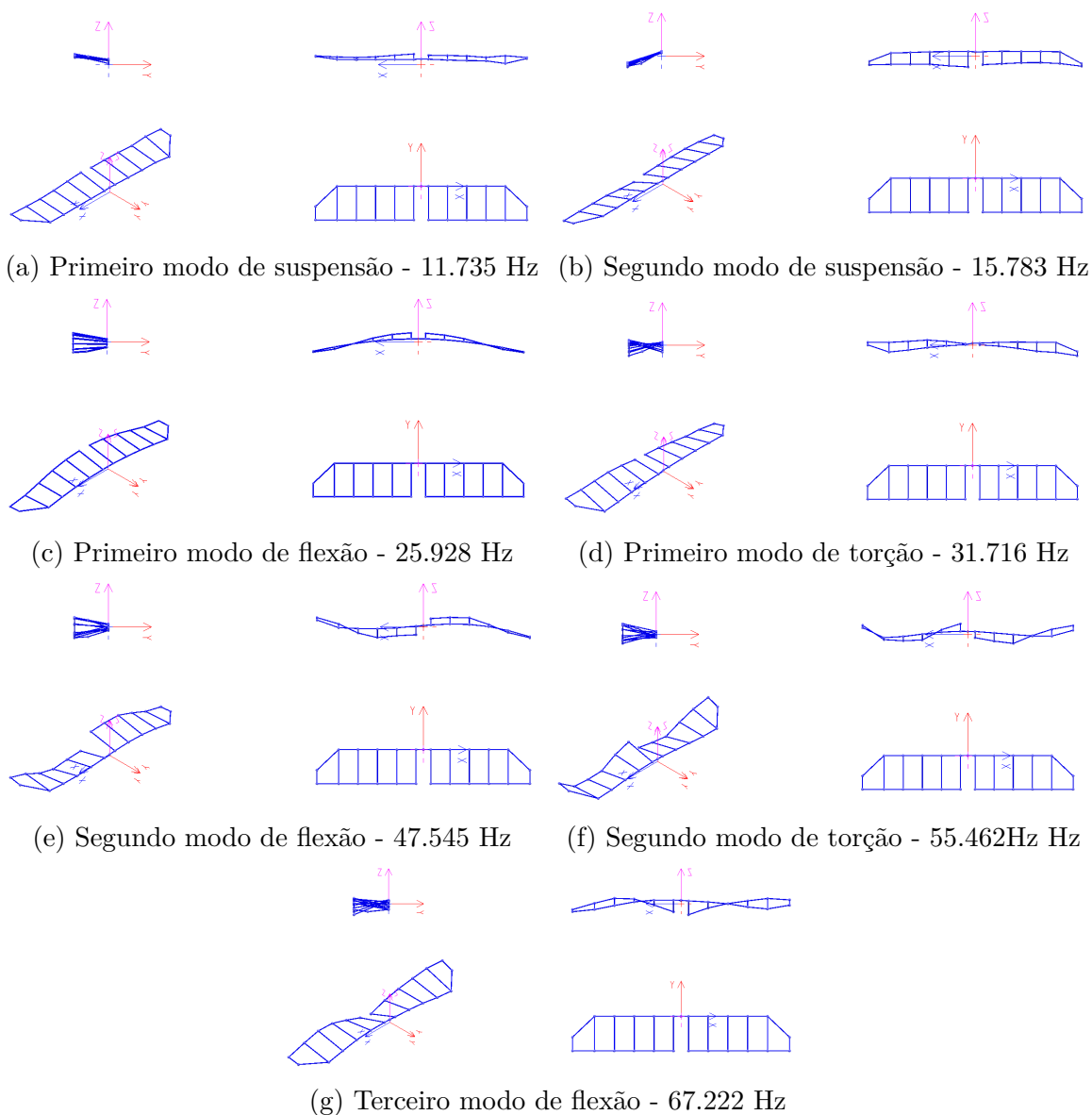


Figura 42 – Visualização dos 7 primeiros modos vibracionais identificados pelo método Line-Fit

Tabela 16 – Resumo dos resultados experimentais

Nº Modo	Descrição do Modo	Frequência Line-Fit [Hz]	Taxa amortecimento [%]	Frequência Circle-Fit [Hz]	Taxa amortecimento [%]
1	1º suspensão	11,735	4,39	11,945	4,85
2	2º suspensão	15,783	5,15	16,006	4,21
3	1º flexão	25,928	1,53	25,900	1,58
4	1º torção	31,716	2,74	31,790	3,18
5	2º flexão	47,545	2,29	47,504	2,25
6	2º torção	55,462	4,42	55,491	4,54
7	3º flexão	67,222	4,53	67,076	4,37

Os modos identificados apresentaram formato semelhante aos modos simétricos e assimétricos fundamentais de flexão e torção, como era esperado. De forma a verificar a correlação entre os modos obtidos pelos métodos Line-Fit e Circle-Fit, utilizando o critério M.A.C., foi plotado o gráfico da figura 43. Apesar de pequenas perdas de correlação na

matriz, observa-se excelente correlação modal, pois os dados aproximam-se da matriz identidade (ALLEMANG, 2003).

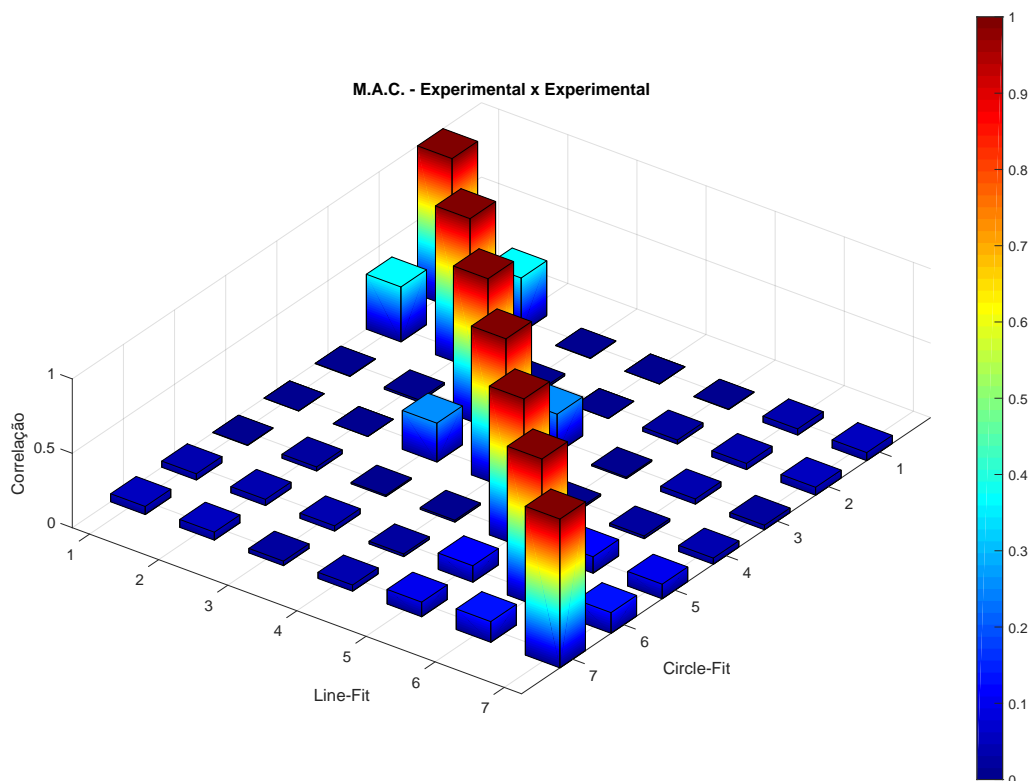


Figura 43 – Matriz M.A.C. Experimental - Experimental da Asa DV-2017, comparação entre Circle-Fit e Line-Fit

## 4.5 Ajuste do modelo numérico

A etapa final do trabalho é relacionada ao desenvolvimento e implementação de um algoritmo para calibrar o modelo EF com os resultados experimentais. Para o caso sendo analisado, optou-se por variar os parâmetros de módulo de elasticidade dos quatro materiais principais que compõe a asa do protótipo, como apresenta a tabela 17. As variáveis que serão utilizadas para comparação com os resultados experimentais serão as primeiras frequências naturais (entre a faixa de 0 a 70 Hz).

Tabela 17 – Seleção de parâmetros para atualização

Parâmetros utilizados (Módulos de Elasticidade)	
$E_{carbono}$	Fibra de carbono laminada com resina epóxi
$E_{pultrudado}$	Fibra de carbono pultrudada
$E_{balsa}$	Madeira balsa de baixa densidade
$E_{isopor}$	Isopor F7

## 4.5.1 Algoritmo implementado

O fluxograma da figura 44 apresenta o algoritmo implementado. Os dados de entrada para o algoritmo são as frequências naturais experimentais, estimadas a partir do EasyMod, e os módulos de elasticidade de cada material utilizado na composição da estrutura. O segundo parâmetro de entrada foi definido como um vetor de dados (para cada módulo de elasticidade) com valores crescentes linearmente a partir de uma discretização adotada. Os intervalos utilizados encontram-se na tabela 18, contendo também a quantidade de termos de cada vetor. É importante ressaltar que a escolha do intervalo procurou centralizar o valor médio das propriedades mecânicas obtidas experimentalmente ou por meio de *datasheets* apresentados anteriormente no trabalho.

Tabela 18 – Discretização dos parâmetros para ajuste do modelo

Parâmetros	Valor inicial (GPa)	Valor final (GPa)	Discretização (GPa)	Total de elementos
$E_{\text{carbono}}$	10	40	2	16
$E_{\text{pultrudado}}$	10	40	2	16
$E_{\text{balsa}}$	1	5	0.25	17
$E_{\text{isopor}}$	1	5	0.25	17
<b>Número total de iterações</b>				<b>73984</b>

Observa-se que o total de iterações realizadas no algoritmo foi de 73984. Para ser executada, cada iteração levava aproximadamente 6,5 segundos. Portanto, foi necessário um tempo aproximado de 133 horas e 36 minutos para todos os casos serem analisados. Devido ao alto custo computacional do algoritmo empregado, a otimização do código e paralelização de processamento são fatores importantes a serem implementados futuramente.

Em sequência do método implementado, a etapa seguinte é a entrada na parte iterativa do algoritmo. Cria-se um arquivo de texto (denominado "PARAMETERS.txt") com as informações dos parâmetros a serem ajustados. Seus valores são chamados por uma rotina *macro* em linguagem APDL que modela uma análise modal e, em seguida, o ANSYS APDL executa-a e a soluciona. As primeiras frequências naturais são determinadas e armazenadas num arquivo texto de saída, denominado "RESULTS\_OUTPUT\_ANSYS.txt". As frequências de saída são armazenadas em um vetor, dentro do código MATLAB, e são individualmente comparadas com as frequências experimentais por meio de um erro percentual (Err % no fluxograma 44). O resultado dessa comparação é armazenada dentro de uma matriz de erro percentual (variável criada) para cada iteração realizada. Após isso, os parâmetros iniciais são incrementados de acordo com a discretização linear adotada e o processo reinicia até que todas as iterações sejam calculadas.

Quando todas as iterações são realizadas, a parte iterativa é finalizada e parte-se para a determinação do resultado mais adequado dentro do espaço amostral. Para isso,

utiliza-se a formulação da média linear de amostras, dada pela equação 4.1.

$$\mu = \frac{\sum |Err_i|}{N} \quad (4.1)$$

Onde  $\mu$  é média linear para cada coluna da matriz de erro percentual,  $Err_i$  é o erro percentual para as linhas de uma coluna específica da mesma matriz e, finalmente,  $N$  é o número de elementos de cada coluna, que são 5 unidades de frequências.

A etapa seguinte é determinar a menor média dentro do espaço amostral calculado. Feito isso, o resultado é apresentado na tela para o usuário. São dispostos o valor da média, os módulos de elasticidade atualizados e os erros percentuais associados a cada frequência natural.

