

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS
DINÂMICOS DISCRETOS EM TLD
ACOPLADO A ESTRUTURA**

Por,

Abraão Ferreira de Sousa Neto

Brasília, 7 de dezembro de 2018

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS
DINÂMICOS DISCRETOS EM TLD
ACOPLADO A ESTRUTURA**

Por,

Abraão Ferreira de Sousa Neto

Relatório submetido como requisito final para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Marcus Vinicius Girão de Moraes, Dr.Univ.(UnB-EnM) _____

Gino Bertolucci Colherinhas, Mestrado _____

Adriano Todorovic Fabro, PhD(UnB - EnM) _____

Suzana Moreira Ávila, DSc.(UnB - FGA) _____

Brasília 7 de dezembro de 2018

Resumo

Um absorvedor dinâmico de vibração líquido (tuned liquid damper - TLD) é um dispositivo de controle passivo. O TLD tem por princípio de funcionamento de um absorvedor dinâmico de vibração, ou seja, a transferência de energia cinética da estrutura principal para um tanque contendo fluido. A descrição do TLD é complexa do ponto de vista matemático. Uma solução de projeto é transformar o fluido em um sistema dinâmico equivalente descrito por massa-molas discretas. O presente trabalho busca realizar uma otimização dos parâmetros geométricos do tanque a fim de minimizar a vibração da estrutura principal, utilizando um modelo dinâmico equivalente do TLD.

Palavras-chaves: tld. modelo dinâmico equivalente. absorvedor dinâmico de vibração. otimização.

Abstract

A liquid dynamic vibration damper (tuned liquid damper - TLD) is a passive control device. The TLD has as operation principle the kinetic energy transfer from the main structure to a container with fluid. The description of TLD has a complex mathematical background. A design solution is to transform the fluid in dynamic equivalent system described by rigid and mobile masses. In this current report, a geometric optimization of the tank parameters is done aiming to minimize the vibration of the main structure, using an equivalent dynamic model of TLD.

Key-words: TLD. tuned liquid damper. equivalent dynamic model. dynamic vibration absorber. optimization

Agradecimentos

Durante esses 22 anos de vida, tive a sorte de contar com uma família muito presente na minha formação intelectual e moral. Valores significativos como respeito, humildade e empatia, foram colocados a mim desde o berço. Assim, o agradecimento aos meus pais, Francisco Carlos Rocha Sousa e Itacimar Passos Sousa, não pode passar somente pelo acompanhamento e carinho, mas por toda a minha formação psíquica como um ser humano. Agradeço desde já a presença constante da minha família nessa jornada, e dedico esse trabalho a eles, pois presenciei o esforço dos meus pais para me conceder uma educação adequada. Amo vocês! Agradeço também a minhas irmãs, primeiramente Laura, minha eterna parceira de brigas e diversões, quando brigávamos pelo controle da televisão, e logo depois os dois estavam assistindo Cavaleiros do Zodíaco ou Dragon Ball Z. Depois, a Luísa, a luz da nossa família, que veio dez anos depois do meu nascimento e que iluminou nossas vidas com a sua presença afetuosa e infantil. Desejo tudo de bom para você minha pequena irmã, e tudo que precisar, é só apitar!!

A todos os meus tios, primos, avós, tios-avós e amigos da família que também fizeram parte da minha jornada. Se eu nomear um por um, vou fazer umas 20 páginas de agradecimento, porque de um lado é a tribo dos Rocha e do outro a dos Passos, e por isso vou fazer somente um agradecimento especial aos meus padrinhos e Antônio Rocha e Iacimar Passos, aos meus tios Osmar e Graça que sempre foram presentes durante o tempo que morei em Brasília, a família dos meus primos Guioberto, Theresa, Amanda e Natália, que me acolheram em sua casa quando vim com 17 anos para a capital brasileira, todos pessoas sensacionais, que serei eternamente agradecido. Devo fazer também uma menção especial aos meus avós, Ivar e Leomar, que apesar de terem partido, marcaram a minha infância. Ao meu avô Abraão, que embora eu não tenha conhecido, suas histórias inspiram até hoje a família, a minha avó Judite, simplesmente sensacional e inteligente, que até hoje nos sustenta com sua solidez, e a minha tia-avó quase avó Lili Rocha, que sempre nos acompanhou e tem participação especial na minha formação pessoal.

Aos amigos do ensino médio, que mantenho contato até hoje e quando volto para minha terra estão sempre presentes nas resenhas, jogos, festas e refeições de reunião da galera antiga. Faço menções especiais a galera do grupo F.R.I.E.N.D.S., Alexandre Martins, Gabriel Frota, Brenda Abreu, Bia Marinho, Mathews Lacerda, Isabela Salomão, Lívia Morais, Odecio Gomes, Rômulo Galvão, Fernando Marques e Monalisa Coelho, aos

brothers do FightClub Kingsman, Paizão, Guilherme, Andrew, Ionésio e Igor, pessoas que espero manter contato até o fim.

Da universidade, agradeço ao meu orientador Marcus Vinícius Girão de Moraes, que esteve totalmente presente na proposição e construção deste trabalho, auxiliando-me também com conselhos e indicações importantes para minha formação universitária. Ao meu co-orientador Gino Bertolucci Colheirinhas, e a banca examinadora formada pelo professor Adriano Todorovic Fabro e Suzana Moreira Ávila.

À Draco Volans Aerodesign, sem dúvida nenhuma a minha experiência mais importante de universidade, equipe de competição que me fez crescer como profissional, pessoa e amigo. Desde 2015, quando entrei como calouro e percebi o quão duro era preciso trabalhar para obter resultados na competição SAE Brasil Aerodesign. Já em 2016, participei de uma equipe de projetos sensacional, que sem dúvida nenhuma era o Dream Team de cacifes em suas áreas. João Luiz, Sales, Rodrigo, Bernardo, Lucas e Leonardo, foram todos membros de um sonho de pódio na competição, e sem dúvida nenhuma estão entre os principais responsáveis da formação de conhecimento da Draco, que culminou na vitória em 2017, deixando os seus pupilos-líderes e meus amigos Gabriel Torres, Geovanna Callasans, Izael Vieira, Marina Lenza, Bernardo Azevedo e Bruno Santos, e os demais integrantes que em 2017 consagraram a nossa equipe um pódio representando a melhor posição da Draco na história. Agradeço também ao orientador da Draco Volans, Braulio Gutierrez Pimenta, que muito auxiliou a equipe no êxito da competição de 2017.

Aos meus amigos de universidade, que sinceramente pretendo manter contato com todos, agora que nossos caminhos provavelmente se separam. Todos fizeram parte da minha trajetória e o FOCO NA MISSÃO de formar na universidade, seja nas festas e resenhas, ou nos bizzos e notas de aula para as provas insanas realizadas no curso. Deixo aqui minha menção especial a Bel, Gadioli, Judô, Japa, Tonho, Socat, Toby, Janta, Zé, Rodrigo, Ana Elisa, Isadora, Luiza e Victor Gasparetto.

Lista de Figuras

Figura 1 – Aplicação Predial de TLD Fonte: Earthquake Hazards Team - Apresentação	1
Figura 2 – Absorvedor Dinâmico de Vibrações 2 GDL	4
Figura 3 – Modelo dinâmico equivalente (massa-mola)	11
Figura 4 – Diagrama de corpo livre (massa-mola)	12
Figura 5 – Razão de massas pela razão de preenchimento. (IBRAHIM, 2005)	14
Figura 6 – Acoplamento Sloshing + Estrutura (massa-mola e pêndulo, respectivamente)	15
Figura 7 – Diagrama de corpo livre	18
Figura 8 – Razão de massas em função da razão de preenchimento	23
Figura 9 – Comparação entre o experimento de Cooker e modelo pendular deduzido pela formulação Lagrangeana	27
Figura 10 – Mapa de respostas num espaço adimensional para o TMD obtido por Colherinhas (2016)	29
Figura 11 – Mapa de respostas e função resposta em frequência da amplitude para um valor de μ e γ	32
Figura 12 – Mapa de respostas com h/L	33
Figura 13 – Vista Superior do Mapa de respostas na figura 12	34
Figura 14 – Mapa de respostas sem adição de amortecimento	34
Figura 15 – Influência do amortecimento da estrutura ($\xi_s = 2\%$ e $\xi_s = 5\%$, respectivamente)	35
Figura 16 – Influência do amortecimento do fluido ($\xi_1 = 2\%$ e $\xi_1 = 5\%$, respectivamente)	36
Figura 17 – Influência do razão de preenchimento (0,15 e 0,35, respectivamente)	37
Figura 18 – Lugar geométrico do ótimo para várias razões de preenchimento	38
Figura 19 – Regressão da curva de μ por γ para $h/L = 0,2$	39
Figura 20 – Regressão da curva de μ por γ para $h/L = 0,4$	39
Figura 21 – Regressão da curva de μ por γ para $h/L = 0,6$	39
Figura 22 – Regressão da curva de μ por γ para $h/L = 0,8$	40

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comparação entre frequência de oscilação de superfície livre em um contâiner retangular, obtidas pelo experimento e pelo método de massa equivalente	24
Tabela 2 – Comparação dos resultados de frequência de <i>sloshing</i> de sistema massa-mola equivalente com relação à literatura (ZOU; WANG, 2015)	24
Tabela 3 – Comparação dos resultados de frequência de <i>sloshing</i> de sistema massa-mola equivalente com relação à literatura (ZOU; WANG, 2015)	25
Tabela 4 – Valores de período experimental e analítico (COOKER, 1994)	25
Tabela 5 – Valores de período para $l=0,185$ m (Estrutura massa-mola)	26
Tabela 6 – Valores de período para $l=0,245$ m (Estrutura massa-mola)	26
Tabela 7 – Valores de período para $l=2,152$ m (Estrutura massa-mola)	26
Tabela 8 – Valores de período (s) para $l=0,185$ m (Estrutura pendular)	26
Tabela 9 – Valores de período (s) para $l=0,245$ m (Estrutura pendular)	26
Tabela 10 – Valores de período (s) para $l=2,152$ m (Estrutura pendular)	27

Lista de símbolos

Símbolos latinos

F_0	Amplitude de forçamento no sistema principal
t	Tempo
m	Massa
x	Coordenada do deslocamento
X	Amplitude de deslocamento
k	Rigidez
u	Velocidade na direção x
v	Velocidade na direção y
w	Velocidade na direção z
p	Pressão
g	Gravidade
$f(t)$	Função do tempo
p_0	Pressão estática
e	Número de Euler
i	Número imaginário
h	Altura de líquido
B	Constante genérica
F	Constante genérica
n	Número do massas móveis (Número da forma modal)
a	Largura do tanque

b	Comprimento do tanque
A	Área de superfície
F_x	Força hidrostática na parede do tanque
L	Comprimento do pêndulo (modelo dinâmico equivalente pendular)
H	Altura da massa rígida em relação ao CG do líquido
M	Momento
F_{ext}	Forçamento externo
T	Período
M_b	Massa da base
K_b	Rigidez acoplada a base
E	Esperança
S_0	Função densidade espectral de potência

Símbolos Gregos

ϵ	Erro
Ω	Frequência de excitação do sistema principal
ω	Frequência natural do acoplamento
ω_{theta}	Frequência natural do pêndulo
ω_n	Frequência natural de cada massa móvel
ϕ	Potencial de velocidades
ρ	Massa específica
δ	Deslocamento da superfície livre
ξ	Autofunção na direção x
ζ	Autofunção na direção z
λ	Constante genérica
θ	Deslocamento angular da base

Subscritos

p	Sistema principal
s	Sistema secundário
0	Coordenada da massa rígida
n	Número da massa móvel
f	Fluido
meq	Massa equivalente
a	Analítico
e	Experimental
max	Máximo

Sumário

	1 INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização e Motivação	1
1.2	Objetivos	3
1.3	Metodologia	3
	2 CONTROLE DE VIBRAÇÕES	4
	3 MODELAGEM DE SUPERFÍCIE LIVRE	6
3.1	Solução para Reservatório Retangular	8
3.2	Modelos dinâmicos equivalentes	10
	4 ACOPLAMENTO <i>SLOSHING</i>-ESTRUTURA	15
4.1	Modelo Massa-Mola	15
4.2	Modelo Pendular (Newton)	16
4.3	Modelo Pendular (Lagrange)	17
4.4	Implementação	19
	5 VALIDAÇÃO DOS MODELOS	22
5.1	<i>Sloshing</i> para massas equivalentes	22
5.1.1	Comparação gráfica com Ibrahim (2005)	22
5.1.2	Validação do modelo com experimento realizado por Lopez, Pedroso e Moraes (2016)	23
5.1.3	Validação do modelo com solução apresentada por Zou e Wang (2015)	24
5.2	<i>Sloshing</i> equivalentes acoplados a estrutura	25
5.3	Validação do modelo pendular simétrico	27
	6 OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA <i>SLOSHING</i> ACOPLADO A ESTRUTURA	28
6.1	Introdução	28
6.2	Adimensionalização	29
6.2.1	Adição de Amortecimento	29

6.3	Adimensionalização do modelo	30
6.4	Mapa de respostas	31
6.4.1	Análise do Mapa de Respostas Típico	33
6.4.2	Análise do mapa de respostas sem amortecimento $\xi_1 = \xi_s = 0$	34
6.4.3	Influência do amortecimento da estrutura	35
6.4.4	Influência do amortecimento do fluido	36
6.4.5	Influência da variação da razão de preenchimento	37
6.5	Construção do mapa de resposta ótimo	38
	7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
7.1	Conclusões	41
7.2	Perspectivas Futuras	42
	REFERÊNCIAS	43
	APÊNDICES	45
	APÊNDICE A – CÓDIGO SLOSH_CONV.M	46
	APÊNDICE B – CÓDIGO SLOSH_ACOPL.M	49
	APÊNDICE C – CÓDIGO MAPA_RES_SIM.M	52
	APÊNDICE D – CÓDIGO PENDULO_MASS.M	54
	APÊNDICE E – CÓDIGO PLOTFINAL.M	56

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização e Motivação

O controle de vibrações é um assunto largamente aplicado na engenharia estrutural. Técnicas de controle de energia vibracional foram desenvolvidas e uma das tendências atuais é o estudo da mitigação de vibrações utilizando líquidos contidos em tanques (TLD - tuned liquid dampers) (TAIT, 2008). Estruturas de alta razão de aspecto, como torres e arranha-céus estão constantemente submetidas a carregamentos excessivos cuja predição é complexa, e escapar desses efeitos é uma necessidade recorrente. Ação do vento e terremotos são alguns fenômenos naturais aos quais estruturas estão constantemente submetidas, e nesse ínterim que se aplica a utilização de tanques com fluido para solução deste problema.

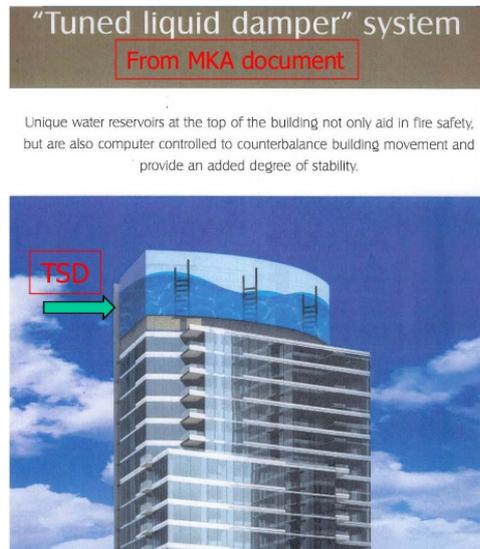


Figura 1: Aplicação Predial de TLD Fonte: Earthquake Hazards Team - Apresentação

A proposta deste trabalho está amparada em três importantes áreas de estudo da engenharia: controle passivo de vibrações, dinâmica de líquidos em superfície livre (*sloshing*) e otimização. O controle passivo de vibrações é extremamente utilizado em diversas aplicações de engenharia e já foi exaustivamente abordado por diversos autores

estabelecidos no estudo de vibrações. Um dos modelos que atualmente são arduamente estudados é o de utilizar recipientes parcialmente preenchidos com líquidos para o controle passivo de vibração aplicado a alguns tipos de estruturas, por exemplo arranha-céus, que podem ter outras funcionalidades como o armazenamento de líquidos. A pesquisa realizada por [Fujino, Sun e Pacheco \(1992\)](#) estuda a aplicação de absorvedores dinâmicos de vibração líquidos retangulares (*rectangulars tuned liquid dampers*) através da teoria de ondas de águas rasas a estruturas excitadas por forçamentos harmônicos com o intuito de dissipar energia vibracional. Uma metodologia analítica para descrever o movimento do fluido é utilizada e a adição do amortecimento é semi-analítica, definindo que a tensão de cisalhamento é muito pequena fora da camada limite, e por isso o amortecimento é modelado como puramente efeito de tensões de cisalhamento existentes na camada limite.

Esses estudos evoluíram com a pesquisa de [Tait \(2008\)](#), que avalia tanto a solução para forçamentos periódicos quanto randômicos. Nessa abordagem, o efeito do amortecimento é obtido através de uma função do forçamento aplicado, considerando não somente as componentes horizontais de velocidade (mais relevantes), como também as verticais. Além disso, [Tait \(2008\)](#) utiliza uma comparação com absorvedores dinâmicos de massa (TMD) para modelar o problema e com isso obter as equações que descrevem o acoplamento fluido-estrutura abordado.

