



Universidade de Brasília
IE - Departamento de Estatística
Trabalho de Conclusão de Curso

Distribuições do tipo Slash aplicadas em dados financeiros

Alexandre Teixeira Costa

Relatório Final

Orientador: Prof.º Peter Zörnig

Brasília

Dezembro de 2018

Resumo

Os dados financeiros ou econômicos raramente se aproximam de uma distribuição Normal, principalmente pelo fato de que esses dados possuem uma cauda mais pesada. Portanto, este estudo teve como objetivo apresentar as distribuições do tipo Slash e suas aplicações nos dados financeiros. Este trabalho consiste em uma revisão bibliográfica das distribuições do tipo Slash, onde será apresentada uma generalização, baseada no artigo Zörnig (2018), que utiliza a função Hipergeométrica Generalizada. Por fim, o trabalho visa verificar se a distribuição é adequado, ou não, para dados financeiros.

Abstract

Financial or economic data rarely approach a Normal distribution, mainly because these data have a heavier tail. Therefore, this study aimed to present Slash-type distributions and their applications in financial data. This work consists of a bibliographical revision of the Slash-type distributions, and will be present a generalization, based on the article Zörnig (2018), which uses the Generalized Hypergeometric function. Finally, the paper aims to verify if the distribution is adequate, or not, for financial data.

Sumário

1. Introdução	6
2. Metodologia	8
2.1 Distribuição Slash	8
2.2 Distribuição Slash com Denominador Beta	9
2.2.1 Distribuição Slash em Função da Hipergeométrica Generalizada	10
2.2.2 Momentos da BDSL	11
2.2.3 Resultados Importantes	12
2.3 Distribuição Slash Laplace	12
2.3.1 Distribuição Laplace	12
2.3.2 Distribuição Slash Laplace dividida em Beta	14
3. Aplicação da Distribuição tipo Slash	16
3.1 AMBEV	19
3.2 BITCOIN	21
3.3 DÓLAR	23
3.4 PETROBAS	25
4. Conclusão	27

1. Introdução

Em muitos trabalhos estatísticos, pesquisadores se deparam com situações em que os dados não são bem ajustados pela distribuição Normal, principalmente em trabalhos com dados financeiros, que apresentam dados com cauda pesada e curtose elevada. Vários estudos procuram utilizar outras distribuições para modelar os dados, como no caso de Kotz, Kozubowski e Podgorski [4], que utilizam a distribuição Laplace para analisar dados sobre a moeda japonesa pelo Dólar (ver página 376).

Visto a necessidade de utilização de distribuições com cauda pesada, o estudo de Rogers e Tukey [9] apresentou a distribuição Slash, que se trata de uma v.a Z gerada pelo quociente de outras duas variáveis aleatórias, ou seja, $Z = X/U^{1/q}$ em que U é uniformemente distribuído em $[0, 1]$ e $q > 0$. Rogers e Tukey utilizaram X sendo uma $\text{Normal}(0,1)$. Outros estudos também fizeram variações da variável aleatória X , como o caso de Gui [2] onde utilizou a Meia Normal, ou o caso de Punathumparambath [7], que fez uso da Skew Normal.

Neste trabalho considera-se de particular relevância o caso de Shodganga [11], que em seu estudo, reescreveu a distribuição Slash para as distribuições Exponencial, Laplace e Meia Laplace. Além disso, o autor aplicou essas distribuições as taxas de câmbio da moeda indiana em relação ao Dólar americano, ou seja, demonstrou que

essas distribuições podem ser melhor ajustadas do que a Normal.

Portanto, o principal objetivo deste trabalho é comparar o uso de diferentes distribuições para dados financeiros brasileiros. Primeiramente, será realizada uma breve explicação sobre as distribuições tipo Slash Laplace e Normal, e, em seguida estas serão comparadas quanto a sua aplicação a dados financeiros. Por fim, será calculada uma medida estatística para verificar se houve ajuste aos dados.