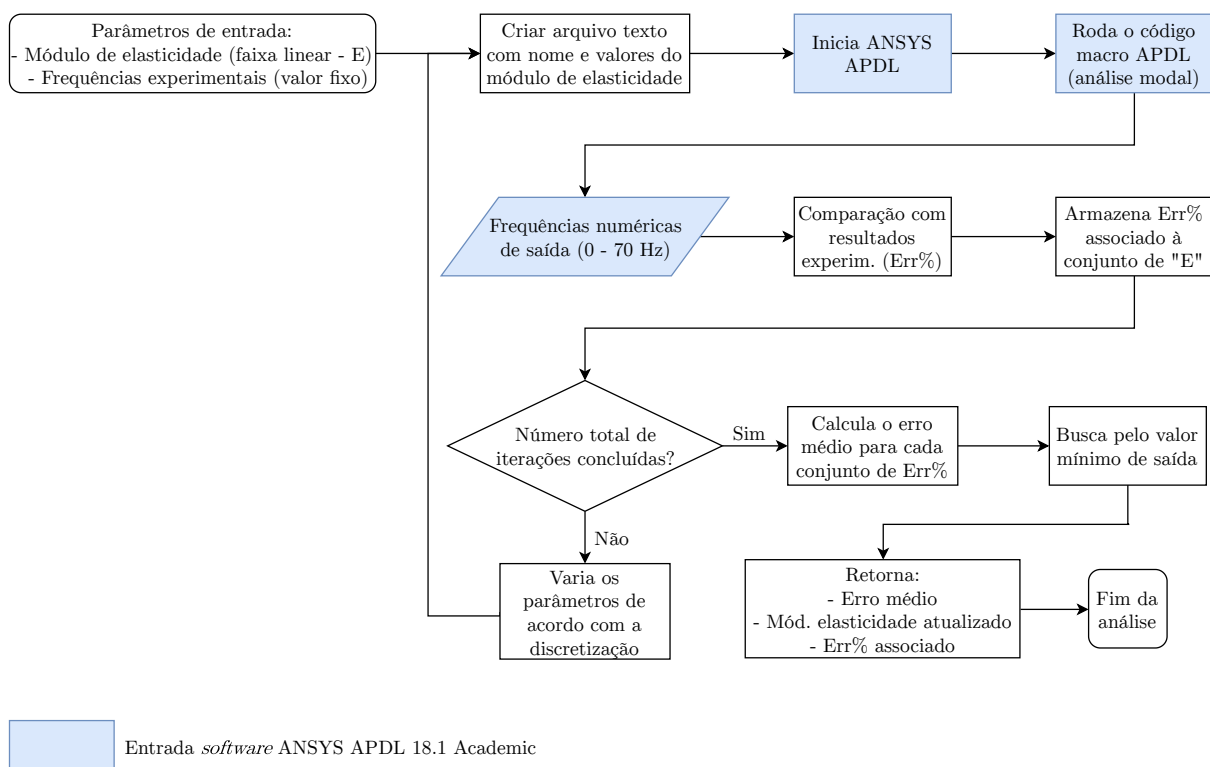


Figura 44 – Fluxograma de algoritmo de atualização de modelo proposto

Com os parâmetros ajustados para o melhor conjunto de resultados, o objetivo agora é a extração dos parâmetros modais numericamente. Para isso, utilizou-se o Easy-Mod com a finalidade de realizar este procedimento. Foi necessário implementar uma simulação numérica com excitação harmônica, posicionando o forçamento no nó 1, de acordo com a figura 35 (a). Escolheu-se esse nó para entrada de forçamento pois a excitação nas pontas de uma estrutura que tem o comportamento semelhante a uma viga permite a excitação de todos os modos da estrutura (AVITABILE, 2017). Aplicou-se, então, o mesmo valor de amplitude de força registrado nas medições experimentais. A banda de frequência analisada compreendia frequências de 0 a 100 Hz, com passos de 0,5 Hz, de forma a compreender todo o espectro experimental. É importante ressaltar que a mesma

estrutura estudada na análise modal foi usada nessa etapa, sem nenhuma alteração, exceto a mudança para análise com forçamento harmônico. A etapa seguinte compreende a obtenção das FRFs em cada nó de análise da asa, sendo também desenvolvido um algoritmo para tal tarefa na linguagem APDL. Esse algoritmo registra os dados de amplitude e fase para a banda de frequência em cada nó, e salva o resultado num arquivo texto que referencia o respectivo nó de resposta. Com os arquivos da FRF em mãos, seguiu-se o mesmo algoritmo de extração de parâmetros modais, como apresentou a figura 39.

A etapa final da análise consiste na comparação dos resultados experimentais com os numéricos por meio do uso do critério M.A.C., onde existe uma função implementada na *toolbox* EasyMod que calcula os valores da matriz.

## 4.5.2 Resultados do modelo ajustado

Um resumo dos resultados obtidos após o ajuste de modelo é apresentado nessa seção.

A figura 45 apresenta a matriz M.A.C. que faz a correlação entre os modos obtidos numericamente e experimentalmente. Observa-se que os dois primeiros modos de suspensão registrados nos dados experimentais foram descartados para a correlação modal, devido à não observação dos mesmos na extração modal numérica.

A partir da matriz M.A.C. apresentada na figura 45 observa-se que houve boa correlação geral entre o modelo numérico e experimental devido à evidente diagonalidade da matriz, sendo que o modo número 1 (primeiro modo de flexão) e número 3 (segundo modo de flexão) foram os que apresentaram melhor correlação. Observou-se uma perda de correlação entre os resultados para o modo número 4 numérico (segundo modo de torção), sendo que o mesmo correlacionou-se com o modo número 1 experimental. O modo número 1 obtido numericamente também apresentou pequena correlação com o modo número 2 experimental (primeiro de torção). Adicionalmente, observou-se uma perda de correlação no modo número 5 numérico (terceiro modo de flexão), sendo que o mesmo correlacionou-se com o modo número 4 experimental. Assume-se que tais incertezas sejam resultados de simplificações adotadas na modelagem numérica, como foi apresentado anteriormente. Serão propostas na seção seguinte modificações no modelo EF que podem torná-lo mais coerente com o experimental. Além disso, incertezas experimentais também podem ter contribuído para as perdas localizadas de correlação, tais como erros de instrumentação, rigidez do apoio, não-linearidades inerentes à estrutura que foram observadas (por exemplo reparos localizados que podem ter causado acréscimo ou decréscimo de massa e rigidez, ou elementos soltos internos - as superfícies de controle foram travadas com fita adesiva, apesar de não haver movimentação aparente, a baixa rigidez do elemento de fixação pode ter causado pequenos deslocamentos que influenciaram nos resultados), outros fatores sistemáticos governantes por se tratar de uma estrutura composta por diversos materiais e que foi confeccionada manualmente, a formulação de EF negligenciar alguns efeitos

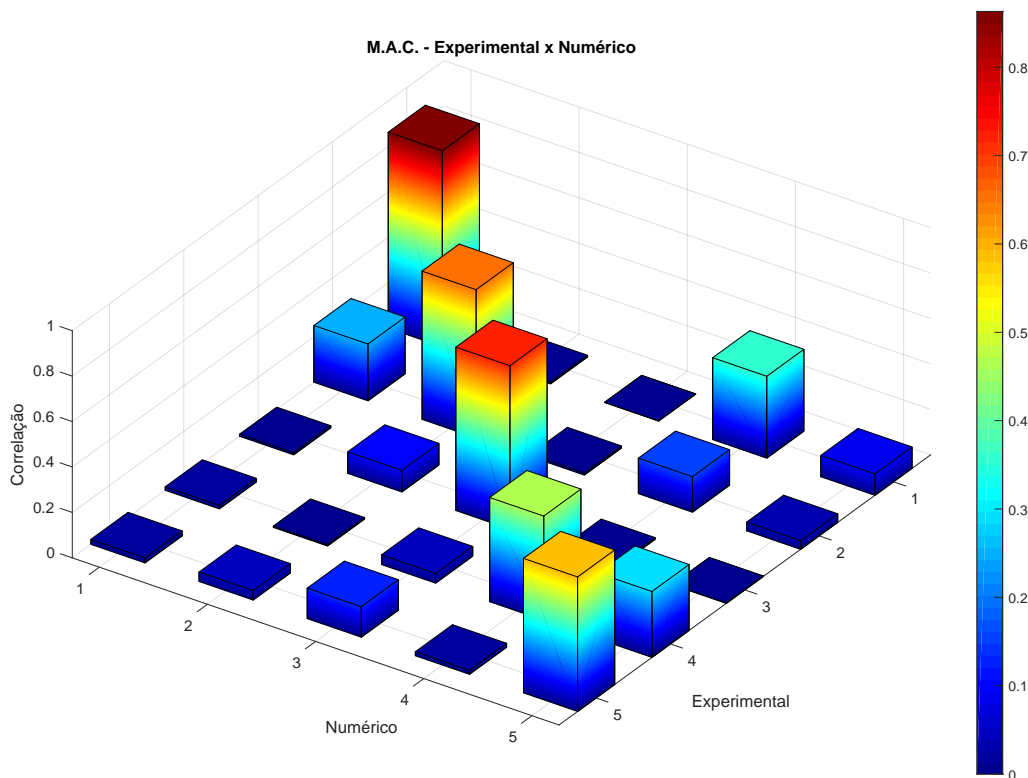


Figura 45 – Matriz M.A.C. Experimental - Numérico da Asa DV-2017

particulares como por exemplo a consideração de um material isotrópico para modelar a longarina compósita, dentre outros, tal qual é descrito por [Mottershead, Link e Friswell \(2011\)](#).

A tabela 19 apresenta os resultados para as frequências naturais experimentais comparadas com as obtidas numericamente antes e depois do processo de ajuste dos dados por meio de erros relativos. A tabela 20 apresenta os valores dos parâmetros antes e depois do processo de atualização do modelo.

Tabela 19 – Resumo e comparação dos resultados experimentais com modelos numéricos antes e depois da atualização

Nº Modo	Descrição do Modo	Experimental [Hz]	Modelo EF Inicial [Hz]	Erro [%]	Modelo EF Atualizado [Hz]	Erro [%]
1	1º suspensão	11,735	-	-	-	-
2	2º suspensão	15,783	-	-	-	-
3	1º flexão	25,928	25,928	0,000	20,639	20,399
4	1º torção	31,716	38,810	-22,367	32,100	-1,211
5	2º flexão	47,545	57,379	-20,684	50,216	-5,618
6	2º torção	55,462	63,987	-15,371	54,500	1,735
7	3º flexão	67,222	79,980	-18,979	67,026	0,292
$\sum \frac{1\% \text{ Erro}}{5}$				<b>15,480</b>		<b>5,813</b>

A partir da tabela 19 pode-se chegar a diversas conclusões acerca dos resultados. Inicialmente observa-se que, após o ajuste por meio do modelo iterativo proposto, houve boa convergência de quatro das cinco frequências naturais, com exceção da primeira, que

Tabela 20 – Valores dos parâmetros de ajuste antes e depois do processo iterativo

Parâmetros	Valor inicial (GPa)	Valor final (GPa)
$E_{carbono}$	24,95	24,3
$E_{pultrudado}$	134	28,0
$E_{balsa}$	3,4	1,2
$E_{isopor}$	2,78	2,0

apresentou uma defasagem considerável do valor experimental. Atribui-se essa defasagem às simplificações adotadas no modelo numérico, que o tornam não perfeitamente representativo da realidade. A estrutura da asa é feita de materiais com comportamento mecânico complexo, tais como materiais compósitos, madeira, entelagem (que apresenta considerável rigidez à tração, e praticamente nenhuma resistência à compressão), dentre outros. Além disso, toda a construção manual da asa também influencia na simetria da disposição dos componentes. Outro fator de importância é em relação às conexões entre as estruturas, que não necessariamente podem ser tratadas como rígidas, assim como foi suposto na modelagem. A fixação da longarina secundária por meio de uma bucha e resina apresentam rigidez finita, assim como a fixação das nervuras por meio de cola CA (cianoacrilato) são características construtivas que influenciam na composição dos modos vibracionais, e que podem ter causado a considerável diferença e perda de correlação entre os modos. Além desse fato, pode-se justificar também pela escolha inadequada do intervalo de variação dos parâmetros ajustados. Apesar disso, o erro relativo médio das frequências naturais com os parâmetros ajustados foi consideravelmente reduzido passando de 15,480% para 5,813%, assim demonstrando eficácia do método utilizado. É importante ressaltar que diversos conjuntos de dados foram analisados, de forma a verificar não somente pelo valor da convergência de frequência, mas também pela correlação modal eficaz entre dados experimentais e numéricos, sendo que o conjunto selecionado foi o que melhor atendeu aos critérios aqui especificados. Outros conjuntos de dados, apesar de convergirem melhor com os valores de frequência, não correspondiam aos modos experimentais, sendo então descartados.