No mesmo ano, [Deng e Tait \(2008\)](#) publicaram uma pesquisa extendendo a teoria a outras geometrias de tanque, sendo elas retangular, cilíndrica vertical, cilíndrica horizontal e hiperbolóide (cônica). Uma diferente abordagem para o atrito foi aplicada, caracterizando-o através da equação de Morrison e a teoria de trabalho virtual. A descrição do problema de *sloshing* é feita através dos modelos dinâmicos equivalentes, e aplica-se o mesmo princípio utilizado neste trabalho.

Abordagens experimentais foram realizadas por [Lopez, Pedroso e Morais \(2016\)](#), através de duas frentes. Uma bancada composta por um tanque retangular recebe uma excitação horizontal não controlada, e compara os dados obtidos com a formulação analítica. Outra dispõe o tanque num pendulo trifilar e obtém-se os valores experimentais para o acoplamento do *sloshing* com o movimento pendular. Os resultados foram comparados com os valores obtidos por [Cooker \(1994\)](#), que também realiza uma abordagem experimental e analítica descrevendo a estrutura como um pêndulo e o *sloshing* pelos modelos dinâmicos equivalentes, porém com quatro fios diretamente ligados ao tanque.

Outro tipo de absorvedor dinâmico de vibração líquido é o de coluna (tuned liquid column damper - TLCD) ([SHUM, 2008](#)). O objetivo não é simplesmente obter uma formulação paramétrica do problema de acoplamento de estruturas a absorvedores líquidos, mas buscar um meio de otimizar a função obtida para que se facilite o projeto de TLCD's. [Shum \(2008\)](#) aplica uma metodologia numérica de otimização utilizando o método do ponto fixo com uma técnica de perturbação e busca obter uma função que minimize a amplitude de vibração da estrutura, de acordo com os parâmetros geométricos e de preenchimento possíveis. Para resolver o problema do *sloshing*, define a estrutura como um

modelo massa-mola, avaliando com e sem amortecimento a resposta do sistema, sendo que no caso amortecido foi utilizado um modelo cujo amortecimento seria linearizado em função do deslocamento vertical da coluna de líquido.

No tocante ao estudo da flexibilidade da estrutura, [Zou e Wang \(2015\)](#) usa outra técnica de modelagem, considerando uma rigidez a flexão e com isso aparece um efeito de deformação da estrutura, não somente deslocamento como na descrição rígida. Os modelos dinâmicos equivalentes ([ZOU; WANG, 2015](#)) mostram a influencia relevante da deformação da estrutura na forma modal. A massa rígida de líquido considerada no fundo do recipiente domina o fenômeno da deformação da parede no fundo e a primeira massa móvel domina a deformação da superfície livre.

Outra abordagem interessante empregada atualmente para a solução de problemas de acoplamento de estrutura + *sloshing*. [Soliman, Tait e Damatty \(2015\)](#) utilizam métodos de elementos finitos (MEF) para resolver o problema. É realizada uma análise tridimensional, e procura-se encontrar a melhor posição para o tanque em uma estrutura, sejam elas pontes, torres ou prédios muito altos, sendo extremamente recomendado para casos onde há uma excentricidade ou irregularidade na estrutura, principalmente quando há uma sensibilidade a esforços torcionais no caso analisado.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é obter parâmetros ótimos para um tanque retangular semi-preenchido com líquido a fim de dissipar energia vibracional de uma estrutura. A proposta é utilizar modelos dinâmicos equivalentes para caracterizar o fenômeno do *sloshing*, simular a estrutura como um sistema massa-mola ou pendular e realizar uma otimização paramétrica para minimizar as amplitudes de vibração da estrutura.

1.3 Metodologia

Implementar em MATLAB[®] a modelagem do *sloshing* utilizando os modelos dinâmicos equivalentes acoplado a uma estrutura descrita por um pêndulo de baixas amplitudes e uma rigidez acoplada a uma massa. Realizar um estudo de convergência para o número de massas móveis que devem ser aplicadas, além de comparações com diversos trabalhos, tanto para as frequências naturais de *sloshing*, quanto para as do acoplamento.

Validados os modelos, busca-se uma função de transferência da amplitude da estrutura, que funcionará como uma expressão a ser analisada graficamente com o objetivo de minimizar essa função (diminuição da amplitude). Por fim, obter os parâmetros geométricos ótimos do tanque, para várias razões de preenchimento e diferentes frequências de excitação aplicadas na estrutura.

2 Controle de vibrações

Em vibrações, o controle é a área que busca intervir no comportamento de um sistema dinâmico, com o objetivo de fazê-lo responder de maneira desejada. Os controles podem ser ativos ou passivos, onde o ativo adiciona energia no sistema e o passivo não. Os absorvedores dinâmicos de vibrações são um tipo de dispositivo para controle passivo, cujo objetivo é minimizar as amplitudes de vibração do sistema principal.

A sua modelagem para dois graus de liberdade (SAVI; PAULA, 2017) é descrita pela Figura (2):

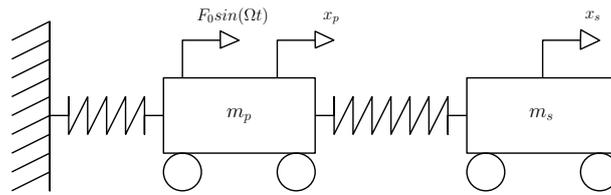


Figura 2: Absorvedor Dinâmico de Vibrações 2 GDL

Dessa forma, utilizando a formulação de Newton é possível escrever a equação do movimento para o sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_p + k_s & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

O sistema com uma força harmônica vibra de acordo com a frequência do forçamento, a solução para as coordenadas primária (x_p) e secundária (x_s), serão da forma:

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_p \\ X_s \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \quad (2.2)$$

onde X_p e X_s representam as amplitudes de vibração de cada coordenada. Aplicando essas soluções na Eq. (2.1), obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} k_p + k_s - m_p \Omega^2 & -k_a \\ -k_a & k_a - m_p \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_p \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Como deseja-se investigar as amplitudes de oscilação de cada massa, multiplica-se pela inversa da matriz de impedância dos dois lados da Eq. (2.3), e com isso tem-se o vetor X isolado. A partir disso, pode-se resolver o sistema linear, e assim obter as amplitudes de vibração dos sistemas principal e secundário.

$$X_p = \frac{(k_s - m_s \Omega^2) F_0}{(k_p + k_s - m \Omega^2)(k_s - m \Omega^2) - k_s^2} \quad (2.4)$$

$$X_s = \frac{k_s F_0}{(k_p + k_s - m \Omega^2)(k_s - m \Omega^2) - k_s^2} \quad (2.5)$$

Com a obtenção dessas funções da amplitude, lembrando que a frequência natural de cada sistema é dada pela raiz da rigidez associada pela massa, tem-se:

$$X_p = \frac{(1 - \Omega/\omega_s)(F_0/k)}{[1 + \mu(\omega_s/\omega_p)^2 - (\Omega/\omega_p)^2][1 - (\Omega/\omega_s)^2] - \mu(\omega_s/\omega_p)^2} \quad (2.6)$$

$$X_s = \frac{(F_0/k)}{[1 + \mu(\omega_s/\omega_p)^2 - (\Omega/\omega_p)^2][1 - (\Omega/\omega_s)^2] - \mu(\omega_s/\omega_p)^2} \quad (2.7)$$

onde μ representa a razão de massas entre o absorvedor e o sistema principal. O dispositivo TLD que é estudado neste trabalho comporta-se de maneira geral da mesma forma que o modelo do absorvedor dinâmico de vibrações genérico. A diferença reside na presença de líquido, e com isso é necessária toda uma abordagem fluido-dinâmica para descrever o movimento do fluido e aplicar na teoria descrita nesta seção. A função de amplitude em relação a razão de massas e de frequências na Eq. (2.6) obtidas para o caso do TLD acoplado a uma estrutura e aplicando os algoritmos genéticos será possível minimizar esta função para obter as dimensões geométricas ótimas do tanque.

3 Modelagem de Superfície Livre

Sloshing é um problema caracterizado pelo movimento de um fluido dentro de um recipiente e a sua modelagem pode ser abordada de várias maneiras. Dodge (2000) deduz a solução analítica e obtém as equações para as frequências naturais de cada modo de vibrar. Primeiramente, define-se as equações governantes do movimento do fluido no tanque rígido sendo conservação da massa e variação da quantidade de movimento (Navier-Stokes). As hipóteses para simplificar o problema são de um fluido líquido ideal invíscido, irrotacional e a condição de incompressibilidade.

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (3.1)$$

Com isso é possível aplicar a teoria potencial, que pode ser representada pela equação de Laplace e que por sua vez possui solução analítica.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2\phi = 0 \quad (3.2)$$

Com todas essas condições assumidas, é possível simplificar as equações de Navier-Stokes para Bernoulli na forma não permanente:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \rho} + gz + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = f(t). \quad (3.3)$$

Na Eq. (3.3), as velocidades estão todas elevadas ao quadrado. Assume-se que são tão pequenas que é possível desprezá-las em relação aos outros termos. Como o único termo que depende do tempo é o potencial de velocidades, é possível adicionar qualquer função do tempo ao termo da derivada temporal do potencial e assim a equação de Bernoulli se torna:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \rho} + gz = 0. \quad (3.4)$$

Após o tratamento das equações governantes, as condições de contorno são aplicadas de duas formas: na superfície livre e nas paredes do tanque. Na primeira, considerando a massa específica do gás acima da superfície muito menor que a do líquido, a pressão na superfície é igual a pressão estática do gás, e os deslocamentos são consideradas muito

pequenos em relação a altura de líquido no tanque, e por isso podem ser negligenciados. É possível conectar o deslocamento da superfície livre δ com a velocidade no eixo z do fluido. A partir dessas considerações, pode-se obter matematicamente a condição de contorno de superfície livre (para $z = h/2$), tal que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (3.5)$$

que foi oriunda da diferenciação em relação ao tempo da Eq. (3.6):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\delta = -\frac{p_o}{\rho}, \quad (3.6)$$

onde:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = w. \quad (3.7)$$

Dessa forma, a teoria apresentada por [Axisa e Antunes \(2007\)](#) para *surface waves* é suficiente para ambientar sobre o assunto. As ondas de superfície são basicamente formadas pelas influências da gravidade e da tensão superficial em uma interface líquido-gás, e mesmo que estudadas em caráter linear, necessitam de um complexo tratamento matemático para manipular de uma maneira eficiente o problema. Os estudos nessa área geralmente trabalham com a hipótese de forçamentos harmônicos, que também será adotada para a resolução do problema avaliado.

Com a aplicação dessas hipóteses, existem utilizadas para a obtenção de uma solução analítica: águas rasas e águas profundas. Essas considerações estão ambientadas na razão entre a altura de preenchimento do líquido no recipiente (h) e a largura (a), cuja modelagem com águas rasas considera ($h/a \ll 1$) e a de águas profundas ($h/a \geq 1$). Porém, como a aplicação neste trabalho será de modelos dinâmicos equivalentes, não serão feitas simplificações para um caso ou outro, sendo analisada em uma intervalo de razões de preenchimento que envolvem tanto águas rasas como profundas, opção que é bem explorada por [Dodge \(2000\)](#) e [Ibrahim \(2005\)](#) e serão usados para ambientar as deduções.

De posse das equações governantes, é necessário definir as condições de contorno para o problema sendo que neste trabalho serão consideradas somente excitações laterais e horizontais, de modo que o deslocamento será regido pela Eq. (3.8):

$$X(T) = -X_o e^{i\Omega t}. \quad (3.8)$$

Derivando a equação acima e igualando-a a velocidade horizontal do fluido no problema, obtém-se a condição de contorno na superfície:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = iX_o \Omega e^{i\Omega t}, \quad (3.9)$$

significa que a velocidade no eixo x do fluido nas proximidades das paredes é igual a velocidade imposta pela excitação considerada no recipiente.

3.1 Solução para Reservatório Retangular

Lembrando que a solução para um tanque retangular envolve a hipótese de solução harmônica no tempo, Dodge (2000) desenvolve as autofunções para o cálculo da expressão que define a frequência natural somente no domínio espacial e quando aparecer derivadas temporais na dedução, acrescenta-se $i\omega$ nas expressões, já que a função harmônica pode ser definida por uma amplitude multiplicada por $e^{i\omega t}$ e ao derivar-se esse tipo de função (exponencial), apenas multiplica-se a constante que acompanha a variável tempo no expoente do número de Euler pela própria função. Utilizando o método de separação das variáveis para obter as autofunções, será possível construir três funções diferentes que só dependem exclusivamente de uma coordenada ($\xi(x)$, $\phi(y)$ e $\zeta(z)$), que aplicadas na Eq. (3.2) e depois divididas por $\phi = \xi\phi\zeta$. Dessa forma obtém-se:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = 0 \quad (3.10)$$

Como a dedução é feita para ondas bidimensionais, a função de y pode ser considerada como zero, reduzindo a Eq. (3.10) para:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = 0 \quad (3.11)$$

A solução dessa equação pode ser desacoplada porque cada função é dependente de somente uma coordenada, dessa forma cada termo da Eq. (3.11) pode ser igualado a uma constante e estas serão opostas para manter a igualdade. Assim, tem-se:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \mp \lambda^2 \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = \pm \lambda^2 \quad (3.13)$$

onde resolvendo as EDO's, obtém-se as seguintes funções para ξ e ζ :

$$\xi(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \quad (3.14)$$

$$\zeta(z) = E \sinh(\lambda z) + F \cosh(\lambda z) \quad (3.15)$$

onde o segundo par de funções:

$$\xi(x) = A \sinh(\lambda x) + B \cosh(\lambda x) \quad (3.16)$$

$$\zeta(z) = E \sin(\lambda z) + F \cos(\lambda z) \quad (3.17)$$

As soluções para o potencial de velocidades considerando ondas 2D no plano xz podem ser encontradas para $\phi = \xi\zeta$. Dessa forma, para encontrar as constantes das Eqs. (3.14), (3.16), (3.15), (3.17) deve-se aplicar as condições de contorno definidas anteriormente, explicitadas nas Eqs. (3.5) e (3.9). Primeiramente aplicando a condição de superfície, é possível obter uma expressão para as constantes E e F tal que:

$$E = F \tanh\left(\frac{\lambda h}{2}\right) \quad (3.18)$$

De acordo com Dodge (2000), existem diversas soluções do potencial de velocidades para o caso 2D e uma para o caso 3D. Como neste trabalho são analisadas ondas bidimensionais no plano xz , as equações para os planos yz e xyz são ignoradas, será apresentada somente a solução conveniente para o plano xz , sendo ela:

$$\begin{aligned} \phi = & (BF) \sin[(2n-1)\pi(x/a)] \cosh[(2n-1)\pi(z/a)] \\ & + (BF) \sin[(2n-1)\pi(x/a)] \tanh[2(n-1)\pi(h/a)] \sinh[(2n-1)\pi(z/a)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

O próximo passo é substituir a condição de superfície livre exposta na Eq. (3.9) na Eq. (3.19). Serão realizadas duas substituições: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ pela derivada segunda de $\phi_0 e^{i\omega t}$, sendo que ϕ_0 representa a amplitude do potencial de velocidades e a variável z por $h/2$, de modo que a Eq. (3.19) se tornará:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 (BF) \sin[(2n-1)\pi(x/a)] \cosh[(2n-1)\pi(h/2a)] \\ & -\omega^2 (BF) \tanh[(2n-1)\pi(h/2a)] \sinh[(2n-1)\pi(h/2a)] \\ & + g((2n-1)\pi/a) (BF) \sin[(2n-1)\pi(x/a)] \sinh[(2n-1)\pi(h/2a)] \\ & + g((2n-1)\pi/a) (BF) \tanh[(2n-1)\pi(h/2a)] \cosh[(2n-1)\pi(h/2a)] = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para obter a expressão final da frequência natural Dodge (2000) explica que são necessárias algumas identidades trigonométricas, garantindo que:

$$\omega_n^2 = \pi(2n-1) \left(\frac{g}{a}\right) \tanh\left[\pi(2n-1) \left(\frac{h}{a}\right)\right] \quad (3.21)$$

Essa dedução analítica é extremamente necessária pois os modelos dinâmicos equivalentes que serão citados na próxima sessão descrevem o comportamento das ondas de superfície porém necessitam da Eq. (3.21) para comparar e obter o comportamento do líquido de acordo com as razões de massa e de preenchimento.

A outra expressão analítica necessária é a da força inercial no tanque. Essa força está ligada ao carregamento de pressão na parede devido ao movimento. Deve-se integrar esse carregamento em relação a área da parede ($F_x = pdA_x$).

$$F_x = \int_{-h/2}^{h/2+\delta} \int_{-b/2}^{b/2} p|_{x=a/2} dydz - \int_{-h/2}^{h/2-\delta} \int_{-b/2}^{b/2} p|_{x=-a/2} dydz \quad (3.22)$$

cuja incógnita δ representa a amplitude máxima e mínima do deslocamento da onda. A integral em y resulta simplesmente no comprimento do tanque, pois está sendo considerada uma análise somente em 2D. Simplifica-se a integral para somente em z_0 . A pressão em um líquido depende da altura, da massa específica e da aceleração à qual o líquido está imposta. Com isso, substituindo a aceleração pela derivada temporal do potencial de velocidade e derivando em relação a um diferencial de altura, obtém-se a seguinte integral:

$$F_x = -2\rho b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \phi}{\partial t} dz \quad (3.23)$$

Obtém-se uma expressão para a amplitude da força que depende somente dos parâmetros do tanque e das frequências de oscilação e natural, utilizando uma expansão em série de Fourier da solução de potencial na Eq. (3.19) truncada até segunda ordem (DODGE, 2000). A expressão final da amplitude da força é:

$$\frac{F_0}{\Omega^2 X_0 m_f} = 1 + 8 \frac{a}{h} \sum_{i=1}^n \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (3.24)$$

As formulações analíticas da frequência natural e do forçamento são necessárias para comparação com os modelos equivalentes e assim ser possível aplicar a otimização dos parâmetros do tanque.