2. Metodologia

2.1 Distribuição Slash

A distribuição Slash Normal resulta do quociente entre duas variáveis aleatórias independentes, a distribuição Normal (numerador) e a distribuição Uniforme (denominador). Assim, pode-se denotar que uma variável aleatória Z tem distribuição Slash se este puder ser representada como

$$Z = \frac{X}{U^{1/q}} \quad , \quad (1)$$

em que $X \sim N(0, 1)$ independe de $U \sim U(0, 1)$ e $q > 0$. Em particular, para $q \rightarrow \infty$ a distribuição Slash aproxima-se da distribuição Normal Padrão. Já para $q = 1$, obtém-se a chamada Slash Canônica com função de densidade dada por:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\phi(0) - \phi(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}\phi(0), & x = 0 \end{cases} \quad , \quad (2)$$

em que ϕ representa a função de densidade da distribuição Normal Padrão (Johnson, Kotz e Balakrishnan, 1995).

2.2 Distribuição Slash com Denominador Beta

Sejam X, Y variáveis aleatórias contínuas independentes com densidades f e g , e supondo que Y tenha uma distribuição Beta, ou seja, sua f.d.p é dada por:

$$g(y) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \quad \text{para } 0 \leq y \leq 1 \quad , \quad \text{em que } B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

é a função Beta com parâmetros $\alpha, \beta > 0$. Define-se a distribuição *Slash dividida por Beta* como a distribuição do quociente $Z = X/Y$. Será utilizada a notação curta *BDSL*. No caso em que $\beta = 1$ obtém-se a *Slash Comum*, descrita na seção anterior. O Teorema 1 mostra a f.d.p da v.a Z . A prova do teorema está descrita em Zörnig (2018, ver eq. (2.1)).

Teorema 1. *A f.d.p da variável aleatória Z é:*

$$h(z) = \int_0^1 f(zw) \frac{1}{B(\alpha, \beta)} w^\alpha (1-w)^{\beta-1} dw \quad \text{para } z \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Em particular, para $\beta = 1$, encontra-se a *Slash Comum*, ver equação 1. Assim, α seria o parâmetro q da equação como apresentado por Castillo (2016, p.112, eq. (2))[1]. Já para o caso em que $\beta = 0$, a densidade *BDSL* é reduzida para a variável aleatória X . Isso ocorre porque a distribuição Beta se aproxima de 1 quando o parâmetro β tende a 0 para qualquer valor de α com $\alpha > 0$. Desta forma, Y converge em probabilidade para $Y = 1$ se β tender a zero. Assim, a densidade de $Z = X/Y$ converge para a de X .

A Figura 1 mostra algumas curvas específicas da distribuição *BDSL*($\alpha, \beta, (N(0, 1))$). Pode-se observar que a distribuição *Slash Normal* converge

suavemente para a distribuição Normal quando aumenta-se β de 0 para 1. Os valores do parâmetro β são 0; 0,5; 1; 2 e 3. Já o valor de α foi escolhido como igual a 1. Também é importante verificar que a cauda da distribuição aumenta com o crescimento do valor de β .

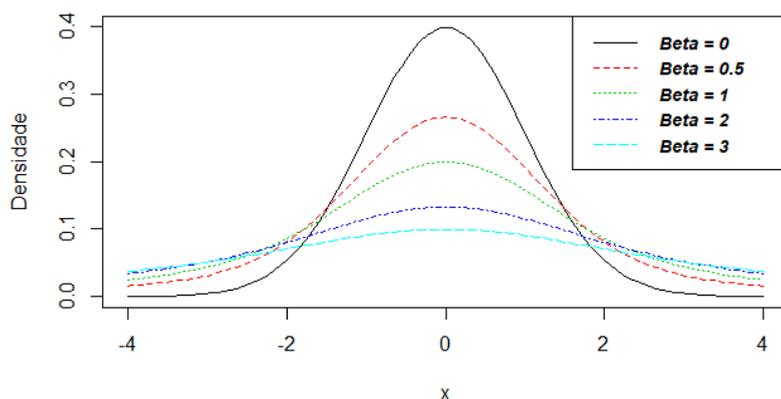


Figura 1: Distribuição Slash para $\alpha = 1$

2.2.1 Distribuição Slash em Função da Hipergeométrica Generalizada

Para construir a distribuição de BDSL, são utilizadas as funções hipergeométricas generalizadas definidas por:

$${}_pF_q(n_1, \dots, n_p; d_1, \dots, d_q; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k n_1^{(k)} \dots n_p^{(k)}}{k! d_1^{(k)} \dots d_q^{(k)}} \quad , \quad (4)$$

em que $n^{(k)} = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$ denota o símbolo Pochhammer, satisfazendo $n^{(k)} = n(n+1)\dots(n+k-1)$ quando k é um inteiro positivo. O pacote *hypergeo* do software Rstudio foi utilizado para descrever as f.d.p's das distribuições do tipo Slash citadas nesse trabalho. A seguir será mostrada a distribuição BDSL em função da Hipergeométrica Generalizada.