O método de ajuste aqui implementado foi eficaz em promover a calibração do modelo numérico com o experimental, e, apesar de existirem erros inerentes aos resultados de frequência, houve boa correlação entre os modos da estrutura numérica e experimental. Buscou-se basear no conceito de otimização, onde uma função objetivo (no caso, a função erro percentual) é minimizada e possui *constraints*, ou seja restrições. Dessa forma pode-se classificar o método desenvolvido como uma *otimização de ordem zero*, devido ao fato que as iterações foram feitas de forma linear, com discretização constante e onde todos os conjuntos de dados são testados. Um método mais eficiente de otimização faz uma "busca" para determinar a solução ótima por meio de um parâmetro de sensibilidade, a partir de estimativas iniciais de entrada em uma única ou múltiplas funções objetivo, como é o caso do Newton-Raphson Multidimensional ou Método dos Mínimos Quadrados

(KIUSALAAS, 2013). Adicionalmente, o trabalho de [Mottershead, Link e Friswell \(2011\)](#) apresenta a implementação do método da sensibilidade, que é uma ferramenta bastante eficaz na abordagem de problemas de ajuste de modelos EF a partir de dados obtidos por meio de ensaios dinâmicos (GVT, por exemplo).

### 4.5.3 Sugestões de modificações para os próximos modelos EF

Um modelo em elementos finitos pode ser tão completo e complexo quanto se queira, entretanto existe uma relação intrínseca entre o grau de complexidade (número de nós, geometrias consideradas, modelos de contato, dentre outros) e o custo computacional da simulação. Quando desenvolve-se um modelo simplificado (em relação ao modelo real), mas que fornece os resultados suficientemente próximos do real, o refino do modelo numérico não é mais necessário para determinada análise. Esse é um princípio importante quando se trabalha com análises modais numéricas em EF, pois cada estrutura possui particularidades específicas que podem ou não ser desprezadas, tudo isso a depender dos dados experimentais como referência de comparação.

Para a confecção da modelagem apresentada, algumas características construtivas foram atenuadas de maneira a tornar possível a confecção de um modelo que pudesse ser iterativo para o algoritmo de ajuste. Dentre elas pode-se citar:

- A superfície de controle foi modelada contendo somente placas de madeira balsa, conectada rigidamente com a linha do bordo de fuga. Optou-se por essa consideração devido ao fato de que no experimento essas superfícies foram travadas. Essa é uma simplificação que não representa realmente essa estrutura e sua conexão, sendo interessante definir um conjunto de elementos separados que é conectado à região do *hinge* da nervura nos três pontos de fixação por meio de elementos com rigidez torcional que possa ser ajustada (COMBIN14, por exemplo [ANSYS \(2009\)](#)), pois a folga existente, mesmo que mínima, pode influenciar na composição dos modos vibracionais;
- A rigidez da conexão entre elementos estruturais deve ser reavaliada, de forma a poder definir um valor finito para o mesmo. A fixação da longarina secundária e a colagem das nervuras de balsa são os elementos principais a serem modelados;
- A geometria das nervuras de madeira balsa, bordo de ataque e fuga, nervuras centrais podem influenciar devido à distribuição de massa e inércia diferentes do que quando se considera uma seção retangular. Portanto um modelo considerando a real geometria da nervura seria necessário para comparar os resultados;
- A massa distribuída de outros elementos periféricos que compõem o peso vazio da asa devem ser consideradas, a exemplo das colagens feitas nas seções central



e laterais, da cablagem por entre a asa, reparos localizados com madeira balsa realizados ao longo da manufatura;

- Desconsiderou-se a presença da rigidez entelagem para os modelos simplificados, considerando-se somente a distribuição de sua massa. Esse plástico, apesar de não apresentar rigidez à compressão, apresenta à tração, o que pode influenciar nos resultados dos parâmetros modais, sendo então uma alteração relevante para ajuste do modelo.

# 5 Considerações finais

## 5.1 Conclusões

Este trabalho veio com a proposta para criar uma metodologia de determinação de parâmetros modais de aeronaves para Competição Aerodesign por meio de abordagens teóricas e experimentais.

De forma a aplicar a teoria desenvolvida no texto e estabelecer um algoritmo para se determinar a rigidez equivalente de uma estrutura que se comporta como viga, um estudo de caso com dois corpos de prova que caracterizam estruturas empregadas em confecção de protótipos Aerodesign foi realizado, comparando-se resultados obtidos experimentalmente e numericamente, esse por meio de análise EF, considerando diferentes tipos de elementos. Para tal, realizou-se um ensaio de vibração transiente por meio de excitação com martelo de impacto, onde foi possível obter uma função de resposta em frequência para cada sistema. O resultado da análise, posterior ao tratamento de dados, mostrou que a aplicação da teoria de Euler-Bernoulli para formulação de vigas retorna um erro médio percentual para estimação do módulo de elasticidade em 0,29% para o corpo de prova tubular de alumínio 6063 e de 2% para o corpo de prova tubular em fibra de carbono laminada com resina epóxi, representando excelentes estimativas para implementação na modelagem numérica.

A etapa seguinte do trabalho consistiu em confeccionar a modelagem em EF da estrutura completa da asa protótipo. Para isso, assumiu-se simplificações geométricas de forma a tornar o modelo numérico parametrizável, entretanto considerando todos os materiais e suas propriedades mecânicas equivalentes presentes na estrutura. Utilizou-se elementos de viga unidimensional (BEAM188), casca bidimensional (SHELL181). Além disso, considerou-se a massa localizada de vários elementos que compõe a asa, de forma a tornar o modelo numérico o mais condizente com o real, por meio da utilização de elementos MASS21. A massa da asa modelada numericamente divergiu 0,13% da massa real da estrutura. Apresentou-se uma convergência de malha do modelo e os resultados para uma faixa de frequência de 0 a 70 Hz.

Em sequência, foi realizado o *Ground Vibration Testing* na asa, utilizando-se o *setup* padrão para uma análise modal clássica, sendo optada a excitação harmônica por

meio de um *shaker* eletrodinâmico e medida de resposta por meio do uso de uma célula de carga e um acelerômetro. Os dados experimentais resultantes foram tratados por meio do uso da *toolbox* EasyMod, onde foi possível obter 7 modos vibracionais da asa, sendo que os dois primeiros foram modos de suspensão. Foram utilizados dois métodos de extração modal (Circle-Fit e Line-Fit), realizando-se uma comparação entre os mesmos por meio do critério M.A.C., apresentando excelente correlação entre os modos obtidos. Ambos os métodos também retornaram valores próximos de frequência natural e taxa de amortecimento estimadas. Conclui-se disso que os dados experimentais foram de boa qualidade.

A etapa final do trabalho consiste na elaboração de um método para calibrar as frequências naturais do modelo numérico com as do modelo experimental, de forma que os parâmetros selecionados para atualização do modelo foram os módulos de elasticidade dos materiais, um total de quatro parâmetros. Os resultados após as iterações do método retornaram considerável correlação modal entre o modelo numérico e experimental devido à evidente diagonalidade da matriz M.A.C., salvo alguns desvios localizados presentes na matriz que eram esperados devido à complexidade da estrutura analisada. Adicionalmente, o erro percentual médio das frequências naturais numéricas passou de 15,480% para 5,813% após o ajuste dos parâmetros, demonstrando eficácia na calibração. Todavia, observou-se a convergência de 4 das 5 frequências naturais, sendo que a primeira apresentou a maior defasagem em relação às outras. Atribuiu-se tal fato às simplificações adotadas no modelo EF, que o tornaram não idealmente representativo da realidade, e também à escolha inadequada do intervalo de análise.

São sugeridas, então, possíveis alterações a serem implementadas no modelo EF que esperam-se ter influência nos resultados, tais como a modelagem das superfícies de controle da asa, o refino da distribuição de massa da estrutura, como por exemplo considerar a massa de cola imposta para a fixação dos componentes, da cablagem existente, de reparos eventualmente realizados durante a manufatura, dentre outros; e considerar a presença da entelagem cobrindo toda a área alar.

Ao final do trabalho, cumpriu-se com o objetivo que lhe foi proposto. Assim, obteve-se uma metodologia para elaboração de um GVT, extração de parâmetros modais tanto de modelos numéricos quanto de modelos experimentais, determinação de etapas de importância para modelagem numérica da asa e elaboração de um algoritmo para ajuste dos dados numéricos e experimentais.

## 5.2 Propostas para trabalhos futuros

Diversas linhas de pesquisa podem ser exploradas a partir do trabalho aqui desenvolvido, tanto para problemas numéricos quanto para experimentais.

Em relação à modelagem numérica, as ressalvas de aprimoramento da simulação

foram indicadas na seção 4.5.3. Adicionalmente, uma etapa de importância para validação do modelo numérico é calibrá-lo com relação a um ensaio estático simples, como um engaste na região central e aplicação de carga na extremidade da asa, medindo-se o deslocamento de ponta. A validação do comportamento estático do modelo numérico é importante quando deseja-se analisar o efeito de carregamentos e estudos de comportamento aeroelástico de uma estrutura alar. Além disso, o prosseguimento da análise relativa ao comportamento dinâmico em voo da aeronave é um tema de interesse para a equipe Draco Volans Aerodesign, sendo etapa ímpar e consequente do estudo das características modais da estrutura projetada. *Softwares*, como o NASTRAN, ZAERO, dentre outros, devem ser buscados de forma a validar modelagens analíticas de cargas e aeroelasticidade, complementando projetos conceituais futuros da equipe.

Quanto à execução do experimento, sugere-se a investigação de efeitos das condições de contorno nos resultados. Portanto, avaliar diferentes condições de excitação (martelo de impacto, *shaker* com sinais diferentes de *chirp*), apoio (suspensão por espuma, por fios, dentre outros), sistema de aquisição de dados (a exemplo o acelerômetro ser substituído por um vibrômetro laser, que devido à configuração, não adiciona massa à estrutura).

Uma dificuldade inerente ao método experimental empregado, desde a execução do experimento até a obtenção dos parâmetros modais, foi o tempo requisitado para realizar as tarefas. O tempo para realização de cada GVT não era longo, entretanto processos tediosos de armazenamento de arquivos, envio de dados para outro computador, executar o tratamento dos dados experimentais e obter os parâmetros modais poderiam ser otimizados de forma que fossem mais automatizados e dinâmicos. Isso facilitaria a correção de possíveis erros no experimento ou no sistema de aquisição de dados de forma mais imediata.

Quanto ao desempenho do método de ajuste de parâmetros implementado, sugere-se que seja feita a otimização do código para que o tempo computacional seja reduzido. Um exemplo disso seria paralelizar o processamento do ANSYS APDL ou o próprio código desenvolvido em MATLAB, de forma que mais processos sejam executados simultaneamente.

Sugere-se, também a utilização de outras ferramentas de otimização para ajuste de modelo, por exemplo a utilização de algoritmos genéticos para promover a solução do melhor conjunto de parâmetros. Outra ferramenta de otimização seria o próprio método de sensibilidade, como apresentado por [Mottershead, Link e Friswell \(2011\)](#), especificamente desenvolvida para ajuste de parâmetros a partir de resultados de ensaios dinâmicos. Além disso, não somente a otimização ser feita com o objetivo único de minimizar a diferença entre o conjunto de frequências naturais, mas também o desenvolvimento de uma rotina que integre as plataformas MATLAB - EasyMod - ANSYS APDL de forma a calibrar diretamente todos os parâmetros modais (frequência natural, modo vibracional e taxa de amortecimento).

# Referências

ACP. *Carbon fiber uniroll wrapped and pultruded tubes datasheet*. [S.l.], 2018. Citado na página 50.

ADHIKARI, S. *Damping models for structural vibration*. Cambridge University, 2000. Citado na página 10.

AERORIO. *Full Payload Test Flight - Wing Flutter*. 2012. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=dVSSsWDlt4>>. Acesso em: 30 out. 2018. Citado na página 2.