3.2 Modelos dinâmicos equivalentes

A solução analítica é matematicamente custosa para obter outros parâmetros além das frequências naturais. No âmbito da engenharia, sempre é feita a busca por soluções com eficiência e segurança e com isso foram apresentados os modelos dinâmicos equivalentes. Para tanto substitui-se o fluido pelo seu efeito equivalente, através de um modelo massa-mola ou pêndulo. No caso massa-mola, o líquido é substituído por uma massa fixa (m_0) e n massas discretas ligadas a estrutura por 2 molas em série de valor $K_n/2$. No caso pendular, o fluido é substituído por um pêndulo cujas frequências naturais serão representadas por $\sqrt{g/L}$, onde L é o comprimento do pêndulo.

A modelagem empregada neste trabalho utiliza massas-mola, como representado na Fig. (3):

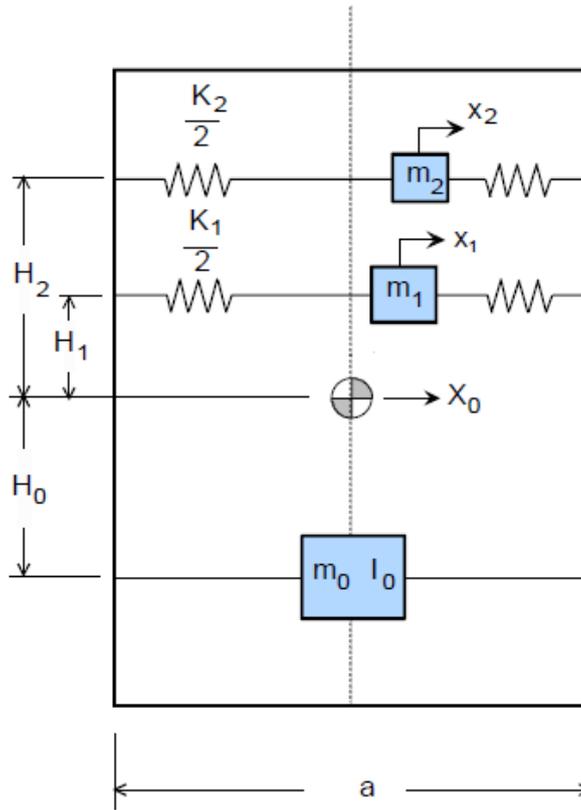


Figura 3: Modelo dinâmico equivalente (massa-mola)

Aplica-se o princípio de conservação da massa. O somatório de todas as massas deve ser igual a massa de líquido contida no tanque, dessa forma:

$$m_f = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \quad (3.25)$$

na qual n representa o número de massas discretas que foram utilizadas no modelo. O centro de gravidade (CG) deve ser o mesmo do problema real, logo uma conservação de momentos em torno do CG também é necessária:

$$m_0 H_0 - \sum_{i=1}^n m_n H_n = 0 \quad (3.26)$$

onde H representa a altura de cada massa em relação ao CG.

Na seção anterior, obteve-se uma expressão para a frequência natural Eq. (3.21). Com a modelagem discreta, $\omega_n^2 = K_n/m_n$. A partir desses três princípios, pode-se partir para o diagrama de corpo livre e assim obter as equações que descrevem o movimento.

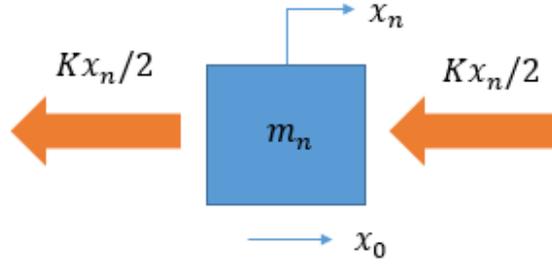


Figura 4: Diagrama de corpo livre (massa-mola)

Usando a segunda lei de Newton, é possível obter a equação do movimento para cada massa discreta:

$$m_n(\ddot{x}_n + \ddot{x}_0) = K_n x_n \quad (3.27)$$

As forças restauradoras que aparecem são devido as molas acopladas as massas discretas, e a movimentação é causada por uma excitação de base cujo deslocamento é representado por x_0 . Para obter a expressão da força de inércia que está aplicada, deve-se igualar ao oposto das forças aplicadas em cada massa. A equação do momento também pode ser obtida da mesma forma, ao multiplicar as forças pelo seu braço em relação ao centro de massa.

$$F = -m_0 \ddot{x}_0 - \sum_{i=1}^n m_n (\ddot{x}_n + \ddot{x}_0) \quad (3.28)$$

$$M = -\sum_{i=1}^n m_n h_n \ddot{x}_n + g \sum_{i=1}^n m_n x_n \quad (3.29)$$

Como assume-se que as soluções são harmônicas no tempo, a coordenada x_0 pode ser expressa por $-X_0 e^{i\Omega t}$ onde X_0 representa a amplitude de oscilação do deslocamento da massa rígida. A coordenada x_n por $X_n e^{i\Omega t}$, com X_n representando a amplitude de oscilação do deslocamento de cada massa discreta. Substituindo na Eq. (3.27), obtém-se:

$$e^{i\Omega t} \sum_{i=1}^n m_n (\Omega^2 X_0 - \Omega^2 X_n + \omega_n^2 X_n) = 0 \quad (3.30)$$

A solução interessante para a Eq. (3.30) é quando a expressão entre parênteses seja igual a 0. Dessa forma, com o devido tratamento tem-se:

$$X_n = -\frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} X_0 \quad (3.31)$$

Obtém-se dessa forma uma expressão para a amplitude de oscilação de cada massa em função da amplitude de deslocamento do tanque. Essa equação pode ser substituída na função da força (3.28), resultando na seguinte expressão:

$$\frac{F_0}{\Omega^2 m_f} = -1 - \sum_{i=1}^n \frac{m_n}{m_f} \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad (3.32)$$

que pode ser comparada com a Eq. (3.24) e assim é possível obter expressões para as frações de massa discreta e rígida por massa de líquido e altura de cada massa discreta pelo nível do líquido, tal que:

$$\frac{m_n}{m_f} = 8 \left(\frac{a}{h} \right) \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \quad (3.33)$$

isolando a razão de massa rígida por líquido na equação 3.25, tem-se:

$$\frac{m_0}{m_f} = 1 - \left\{ 8 \left(\frac{a}{h} \right) \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \right\} \quad (3.34)$$

e para a razão de alturas, é possível escrever:

$$\frac{H_n}{h} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2h} \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/2a]}{(2n-1)\pi} \quad (3.35)$$

A partir da expressão para a razão de massas discretas (3.33) pode-se substituí-la em $K_n = m_n \omega_n^2$ e obter uma expressão para a rigidez da mola:

$$K_n = m_f \left\{ 8 \left(\frac{g}{h} \right) \frac{\tanh[(2n-1)\pi h/a]}{(2n-1)^3 \pi^3} \right\} \quad (3.36)$$

Com a obtenção dessas equações, Ibrahim (2005) descreve curvas de como a razão de massas varia com o preenchimento do tanque, conforme Fig. (5).

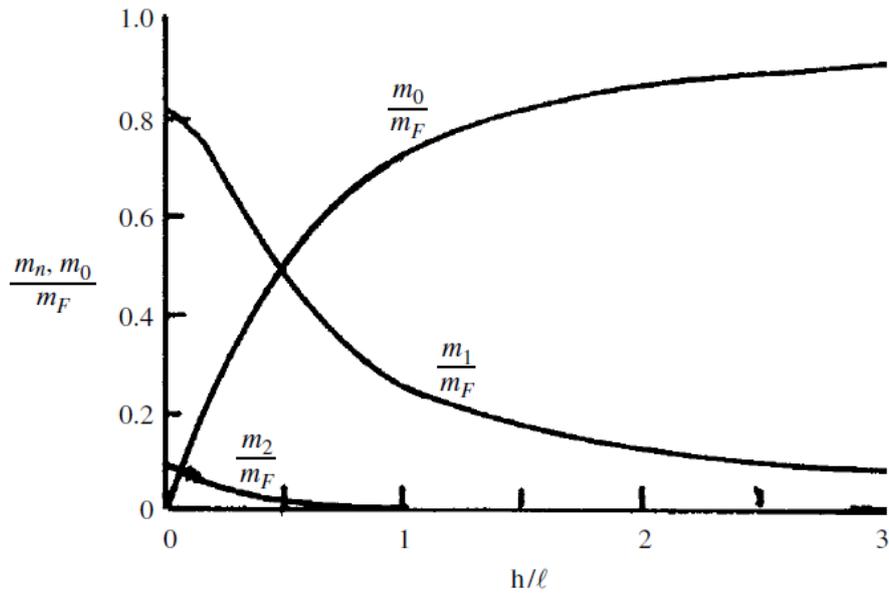


Figura 5: Razão de massas pela razão de preenchimento. (IBRAHIM, 2005)

Na figura 5, a razão de massas discretas apresenta uma predominância nas menores razões de preenchimento, enquanto que a razão de massas fixas se torna prioritária por volta de $0,75h/L$. Dessa forma, para baixas razões de preenchimento o fenômeno do *sloshing* pode ser melhor aproveitado para o amortecimento das vibrações.

4 Acoplamento *Sloshing*-Estrutura

O modelo dinâmico equivalente descreve o movimento do líquido dentro do tanque, e precisa-se de uma representação simplificada do comportamento da estrutura. Com isso, há duas possibilidades básicas: descrição como um pêndulo ou como um massa-mola Fig. (6). Considerou-se um forçamento harmônico na estrutura de ambos os casos. Com isso é possível definir uma função da amplitude de vibração da estrutura pela força aplicada, posteriormente estudadas.

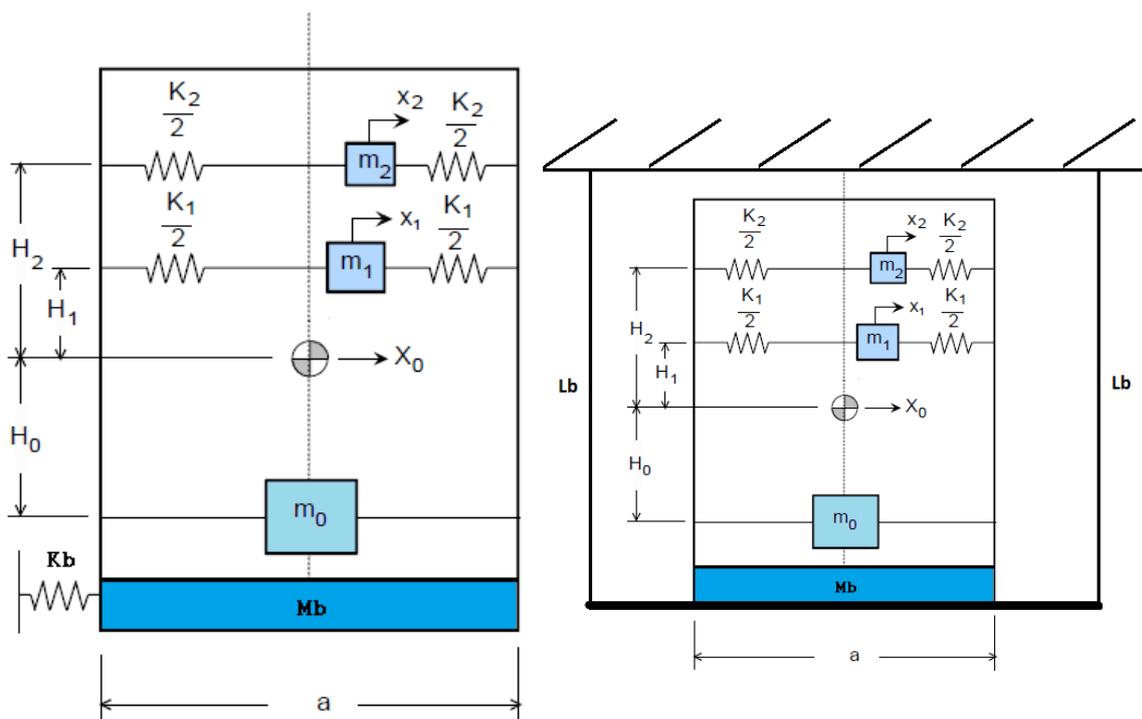


Figura 6: Acoplamento Sloshing + Estrutura (massa-mola e pêndulo, respectivamente)

onde X_0 e x_1, \dots, x_n estão todos em referenciais não-inerciais, ou seja, acompanham o movimento do corpo considerado.

4.1 Modelo Massa-Mola

Na figura 6, K_b e M_b representam a rigidez e a massa da base (ou estrutura), respectivamente. Define-se uma variável μ , que representa a razão de massa de fluido pela

massa da base. Os sistemas em questão possuem $n + 1$ graus de liberdade, definidos pela quantidade de massas discretas utilizadas no modelo *sloshing*. As equações para o sistema principal e massa-mola equivalente são:

$$(m_b(1 + \mu) - \sum_{n=1}^N m_n) \ddot{x}_0 = -K_b x_0 - \sum_{n=1}^N K_n (x_0 - x_n) + F_{ext} \quad (4.1)$$

$$m_n \ddot{x}_n = -K_n (x_n - x_0) \quad (4.2)$$

dessa forma a equação do movimento do sistema na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} m_b(1 + \mu) - \sum_{n=1}^N m_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_0 \\ \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \vdots \\ \ddot{X}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b + K_n & -K_1 & -K_2 & \dots & -K_n \\ -K_1 & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ -K_2 & 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_n & 0 & 0 & 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Outra modelagem possível desse sistema massa-mola é obtida definindo a força hidrostática na parede como $F_h = K_n(x_0 - x_n) = -m_n \ddot{x}_n$, e com isso, ocorre uma transferência de acoplamento também para a matriz de massas. Dessa forma, tem-se:

$$[m_b(1 + \mu) - \sum_{n=1}^N m_n] \ddot{x}_0 + K_b x_0 = -F_h + F_{ext} \quad (4.4)$$

Através da expressão da força hidrostática definida anteriormente, pode-se substituí-la na Eq. 4.4 e obter a seguinte equação do movimento para a estrutura:

$$[m_b(1 + \mu) - \sum_{n=1}^N m_n] \ddot{x}_0 = -K_b x_0 - m_n \ddot{x}_n \quad (4.5)$$

de posse dessas duas equações, é possível escrever a equação do movimento na forma matricial para $n + 1$ graus de liberdade:

$$\begin{bmatrix} m_b(1 + \mu) - \sum_{n=1}^N m_n & m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ 0 & m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_b \\ \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \vdots \\ \ddot{X}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b + K_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -K_1 & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ -K_2 & 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_n & 0 & 0 & 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_b \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

4.2 Modelo Pendular (Newton)

O segundo modelo Fig. (6b) representa a estrutura descrita como um pêndulo de baixas amplitudes, e devido a isso é possível considerar $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(\theta) \approx 1$ e $\theta^2 \approx 0$.