Teorema 2. *A distribuição Slash dividida pela distribuição Beta gerada por $N(0,1)$ tem a densidade*

$$h(z) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}(\alpha + \beta)} \times {}_2F_2\left(\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{\alpha + 1}{2}; \frac{\alpha + \beta}{2} + 1, \frac{\alpha + 1 + \beta}{2}; -\frac{z^2}{2}\right) \quad (5)$$

para $z \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta > 0$

A prova do Teorema 2 encontra-se em Zörnig (2018, ver eq. (2.2)). A distribuição Slash dividida por Beta gerada por $N(0,1)$ será indicada por $BDSL(\alpha, \beta, N(0,1))$. Para os casos especiais de $\beta = 0$ e $\beta = 1$, obtém-se a distribuição Normal Padrão e a distribuição Slash Comum, respectivamente.

Nas aplicações deste trabalho, foram introduzidos os parâmetros de localização e escala na densidade (5), ou seja, considerou-se a f.d.p de quatro parâmetros, α, β, μ (Média Amostral), σ^2 (Variância Amostral). Desta forma, a f.d.p pode ser escrita como:

$$h(z) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}(\alpha + \beta)\sigma} \times {}_2F_2\left(\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{\alpha + 1}{2}; \frac{\alpha + \beta}{2} + 1, \frac{\alpha + 1 + \beta}{2}; -\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (6)$$

2.2.2 Momentos da BDSL

Os momentos da distribuição $BDSL(\alpha, \beta, (N(0,1)))$ podem ser escritos como:

$$\mu_k = (1 + (-1)^k) \frac{2^{r/2-1} \Gamma(\alpha - k) \Gamma(\frac{k+1}{2}) \Gamma(\alpha + \beta)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \beta - r) \Gamma(\alpha)} \quad \text{para } \alpha > k, \quad (7)$$

ver prova em Zörnig (2018, ver Teorema 2.3).

Pode-se verificar que os momentos ímpares são iguais a zero.

2.2.3 Resultados Importantes

Agora é importante apresentar alguns resultados da distribuição Slash dividida pela Beta. O resultado a seguir é para $z = \mu$ na equação 7. Nesse caso encontra-se o valor máximo da distribuição *BDSL*. A partir da equação 7, obtém-se:

$$h(\mu) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}(\alpha + \beta)\sigma} \quad . \quad (8)$$

Outro resultado obtido é quando o valor de α ou β tende a zero. Nesses dois casos a distribuição converge para o numerador da equação 1. Pode-se verificar em detalhes:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} BDSL(\alpha, \beta, f(\theta)) &= f(\theta) \quad \text{para todo } \beta > 0 \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} BDSL(\alpha, \beta, f(\theta)) &= f(\theta) \quad \text{para todo } \alpha > 0 \quad , \end{aligned}$$

em que $f(\theta)$ representa a f.d.p de qualquer variável aleatória. O limite deve ser entendido no sentido de uma convergência pontual das densidades.

2.3 Distribuição Slash Laplace

Antes de se definir a distribuição Slash Laplace dividida pela Beta é importante relembrar a f.d.p da Laplace, pois esta é de grande relevância para a construção da distribuição Slash Laplace citada por Shodganga [11].

2.3.1 Distribuição Laplace

A versão padrão da variável aleatória Laplace, também conhecida como distribuição Exponencial Dupla, tem a densidade simples

$$f_x(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Nesse caso seus parâmetros de localização e escala são 0 e 1, respectivamente, ou seja, $\mu = 0$ e $b = 1$.