ALLEMANG, R. J. *The modal assurance criterion twenty years of use and abuse*. University of Cincinnati, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 63.

ANSYS. *ANSYS User's Manual: Structural Analysis Guide*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado 9 vezes nas páginas x, 3, 8, 20, 21, 40, 49, 51 e 69.

ANSYS. *BEAM188 Element Description*. 2019. Disponível em: <[https://www.sharenet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ans\\_elem/Hlp\\_E\\_BEAM188.html](https://www.sharenet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/ans_elem/Hlp_E_BEAM188.html)>. Acesso em: 10 out. 2018. Citado na página 40.

ASSIS, M. d. S. et al. *Modal and flutter analyzes using finite element model for an aerodesign airplane wing*. Federal University of Uberlandia, 2015. Citado na página 6.

AVITABILE, P. *Modal Testing: A Practitioner's Guide*. [S.l.]: Wiley, 2017. Citado 13 vezes nas páginas vii, 4, 8, 23, 24, 27, 28, 29, 38, 45, 54, 65 e 89.

BEARDS, C. F. *Structural Vibration Analysis*. [S.l.]: Ellis Horwood, 1983. Citado na página 10.

BISPLINGHOFF, R. *Aeroelasticity*. [S.l.]: Dover Publications, 1996. (Dover Books on Aeronautical Engineering Series). Citado na página 1.

BRANCHEAU, J. E. *Practical Aspects of Finite Element Simulation - A Study Guide*. [S.l.]: Altair, 2015. Citado na página 37.

DOMINGUES, A. C. et al. *Structural dynamics characterization of metallic honeycomb sandwich panels for aerospace applications*. Universidade de Brasília, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 35.

ELKHATIB, A. *Experimental modal analysis*. Brüel and Kjær Sound - Vibration Measurement, 2003. Citado 2 vezes nas páginas vii e 30.

EWINS, D. *Modal testing: theory and practice*. [S.l.]: Research Studies Press, 1984. (Mechanical engineering research studies: Engineering dynamics series). Citado 16 vezes nas páginas x, 8, 13, 22, 23, 25, 28, 30, 32, 33, 35, 38, 40, 83, 87 e 89.

- EWINS, D. J. Basics and state-of-the-art of modal testing. Imperial College of Science, Technology and Medicine, 2000. Citado na página 27.
- FILHO, A. A. *Elementos finitos: a base da tecnologia CAE*. [S.l.]: Editora Érica, 2007. Citado na página 2.
- FU, Z.; HE, J. *Modal Analysis*. [S.l.]: Elsevier Science, 2001. Citado 9 vezes nas páginas vii, 2, 4, 23, 29, 31, 86, 87 e 89.
- GUPTA, A.; SEILER, P. Ground vibration tests on a flexible flying wing aircraft. University of Minesota, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 56.
- HATCH, M. *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2000. Citado 2 vezes nas páginas ix e 84.
- INMAN, D. *Engineering Vibration*. [S.l.]: Prentice Hall, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 9, 13 e 56.
- JIA, P. Experimental and finite element model modal analysis of a deployable-retractable wing. City University of Hong Kong, 2014. Citado na página 6.
- JONES, R. *Mechanics Of Composite Materials*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1998. (Materials Science and Engineering Series). Citado na página 20.
- KIUSALAAS, J. *Numerical Methods in Engineering with Python 3*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado na página 69.
- KNAUF. *EPS Isopor*. 2019. Disponível em: <<https://www.knauf-isopor.com.br/produtos/servicos-em-inovacao/eps/>>. Acesso em: 15 abr. 2019. Citado na página 50.
- KOUROUSSIS, G. *EasyMod A MatLab/Scilab toolbox for experimental modal analysis*. Université de Mons, 2012. Citado na página 13.
- KOUROUSSIS, G. et al. Easymod: A matlab/scilab toolbox for teaching modal analysis. Proceedings of the 19th International Congress on Sound and Vibration, Université de Mons, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 59.
- KRATTIGER, D. et al. Anisotropic dissipation in lattice metamaterials. *AIP Advances*, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4973590>>. Citado na página 35.
- LANG, G. F.; SNYDER, D. Understanding the physics of electrodynamic shaker performance. Data Physics Corporation, San Jose, California, 2001. Citado na página 23.
- LEVIATÁ. *ITA - Body Freedom Flutter*. 2017. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=S1-OYP9\\_seQ&t](https://www.youtube.com/watch?v=S1-OYP9_seQ&t)>. Acesso em: 30 out. 2018. Citado na página 1.
- LUBRINA, P. et al. Airbus a350 xwb gvt: State-of-the-art techniques to perform a faster and better gvt campaign. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, 2014. Citado na página 6.
- MARTINS, M. S. Análise modal do satélite universitário itasat por subestruturação utilizando elementos finitos. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2008. Citado na página 5.

- MATWEB. *Aluminum 6063-O Mechanical Properties*. 2018. Disponível em: <<http://www.matweb.com/search/DataSheet.aspx?MatGUID=bcd1abbd8d6d47b1b9896af80a3759c6&ckck=1>>. Acesso em: 08 out. 2018. Citado 3 vezes nas páginas x, 40 e 43.
- MENDONÇA, P. T. R. de. *Materiais compostos e estruturas-sanduíche: projeto e análise*. [S.l.]: Editora Manole, 2005. Citado na página 47.
- MEVADA, H.; PATEL, D. Experimental determination of structural damping of different materials. Department of Mechanical Engineering CSPIT India, 2015. Citado na página 39.
- MMF. *Piezoelectric Accelerometers - Theory and Application*. [S.l.]: Metra Mess - und Frequenztechnik, 2001. Citado 3 vezes nas páginas vii, 25 e 26.
- MOLINA-VIEDMA, n. J. et al. Modal identification in an automotive multi-component system using hs 3d-dic. 2018. Citado na página 35.
- MOTTERSHEAD, J. E.; LINK, M.; FRISWELL, M. I. The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 25, n. 7, p. 2275 – 2296, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 67, 69 e 73.
- OLSEN, N.; WALTERS, M. 747 space shuttle carrier aircraft - orbiter mated ground vibration test: Data via transient excitation and fast fourier transform analysis. SAE Paper No. 770970, 1977. Citado na página 6.
- PEETERS, B.; CLIMENT, H. Modern solutions for ground vibration testing of large aircraft. LMS International, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 4, 6 e 56.
- PETYT, M. *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 2, 17 e 19.
- PICKREL, C. R. Airplane ground vibration testing nominal modal model correlation. Boeing Commercial Airplane Group, 2002. Citado na página 6.
- RAO, S. S. *Mechanical vibrations*. [S.l.]: Addison-Wesley Longman, 1986. Citado 11 vezes nas páginas ix, x, 4, 9, 16, 38, 43, 79, 82, 90 e 93.
- RAYMER, D. *Aircraft Design: A Conceptual Approach*. [S.l.: s.n.], 2012. (AIAA education). Citado na página 37.
- SALEHI, M.; ZIAEI-RAD, S. Ground vibration test (gvt) and correlation analysis of an aircraft structure model. Shiraz University, 2007. Citado na página 5.
- SANTOS, C. G. S. B. dos. Análise modal de uma hélice fabricada em material compósito com enchimento de espuma poliuretano. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2003. Citado na página 6.
- SCHWARZ, B. J.; RICHARDSON, M. H. Experimental modal analysis. Vibrant Technology, Inc., 1999. Citado na página 3.
- SEON, H. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. State University of New Jersey, 1999. Citado 2 vezes nas páginas x e 15.

SERAFIM, S. E. Implementação de uma biblioteca informática para diversos tipos de elementos finitos em 2d e 3d. Universidade Federal de Santa Catarina, 1998. Citado na página 19.

SIMES, N. M. Design of a ground vibration test certification system for unmanned air vehicles. Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2015. Citado na página 5.

SZABÓ, B.; SZABO, B.; BABUŠKA, I. *Finite Element Analysis*. [S.l.]: Wiley, 1991. (A Wiley-Interscience publication). Citado na página 17.

TEKBOND. *Ficha técnica TekBond 793*. [S.l.], 2014. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

WILKINSON, J. H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. [S.l.]: Clarendon Press, 1965. Citado na página 82.



# Apêndices

# A Modelagem de sistemas MGDL não amortecidos

A maioria das estruturas são contínuas e possuem infinitos graus de liberdade associados, como se sua composição interna fosse compreendida por infinitas conexões massa-mola-amortecedor interligados. A modelagem 1GDL é útil para analisar sistemas vibratórios simples, entretanto mostra-se limitada quando trata-se de uma estrutura real. De maneira análoga, a análise de sistemas contínuos requer a solução de equações diferenciais parciais, cuja complexidade pode tornar o problema com solução analítica muito difícil. Por meio da modelagem de sistemas discretos com  $n$  graus de liberdade, como mostra a figura 46, entretanto, propõe-se a solução de um conjunto de  $n$  equações diferenciais ordinárias (RAO, 1986), dadas por:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (\text{A.1})$$

Onde  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são as matrizes  $n \times n$  de massa, amortecimento e rigidez respectivamente,  $\{\ddot{x}\}, \{\dot{x}\}, \{x\}, \{F(t)\}$  são vetores  $n \times 1$  de aceleração, velocidade, deslocamento e força.

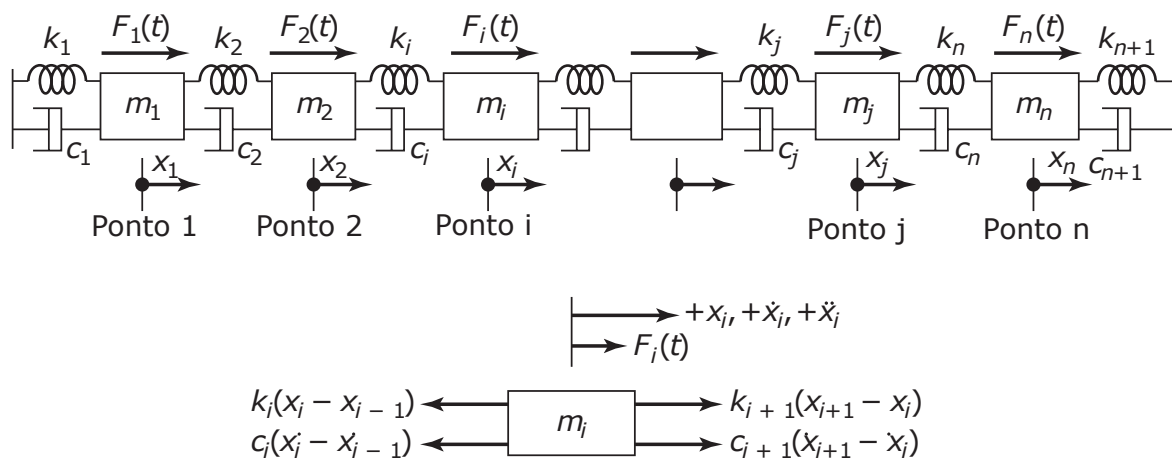


Figura 46 – Sistema massa-mola com vários graus de liberdade. Fonte: Rao (1986)

A equação de movimento A.1 é formada a partir do equilíbrio do sistema, compondo-

se as matrizes  $n \times n$  do sistema considerado na figura 46 por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -c_n \\ 0 & \cdots & 0 & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -k_n \\ 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

E os vetores força e deslocamento ( $nx1$ ),

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Como o interesse, agora, é apresentar a modelagem de sistemas não amortecidos, considera-se a matriz  $[C]$ , na equação A.1, com valor nulo em todos os termos, reduzindo-a ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (\text{A.7})$$

## A.1 Abordagem modal: o problema do autovalor

Analisando-se a resposta do sistema discreto como sendo a de vibração livre ( $\{F(t)\} = \{0\}$ ) e não amortecida (não dissipativa), equação A.7, determina-se a solução para o sistema por meio de uma separação de variáveis do tipo:

$$x(t) = \{X\}T(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.8})$$

Sendo,

$$x_i = X_i T(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.9})$$

Onde  $\{X\}$  é um vetor constante que representa a característica espacial da resposta, enquanto que  $T(t)$  é uma função do tempo. Fisicamente isso é traduzido no fato que a relação entre as coordenadas é invariante com o tempo, de maneira que a forma modal não varia durante o movimento, somente a amplitude.