Esse sistema também possui $n + 1$ graus de liberdade, e as equações do movimento para o pêndulo e para as massas discretas, utilizando abordagem newtoniana, são:

$$(m_b + m_0)l^2\ddot{\theta} + \sum_{n=1}^N lm_n\ddot{x} + (m_b + m_f)gl\theta = F_{ext} \quad (4.7)$$

$$\sum_{n=1}^N m_n\ddot{x}_n + \sum_{n=1}^N K_n(x_n - \theta l) \quad (4.8)$$

e a equação do movimento do sistema na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} l^2m_b(1 + \mu) - \sum_{n=1}^N m_n & lm_1 & lm_2 & \dots & lm_n \\ 0 & m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_b \\ \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \vdots \\ \ddot{X}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_b(1 + \mu)gl & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1l & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ -K_2l & 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_nl & 0 & 0 & 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

4.3 Modelo Pendular (Lagrange)

Reduziu-se as equações do movimento a partir da formulação de Lagrange, utilizando-se referenciais inerciais, em x e y . Rao (2009) apresenta o modelo energético na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(n)} \quad (4.10)$$

onde j varia de 1 a n . Na Eq. (4.10), T representa a energia cinética, V a energia potencial, $Q_j^{(n)}$ as forças aplicadas e q_j as coordenadas generalizadas do sistema. Para representar as forças, tem-se:

$$Q_j^{(n)} = \sum_k \left(F_{xk} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{yk} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{zk} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \quad (4.11)$$

Montando o diagrama de corpo livre do problema, tem-se:

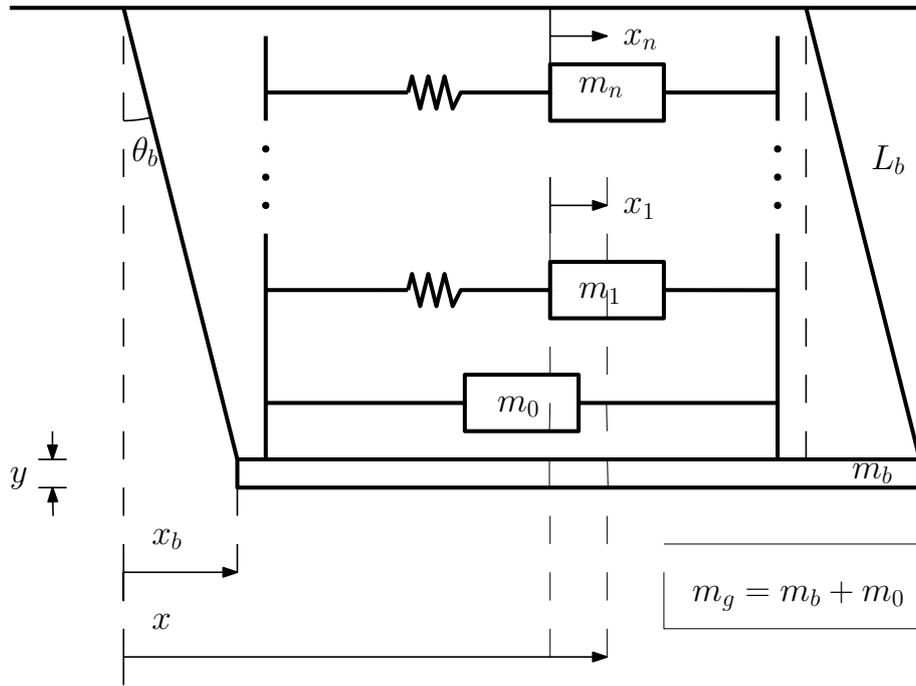


Figura 7: Diagrama de corpo livre

A partir das coordenadas montadas no sistema, as equações para energia cinética e potencial são dadas por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m_n(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) \quad (4.12)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N K_n x_n^2 + m_g g L_b (1 - \cos(\theta_b)) + m_n g L_b (1 - \cos(\theta_b)) \quad (4.13)$$

para descrição do movimento, tem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x_b &= L \sin(\theta_b) & y_b &= L(1 - \cos(\theta_b)) \\ x &= x_b + l/2 + x_n & y &= y_b \end{aligned} \quad (4.14)$$

Derivando cada uma das relações, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_b &= L \dot{\theta}_b \cos(\theta_b) & \dot{y}_b &= L \dot{\theta}_b \sin(\theta_b) \\ \dot{x} &= \dot{x}_b + \dot{x}_n & \dot{y} &= \dot{y}_b \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substituí-se as relações expressas em (4.14) e (4.15) nas Eqs. (4.12) e (4.13). Fazendo os devidos procedimentos matemáticos, chega-se nas seguintes expressões para energia cinética e potencial para 2 graus de liberdade:

$$T = \frac{1}{2}m_g L_b^2 \dot{\theta}_b^2 + m_g L_b \dot{\theta}_b \cos(\theta_b) \dot{x}_1 + \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 L_b^2 \dot{\theta}_b^2 \quad (4.16)$$

$$V = \frac{1}{2}K_1x_1^2 + (m_g + m_1)gL_b(1 - \cos(\theta_b)) \quad (4.17)$$

A partir das Eqs. (4.16) e (4.17), calcula-se as derivadas parciais em relação as coordenadas generalizadas x_1 e θ_b , alimentando a equação de Lagrange 4.10. Realizando os cálculos necessários e substituindo $\text{sen}\theta_b \approx \theta_b$ e $\text{cos}\theta_b \approx 1$, obtém-se a equação do movimento:

$$(m_1 + m_g)L^2\ddot{\theta}_b + m_1gL\ddot{x}_1 + (m_1 + m_g)gL\theta_b = 0 \quad (4.18)$$

$$m_1L\ddot{\theta}_b + m_1\ddot{x}_1 + K_1x_1 = 0 \quad (4.19)$$

Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} (m_g + m_1)L^2 & m_1L \\ m_1L & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_b \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_g + m_1)gL & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Por fim, é simples provar que a equação do movimento com forçamento para n graus de liberdade é:

$$\begin{bmatrix} (m_g + m_1)L^2 & m_1L & m_2L & \dots & m_nL \\ m_1L & m_1 & 0 & \dots & 0 \\ m_2L & 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_nL & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_b \\ \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \vdots \\ \ddot{X}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_g + m_1)gL & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

4.4 Implementação

A implementação dos modelos dinâmicos equivalentes foi realizada em MATLAB[®] devido a simplicidade da linguagem. Com isso, buscou-se na literatura uma maneira de validar as metodologias comparando-as com resultados experimentais e/ou analíticos. [Cooker \(1994\)](#) deduz analiticamente uma maneira de resolver o problema do acoplamento *sloshing* + estrutura, usando a modelagem pendular do movimento do tanque, e o modelo analítico do *sloshing* utilizando a teoria de águas rasas, similar a deduzida por [Ibrahim \(2005\)](#). [Cooker \(1994\)](#) realiza ensaios variando os comprimentos pendulares e as alturas de preenchimento do tanque, e alimenta o seu modelo analítico com os mesmos parâmetros do experimento. Assim, aplicou-se essas mesmas condições, e alimentou-se o código escrito com a metodologia proposta neste trabalho. Para o modelo que considera a estrutura como uma massa adicionada de uma rigidez associada, precisou-se criar uma compatibilidade com o caso pendular. Tomando as equações do movimento genéricas do pêndulo e do

sistema massa-molas, pode-se obter uma equivalência entre a rigidez e o comprimento do pêndulo.

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad (4.22)$$

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (4.23)$$

Para transformar uma equação na outra, utiliza-se a condição $\theta l = x$ (para pequenas oscilações), e dessa forma a Eq. (4.22) se torna:

$$m\ddot{x} + \frac{mg}{l}x = 0 \quad (4.24)$$

Dessa forma, a rigidez estrutural aplicada no método massa-mola foi definida pelos valores do comprimento do pêndulo e da massa da estrutura considerada.

$$K = \frac{mg}{l} \quad (4.25)$$

Para os quatro modelos considerados, a comparação foi feita através dos valores de período, e para isso deve-se primeiro obter as frequências naturais do sistema, resolvendo o problema de autovalores das matrizes nas Eqs. (4.3), (4.6) e (4.9) para um sistema livre, ou seja, sem considerar forçamento. Os valores de frequência natural do sistema acoplado (ω) devem respeitar a Eq. (4.26):

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (4.26)$$

e para obter-se o período, basta multiplicar pelo inverso da frequência natural (em Hertz):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.27)$$

Com a validação da metodologia pendular, esse modelo será o foco dos estudos de otimização propostos. Lembrando que o forçamento é definido como harmônico, o modelo apresentado na Eq. (4.3) pode ser resolvido utilizando a regra de Cramer. Com esse modelo harmônico, pode-se escrever a matriz na forma $K_d(\omega)\bar{X} = \bar{F}$, onde K_d representa uma matriz de impedância, sendo ela:

$$\bar{K}_d = \bar{K} - \omega^2 \bar{M} \quad (4.28)$$

obtendo-se uma função da amplitude que depende da matriz de impedância dinâmica e de forçamento:

$$\bar{X} = K_d(\omega)^{-1} \bar{F} \quad (4.29)$$

Revisitando o objetivo de diminuir a amplitude de oscilação da estrutura utilizando o TLD, a função de transferência da amplitude que pode ser utilizada para otimizar os parâmetros pode ser obtida através da resolução do sistema formulado pela Eq. (4.28) para a primeira amplitude de oscilação (que representa a estrutura). Dessa forma, a razão de amplitudes da oscilação do prédio e do forçamento em função da frequência de excitação (função de transferência da amplitude $H(\Omega)$) se torna:

$$\frac{\bar{X}_b}{\bar{F}} = H(\Omega) = \frac{\det(K_{d1})}{\det(K_d)} \quad (4.30)$$

onde $K_{d1}(\omega)$ representa a matriz $K_d(\omega)$ com os termos da primeira coluna substituídos pela matriz de termos independentes (matriz de forçamento).

Pela grande quantidade de variáveis do problema, a aplicação de métodos estocásticos é adequada, e assim a descrição do forçamento (variável que domina o problema) deve ser feita utilizando esse tipo de abordagem. Tomando a estrutura como uma não amortecida submetida a uma força aleatória do tipo ruído branco, é possível calcular o valor do quadrado médio dos deslocamentos angulares, uma vez considerada a função densidade espectral do tipo ruído branco.

Um ruído branco é um sinal aleatório com igual intensidade (amplitude) para vários valores de frequência, de modo que a sua função densidade espectral de potência é constante ($S(\omega) = S_0$), como explicado por Azevedo (1996). Lembrando que a média dos quadrados de uma amostra é representado pela variância, tem-se a formulação na Eq. (4.31) para o quadrado médio dos deslocamentos da estrutura (variância).

$$E[\theta^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 |H_\theta(\omega)|^2 d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_\theta(\omega)|^2 d\omega \quad (4.31)$$

A integral na Eq. (4.31) representa a área abaixo do gráfico da função de transferência da amplitude de excitação. Logicamente, essa área é sempre menor do que uma área hipotética caso a função $H(\omega)$ fosse constante com o valor igual ao máximo pico. Dessa forma, tem-se que:

$$S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_\theta(\Omega)|^2 d\Omega \approx S_0 \bar{H}^2 \leq S_0 |H_{max}^2| \quad (4.32)$$

Com isso, minimizar o pico (H_{max}), representa diminuir a variância e consequentemente o deslocamento da estrutura, sendo essa a métrica para definir a solução ótima do problema.

5 Validação dos modelos

Neste capítulo, apresenta-se os resultados da implementação dos modelos dinâmicos equivalentes e do acoplamento do TLD à estrutura, comparando-os com os trabalhos realizados por [Ibrahim \(2005\)](#), [Lopez, Pedroso e Morais \(2016\)](#), [Cooker \(1994\)](#) e [Zou e Wang \(2015\)](#).

5.1 *Sloshing* para massas equivalentes

5.1.1 Comparação gráfica com [Ibrahim \(2005\)](#)

A fim de comprovar os modelos dinâmicos equivalentes buscou-se fazer um estudo de convergência para definir a quantidade de massas móveis que conseguem descrever o movimento *sloshing* de maneira eficaz (Apêndice A). Para isso, comparou-se a curva da razão de massas rígida por fluido pela razão de preenchimento apresentada na Fig. (5), uma vez que os valores de massas móveis não dependem da quantidade de massas descrita no modelo. A Figura (8) mostra que a partir de 5 massas as curvas se aproximam de maneira satisfatória do gráfico obtido por [Ibrahim \(2005\)](#). Este valor é usado nos estudos de convergência posteriores.

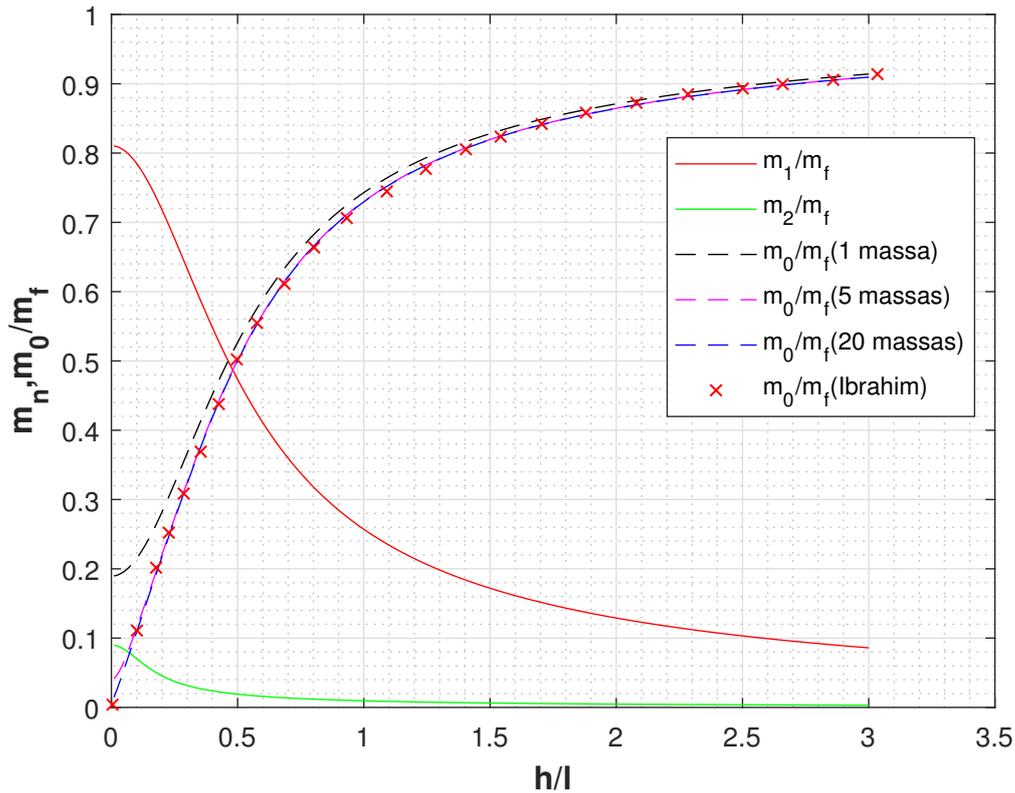


Figura 8: Razão de massas em função da razão de preenchimento

5.1.2 Validação do modelo com experimento realizado por Lopez, Pedroso e Morais (2016)

Realizou-se uma comparação dos valores obtidos de frequência natural do primeiro modo de vibração do *sloshing* para determinadas razões de preenchimento de acordo com Lopez, Pedroso e Morais (2016). O experimento consiste num tanque retangular de comprimento $w = 0,15m$ e largura $a = 0,3m$ semi preenchido com água e colocado em uma base que realiza um deslocamento na base, a uma gravidade de $9,7808m/s^2$. Uma boia flutuando na superfície do líquido é o aparato utilizado para a visualização das amplitudes de deslocamento do líquido, através do software de visualização *CVMob*, para as alturas de líquido apresentadas na Tabela (1).

Razão de Preenchimento	h(cm)	ω_{exp} (rad/s)	$\omega_{analítico}$ (rad/s)	ϵ (%)
0,128	0,0385	6,351	6,261	1,4
0,192	0,0575	7,648	7,427	2,9
0,236	0,0708	8,187	8,033	1,9
0,302	0,0905	8,998	8,699	3,3
0,342	0,1025	9,218	8,999	2,4
0,412	0,1235	9,653	9,385	2,8
0,476	0,1428	9,983	9,624	3,6

Tabela 1: Comparação entre frequência de oscilação de superfície livre em um contêiner retangular, obtidas pelo experimento e pelo método de massa equivalente

Os valores de frequência obtido pelo modelo massa-mola equivalente para *sloshing* e experimental estão bem próximos, com discrepâncias de até 3,6%.

5.1.3 Validação do modelo com solução apresentada por Zou e Wang (2015)

Comparou-se as frequências naturais para os 5 primeiros modos de vibração, com os valores encontrados por Zou e Wang (2015) sem considerar o acoplamento e percebe-se que a discrepância é ínfima, provavelmente devido ao valor utilizado de gravidade. Nesse modelo, a largura e o comprimento do tanque é de $1m$ e a massa específica do fluido de $1200kg/m^3$. Os dados são apresentados nas tabelas 2 e 3, onde ω_z representa a frequência natural do artigo e ω_{meq} a frequência obtida, ambas em hertz e ϵ o erro associado.

Razão de Preenchimento	ω_z			ω_{meq}			ϵ (%)		
	1 massa	1 massa	ϵ (%)	2 massas	2 massas	ϵ (%)	3 massas	3 massas	ϵ (%)
0,3	0,7578	0,7570	0,11	1,5242	1,5227	0,10	1,9745	1,9726	0,10
0,4	0,8142	0,8134	0,02	1,5288	1,5272	0,10	1,9747	1,9727	0,10
0,5	0,8457	0,8449	0,09	1,5294	1,5280	0,09	1,9747	1,9727	0,10
0,6	0,8630	0,8621	0,10	1,5295	1,5280	0,10	1,9747	1,9727	0,10
0,7	0,8723	0,8714	0,10	1,5296	1,5281	0,10	1,9747	1,9727	0,10
0,8	0,8773	0,8765	0,09	1,5296	1,5281	0,10	1,9747	1,9727	0,10

Tabela 2: Comparação dos resultados de frequência de *sloshing* de sistema massa-mola equivalente com relação à literatura (ZOU; WANG, 2015)

Razão de Preenchimento	ω_z 4 massas	ω_{meq} 4 massas	ϵ (%)	ω_z 5 massas	ω_{meq} 5 massas	ϵ (%)
0,3	2,3364	2,3342	0,09	2,6493	2,6467	0,10
0,4	2,3365	2,3342	0,10	2,6493	2,6467	0,10
0,5	2,3365	2,3342	0,10	2,6493	2,6467	0,10
0,6	2,3365	2,3342	0,10	2,6493	2,6467	0,10
0,7	2,3365	2,3342	0,10	2,6493	2,6467	0,10
0,8	2,3365	2,3342	0,10	2,6493	2,6467	0,10

Tabela 3: Comparação dos resultados de frequência de *sloshing* de sistema massa-mola equivalente com relação à literatura (ZOU; WANG, 2015)

5.2 *Sloshing* equivalentes acoplados a estrutura

Com as três metodologias implementadas, buscou-se a convergência dos valores de acordo com o número de massas-móveis aplicadas na modelagem do *sloshing* (Apêndice B). Os parâmetros do tanque e comprimento do pêndulo utilizados para comparação foram:

- Largura do tanque ($a = 0,525m$);
- Massa do tanque ($m_b = 0,552kg$);
- Gravidade ($g = 9,7808m/s^2$).