Para o caso da f.d.p com seus parâmetros de localização e escala a sua densidade simples é:

$$f(x|\mu, b) = \frac{1}{2b}e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad , \quad (10)$$

em que $b > 0$. A equação da função de densidade da Laplace se assemelha consideravelmente com à equação da f.d.p da Normal, entretanto, a Normal expressa seus termos em função da diferença quadrática da média, enquanto a Laplace expressa seus termos em função da diferença absoluta de sua mediana. Dessa forma, a Laplace tem caudas mais pesadas do que a Normal, o que favorece sua escolha para dados financeiros.

Para estimar os parâmetros de uma amostra aleatória (x_1, \dots, x_n) de tamanho n , utiliza-se o método da máxima verossimilhança. Assim, a máxima verossimilhança do estimador $\hat{\mu}$ do parâmetro μ é a mediana da amostra. Já o estimador \hat{b} do parâmetro b se dá pelo somatório da diferença absoluta de sua mediana dividida pelo tamanho da amostra n , ou seja, $\hat{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{\mu}|$ (Robert M Norton, 1984).

2.3.2 Distribuição Slash Laplace dividida pela Beta

A distribuição Slash Laplace resulta da razão entre a distribuição Laplace pela Uniforme, ou seja, $Z = \frac{X}{U^{1/q}}$ em que $X \sim Laplace(\mu, b)$ e $U \sim (0, 1)$. Assim, denota-se a variável aleatória Z como $SLL(\mu, b, q)$ (ver Shodganga [11]).

Quando $q = 1$ obtém-se a distribuição Slash Laplace canônica. Já quando $q \rightarrow \infty$ a Slash Laplace tende a uma $Laplace(\mu, b)$. A Figura 2 compara as distribuições do tipo Slash Laplace Canônica e Normal Canônica. Pode-se observar que a Laplace possui uma curtose maior que a da Normal.

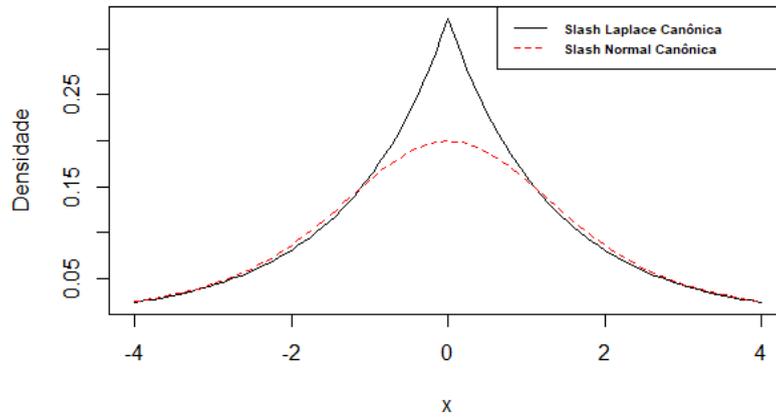


Figura 2: Comparação entre a Slash Laplace e a Slash Normal

A densidade da Slash Laplace dividida por Beta corresponde a

$$\begin{aligned}
 h(z) &= \\
 &= \frac{\alpha e^{-|z|}}{2(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} \times \\
 &\quad \times \left(\beta {}_1F_1(1 + \beta; \alpha + \beta + 2; |z|) + (\alpha + 1) {}_1F_1(\beta; \alpha + \beta + 2; |z|) \right) \quad , \quad (11)
 \end{aligned}$$

ver Zörnig (2018).

A Figura 3 mostra distribuições específicas para diferentes valores de α e β . Novamente, pode-se observar que para um maior valor de β , a cauda da distribuição aumenta, tal como ocorre na Figura 1. Para todas as curvas definiu-se $\mu = 0$ e $b = 1$. As densidades correspondem às seguintes seleções de parâmetros:

- $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ curva preta (distribuição Laplace);
- $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ curva vermelha (distribuição Slash Laplace Padrão);
- $(\alpha, \beta) = (0.5, 2)$ curva verde (BDSL geral).