Substituindo A.9 em A.7 obtém-se

$$[M]\{X\}\ddot{T}(t) + [K]\{X\}T(t) = \{0\} \quad (\text{A.10})$$

Onde pode-se reescrever o sistema de maneira a separar as equações correspondentes

$$\left( \sum_{j=1}^n m_{ij} X_{ij} \right) \ddot{T}(t) + \left( \sum_{j=1}^n k_{ij} X_{ij} \right) T(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.11})$$

De onde resulta-se na seguinte relação

$$\frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} X_{ij}}{\sum_{j=1}^n m_{ij} X_{ij}} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.12})$$

Observa-se que o termo à esquerda é dependente do índice  $i$  (graus de liberdade do sistema), enquanto que o lado direito depende apenas do tempo; ambos os lados, então, devem ser iguais a uma constante. Assume-se que essa constante seja  $\omega^2$ , cujo significado físico é a frequência natural de oscilação do sistema completo, um valor positivo, de maneira a se obter uma solução harmônica válida para o termo dependente do tempo.

$$\begin{cases} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 & (a) \\ ([K] - \omega^2 [M])\{X\} = 0 & (b) \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

O sistema resultante é composto por uma EDO A.13 (a) no tempo que compreende um problema de vibrações livres e não amortecidas, com solução descrita pela equação

A.14; e uma equação espacial composta por um problema de autovalores e autovetores A.13 (b).

$$T(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{A.14})$$

Onde  $C_1$  e  $\phi$  são constantes que representam a amplitude e fase, respectivamente, do movimento harmônico associado a cada ponto do sistema. Determinam-se as frequências naturais do conjunto a partir da solução da parte espacial da resposta (equação A.13 (b)), cujo sistema possui solução trivial ( $\{X\} = \{0\}$ ). Para uma solução não-trivial deve-se impor a condição do determinante nulo para o termo que acompanha a matriz, ou seja

$$\Delta = |[K] - \omega^2 [M]| = |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = 0 \quad (\text{A.15})$$

A expansão dessa equação resulta no polinômio característico de  $n$ -ésimo grau, cujas raízes são  $n$  valores de  $\omega^2$ , onde pode-se mostrar que todas são reais e positivas quando as matrizes  $[M]$  e  $[K]$  são simétricas e positivamente definidas (WILKINSON, 1965). Cada autovalor ( $\omega^2$ ) é associado a um autovetor  $\{X\}_i$ , ou também chamado de modo natural.

## A.2 Ortogonalidade ponderada e normalização dos vetores modais

Por uma questão de dependência linear dos autovetores, observa-se que quando  $\{X\}_i$  é a solução do sistema homogêneo (equação A.13 b), existe constante  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma\{X\}_i$  também satisfaz a solução. Dessa forma, fazendo-se uso da propriedade de ortogonalidade dos vetores modais, demonstrada em (RAO, 1986), observa-se que

$$\{X\}_j^T [M] \{X\}_i = 0, \quad i \neq j \quad (\text{A.16})$$

$$\{X\}_j^T [K] \{X\}_i = 0, \quad i \neq j \quad (\text{A.17})$$

Assim, desde que  $[M]$  e  $[K]$  sejam matrizes simétricas para validade da ortogonalidade, quando  $i = j$  têm-se que

$$\{X\}_i^T [M] \{X\}_i = m_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.18})$$

$$\{X\}_i^T [K] \{X\}_i = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.19})$$

Ou reescrevendo na forma matricial,

$$(\text{diag}[M]) = \begin{bmatrix} m_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T [M] [X] \quad (\text{A.20})$$

$$(\text{diag}[K]) = \begin{bmatrix} k_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{nn} \end{bmatrix} = [X]^T [K] [X] \quad (\text{A.21})$$

Onde  $[X]$  é a matriz modal, representando cada  $i$ -ésima coluna como o  $i$ -ésimo vetor modal, como apresenta a seguinte equação

$$[X] = [\{X^{(1)}\} \{X^{(2)}\} \dots \{X^{(n)}\}] \quad (\text{A.22})$$

A normalização é um procedimento que altera a magnitude dos vetores modais objetivando retirar a característica de proporcionalidade entre os autovetores, tornando os modos únicos a um sistema MGD. Pode-se realizar a normalização em relação a qualquer grandeza do sistema, porém em análise modal o mais comum é feita pela matriz de massa. Para obter um vetor modal  $\{\Phi\}_i$  normalizado com base na matriz de massa a partir de um autovetor  $\{X\}_i$ , assim como demonstrado em (EWINS, 1984), deve-se fazer

$$\{\Phi\}_i = \frac{\{X\}_i}{\sqrt{m_i}} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.23})$$

Onde  $m_i$  é proveniente da relação de ortogonalidade A.18. Por conseguinte, essa relação ponderada pelos autovetores normalizados pela matriz de massa é escrita na forma matricial por

$$[\Phi^T][M][\Phi] = [I] \quad (\text{A.24})$$

$$[\Phi^T][K][\Phi] = [\text{diag}(\omega_i^2)] \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.25})$$

### A.3 Vibração livre de sistemas não amortecidos

A solução mais geral para a equação do movimento dada por A.13 (b) pode ser expressa pela combinação linear de todas as possíveis soluções do sistema, utilizando-se

o princípio da superposição de eventos, considerando-se o fato de que o sistema é linear. Descreve-se o movimento geral, a partir do natural, por meio da formulação

$$\{x\} = \sum_{i=1}^n \{X^{(i)}\} A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) = \sum_{i=1}^n \{X^{(i)}\} A_i \sin(\omega_i t) \quad (\text{A.26})$$

Onde  $A_i$  e  $\phi_i$  são constantes que podem ser valoradas a partir das condições iniciais do problema, ou seja, quando

$$\{x(0)\} = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix} \quad e \quad \{\dot{x}(0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(0) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

## A.4 Desacoplando equações de movimento com coordenadas normais

Com o objetivo de promover a solução da equação de movimento do sistema, transformam-se as n-acopladas EDOs governantes em n-desacopladas de segunda ordem, fazendo-se uso das coordenadas normais. Assim, no espaço desacoplado do sistema, a solução é obtida por meio da análise de n-sistemas de 1 grau de liberdade. O procedimento seguinte é voltar às coordenadas físicas iniciais por meio de uma transformação inversa, como apresenta a figura 47.

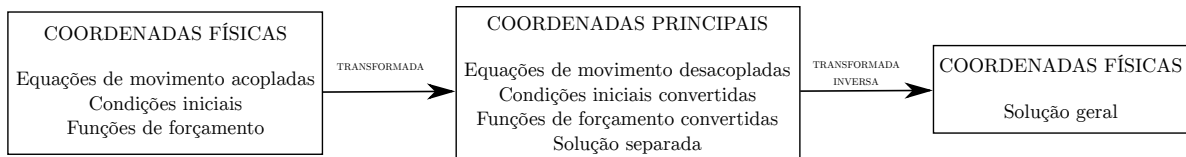


Figura 47 – Fluxograma de para solução modal. Fonte: adaptado Hatch (2000)

Dessa forma, considerando a equação do movimento do sistema não-amortecido:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (\text{A.28})$$

A transformação de coordenadas é feita utilizando-se a seguinte relação:

$$\{x\} = [\Phi]\{q\} \quad (\text{A.29})$$

Onde o vetor  $\{q\}$  representa as coordenadas normais do sistema. Dessa forma, aplicando-se A.29 em A.28, obtém-se:

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [K][\Phi]\{q\} = \{F\} \quad (\text{A.30})$$

Normalizando-se o sistema em relação à matriz de massa  $[M]$  por meio de uma pré-multiplicação por  $[\Phi]^T$ , tem-se que  $\{\Phi\}^T[M]\{\Phi\} = 1$  e  $\{\Phi\}^T[K]\{\Phi\} = [diag(\omega^2)]$ . Então, resulta-se em:

$$\{\ddot{q}\} + [diag(\omega^2)]\{q\} = \{\bar{F}\} \quad (\text{A.31})$$

Onde  $\{\bar{F}\} = [\Phi]^T\{F\}$ , que representa um forçamento no espaço de coordenadas normais. O sistema de equações A.31 é desacoplado e trata cada massa do sistema independentemente. Para serem definidas as condições iniciais do deve-se avaliá-las da seguinte forma:

$$\begin{cases} \{x(0)\} = [\Phi] \{q(0)\} \\ \{\dot{x}(0)\} = [\Phi] \{\dot{q}(0)\} \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

## A.5 Função de resposta em frequência de sistemas MGDL não-amortecidos

Anteriormente no texto mostrou-se que a equação de movimento de um sistema com vários graus de liberdade não-amortecido, excitado por um forçamento suposto harmônico de mesma frequência e fase (assumida igual a zero) é dada por:

$$[M]\ddot{x}(t) + [K]x(t) = \{F(t)\} \quad (\text{A.33})$$

Onde  $F(t)$  é um vetor  $n \times 1$  de de  $n$  forçamentos externos atuando sobre o sistema, formulado pela seguinte equação:

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \sin(\omega t) = \{F\} \sin(\omega t) \quad (\text{A.34})$$

O sistema oscila harmonicamente na frequência de excitação, assumindo solução para o deslocamento e aceleração dadas, respectivamente, por:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \sin(\omega t) = \{X\} \sin(\omega t) \quad (\text{A.35})$$



$$\{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \sin(\omega t) = -\omega^2 \{X\} \sin(\omega t) \quad (\text{A.36})$$

Substituindo-se [A.35](#) e [A.36](#) em [A.33](#) tem-se que:

$$\underbrace{([K] - \omega^2[M])}_{\text{Matriz de rigidez din\^amica}} \{X\} = \{F\} \quad (\text{A.37})$$

O termo em destaque na equa\c{c}o anterior apresenta unidade de rigidez e \^e definido por  $[Z(\omega)]$ . Se a matriz for n\^ao-singular, v\^alido para frequ\^encias de excita\c{c}o distintas das naturais do sistema, a amplitude de resposta \^e dada por:

$$\{X\} = [Z(\omega)]^{-1}\{F\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (\text{A.38})$$

A inversa de  $[Z(\omega)]$  \^e denominada matriz de recept\^ancia  $[\alpha(\omega)]$ , que cont\^em as FRF do sistema. \^E caracterizada por ser uma matriz sim\^etrica, manifestando a reciprocidade devido \^a linearidade de resposta vibracional do sistema MGD<sup>DL</sup> modelado. Isso significa dizer que a resposta observada na coordenada "i" dado um for\c{c}amento aplicado em "j" \^e a mesma quando mede-se em "j" e aplica-se em "i" ([FU; HE, 2001](#)).

Outra caracter\xedstica de relev\^ancia \^e que apesar de se derivar a partir de um sistema for\c{c}ado, a recept\^ancia reflete as propriedades de um sistema din\^amico linear, similar aos par\^ametros modais de frequ\^encias e modos naturais vibracionais, n\^ao dependendo, pois, de for\c{c}amentos externos.

Objetiva-se, agora, interpretar fisicamente o significado de uma FRF. A partir de [A.38](#) tem-se que a amplitude de resposta na coordenada "i" \^e dada por:

$$X_i = \alpha(\omega)_{i1}F_1 + \alpha(\omega)_{i2}F_2 + \dots + \alpha(\omega)_{in}F_n \quad (\text{A.39})$$

Quando aplica-se somente uma for\c{c}a no sistema, denominada  $F_j$ , a equa\c{c}o [A.39](#) reduz-se a:

$$\alpha(\omega)_{ij} = \frac{X_i}{F_j} \quad (F_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad r \neq j) \quad (\text{A.40})$$

Essa formula\c{c}o sugere que o  $ij$ -\^esimo termo da matriz  $\alpha(\omega)$  \^e a fun\c{c}o de resposta em frequ\^encia quando o sistema possui somente entrada de for\c{c}a na coordenada "j" e resposta medida na coordenada "i" ([FU; HE, 2001](#)).

Al\^em da recept\^ancia, pode-se medir a FRF a partir de outras respostas do sistema, como apresenta a tabela [21](#).