Os valores de comprimento do pêndulo e altura de líquido foram variados de acordo com Cooker (1994). Para os comprimentos pendulares de 0,185 m, 0,245 m e 2,152 m, tem-se os seguintes períodos (onde T_a representa o período analítico e T_e o experimental):

l = 0,185 m			l = 0,245 m			l = 2,152 m		
h (cm)	T_a (s)	T_e (s)	h (cm)	T_a (s)	T_e (s)	h (cm)	T_a (s)	T_e (s)
3,5	1,930	1,934	2,5	2,264	2,229	3,3	3,334	3,332
5,6	1,606	1,624	4,0	1,878	1,881	4,9	3,220	3,224
7,3	1,462	1,524	5,8	1,548	1,668	8,2	3,117	3,122
10,3	1,311	1,630	7,8	1,503	1,546	10,8	3,079	3,085

Tabela 4: Valores de período experimental e analítico (COOKER, 1994)

Alimentando os dois modelos massa-mola apresentados nas Eqs. (4.3) e (4.6), obtiveram-se os mesmos resultados, ambos divergentes dos valores encontrados por Cooker (1994). Com isso, a única conclusão que pode ser feita é que modelar uma estrutura como massa e rigidez e acoplá-las a um movimento de *sloshing* discretizado como parâmetros dinâmicos não é aceitável. Abaixo nas tabelas 5, 6 e 7 podem ser vistos os valores obtidos pelos modelos massa-mola (estrutura):

h (cm)	1 massa	2 massas	5 massas	6 massas	Analítico	ϵ (%)
3,5	0,845	0,910	0,915	0,915	1,930	52,6
5,6	0,733	0,783	0,787	0,788	1,606	50,97
7,3	0,674	0,718	0,722	0,722	1,470	50,88
10,3	0,621	0,656	0,658	0,659	1,326	50,34

Tabela 5: Valores de período para $l=0,185$ m (Estrutura massa-mola)

h (cm)	1 massa	2 massas	5 massas	6 massas	Analítico	ϵ (%)
2,5	0,983	1,051	1,056	1,057	2,264	53,33
4,0	0,854	0,906	0,911	0,911	1,878	51,47
5,8	0,744	0,790	0,794	0,794	1,648	51,83
7,8	0,673	0,713	0,716	0,716	1,503	52,36

Tabela 6: Valores de período para $l=0,245$ m (Estrutura massa-mola)

h (cm)	1 massa	2 massas	5 massas	6 massas	Analítico	ϵ (%)
3,3	1,089	1,131	1,135	1,135	3,334	65,9
4,9	0,875	0,910	0,914	0,941	3,220	70,77
8,2	0,690	0,724	0,727	0,727	3,122	76,72
10,8	0,637	0,666	0,669	0,669	3,085	78,33

Tabela 7: Valores de período para $l=2,152$ m (Estrutura massa-mola)

O terceiro modelo apresentado na Eq. (4.9) apresentou resultados satisfatórios em relação aos dados apresentados por [Cooker \(1994\)](#). A convergência se deu com 5 massas móveis, e as discrepâncias foram abaixo de 3,8% comparando com os modelos analíticos e experimentais, como pode ser visto nas Tabelas (8), (9) e (10).

h (cm)	1 massa	2 massas	5 massas	Analítico	ϵ (%)	Experimental	ϵ (%)
2,5	1,971	1,972	1,972	1,930	2,15	1,934	1,94
4,0	1,648	1,648	1,649	1,606	2,58	1,624	1,49
5,8	1,507	1,508	1,508	1,462	3,03	1,524	1,07
7,8	1,362	1,363	1,363	1,311	3,79	1,360	0,20

Tabela 8: Valores de período (s) para $l=0,185$ m (Estrutura pendular)

h (cm)	1 massa	2 massas	5 massas	Analítico	ϵ (%)	Experimental	ϵ (%)
2,5	2,308	2,308	2,308	2,264	1,96	2,229	3,42
4,0	1,920	1,920	1,920	1,878	2,19	1,881	2,03
5,8	1,690	1,690	1,690	1,648	2,49	1,668	1,30
7,8	1,546	1,547	1,547	1,503	2,84	1,546	0,06

Tabela 9: Valores de período (s) para $l=0,245$ m (Estrutura pendular)

h(cm)	1 massa	2 massas	5 massas	Analítico	ϵ (%)	Experimental	ϵ (%)
3,3	3,387	3,390	3,390	3,334	1,67	3,332	1,71
4,9	3,268	3,271	3,271	3,220	1,56	3,224	1,44
8,2	3,163	3,164	3,165	3,117	1,52	3,122	1,36
10,8	3,123	3,124	3,125	3,079	1,47	3,085	1,28

Tabela 10: Valores de período (s) para $l=2,152$ m (Estrutura pendular)

5.3 Validação do modelo pendular simétrico

A validação do modelo pendular com matrizes de rigidez e inércia simétricas foi realizada por meio do código realizado por Lopez, Pedroso e Morais (2016) comparando com o modelo analítico apresentado por Cooker (1994). Dessa forma, segue-se o gráfico abaixo com as frequências do reservatório, pêndulo e do *sloshing* (modelo equivalente e Cooker (1994)):

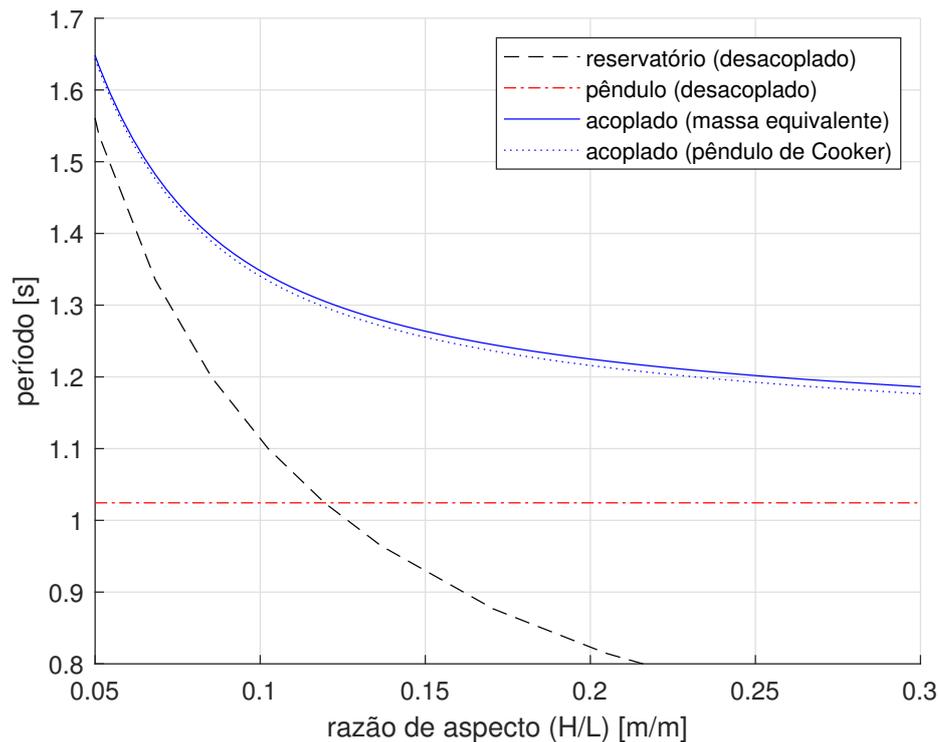


Figura 9: Comparação entre o experimento de Cooker e modelo pendular deduzido pela formulação Lagrangeana

A partir do gráfico, é possível perceber que a curva azul contínua está bem próxima da azul pontilhada. Dessa forma, percebe-se que o modelo simétrico consegue representar bem o comportamento do acoplamento pendular + *sloshing*, sendo este o escolhido para construção do mapa de respostas.

6 Otimização paramétrica *sloshing* acoplado a estrutura

6.1 Introdução

Otimização é um processo de busca de soluções dentro de um universo definido de soluções possíveis. Esse processo pode ser muito custoso, devido a grande quantidade de soluções que podem existir dentro de um determinado domínio. Assim, várias técnicas de otimização foram inventadas e difundidas a fim de auxiliar a busca pelo ótimo em problemas. Neste trabalho, não será aplicado um algoritmo em si, e sim a construção de um modelo paramétrico onde será possível visualizar graficamente o espaço de respostas do problema, e verificar se há a presença de ótimos locais e globais.

Para visualização, nesse trabalho será feita a construção de um mapa de respostas da amplitude de deslocamento da estrutura principal. Um mapa de respostas é um universo gráfico de soluções para um determinado problema de muitas variáveis. A construção desse tipo de gráfico é importante para visualização do comportamento das soluções, e através de uma busca localizada, encontrar soluções ótimas para o problema. No caso do acoplamento *sloshing* estrutura, a função resposta do problema será $H(\Omega)$, representado na Eq. (4.30), buscando-se o máximo dessa função para cada valor de frequência de forçamento. Aplicando-se o modelo pendular simétrico obtido na Eq. (4.21) em (4.30), obtém-se a função resposta generalizada. Como busca-se a solução para a amplitude de deslocamento da estrutura, tem-se:

$$H_{\theta_b}(\Omega) = \frac{FL(K_1 - \Omega^2 m_1)}{((m_f + m_b)gL - \Omega^2(m_f + m_b)L^2)(K_1 - \Omega^2 m_1) - \Omega^4 m_1^2 L^2} \quad (6.1)$$

Pela Eq. (6.1), percebe-se que $H_{\theta_b}(\Omega)$ é função de uma grande quantidade de variáveis. Para facilitar a análise comparativa necessária numa otimização paramétrica, realizou-se uma adimensionalização do modelo, de modo que a quantidade de variáveis do sistema diminuísse e assim ser possível construir um mapa tridimensional da função resposta, como feito por Colherinhas (2016) na Fig. (10):

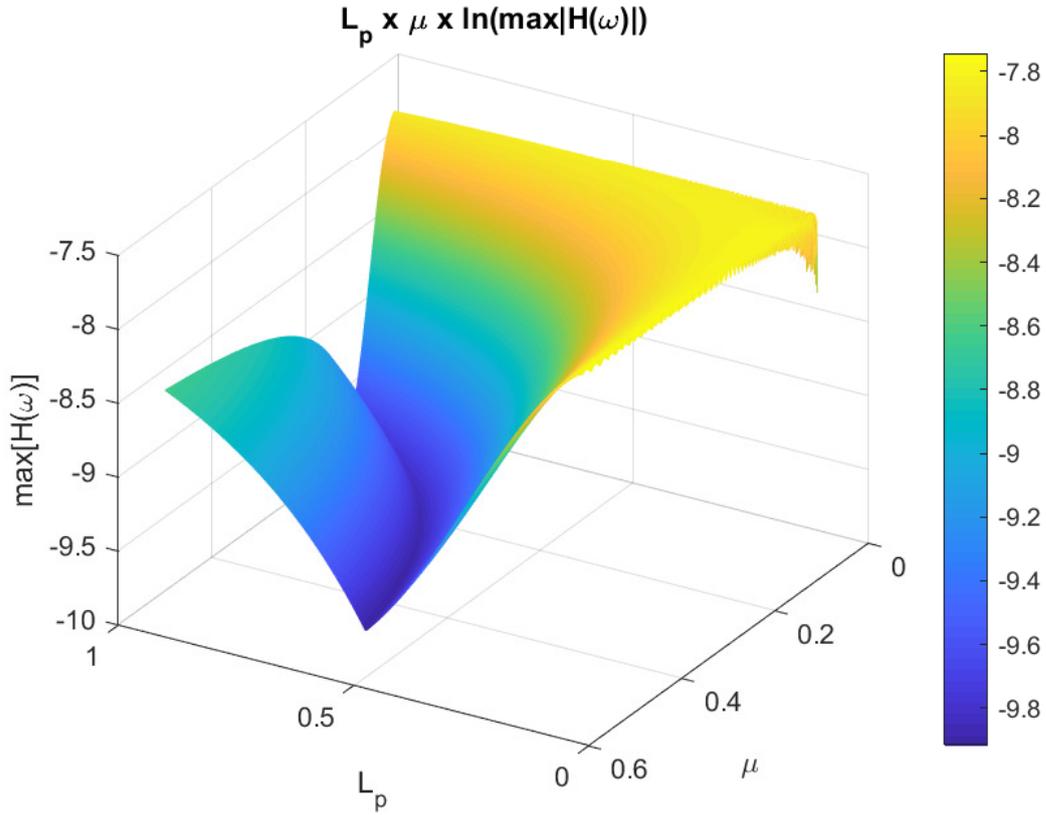


Figura 10: Mapa de respostas num espaço adimensional para o TMD obtido por Colherinhas (2016)

onde L_p representa o comprimento do pêndulo no TMD e μ a razão de massa do sistema secundário pelo principal.

A partir da função resposta apresentada em (6.1), monta-se o mapa de respostas. Para obter-se uma solução plausível, adicionou-se amortecimento na estrutura e no fluido. As flutuações de amplitude na ausência de amortecimento foram amortizadas, verificando-se a formação de um mapa de respostas coerente com o obtido por Colherinhas (2016).

6.2 Adimensionalização

6.2.1 Adição de Amortecimento

Inseriu-se amortecimento no fluido (massas discretas) e na estrutura. Para adicionar amortecimento pela formulação de Lagrange, calcula-se o amortecimento viscoso equivalente atrelado a cada amortecedor no modelo. Dessa forma, a Eq. (4.11) se torna:

$$Q_j^{(n)} = \sum_k \left(F_{xk} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{yk} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{zk} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} - c_j \dot{q}_j \right) \quad (6.2)$$

Dessa forma, aplicando o amortecimento no modelo de Lagrange, a equação do movimento na forma matricial (4.20) se torna:

$$\begin{bmatrix} (m_g + m_1)L^2 & m_1L \\ m_1L & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_b \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b L^2 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_b \\ \dot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_g + m_1)gL & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

Considerando que o amortecimento da massa e da estrutura são desacoplados, pode-se substituir C_b por $2\xi_s\omega_{\theta_b}$ e C_1 por $2\xi_1\omega_1$, onde ξ_s representa o fator de amortecimento da estrutura e ξ_1 o fator de amortecimento do fluido. Como $m_g = m_b + m_0$ e $m_0 + m_1 = m_f$, onde m_f é a massa de fluido, a Eq. (6.3) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} (m_f + m_b)L^2 & m_1L \\ m_1L & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_b \\ \ddot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_s\omega_{\theta_b}L^2 & 0 \\ 0 & 2\xi_1\omega_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_b \\ \dot{x}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_f + m_b)gL & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Para n graus de liberdade e com forçamento, é notório verificar que:

$$\begin{bmatrix} (m_f + m_b)L^2 & m_1L & m_2L & \dots & m_nL \\ m_1L & m_1 & 0 & \dots & 0 \\ m_2L & 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_nL & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_b \\ \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \vdots \\ \ddot{X}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_s\omega_{\theta_b}L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_1\omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_2\omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_b \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_f + m_b)gL & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_b \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

6.3 Adimensionalização do modelo

A fim de facilitar a confecção e comparação do mapa de respostas, buscou-se adimensionalizar a Eq. (4.29) a partir do modelo pendular simétrico com amortecimento apresentado em (6.5). Monta-se a matriz de impedância dinâmica (4.28), e posteriormente utiliza-se as grandezas adimensionais expressas em (6.6).

$$\begin{aligned} \alpha &= \Omega/\omega_\theta & \gamma &= \omega_\theta/\omega_n \\ \mu &= m_f/m_b & \mu_b &= m_1/m_b \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde α representa a razão de frequências do forçamento pela frequência desacoplada do pêndulo, γ a razão de sintonização entre as frequências do pêndulo e da massa discreta, μ razão de massa de fluido por massa do pêndulo e μ_b razão de massa discreta pela massa pendular.

Como o amortecimento, a formulação para solução harmônica da equação com forçamento do movimento é:

$$(\bar{K} + i\Omega\bar{C} - \Omega^2\bar{M})\bar{X} = \bar{F} \quad (6.7)$$

onde a matriz de impedância dinâmica se torna $K_d(\Omega) = (\bar{K} + i\Omega\bar{C} - \Omega^2\bar{M})$. A partir da Eq. (6.4), monta-se K_d na forma matricial:

$$K_d = \begin{bmatrix} (m_f + m_b)gL + 2i\Omega\xi_s\omega_{\theta_b} - \Omega^2(m_f + m_b)L^2 & -\Omega^2m_1L \\ -\Omega^2m_1L & K_1 + 2i\Omega\xi_1\omega_1 - \Omega^2m_1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Como deseja-se minimizar a amplitude da estrutura, basta calcular a função da amplitude para a primeira coordenada (θ_b). Calculando $H_{\theta_b}(\Omega)$ pela Eq. (4.30), tem-se:

$$H_{\theta_b}(\Omega) = \frac{FL(K_1 + 2i\Omega\xi_1\omega_1 - \Omega^2m_1)}{((m_f + m_b)gL + 2i\Omega\xi_s\omega_{\theta_b} - \Omega^2(m_f + m_b)L^2)(K_1 + 2i\Omega\xi_1\omega_1 - \Omega^2m_1) - \Omega^4m_1^2L^2} \quad (6.9)$$

substituindo as relações de adimensionalização em (6.6) na equação obtida em (6.9) e realizando as devidas operações, obtém-se a função de resposta em frequência da amplitude de oscilação da estrutura na forma adimensional, sendo ela:

$$H_{\theta_b}(\Omega) = \frac{(1 + 2i\xi_1(\alpha/\gamma)) - (\alpha/\gamma)^2}{\{[(1 + \mu)(1 - \alpha^2) + 2i\xi_s\alpha][1 + 2i\xi_1(\alpha/\gamma) - (\alpha/\gamma)^2] - \mu_b(\alpha^4/\gamma^2)\}} \quad (6.10)$$

onde $H_{\theta_b}(\Omega) = \frac{\theta_b}{(F/m_b g)}$.