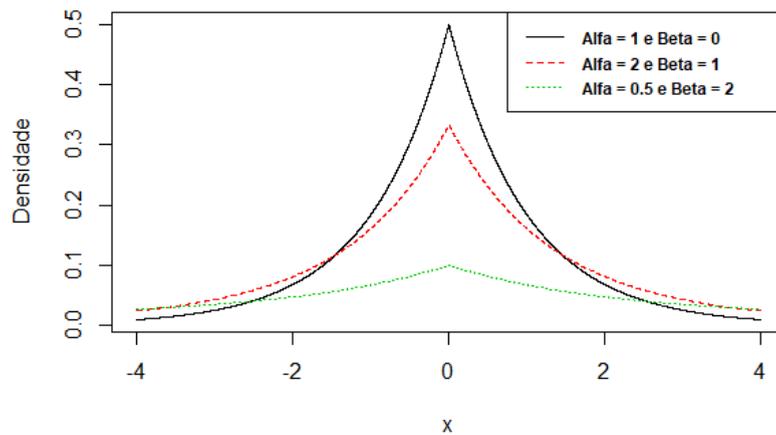


Figura 3: Distribuição BDSL Laplace para diferentes α e β

3. Aplicação da Distribuição tipo Slash

Neste trabalho foram utilizados dados de ativos financeiros negociados no Brasil e em outros lugares do mundo. Além disso, utilizou-se a taxa de câmbio Dólar (US\$) pelo Real (R\$). Os dados foram importados pelo software Rstudio, utilizando o pacote "*quantmod*", que extrai os dados do site "Yahoo Finance". Apenas os dados de câmbio foram importados pelo pacote *rbc*, que extrai dados do site do Banco Central do Brasil (BACEN).

Os bancos de dados importados do "Yahoo Finance" possuem seis variáveis: abertura do preço do ativo no dia, maior preço do ativo no dia, menor preço do ativo no dia, preço de fechamento do ativo no dia, volume de vendas do ativo e dia de negociação do ativo. Quanto aos dados obtidos relativos ao BACEN, foram importados apenas o dia de negociação do Dólar e o preço de fechamento do Dólar pelo Real no dia. Neste trabalho, foram considerados apenas as informações do dia de negociação e o preço de fechamento de cada ativo.

Os ativos escolhidos para representar a Bolsa brasileira foram "ABEV3.SA" (Ambev.SA) e "PETR4.SA" (Petrobras.SA). Estes foram escolhidos pelo fato de serem as ações mais negociadas na BOVESPA (Bolsa de Valores

do Brasil). Também levou-se em consideração o BTCUSD=X, que se tornou mais conhecido pelo nome de Bitcoin, uma criptomoeda que se tornou conhecida no ano de 2017 devido a sua valorização de mais de 1900%.

Em todos os casos, foram utilizados os dados do dia 4 de janeiro de 2010 até o dia 6 de setembro de 2018 (dia da coleta dos dados). Esse intervalo foi definido com base no estudo de Shodganga [10], que também utilizou o período de 8 anos. Além disso, para todas as séries temporais foi realizada a transformação logarítmica $\log \frac{X_t}{X_{t-1}}$.

Em relação a estimação dos parâmetros foram utilizados dois diferentes caminhos. O primeiro deles foi estimar por máxima verossimilhança os parâmetros das distribuições Normal e Laplace. Os mesmos resultados dos parâmetros foram utilizados no numerador das distribuições tipo Slash. Já para estimar os parâmetros α e β do denominador das distribuições do tipo Slash, foi utilizado a Estatística de Kolmogorov-Smirnov, ou seja, $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$ em que $F_n(x)$ representa a função de distribuição empírica dos dados e $F(x)$ a função distribuição acumulada das distribuições de estudo. Para isso, utilizou-se os parâmetros α e β que minimizaram o valor de D_n . Além disso, utilizou-se a função *ks.test* implementada no *software* Rstudio.

A seguir serão apresentados gráficos da função de distribuição acumulada das distribuições estudadas. Além disso, serão apresentados os valores dos parâmetros de cada distribuição. Também será apresentado o Critério de Informação de Akaike (AIC) de cada série para comparar cada modelo. Para calcular o AIC, utilizou-se

a fórmula $AIC = 2k - 2 \log L(\hat{\theta})$ em que k é o número de parâmetros estimado da distribuição e $L(\hat{\theta})$ é a função de verossimilhança para os parâmetros $\hat{\theta}$.

3.1 AMBEV

Para os dados da ABEV3.SA, obteve-se um tamanho de amostra igual a 2140. A

Tabela 1 apresenta estatísticas utilizadas na estimação dos parâmetros.