Tabela 21 – Propriedades de resposta para FRF. Fonte: [Ewins \(1984\)](#)

Parâmetro de resposta	Resposta/ Força $H(\omega)$
Deslocamento	Receptância $[\alpha(\omega)]$
Velocidade	Mobilidade $[Y(\omega)]$
Aceleração	Acelerância ou Inertância $[A(\omega)]$

### A.5.1 Composição de FRF utilizando parâmetros modais

Obter a função de receptância a partir de [A.38](#) é um processo custoso computacionalmente, pois é necessária a inversão de uma matriz  $n \times n$ . Manipulando-se matematicamente, pode-se obter a seguinte relação ([FU; HE, 2001](#)), fazendo-se uso, agora, da matriz modal normalizada pela massa

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] [\text{diag}(\omega_i^2 - \omega^2)]^{-1} [\Phi]^T \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.41})$$

Onde o índice " $i$ " representa as frequências dos modos naturais do sistema. Analisando-se um termo isolado da matriz  $[\alpha(\omega)]$ , tem-se que:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\phi_{j1}\phi_{k1}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{j2}\phi_{k2}}{\omega_2^2 - \omega^2} + \dots + \frac{\phi_{jn}\phi_{kn}}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (\text{A.42})$$

Que pode ser reescrito na forma vetorial como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \{ \phi_{j1}\phi_{k1} \quad \phi_{j2}\phi_{k2} \quad \dots \quad \phi_{jn}\phi_{kn} \} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \\ \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

### A.5.2 Fenômeno de anti-ressonância e mínimo de uma FRF

A anti-ressonância e mínimo de uma FRF são fenômenos dinâmicos não tão importantes quanto a ressonância propriamente dita, devido ao fato de não estarem associadas às severas amplitudes de vibrações. Diferenciam-se da ressonância no sentido de serem parâmetros locais de uma FRF, ao passo que a primeira representa um parâmetro global da estrutura (as mesmas frequências de ressonância são esperadas em qualquer FRF do sistema).

A melhor forma de se observar e compreender esses fenômenos é por meio da observação de um exemplo simplificado. Considere, então, um sistema massa-mola com dois graus de liberdade (2GDL), [figura 48](#), onde as massas são iguais a 1 kg e as rigidezes das molas assumem o valor de 1000 N/m cada.

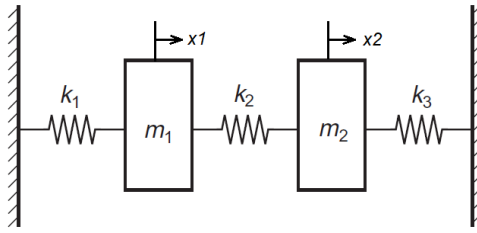


Figura 48 – Sistema massa-mola com 2 graus de liberdade

Realizando-se o diagrama de corpo livre e determinando-se a equação do movimento global, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & -1000 \\ -1000 & 2000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Os resultados para frequências naturais e modos vibracionais são:

$$[\text{diag}(\omega_r^2)] = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 3000 \end{bmatrix} (\text{rad/s}^2) \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

Utilizando-se a equação A.43 pode-se chegar em 4 configurações de FRF obtidas para o sistema, sendo apresentadas na figura 49.

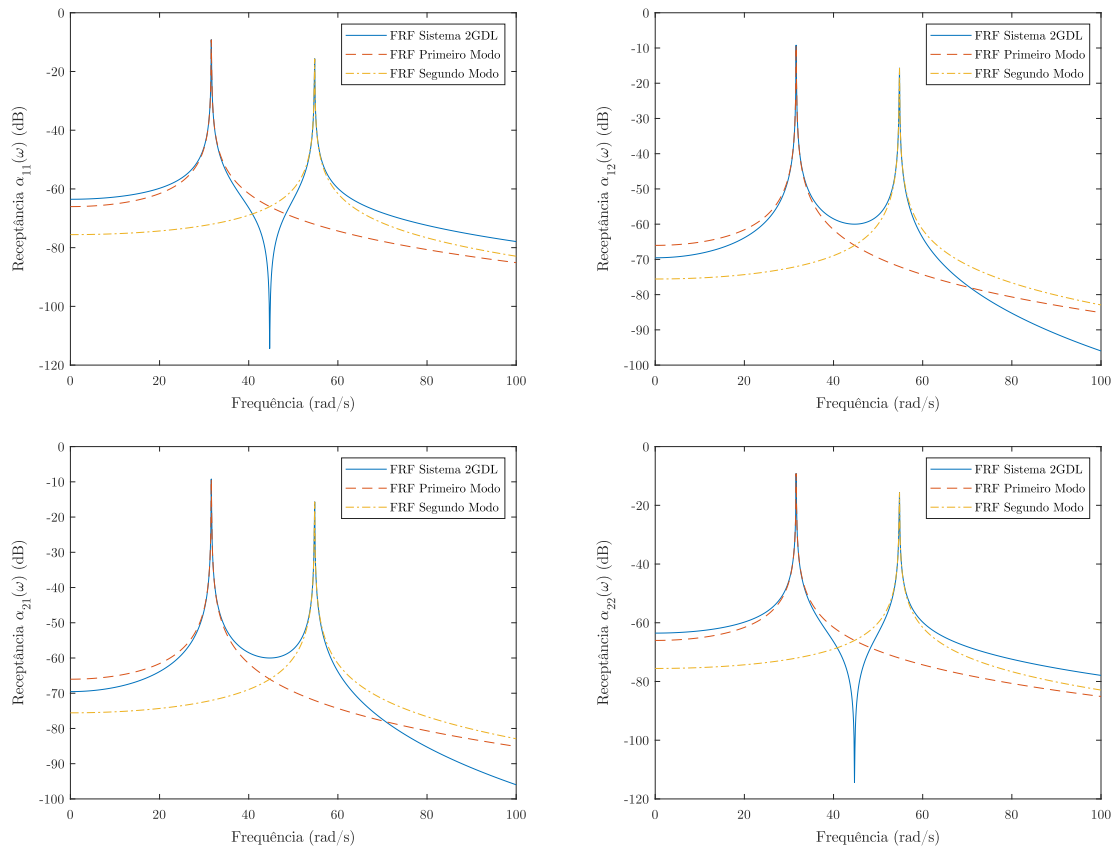


Figura 49 – Excitação e leitura de resposta nos possíveis pontos para um sistema de 2GDL

Antes de explicitar o significado matemático da resposta, deve-se abordar o assunto de como se representar uma FRF, que pode ser feito de variadas formas, a depender das propriedades que se quer destacar (FU; HE, 2001). De início, pode-se plotar frequência e magnitude em escalas lineares ou logarítmicas, que exibem claramente as frequências de ressonância nos picos de amplitude. Entretanto esse método torna a região do entorno da frequência de ressonância de difícil interpretação. Uma forma comum e conveniente de se representar a FRF é por meio de uma escala decibel (dB), tal como apresenta a figura 49, que ajuda a expor a vizinhança de anti-ressonâncias e mínimos da função. A conversão para a escala dB é feita a partir da seguinte equação:

$$\alpha(\omega)_{\text{dB}} = 20 \left( \log_{10} \frac{|\alpha(\omega)|}{1 \frac{m}{N}} \right) \quad (\text{A.46})$$

O estudo deste sistema 2GDL revela que existe uma relação intrínseca entre as anti-ressonâncias de um sistema estrutural e suas formas modais. Entre as duas frequências naturais, na FRF, existe ou uma anti-ressonância ou um mínimo de função, isso devido à questão de  $\alpha(\omega)_{jk}$  assumir valor próximo de zero, ou nunca poder assumir o valor nulo, respectivamente (EWINS, 1984), dessa forma conclui-se que a formação desses fenômenos é oriunda a partir do sinal dos elementos da matriz modal relacionados para cada termo da matriz de receptância. A partir da plotagem das diferentes FRF's para o sistema de 2GDL percebe-se, também, a característica de reciprocidade na matriz de receptância, importante para determinação da forma modal de vibração do sistema, como mostra (AVITABILE, 2017).

# B Teoria de vigas de Euler-Bernoulli

Considera-se o diagrama de corpo livre e esforços internos do elemento de viga infinitesimal (figura 50) sujeito a um esforço externo  $f(x, t)$  por unidade de comprimento, que gera um momento fletor  $M(x, t)$  e esforço cortante  $V(x, t)$ . A equação que descreve o equilíbrio de forças na direção do eixo  $z$ , quando considerada a força de inércia, é dada por:

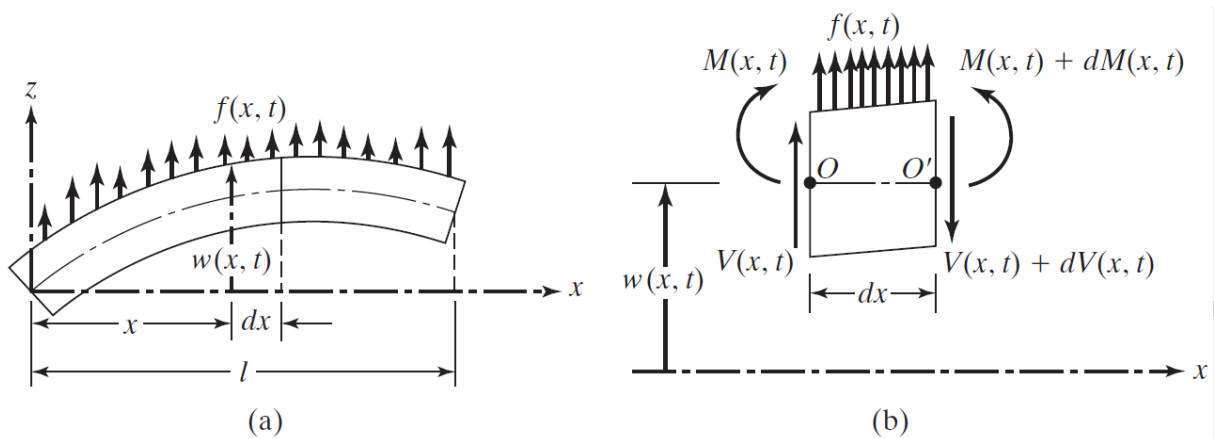


Figura 50 – Diagrama de corpo livre (a), diagrama de esforços internos (b) para um elemento de viga. Fonte: Rao (1986)

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (\text{B.1})$$

Onde  $\rho$  é a massa específica do material e  $A(x)$  é a área da seção transversal, que varia de acordo com a coordenada  $x$ ,  $w$  é a flexa da linha neutra da viga. A equação que retrata o equilíbrio de momentos em torno do eixo  $y$  é dada por:

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad (\text{B.2})$$

Pode-se utilizar a regra da cadeia nas derivativas  $dV$  e  $dM$ , obtendo-se:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad e \quad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad (\text{B.3})$$

Aplicando-se B.3 em B.1 e B.2, tem-se que:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Utilizando-se B.5 pode-se reescrever B.4 como:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (\text{B.6})$$

Da teoria de flexão de vigas de Euler-Bernoulli, a relação entre momento fletor e deflexão é expressa por:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{B.7})$$

Onde  $E$  é módulo de elasticidade à deformações normais à seção transversal,  $I(x)$  é o momento de inércia da seção transversal, em torno do eixo  $y$ . Inserindo B.7 em B.6 tem-se que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad (\text{B.8})$$

Para uma viga de seção constante, ou seja  $A(x) = A$  e  $I(x) = I$ , e sujeitada à vibração livre, portanto  $f(x, t) = 0$ , a equação de movimento B.8 reduz-se a:

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (\text{B.9})$$

O processo de resolução de uma EDP é feito a partir de uma separação da função  $w(x, t) = W(x)T(t)$ , aplicando-se valores gerais de condição inicial definidos por:

$$w(x, t = 0) = w_0(x) \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, t = 0) = \dot{w}_0(x) \quad (\text{B.11})$$

Aplicando-se a partição da função  $w(x, t)$  na equação B.9 e rearranjando ambos os lado, obtém-se:

$$\left( \frac{EI}{\rho A} \right) \frac{1}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = cte = \omega^2 \quad (\text{B.12})$$

Define-se, novamente,  $\omega$  como sendo a frequência natural da viga. Resulta-se em duas EDOs governantes, para a função  $W(x)$  e para a função  $T(t)$ , com o seguinte formato:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}(x) - \beta^4 W(x) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (\text{B.14})$$

Onde,

$$\beta^4 = \left(\frac{\rho A}{EI}\right) \omega^2 \quad (\text{B.15})$$

A solução da equação B.14 é dada por:

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (\text{B.16})$$

Onde  $A$  e  $B$  são constantes definidas a partir das condições iniciais. Para a solução da equação B.13 assume-se que:

$$W(x) = C e^{sx} \quad (\text{B.17})$$

Onde  $C$  e  $s$  são constantes. Deriva-se o polinômio característico de B.13 como:

$$s^4 - \beta^4 = 0 \quad (\text{B.18})$$

As raízes do polinômio são dadas por:

$$s_{1,2} = \pm\beta, \quad s_{3,4} = \pm i\beta \quad (\text{B.19})$$

Por fim, pode-se escrever a equação geral de deslocamento vertical da viga por meio da equação B.20.

$$\begin{aligned} W(x) = & C_1(\cos\beta x + \cosh\beta x) + C_2(\cos\beta x - \cosh\beta x) + \\ & + C_3(\sen\beta x + \sinh\beta x) + C_4(\sen\beta x - \sinh\beta x) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Onde  $C_1, C_2, C_3, C_4$  são constantes que podem ser determinadas por meio das condições de contorno impostas para a solução do sistema proposto, assim como o valor de  $\beta$ . As frequências naturais podem ser computadas a partir da seguinte expressão:

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (\text{B.21})$$

A função  $W(x)$  é denominada modo normal ou função característica da viga. Para esse sistema, existe um número infinito dessas referentes grandezas, onde cada frequência natural está associada a um modo normal.