6.4 Mapa de respostas

Analisando a Eq. (6.10), percebe-se que há 4 variáveis principais: o fator de amortecimento, a razão de massa de fluido pela base, a razão de massa discreta pela base e a razão de sintonização. A partir da Eq. (3.33), e lembrando que μ é igual a m_f/m_b , pode-se reescrever a equação de modo que:

$$\frac{m_1}{m_f} = \frac{m_1}{m_f} \frac{m_b}{m_b} = \frac{m_1}{m_f} \frac{1}{\mu} = \frac{\mu_b}{\mu} = \frac{8 \tanh[\pi(h/a)]}{\pi^2 \pi(h/a)} \quad (6.11)$$

assim, há uma relação direta entre μ e μ_b , dependendo somente da razão de preenchimento. Decidiu-se então por montar os mapas de respostas em relação a razão de sintonização e razão de massas. Dessa forma, os valores fixados são os de razão de preenchimento e os fatores de amortecimento da estrutura e do fluido. Para esses valores fixados será feita uma análise de sensibilidade nas próximas seções.

Detalhadamente, um ponto no mapa de respostas representa o máximo do gráfico da função resposta em frequência para cada valor de γ e μ . Na Fig. (11) foi marcado o ponto (0,03216, 0,9774, 1,88), e plotou-se o gráfico da *FRF* da amplitude abaixo, mostrando que o pico máximo deste foi o valor alocado na superfície do mapa de respostas.

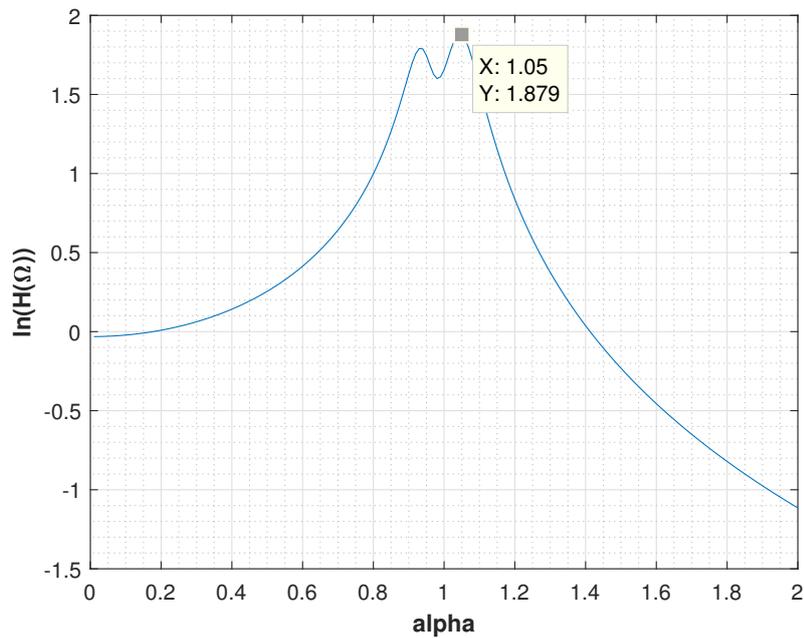
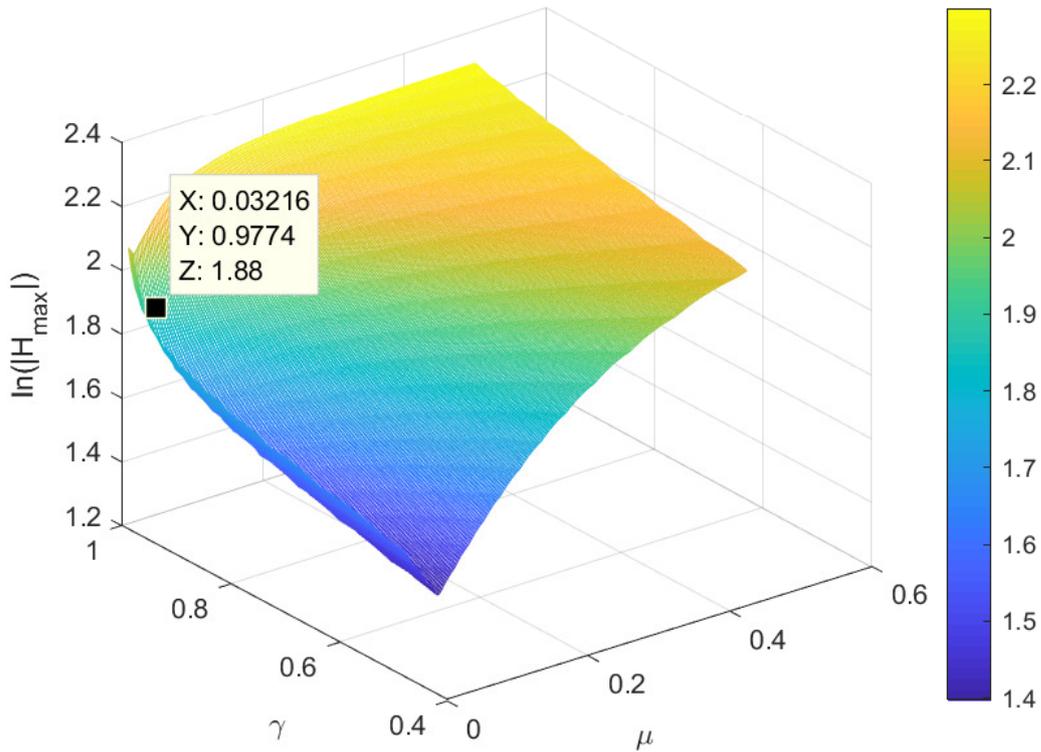


Figura 11: Mapa de respostas e função resposta em frequência da amplitude para um valor de μ e γ

Assim, o mapa de respostas é confeccionado de acordo com o domínio de μ e γ , sendo que μ varia de 0,001 a 0,5, e γ de 1,0 a 0,5, ambos com 200 elementos no vetor, e todos os mapas de repostas construídos neste trabalho seguiram essa discretização. A razão de frequências foi variada entre 0,01 e 2, em intervalos de 0,01, já que a existência dos picos foi verificada até no máximo $\alpha = 1,2$ (Apêndices C e D).

6.4.1 Análise do Mapa de Respostas Típico

Fixou-se os valores do fator de amortecimento e razão de preenchimento para visualização do formato comum dos mapas de resposta. Os valores de ξ foram de $\xi_s = 0,02$ e $\xi_1 = 0,05$. Primeiramente para uma razão de preenchimento de 0,20, tem-se:

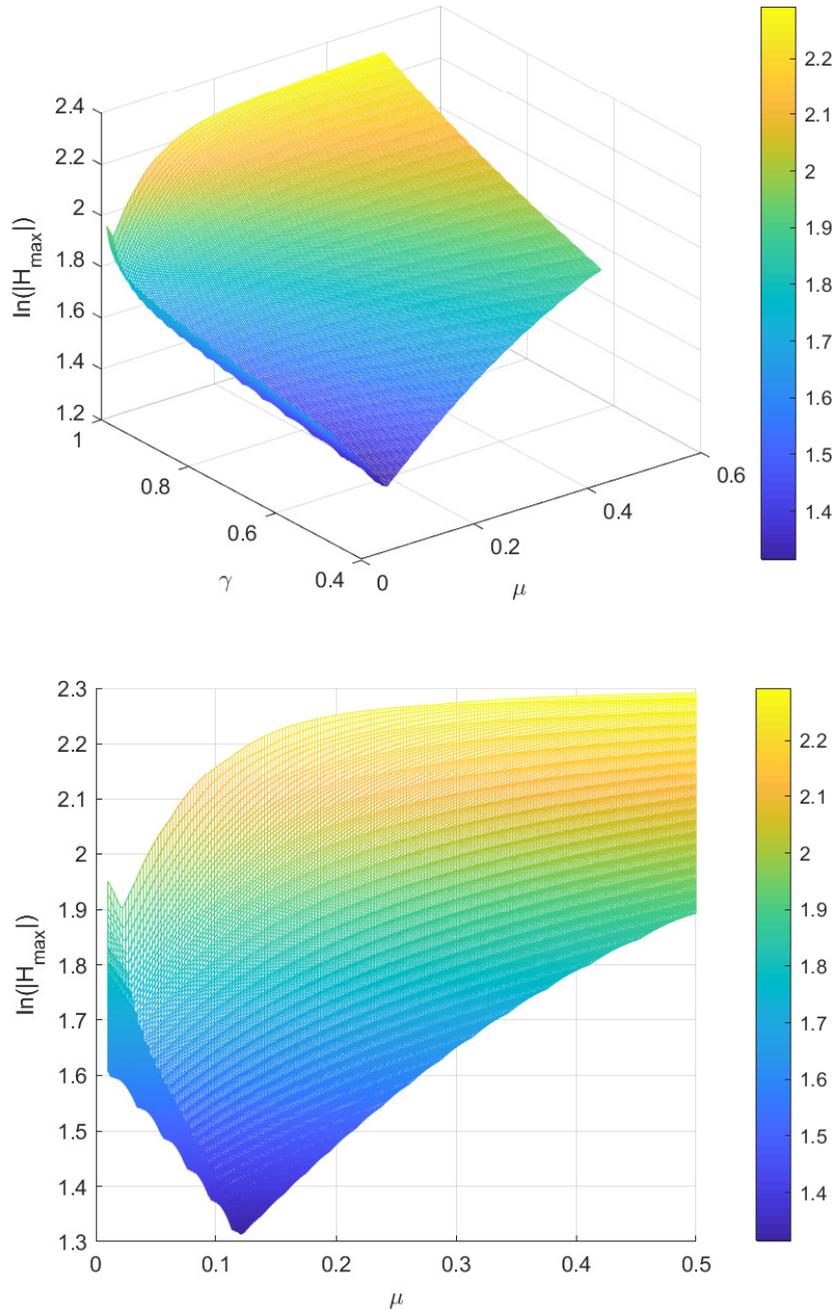


Figura 12: Mapa de respostas com h/L

Na Fig. (12), tem-se a representação 3D do mapa de respostas e uma visão lateral. Percebe-se que há indícios de um ótimo global, dentro de um vale de valores mínimos de amplitude. Na vista superior desse gráfico, é mais visível a existência desse vale.

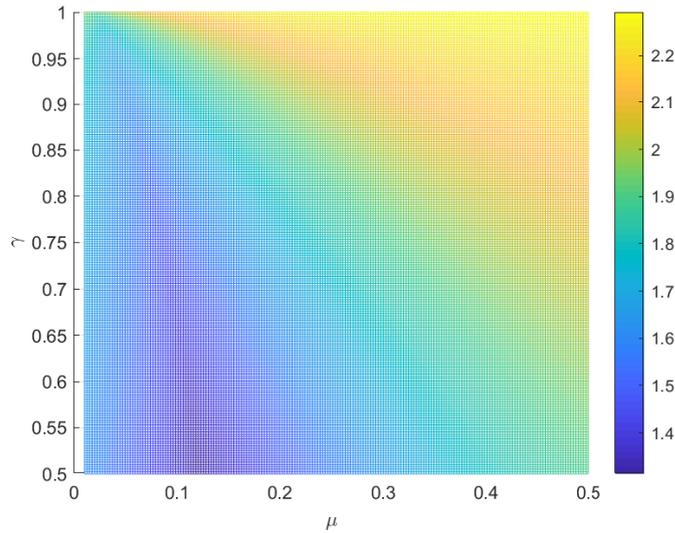


Figura 13: Vista Superior do Mapa de respostas na figura 12

Nas Figs. (12) e (13), a visualização gráfica do espaço-solução do problema é uma ótima maneira de verificar a resposta ótima, uma vez que há um ótimo global dentro de um vale de valores mínimos.

6.4.2 Análise do mapa de respostas sem amortecimento $\xi_1 = \xi_s = 0$

Como comentado anteriormente, houve a necessidade de adição de amortecimento para obter um espaço-solução plausível. A Fig. (14) exemplifica um caso de mapa de respostas sem amortecimento:

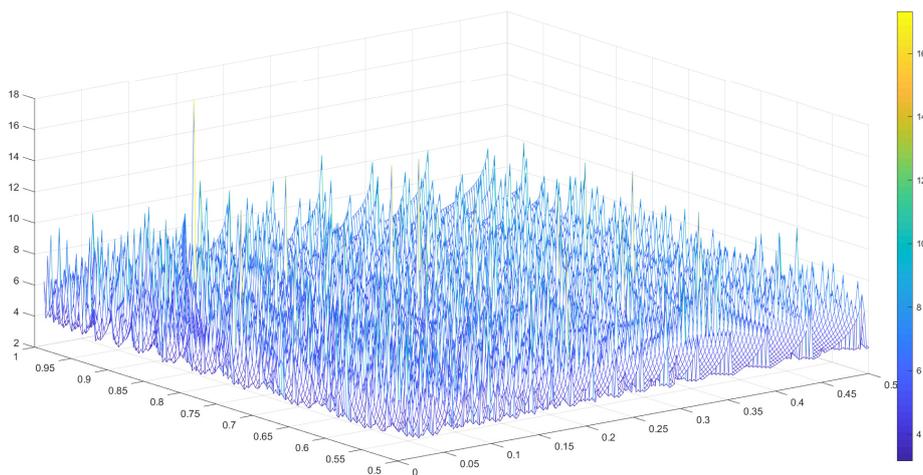


Figura 14: Mapa de respostas sem adição de amortecimento

O comportamento completamente aleatório das amplitudes de resposta na Fig. (14) mostra como o amortecimento é uma peça relevante do problema, justificando a

adição dele ao modelo.

6.4.3 Influência do amortecimento da estrutura

Utilizando como caso base uma razão de preenchimento de 0.35, fator de amortecimento do fluido 5%, e variando o amortecimento da estrutura entre 2% e 5%, tem-se:

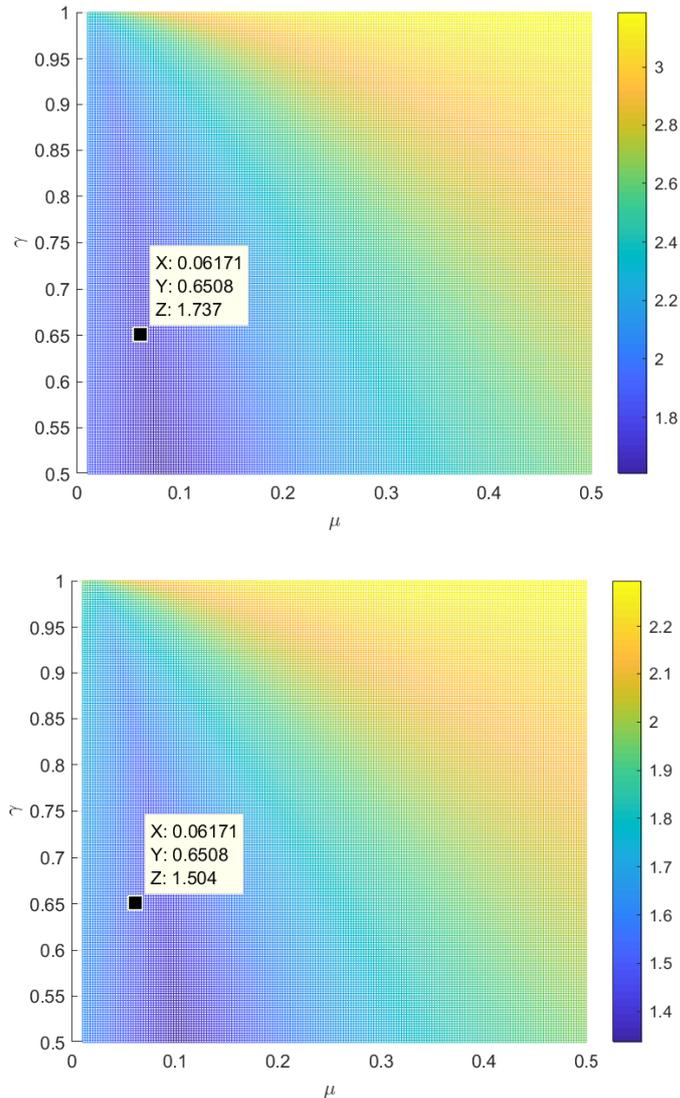


Figura 15: Influência do amortecimento da estrutura ($\xi_s = 2\%$ e $\xi_s = 5\%$, respectivamente)

Selecionou-se um ponto onde $\mu = 0,06171$ e $\gamma = 0,6508$ e o valor encontrado do logaritmo neperiano da amplitude foi de 1,737 para $\xi_s = 2\%$ e 1,504 para $\xi_s = 5\%$. Percebe-se então que as amplitudes de resposta diminuem quando o amortecimento da estrutura aumenta, e não há alteração no formato das curvas.

6.4.4 Influência do amortecimento do fluido

Utilizando como caso base uma razão de preenchimento de 0.35, fator de amortecimento da estrutura 2%, e variando o amortecimento do fluido entre 2% e 5%, tem-se:

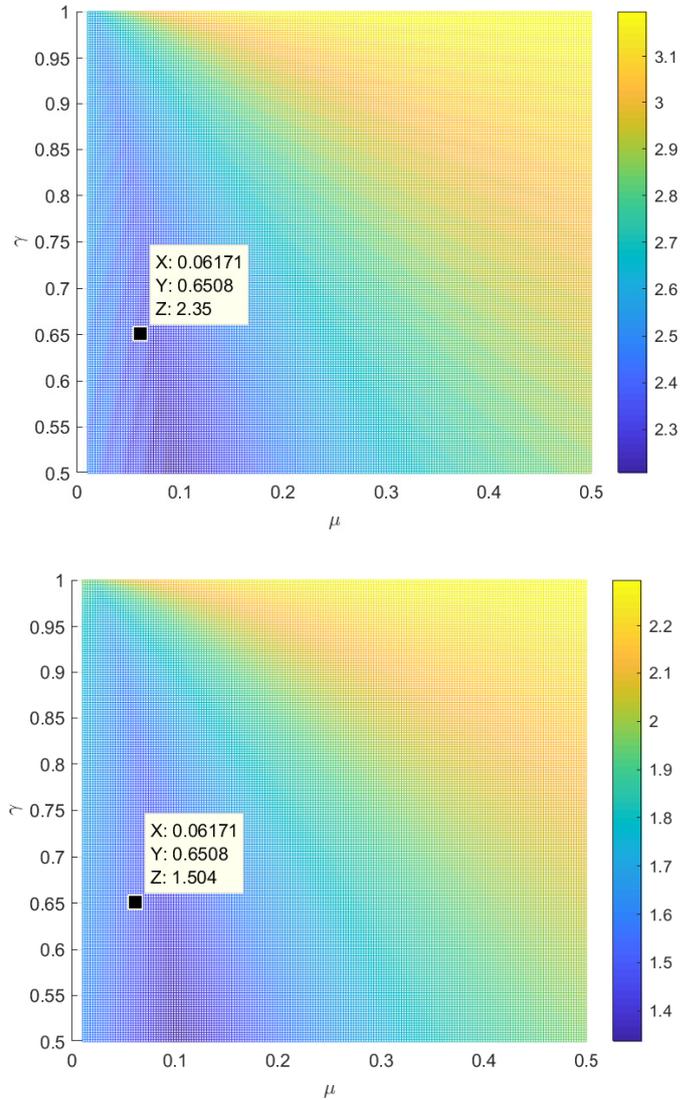


Figura 16: Influência do amortecimento do fluido ($\xi_1 = 2\%$ e $\xi_1 = 5\%$, respectivamente)

A partir dos mesmos valores de razões de massas e sintonização anteriormente, o valor encontrado do logaritmo neperiano da amplitude foi de 2,35 para $\xi_1 = 2\%$ e 1,737 para $\xi_1 = 5\%$. Percebe-se então que com o aumento do amortecimento do fluido, a amplitude de resposta diminui sensivelmente, porém ainda mantendo o comportamento da curva 3D do mapa de respostas obtidos na Fig. (12).

6.4.5 Influência da variação da razão de preenchimento

Fixando os fatores de amortecimento tanto da estrutura quanto do fluido em 5%, varia-se a razão h/L de 0,15 e 0,35, a fim de verificar se o formato do mapa de respostas sofre alguma alteração significativa.

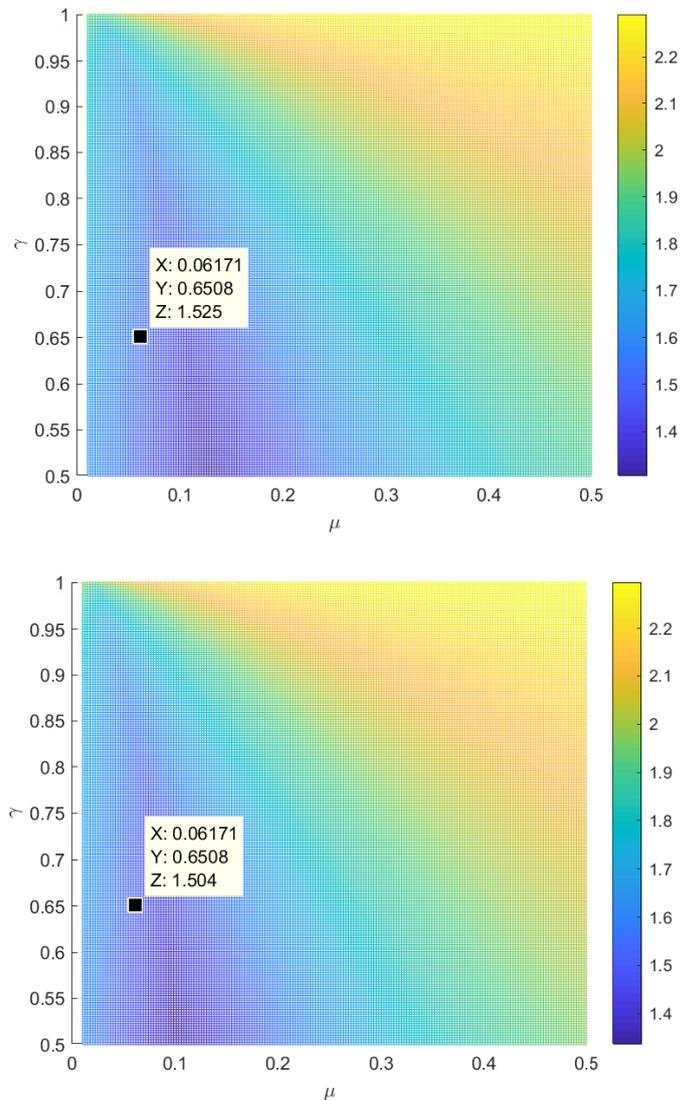


Figura 17: Influência do razão de preenchimento (0,15 e 0,35, respectivamente)

Novamente utilizou-se $\mu = 0,06171$ e $\gamma = 0,6509$, para analisar a influência da razão de preenchimento. O formato do gráfico de amplitude continua se mantendo intacto, percebendo-se então que a adimensionalização foi eficiente, já que com a variação de qualquer um dos parâmetros fixáveis o comportamento do gráfico não muda, somente os valores. Porém, ocorre um deslocamento do vale de mínimos para a esquerda no caso com variação da razão de preenchimento. Por fim, é possível perceber que quanto maior a razão de preenchimento, menor a amplitude de resposta.

6.5 Construção do mapa de resposta ótimo

A fim de obter uma curva de otimização do problema, variou-se a razão de preenchimento h/L em 0,2, 0,4, 0,6 e 0,8, com fatores de amortecimento fixos em $\xi_1 = \xi_s = 0,05$. Apropriando-se de dez pontos para cada razão de preenchimento, montou-se o lugar geométrico das menores amplitudes no espaço 2D μ - γ (Anexo E). Assim, tem-se:

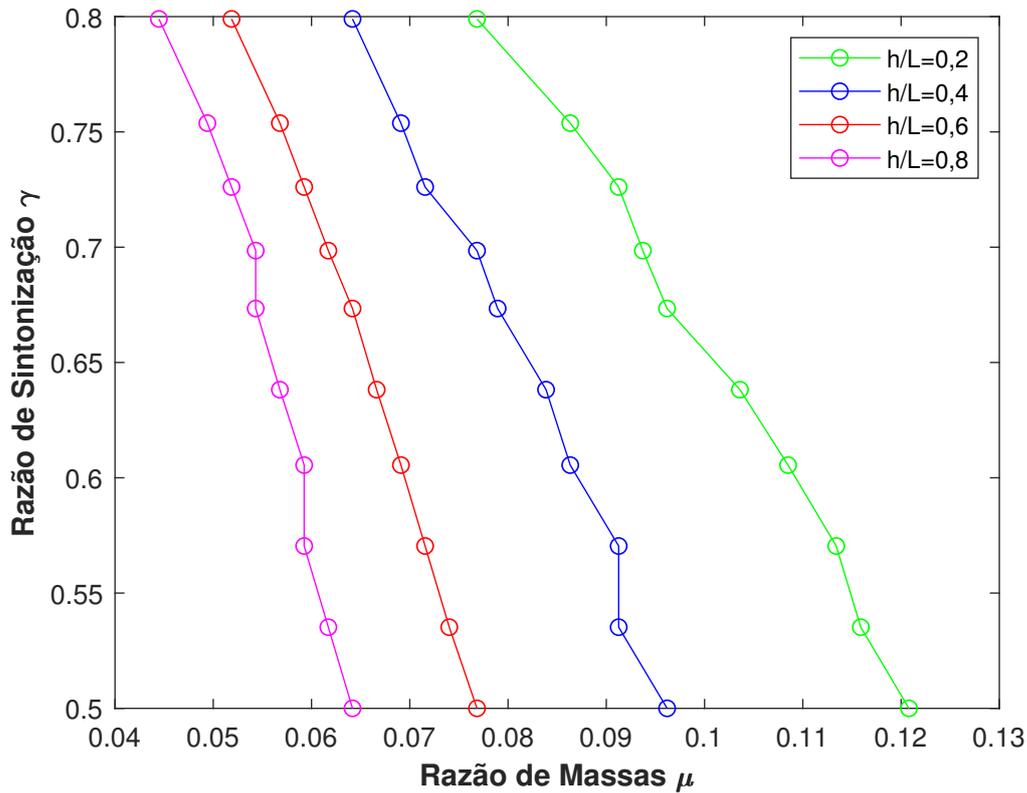


Figura 18: Lugar geométrico do ótimo para várias razões de preenchimento

Analisando as curvas, avaliou-se uma regressão que funcionasse para todas as séries de dados obtidas. Utilizando o recurso *CFtool* do MATLAB[®], é possível comparar diversas opções de regressão, sendo a mais viável uma razão de polinômios quadrática no numerador e à quarta potência no denominador. Segue nas Figs. (19), (20), (21) e (22) as curvas de regressão para todas as razões de preenchimentos estabelecidas:

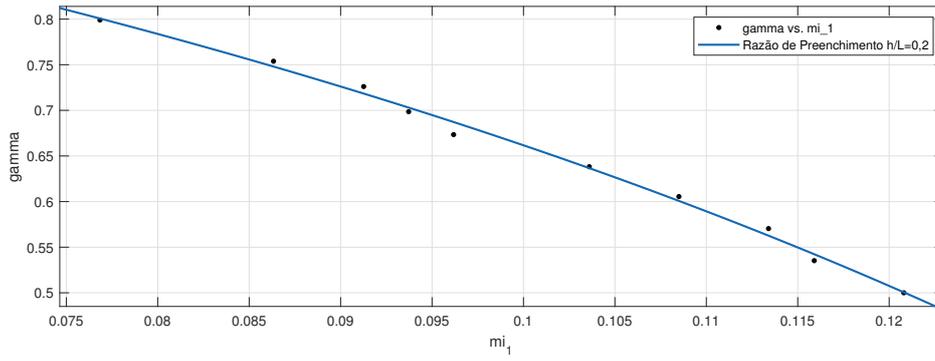


Figura 19: Regressão da curva de μ por γ para $h/L = 0,2$

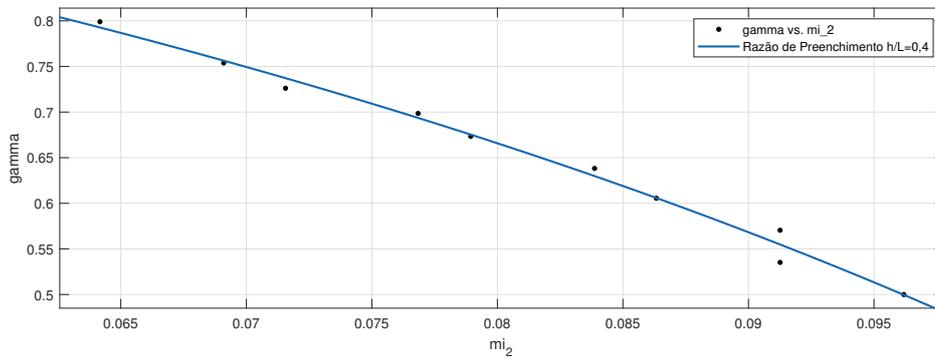


Figura 20: Regressão da curva de μ por γ para $h/L = 0,4$

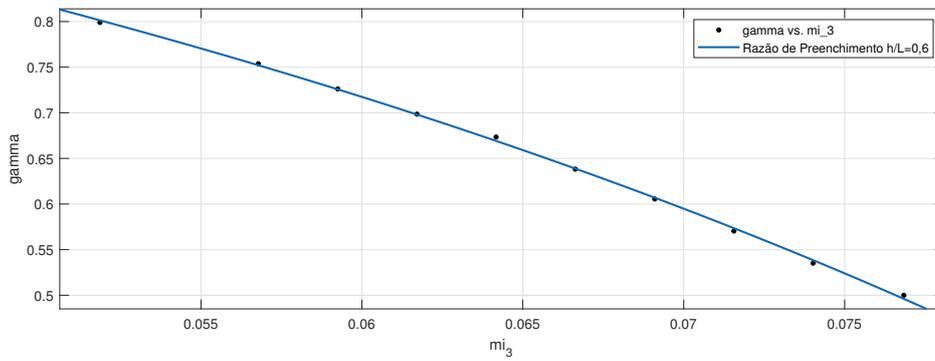


Figura 21: Regressão da curva de μ por γ para $h/L = 0,6$

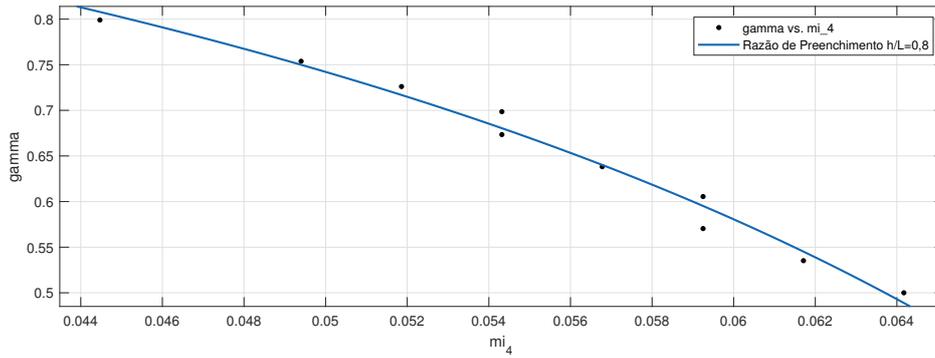


Figura 22: Regressão da curva de μ por γ para $h/L = 0,8$

Os valores de coeficiente de determinação das regressões foram bem altos, da ordem de 99%. Somente a última curva, na Fig. (22), que o coeficiente foi de 98,25%, um pouco menor do que os verificados nas outras curvas. Assim, percebe-se um comportamento padronizado do lugar geométrico das soluções ótimas, comprovando a eficiência da construção do mapa de respostas como uma ferramenta de otimização para o problema do TLD acoplado a estrutura.

7 Considerações Finais

7.1 Conclusões

O propósito deste trabalho é obter uma ferramenta que obtenha parâmetros ótimos de um absorvedor dinâmico de vibrações composto por um tanque retangular semi-preenchido com líquido. Para isso, devido a complexidade da descrição analítica do movimento de um fluido num contâiner, decidiu-se utilizar uma formulação apresentada em [Dodge \(2000\)](#) para discretizar o fluido dentro desse recipiente (modelos dinâmicos equivalentes). Com isso, realizou-se um estudo de convergência para verificar a quantidade de massas discretas que seriam necessárias para utilizar o modelo de maneira satisfatória. Comparou-se os dados obtidos de razão de massas por preenchimento, observando que com 5 massas já há uma aproximação aceitável dos valores. Calculou-se também as frequências naturais de cada modo de vibrar do *sloshing*, comparando-os com os resultados experimentais obtidos por [Lopez, Pedroso e Morais \(2016\)](#), cujas discrepâncias entre os valores foi de até 3,6%, corroborando a eficiência da modelagem.

O próximo passo é obter um modelo de estrutura simplificado capaz de acoplar-se satisfatoriamente com a descrição do movimento de *sloshing*. Dois modelos distintos foram analisados: um pendular e outro massa acoplada a rigidez. Realizando a análise de forças desses modelos utilizando a formulação newtoniana, obteve-se a equação do movimento para cada caso, e implementou-se em MATLAB[®] um código para auxílio no cálculo dos valores de período para várias razões de preenchimento, que foram comparadas com [Cooker \(1994\)](#). Para o modelo massa-mola, percebe-se que há uma falha na descrição, uma vez que os valores de erro ultrapassam em muito os dois dígitos percentuais. Entretanto, a modelagem pendular apresenta erros de até 3,79%, valor considerado satisfatório, uma vez que a discrepância entre os valores experimentais e analíticos do próprio [Cooker \(1994\)](#) chegou a 3,7%. O modelo pendular foi construído de duas maneiras, utilizando uma formulação Lagrangeana e outra Newtoniana. Do modelo energético, obteve-se uma matriz simétrica, e esse foi o escolhido para realizar os estudos de otimização paramétrica.