Algumas condições de contorno comuns para vigas estruturais são listadas a seguir, além de formulações solucionadas para casos principais.

1. Livre-livre

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{B.22})$$

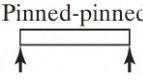
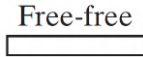
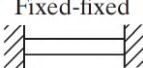
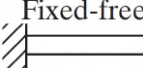
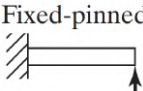
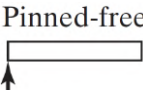
2. Suporte simples

$$w = 0 \quad e \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.23})$$

3. Engaste

$$w = 0 \quad e \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.24})$$

Tabela 22 – Condições de contorno comuns para vibração lateral de vigas. Fonte: Rao (1986)

Condições de Contorno da viga	Forma modal	Valor $\beta_n l$
 Pinned-pinned	$W_n(x) = C_n [\sin(\beta_n x)]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
 Free-free	$W_n(x) = C_n [\sin(\beta_n x) + \sinh(\beta_n x) + \alpha_n (\cos(\beta_n x) + \cosh(\beta_n x))]$ onde, $\alpha_n = \frac{\sin(\beta_n l) - \sinh(\beta_n l)}{\cosh(\beta_n l) - \cos(\beta_n l)}$	$\beta_1 l = 4,730041$ $\beta_2 l = 7,853205$ $\beta_3 l = 10,995608$ $\beta_4 l = 14,137165$ $(\beta l = 0$ para modo de corpo rígido)
 Fixed-fixed	$W_n(x) = C_n [\sinh(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) + \alpha_n (\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))]$ onde, $\alpha_n = \frac{\sinh(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)}{\cos(\beta_n l) - \cosh(\beta_n l)}$	$\beta_1 l = 4,730041$ $\beta_2 l = 7,853205$ $\beta_3 l = 10,995608$ $\beta_4 l = 14,137165$
 Fixed-free	$W_n(x) = C_n [\sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x) - \alpha_n (\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x))]$ onde, $\alpha_n = \frac{\sin(\beta_n l) + \sinh(\beta_n l)}{\cos(\beta_n l) + \cosh(\beta_n l)}$	$\beta_1 l = 1,875104$ $\beta_2 l = 4,694091$ $\beta_3 l = 7,854757$ $\beta_4 l = 10,995541$
 Fixed-pinned	$W_n(x) = C_n [\sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x) + \alpha_n (\cosh(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))]$ onde, $\alpha_n = \frac{\sin(\beta_n l) - \sinh(\beta_n l)}{\cos(\beta_n l) - \cosh(\beta_n l)}$	$\beta_1 l = 3,926602$ $\beta_2 l = 7,068583$ $\beta_3 l = 10,210176$ $\beta_4 l = 13,351768$
 Pinned-free	$W_n(x) = C_n [\sin(\beta_n x) + \alpha_n \sinh(\beta_n x)]$ onde, $\alpha_n = \frac{\sin(\beta_n l)}{\sinh(\beta_n l)}$	$\beta_1 l = 3,926602$ $\beta_2 l = 7,068583$ $\beta_3 l = 10,210176$ $\beta_4 l = 13,351768$ $(\beta l = 0$ para modo de corpo rígido)



# Anexos

# A Equipamentos Experimentais


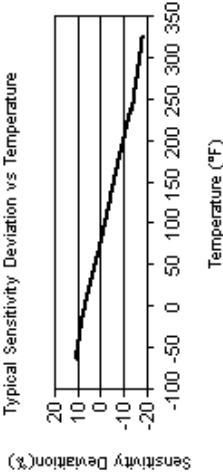
## A.1 Martelo de Impacto ICP® 086E80

Model Number <b>086E80</b>		Revision: C ECN #: 44362	
<b>ICP® IMPACT HAMMER</b>			
<b>Performance</b>	<b>ENGLISH</b>	<b>SI</b>	<b>OPTIONAL VERSIONS</b>
Sensitivity(± 20 %)	100 mV/lbf	22.5 mV/N	Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model except where noted below. More than one option may be used.
Measurement Range	50 lbf/pk	222 N pk	
Resonant Frequency	≥ 100 kHz	≥ 100 kHz	
Non-Linearity	≤ 1 %	≤ 1 %	[1]
<b>Electrical</b>			
Excitation Voltage	20 to 30 VDC	20 to 30 VDC	
Constant Current Excitation	2 to 20 mA	2 to 20 mA	
Output Impedance	<100 Ohm	<100 Ohm	
Output Bias Voltage	8 to 14 VDC	8 to 14 VDC	
Discharge Time Constant	≥ 100 sec	≥ 100 sec	[1]
<b>Physical</b>			
Sensing Element	Quartz	Quartz	[1] Typical.
Sealing	Epoxy	Epoxy	[2] Steel tip with no extender mass.
Hammer Mass	0.17 oz	4.8 gm	[3] With plastic handle attached.
Head Diameter	0.25 in	6.3 mm	[4] With aluminum handle attached.
Tip Diameter	0.10 in	2.5 mm	[5] See PCB Declaration of Conformance PS136 for details.
Hammer Length	4.2 in	107 mm	
Electrical Connection Position	Side	Side	
Extender Mass Weight	0.044 oz	1.25 gm	
Electrical Connector	5-44 Coaxial	5-44 Coaxial	
<b>SUPPLIED ACCESSORIES:</b>			
Model 001A20 Case (1)			
Model 018G10 Miniature coaxial cable, vinyl insulation jacket, 10-ft, 5-44 to 10-32 coaxial plug (1)			
Model 080A109 Petro Wax (1)			
Model 084A13 Extender mass (1)			
Model 084A14 Plastic handle assembly (2)			
Model 084A17 Aluminum handle with 5-44 connector (1)			
Model 084A28 Vinyl impact cap, red (3)			
Model HCS-2 Calibration of Series 086 instrumented impact hammers (1)			
Entered: JIM	Engineer: NJF	Sales: RWM	Approved: NJF
Date: 6/29/2015	Date: 6/29/2015	Date: 6/29/2015	Date: 6/29/2015
			Spec Number: <b>38869</b>
<b>PCB PIEZOTRONICS</b> <sup>SM</sup>			
3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043			
Phone: 716-684-0001 Fax: 716-684-0987 E-Mail: info@pcb.com			



All specifications are at room temperature unless otherwise specified.  
In the interest of constant product improvement, we reserve the right to change specifications without notice.  
ICP® is a registered trademark of PCB Group, Inc.

# A.2 Acelerômetro ICP® 352A21

<b>ICP® ACCELEROMETER</b>		Revision: J ECN #: 42346		
<p><b>Model Number</b> <b>352A21</b></p> <p><b>Performance</b> Sensitivity(± 15 %) Measurement Range Frequency Range(± 5 %) Frequency Range(± 10 %) Frequency Range(± 3 dB) Resonant Frequency Broadband Resolution(1 to 10,000 Hz) Non-Linearity Transverse Sensitivity <b>Environmental</b> Overload Limit(Shock) Temperature Range(Operating) Temperature Response <b>Electrical</b> Excitation Voltage Constant Current Excitation Output Impedance Output Bias Voltage Discharge Time Constant Settling Time(within 10% of bias) Spectral Noise(1 Hz) Spectral Noise(10 Hz) Spectral Noise(100 Hz) Spectral Noise(1 kHz) Spectral Noise(10 kHz) <b>Physical</b> Size (Height x Length x Width) Weight Sensing Element Sensing Geometry Housing Material Sealing Electrical Connector Electrical Connection Position Mounting</p>	<p><b>ENGLISH</b> 10 mV/g ± 500 g pk 1.0 to 10,000 Hz 0.7 to 13,000 Hz 0.3 to 20,000 Hz ≥ 50 kHz 0.004 g rms ≤ 1 % ≤ 5 % ± 10,000 g pk -65 to +250 °F See Graph 18 to 30 VDC 2 to 20 mA ≤ 300 Ohm 7 to 12 VDC 1.0 to 3.5 sec &lt;3 sec 800 µg/√Hz 250 µg/√Hz 60 µg/√Hz 50 µg/√Hz 40 µg/√Hz 0.14 in x 0.45 in x 0.25 in 0.6 gm Ceramic Shear Titanium Epoxy 3-56 Coaxial Jack Side Adhesive</p>	<p><b>SI</b> 1.0 mV/(m/s<sup>2</sup>) ± 4900 m/s<sup>2</sup> pk 1.0 to 10,000 Hz 0.7 to 13,000 Hz 0.3 to 20,000 Hz ≥ 50 kHz 0.04 m/s<sup>2</sup> rms ≤ 1 % ≤ 5 % ± 98,000 m/s<sup>2</sup> pk -64 to +121 °C See Graph 18 to 30 VDC 2 to 20 mA ≤ 300 Ohm 7 to 12 VDC 1.0 to 3.5 sec &lt;3 sec 7840 (µm/sec<sup>2</sup>)/√Hz 2450 (µm/sec<sup>2</sup>)/√Hz 590 (µm/sec<sup>2</sup>)/√Hz 490 (µm/sec<sup>2</sup>)/√Hz 392 (µm/sec<sup>2</sup>)/√Hz 3.6 mm x 11.4 mm x 6.4 mm 0.6 gm Ceramic Shear Titanium Epoxy 3-56 Coaxial Jack Side Adhesive</p>	<p><b>OPTIONAL VERSIONS</b> Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model except where noted below. More than one option may be used. <b>HT</b> - High temperature, extends normal operation temperatures Temperature Range(Operating) -65 to 325 °F -54 to 163 °C</p> <p><b>NOTES:</b> [1] Typical. [2] Zero-based, least-squares, straight line method. [3] See PCB Declaration of Conformance PS023 for details.</p>	<p><b>SUPPLIED ACCESSORIES:</b> Model 030A10 Coax Cable, 10 ft (3 m), 3-56 plug to 10-32 plug. (1) Model 039A27 One-piece removal tool for Models 352C22, 357C10, 352A21, &amp; 357A09 (1) Model 080A109 Petro Wax (1) Model ACS-1 NIST traceable frequency response (10 Hz to upper 5% point). (1)</p>
		<p><b>Entered: AP</b>    <b>Engineer: JJB</b>    <b>Sales: WDC</b>    <b>Approved: JJB</b>    <b>Spec Number:</b></p> <p><b>Date: 12/16/2013</b>    <b>Date: 12/16/2013</b>    <b>Date: 12/16/2013</b>    <b>Date: 12/16/2013</b>    <b>11544</b></p>		
<p><b>Typical Sensitivity Deviation vs Temperature</b></p> 		<p><i>All specifications are at room temperature unless otherwise specified. In the interest of constant product improvement, we reserve the right to change specifications without notice. ICP® is a registered trademark of PCB Group, Inc.</i></p>		





**Phone: 716-684-0001**  
**Fax: 716-684-0987**  
**E-Mail: info@pcb.com**

# A.3 Acelerômetro ICP® 352C33

Model Number 352C33	Revision: H ECN # 28610
<b>ICP® ACCELEROMETER</b>	
<p><b>Performance</b></p> <p><b>SENSITIVITY</b> ± 10 % 10.2 mV/(m/s<sup>2</sup>)</p> <p><b>Measurement Range</b> ± 50 g pk ± 490 m/s<sup>2</sup> pk</p> <p><b>Frequency Range</b> (± 5 %) 0.5 to 10,000 Hz</p> <p><b>Resonant Frequency</b> ± 50 kHz</p> <p><b>Broadband Resolution</b> (1 to 10,000 Hz) 0.00015 g rms ± 1 %</p> <p><b>Non-Linearity</b> ± 5 %</p> <p><b>Transverse Sensitivity</b> ± 5000 g pk -54 to +93 °C</p> <p><b>Environmental</b></p> <p><b>Overload Limit</b> (Shock) See Graph</p> <p><b>Temperature Response</b> 0.003 g/g</p> <p><b>Electrical</b></p> <p><b>Excitation Voltage</b> 18 to 30 VDC</p> <p><b>Constant Current Excitation</b> 2 to 20 mA</p> <p><b>Output Impedance</b> ≤ 200 ohm</p> <p><b>Output Bias Voltage</b> 7 to 12 VDC</p> <p><b>Discharge Time Constant</b> 1.0 to 2.5 sec</p> <p><b>Settling Time</b> (within 10% of bias) &lt; 10 sec</p> <p><b>Spectral Noise</b> (1 Hz) 39 µg/√Hz</p> <p><b>Spectral Noise</b> (10 Hz) 11 µg/√Hz</p> <p><b>Spectral Noise</b> (100 Hz) 3.4 µg/√Hz</p> <p><b>Spectral Noise</b> (1 kHz) 1.4 µg/√Hz</p> <p><b>Physical</b></p> <p><b>Sensing Element</b> Ceramic</p> <p><b>Sensing Geometry</b> Shear</p> <p><b>Housing Material</b> Titanium</p> <p><b>Sealing</b> Hermetic</p> <p><b>Size</b> (Hex x Height) 0.44 in x 0.62 in</p> <p><b>Weight</b> 0.20 oz</p> <p><b>Electrical Connector</b> 10-32 Coaxial Jack</p> <p><b>Electrical Connection Position</b> Side</p> <p><b>Mounting Thread</b> 10-32 Female</p> <p><b>Mounting Torque</b> 10 to 20 in-lb</p>	<p><b>SI</b></p> <p>± 490,000 m/s<sup>2</sup> pk ± 500 m/s<sup>2</sup> pk 0.5 to 10,000 Hz 0.3 to 15,000 Hz ± 50 kHz 0.00015 m/s<sup>2</sup> rms ± 1 % ± 5 %</p> <p>± 49,000 m/s<sup>2</sup> pk -54 to +93 °C See Graph 0.029 (m/s<sup>2</sup>)/µe</p> <p>18 to 30 VDC 2 to 20 mA ≤ 200 ohm 7 to 12 VDC 1.0 to 2.5 sec &lt; 10 sec 390 (µm/s<sup>2</sup>)/√Hz 110 (µm/s<sup>2</sup>)/√Hz 33 (µm/s<sup>2</sup>)/√Hz 14 (µm/s<sup>2</sup>)/√Hz</p> <p>Ceramic Shear Titanium Hermetic 0.44 in x 0.62 in 0.20 oz 10-32 Coaxial Jack Side 10-32 Female 10 to 20 N-cm</p>
<p><b>OPTIONAL VERSIONS</b></p> <p>Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model, except where noted below. More than one option may be used.</p> <p><b>HT</b> - High temperature, extends normal operation temperatures Frequency Range (5 %) 6 to 10,000 Hz 4.5 to 15,000 Hz 0.0009 g rms -65 to +325 °F 22 to 30 VDC Excitation Voltage 0.07 to 0.15 sec 107 µg/√Hz Spectral Noise (1 Hz) 58 µg/√Hz Spectral Noise (10 Hz) 41 µg/√Hz Spectral Noise (1 kHz) 9.8 µg/√Hz Output Bias Voltage 10 to 15 VDC Supplied Accessory: Model ACS-68 Single Axis Amplitude Response Calibration form 5 Hz to upper 5% plotted on dB scale replaces Model ACS-1</p> <p><b>J</b> - Ground Isolated Frequency Range (5 %) 9 kHz 14 kHz Resonant Frequency ≥ 40 kHz Electrical Isolation (Base) &gt; 10<sup>8</sup> ohm Size - Hex x Height 0.44 in x 0.67 in Weight 0.21 oz</p> <p><b>T</b> - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE P1451.4 <b>TLA</b> - TEDS LMS International - Free Format <b>TLB</b> - TEDS LMS International - Automotive Format <b>TLC</b> - TEDS LMS International - Aeronautical Format <b>TLD</b> - TEDS Capable of Digital Memory and Communication Compliant with IEEE 1451.4 Temperature Range (Memory Access) -10 to +200 °F -23 to +93 °C Excitation Voltage 20 to 30 VDC Output Bias Voltage 7.5 to 13 VDC</p> <p><b>W</b> - Water Resistant Cable Electrical Connector Sealed Integral Cable Side Electrical Connection Position Sealed Integral Cable Side</p>	<p>6 to 10,000 Hz 4.5 to 15,000 Hz 0.0009 g rms -65 to +325 °F 22 to 30 VDC 0.07 to 0.15 sec 107 µg/√Hz 58 µg/√Hz 41 µg/√Hz 9.8 µg/√Hz 10 to 15 VDC 10 to 15 VDC 9 kHz 14 kHz ≥ 40 kHz &gt; 10<sup>8</sup> ohm 0.44 in x 0.67 in 0.21 oz</p> <p>-10 to +200 °F -23 to +93 °C 20 to 30 VDC 7.5 to 13 VDC</p> <p>Sealed Integral Cable Side Sealed Integral Cable Side</p>
<p><b>NOTES:</b></p> <p>(1) Typical.</p> <p>(2) TEDS option adds 1.0 VDC to bias voltage.</p> <p>(3) 200°F to 325°F data valid with HT option only.</p> <p>(4) Zero-based, least-squares, straight line method.</p> <p>(5) Transverse sensitivity is typically ≤ 3%.</p> <p>(6) See PCB Declaration of Conformance PS/23 for details.</p>	<p><b>SUPPLIED ACCESSORIES:</b></p> <p>Model 080A Adhesive Mounting Base (1) Model 080A109 Petro Wax (1) Model 081B05 Mounting Stud (10-32 to 10-32) (1) Model ACS-1 MST traceable frequency response (10 Hz to upper 5% point), (1) Model M081B05 Mounting Stud 10-32 to M6 X 0.75 (1)</p>
<p><b>Typical Sensitivity Deviation vs Temperature</b></p> <p>All specifications are at room temperature unless otherwise specified. In the interest of constant product improvement, we reserve the right to change specifications without notice. ICP® is a registered trademark of PCB Group, Inc.</p>	<p>Entered: <b>BS</b> Engineer: <b>BM</b> Sales: <b>WDC</b> Approved: <b>ES</b> Date: <b>1/15/08</b> Date: <b>1/15/08</b> Date: <b>1/15/08</b> Date: <b>1/15/08</b> Spec Number: <b>13118</b></p> <p><b>PCB PIEZOTRONICS</b> VIBRATION DIVISION 3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043 Phone: 716-684-0001 Fax: 716-685-3886 E-Mail: vibration@pcb.com</p>

# A.4 Célula de carga ICP® 208C01

<b>Model Number</b> <b>208C01</b>	<b>ICP® FORCE SENSOR</b>	Revision: K ECN #: 45224		
<p><b>Performance</b>                  Sensitivity (<math>\pm</math> 15 %) 500 mV/lb                  Measurement Range(Compression) 10 lb                  Measurement Range(Tension) 10 lb                  Maximum Static Force(Compression) 60 lb                  Maximum Static Force(Tension) 60 lb                  Broadband Resolution(1 to 10,000 Hz) 0.0001 lb-rms                  Low Frequency Response(-5 %) 0.01 Hz                  Upper Frequency Limit 36,000 Hz                  Non-Linearity <math>\leq</math> 1 % FS</p> <p><b>Environmental</b>                  Temperature Range -65 to +250 °F                  Temperature Coefficient of Sensitivity <math>\leq</math> 0.05 %/°F</p> <p><b>Electrical</b>                  Discharge Time Constant(at room temp) <math>\geq</math> 50 sec                  Excitation Voltage 18 to 30 VDC                  Constant Current Excitation 2 to 20 mA                  Output Impedance <math>\leq</math> 100 Ohm                  Output Bias Voltage 8 to 12 VDC                  Spectral Noise(1 Hz) 0.000126 lb/√Hz                  Spectral Noise(10 Hz) 0.000042 lb/√Hz                  Spectral Noise(100 Hz) 0.000015 lb/√Hz                  Spectral Noise(1000 Hz) 0.000005 lb/√Hz                  Output Polarity(Compression) Positive</p> <p><b>Physical</b>                  Stiffness 6 lb/jin                  Size (Hex x Height x Sensing Surface) 0.625 in x 0.625 in x 0.500 in 15.88 mm x 15.88 mm x 12.7 mm                  Weight 0.80 oz                  Housing Material Stainless Steel                  Sealing Hermetic                  Electrical Connector 10-32 Coaxial Jack                  Electrical Connection Position Side                  Mounting Thread 10-32 Female</p>	<p style="text-align: center;"><b>SI</b></p> <p>112.410 mV/kN                  0.04448 kN                  0.04448 kN                  0.27 kN                  0.27 kN                  0.00045 N-rms                  0.01 Hz                  36,000 Hz  <math>\leq</math> 1 % FS</p> <p>-54 to +121 °C  <math>\leq</math> 0.09 %/°C</p> <p><math>\geq</math> 50 sec                  18 to 30 VDC                  2 to 20 mA  <math>\leq</math> 100 Ohm                  8 to 12 VDC                  0.0000562 N/√Hz                  0.0000189 N/√Hz                  0.0000067 N/√Hz                  0.0000023 N/√Hz                  Positive</p> <p>1.05 kN/jum                  15.88 mm x 15.88 mm x 12.7 mm                  22.7 gm                  Stainless Steel                  Hermetic                  10-32 Coaxial Jack                  Side                  10-32 Female</p>	<p><b>OPTIONAL VERSIONS</b></p> <p>Optional versions have identical specifications and accessories as listed for the standard model except where noted below. More than one option may be used.</p> <p><b>N</b> - Negative Output Polarity Negative Negative                  Output Polarity(Compression) Negative</p> <p><b>W</b> - Water Resistant Cable</p>		
<p><b>NOTES:</b>                  [1]Sensor contains protected electronics which may cause long 'turn-on' times.                  [2]Typical.                  [3]Calculated from discharge time constant.                  [4]Estimated using rigid body dynamics calculations.                  [5]Zero-based, least-squares, straight line method.                  [6]See PCB Declaration of Conformance PS023 for details.</p>				
<p><b>SUPPLIED ACCESSORIES:</b>                  Model 080A81 Thread Locker (1)                  Model 081B05 Mounting Stud (10-32 to 10-32) (2)                  Model 084A03 Impact Cap (1)                  Model M081A62 Mounting stud, 10-32 to M6 x 1, BeCu with shoulder (2)</p>				
Entered: LK	Engineer: MJK	Sales: KMW	Approved: APB	Spec Number:
Date: 3/29/2016	Date: 3/29/2016	Date: 3/29/2016	Date: 3/29/2016	<b>8625</b>
			Phone: 716-684-0001 Fax: 716-684-0987 E-Mail: info@pcb.com	
3425 Walden Avenue, Depew, NY 14043				
<p style="text-align: center;">                  All specifications are at room temperature unless otherwise specified.                  In the interest of constant product improvement, we reserve the right to change specifications without notice.                  ICP® is a registered trademark of PCB Group, Inc.             </p>				