Durante o trabalho, observou-se o problema da ausência de amortecimento. Adicionando ao modelo, a construção de um mapa de respostas plausível se tornou possível. Fez-se análise da influência do amortecimento e do razão de preenchimento no formato do mapa de respostas. Por fim, foi montado o lugar geométrico dos mínimos para alguns mapas de

respostas, e verificou-se um padrão nos vales obtidos através de uma regressão racional. Com todas essas informações obtidas, é possível definir satisfatoriamente os parâmetros geométricos do tanque para amortização da vibração da estrutura principal, utilizando a otimização paramétrica e a visualização através de um espaço-solução de resposta tridimensional.

7.2 Perspectivas Futuras

Neste trabalho, o foco da otimização foi visual, na montagem de um gráfico de superfície que representasse as soluções do problema e fosse possível focalizar um ótimo. Entretanto, diversas técnicas de otimização computacional foram criadas e difundidas durante o último século. Algoritmos guloso, genético, memético, redes neurais artificiais, são alguns exemplos de técnicas de otimização computacional que auxiliam na vida de um engenheiro de projeto. Na tese de Colherinhas (2016), a aplicação de um algoritmo genético ao problema de *tuned mass damper* foi extremamente eficiente, e pode ser aplicado neste trabalho utilizando como função objetivo

$$fitness = \frac{1}{H_{max}(\Omega)} \quad (7.1)$$

a partir da dedução de ruído branco explicitada no Cap. (4), onde provou-se que o objetivo de minimizar a amplitude da estrutura pode ser definida somente pela minimização do pico máximo da função resposta em frequência da amplitude.

O estudo do amortecimento também é muito importante para a solução eficiente deste problema. Modelos de amortecimento satisfatórios do fluido foram apresentados por Fujino, Sun e Pacheco (1992), definindo como principal fator gerador do amortecimento como a força de atrito gerada na camada limite. Esse estudo de amortecimento é muito importante para as fases de projeto de um TLD, uma vez que este trabalho confirmou a importância da correta modelagem das forças dissipativas nesse tipo de sistema. Assim, uma proposta interessante seria a inclusão do modelo de camada limite no *sloshing*, afastando-se da solução potencial que foi base deste trabalho.

Estudos em tanques de outros formatos também são interessantes, e a verificação de um comportamento específico para diferentes tipos de recipientes seriam interessantes para outros ramos de projeto, como por exemplo tanques de combustíveis em foguetes e aviões. Dodge (2000) e Ibrahim (2005) deduzem as equações do *sloshing* para muitos formatos de reservatório, sendo um bom ponto de início para um trabalho de otimização buscando visualizar o comportamento da amplitude de vibração para diferentes formatos de tanque, comparando com o retangular, e avaliando se há alguma relação entre as soluções.

Referências

AXISA, F.; ANTUNES, J. *Modelling of Mechanical Systems: Fluid Structure Interaction*. University of Oxford: Elsevier Ltd., 2007. Citado na página 7.

AZEVEDO, J. J. R. T. de. *Vibrações Aleatórias Dinâmica Estocástica - Apontamentos da Disciplina de Dinâmica e Engenharia Sísmica*. Instituto Superior Técnico: Instituto Superior Técnico - IST, 1996. Citado na página 21.

COLHERINHAS, G. B. *Ferramenta de Otimização via Algoritmos Genéticos com Aplicações em Engenharia*. Dissertação de Mestrado — Universidade de Brasília, 2016. Citado 4 vezes nas páginas vi, 28, 29 e 42.

COOKER, M. J. *Water waves in a suspended container*. Elsevier Ltd., University of East Anglia, 1994. Citado 8 vezes nas páginas vii, 2, 19, 22, 25, 26, 27 e 41.

DENG, X.; TAIT, M. J. *Equivalent mechanical models of tuned liquid dampers with different tank geometries*. NRC Research Press, McMaster University, 2008. Citado na página 2.

DODGE, F. T. *The New "Dynamics Behavior of Liquids in Moving Containers"*. San Antonio: Southwest Research Inst., 2000. Citado 7 vezes nas páginas 6, 7, 8, 9, 10, 41 e 42.

FUJINO, Y.; SUN, L.; PACHECO, B. M. *Tuned liquid damper (tld) for suppressing horizontal motion of structures*. ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 118, N°10, Reston, Virginia, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 42.

IBRAHIM, R. A. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Wayne State University: Cambridge University Press, 2005. Citado 8 vezes nas páginas vi, xi, 7, 13, 14, 19, 22 e 42.

LOPEZ, A. A. O.; PEDROSO, L. J.; MORAIS, M. V. G. *Identificação experimental de parâmetros modais da superfície do líquido contido num tanque retangular e sua relação na variação do nível de preenchimento*. Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia - RIPE, Universidade de Brasília, 2016. Citado 6 vezes nas páginas xi, 2, 22, 23, 27 e 41.

RAO, S. *Vibrações Mecânicas*. Av. Ermano Marchetti, 1435, São Paulo, SP: Pearson Education do Brasil, 2009. Citado na página 17.

SAVI, M. S.; PAULA, A. S. de. *Vibrações Mecânicas*. Travessa do Ouvidor, 11, Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos Editora (LTC), 2017. Citado na página 4.

SHUM, K. M. *Closed form optimal solution of a tuned liquid column damper for suppressing harmonic vibration of structures*. Elsevier Ltd., The Hong Kong University of Science and Technology, 2008. Citado na página 2.

SOLIMAN, I. M.; TAIT, M. J.; DAMATY, A. A. E. Development and validation of finite element structure-tuned liquid damper system models. *Journal of Dynamic Systems*, The University of Western Ontario, 2015. Citado na página 3.

SOUZA, G. S. C. *Otimização Genética de vigas de paredes finas compósitas: uma abordagem fenomenológica*. Projeto de Graduação — Universidade de Brasília, 2017. Nenhuma citação no texto.

TAIT, M. J. Modelling and preliminary design of a structure-tld system. Elsevier Ltd., McMaster University, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

ZOU, C.; WANG, D. A simplified mechanical model with fluid–structure interaction for rectangular tank sloshing under horizontal excitation. *Advances in Mechanical Engineering*: SAGE Journals, Shanghai Jiao Tong University, 2015. Citado 6 vezes nas páginas vii, xi, 3, 22, 24 e 25.

Apêndices

A Código slosh_conv.m

Implementação do problema de *sloshing* em tanques retangulares.

```
% Programa de validação do problema de sloshing para tanque retangular
% Abraão Ferreira de Sousa Neto
% 14/0079335

clear all
clc
close all
format long

%% File
A = fopen('graphslosh.txt','r'); %Dados importados de Ibrahim
sizeB = [2 Inf];
B = fscanf(A,'%f %f\n',sizeB); %Leitura de dados importados
C = B'; %Inversão da matriz
fclose(A);

%% INPUT's
n = 20; %número de massas
an = 0.3; %largura do tanque (Alejandro) [m]
% Razões de preenchimento (Alejandro)
rx = [0.0385/an 0.0575/an 0.0708/an 0.0905/an 0.1025/an 0.1235/an 0.1428/an];

r = 0.01:0.01:3; %razão de frequências
r2 = 0.01:0.01:3; %razão de preenchimento h/a

r_v = zeros(20,300); %i
i=1; %valor inicial do contador
% Frequências naturais (Alejandro) [Hz]
wn(1,:) = sqrt(pi.*((2*i)-1).*(9.7808./an).*tanh(((2*i)-1).*pi.*rx));
```

```

for i=1:n
% Frequências naturais (Zou) [Hz]
wn2(i,:) = sqrt(pi.*((2*i)-1).*(9.7808).*tanh(((2*i)-1).*pi.*r2))/(2*pi);
% Razão de massa discreta por massa de fluido
r3(i,:) = 8.*tanh(((2*i)-1).*pi.*r2)./((((2*i)-1)^3).*r2.*pi^3);
for j=1:length(r2)
r4(j) = 1 - sum(r3(:,j)); %razão de massa rígida por massa de fluido
end
end
$
for i=1:(n-19)
% Razão de massa discreta por massa de fluido
r5(i,:) = 8.*tanh(((2*i)-1).*pi.*r2)./((((2*i)-1)^3).*r2.*pi^3);
for j=1:length(r2)
r6(j) = 1 - sum(r5(:,j)); %razão de massa rígida por massa de fluido
end
end

for i=1:(n-15)
% Razão de massa discreta por massa de fluido
r7(i,:) = 8.*tanh(((2*i)-1).*pi.*r2)./((((2*i)-1)^3).*r2.*pi^3);
for j=1:length(r2)
r8(j) = 1 - sum(r7(:,j)); %razão de massa rígida por massa de fluido
end
end

%% Construção de Gráficos de Convergência para Sloshing em Tanque Retangular

figure (1)
plot(r2,r3(1,:),'r')
hold on
plot(r2,r4(:),'b--')
hold on
plot(r2,r3(2,:),'g')
hold on
plot(r2,r6(1,:),'k--')
hold on
plot(r2,r8(1,:),'m--')
hold on
scatter(C(:,1),C(:,2),'rx')

```

```
legend('m_1/m_f', 'm_0/m_f (20 massas)', 'm_2/m_f', 'm_0/m_f (1 massa)',  
'm_0/m_f(5 massas)', 'm_0/m_f(Ibrahim)')  
xlabel('h/l', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 12)  
ylabel('m_n, m_0/m_f', 'FontWeight', 'bold', 'FontSize', 12)  
grid on  
grid minor
```

B Código slosh_acopl.m

Implementação do problema de acoplamento *sloshing* para os três modelos citados nas seções 4.1 e 4.2

```
%% Programa de validação do problema de sloshing para tanque retangular
% Abraão Ferreira de Sousa Neto
% 14/0079335

clear all
clc
close all

%%INPUTS

l=0.185; %comprimento do pêndulo [m]
rho=1000; %massa específica [kg/m^3]
g = 9.535; %gravidade [m/s^2]
m_b = 0.552; %massa pendular [m]
w=0.525; %largura do tanque [m]
n=6; %número de massas móveis
a=0.13; %comprimento do tanque [m]
h=[0.035 0.056 0.073 0.103]; %altura do tanque [m]
m_f = rho*a*w*h; %massa de fluido [kg]

%% Inicializando as matrizes
K=zeros(n,n,4);
M=zeros(n,n,4);
%% Calculando as componentes de massa e rigidez das matrizes
for i=1:length(h)
for j=1:n
m_n(i,j)=m_f(i)*(8*(w/h(i))*(tanh(((2*j)-1)*pi*(h(i)/w)))/(((2*j)-1)^3*pi^3));
m_0(i,j)= m_f(i)-sum(m_n(i,:));
K_n(i,j) = m_f(i)*(8*g/h(i))*((tanh(((2*j)-1)*pi*(h(i)/w)))^2)/(((2*j-1))^2*pi^2);
```

```

K_b = m_b*g/l;

%% Montando as matrizes de rigidez e massa (descomentar de acordo com o modelo)

% Modelo pendular

%   K(j+1,j+1,i) = K_n(i,j);
%   K(j+1,1,i) = -K_n(i,j)*l;
%   K(1,1,i) = (m_b+m_f(i))*g*l;
%   M(j+1,j+1,i) = m_n(i,j);
%   M(1,j+1,i) = m_n(i,j)*l;
%   M(1,1,i) = (m_b+m_0(i,j))*l^2;

% Modelo massa-mola acoplamento na matriz de rigidez

%   K(j+1,j+1,i) = K_n(i,j);
%   K(j+1,1,i) = -K_n(i,j);
%   K(1,j+1,i) = -K_n(i,j);
%   K(1,1,i) = K_b + sum(K_n(i,:));
%   M(j+1,j+1,i) = m_n(i,j);
%   M(1,1,i) = (m_b+m_0(i,j));

% Modelo massa-mola acoplamento nas duas matrizes

%   K(j+1,j+1,i) = K_n(i,j);
%   K(j+1,1,i) = -K_n(i,j);
%   K(1,1,i) = K_b;
%   M(j+1,j+1,i) = m_n(i,j);
%   M(1,j+1,i) = m_n(i,j);
%   M(1,1,i) = (m_b+m_0(i,j));
end
end
%% Separando as matrizes para cada razão de preenchimento
K_1 = K(:, :, 1);
K_2 = K(:, :, 2);
K_3 = K(:, :, 3);
K_4 = K(:, :, 4);
M_1 = M(:, :, 1);
M_2 = M(:, :, 2);
M_3 = M(:, :, 3);
M_4 = M(:, :, 4);
%% Resolvendo autovalores

```

```
lambda_1 = eig(K_1,M_1);
lambda_2 = eig(K_2,M_2);
lambda_3 = eig(K_3,M_3);
lambda_4 = eig(K_4,M_4);
%% Período para cada razão de preenchimento
T_1 = 2*pi./sqrt(lambda_1);
T_2 = 2*pi./sqrt(lambda_2);
T_3 = 2*pi./sqrt(lambda_3);
T_4 = 2*pi./sqrt(lambda_4);
%% Período e frequência do pêndulo
w_p=sqrt(g/l);
T_p=2*pi/w_p;
```

C Código mapa_res_sim.m

Implementação do mapa de respostas para o modelo simétrico obtido pela formulação Lagrangeana.

```
%% Mapa de Respostas
%%Abraão Ferreira de Sousa Neto
%%140079335
%%Projeto de graduação 2

clear all
clc
close all

%% Inputs
mi = linspace(0.01,0.5,200); %razão de massa de fluido pela massa da base
alpha = linspace(0.01,2,200); %razão de frequências
gamma = linspace(1,0.5,200);
m_b = 0.552;
l_b = 0.185;
g = 9.7808;
h_a = 0.8;
ksi=0.05;
ksi1=0.05;

for i=1:length(mi)
%   i = 100
%   m1_s_mb(i) = (8/pi^2)*(1/mi(i))*(tanh(pi*h_a))/(pi*h_a);
m1_s_mb(i) = (8*tanh(pi*h_a)/(pi^3*h_a))*mi(i);

for j=1:length(gamma)
for k=1:length(alpha)
H_num = (1+((2i)*ksi1*alpha(k)/gamma(j))-((alpha(k)/gamma(j))^2));
```

```

H_dem = (((1+mi(i))*(1-(alpha(k)^2)))+(2i)*ksi*alpha(k))*(1+((2i)*ksi1*alpha(k)/gamma(
H(k) = H_num/H_dem;
end
H_max(i,j) = max((H(:)));
end
end

figure
mesh(mi,gamma,log(abs(H_max)));
colorbar
xlabel('\mu')
ylabel('\gamma')
zlabel('ln(|H_{max}|)')

```

D Código pendulo__mass.m

Implementação da função resposta em frequência da amplitude para um determinado valor de γ e μ .

```
%% FRF Amplitude
%Abraão Ferreira de Sousa Neto
%140079335
%Projeto de graduação 2
% function H_max = pendulo_mass(mi,alpha,h_a)

clear all
clc
close all

alpha=linspace(0.01,2,200);
mi = cursor_info.Position(1);
m_b=0.552;
l_b=0.185;
g=9.7808;
h_a = 0.8;
ksi=0.05;
ksi1=0.05;
m1_s_mb = (8*tanh(pi*h_a)/(pi^3*h_a))*mi;
gamma = cursor_info.Position(2);
i=1;
j=1;

for k=1:length(alpha)
H_num = (1+((2i)*ksi1*alpha(k)/gamma(j))-((alpha(k)/gamma(j))^2));
H_dem = (((1+mi(i))*(1-(alpha(k)^2)))+(2i)*ksi*alpha(k))*(1+((2i)*ksi1*alpha(k)/gamma(j)));
H(k) = H_num/H_dem;

end
```

```
figure (1)
plot(alpha,log(abs(H)))
xlabel('alpha','FontWeight','bold')
ylabel('ln(H(\Omega))','FontWeight','bold')
grid on
grid minor
```

E Código plotfinal.m

Construção do *locus* de valores mínimos de $H(\Omega)$ no espaço 2D μ - γ para razões de preenchimento de $[0,2 - 0,8]$.

```
%% Mapa de Respostas
%%Abraão Ferreira de Sousa Neto
%%140079335
%%Projeto de graduação 2
```

```
clear all
clc
close all
%%
mi_1=[0.1208
0.1159
0.1134
0.1085
0.1036
0.09618
0.09372
0.09126
0.08633
0.07684];
```

```
gamma=[0.5
0.5352
0.5704
0.6055
0.6382
0.6734
0.6985
0.7261
0.7538
```

```
0.799];
```

```
mi_2=[0.096188  
0.09126  
0.09126  
0.08633  
0.08387  
0.07894  
0.07684  
0.07156  
0.0691  
0.06417];
```

```
mi_3=[0.07684  
0.07402  
0.07156  
0.0691  
0.06663  
0.06417  
0.06171  
0.05925  
0.05678  
0.05186];
```

```
mi_4=[0.06417  
0.06171  
0.05925  
0.05925  
0.05678  
0.05432  
0.05432  
0.05186  
0.0494  
0.04447];
```

```
hold all
```

```
plot(mi_1,gamma,'g-o',mi_2,gamma,'b-o',mi_3,gamma,'r-o',mi_4,gamma,'m-o')  
xlabel('Razão de Massas \mu','FontWeight','bold')  
ylabel('Razão de Sintonização \gamma','FontWeight','bold')  
legend('h/L=0,2','h/L=0,4','h/L=0,6','h/L=0,8')
```