Tamanho da Amostra	2140
Média Amostral	0.00
Mediana Amostral	0.00
σ	0.01
Soma da Diferença Absoluta	0.01

Tabela 1: Estatística do Log-retorno ABEV3.SA

A Estatística de Kolmogorov-Smirnov (D_n) da BDSL Laplace e BDSL Normal são 0,02 e 0,06; respectivamente. A Figura 4 representa os dados com as f.d.a's descritas no trabalho. As Funções de Distribuição Acumulada correspondem às seguintes curvas:

- *BDSL Laplace*(μ, b, α, β) = (0; 0, 01; 2, 4; 0, 1) curva marrom;
- *Laplace*(μ, b) = (0; 0, 01) curva roxa;
- *BDSL Normal*($\mu, \sigma, \alpha, \beta$) = (0; 0, 01; 2, 3; 0.1) curva verde;
- *Normal*(μ, σ) = (0; 0, 01) curva azul.

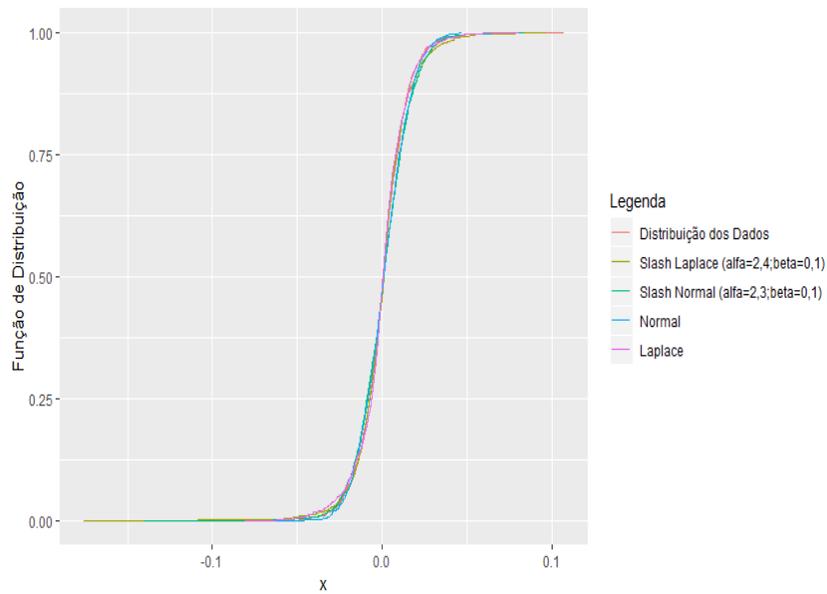


Figura 4: Funções de distribuição Acumulada nos dados da Ambev

De acordo com a Figura 4, é impossível diferenciar as distribuições acumulada dos dados com as outras distribuições. Já na Tabela 2, pode verificar diferença entre os Critérios de Informação de Akaike. Pelo o AIC, a distribuição Laplace é que melhor se adequa pois, seu AIC é o menor entre todas as distribuições.

	Normal	BDSL Normal	Laplace	BDSL Laplace
AIC	-12140,7	-12185,7	-12251,2	-12231,3

Tabela 2: Coeficiente de Determinação nos dados da ABEV3.SA

3.2 BITCOIN

Para os dados da BTCUSD=X, obteve-se um tamanho de amostra igual a 2124.

Novamente, foi apresentada estatística da amostra.

Tamanho da Amostra	2124
Média Amostral	0.01
Mediana Amostral	0.00
σ	0.08
Soma da Diferença Absoluta	0.04

Tabela 3: Estatística do Log-retorno BTCUSD=X

A Estatística de Kolmogorov-Smirnov (D_n) da BDSL Laplace e BDSL Normal são 0,081 e 0,16; respectivamente. A Figura 5 representa os dados com as suas respectivas f.d.a's. As Funções de Distribuição Acumulada correspondem às seguintes curvas:

- *BDSL Laplace* $(\mu, b, \alpha, \beta) = (0; 0,04; 2,3; 0,1)$ curva marrom;
- *Laplace* $(\mu, b) = (0; 0,04)$ curva roxa;
- *BDSL Normal* $(\mu, \sigma, \alpha, \beta) = (0,01; 0,08; 2; 0.1)$ curva verde;
- *Normal* $(\mu, \sigma) = (0,01; 0,08)$ curva azul.

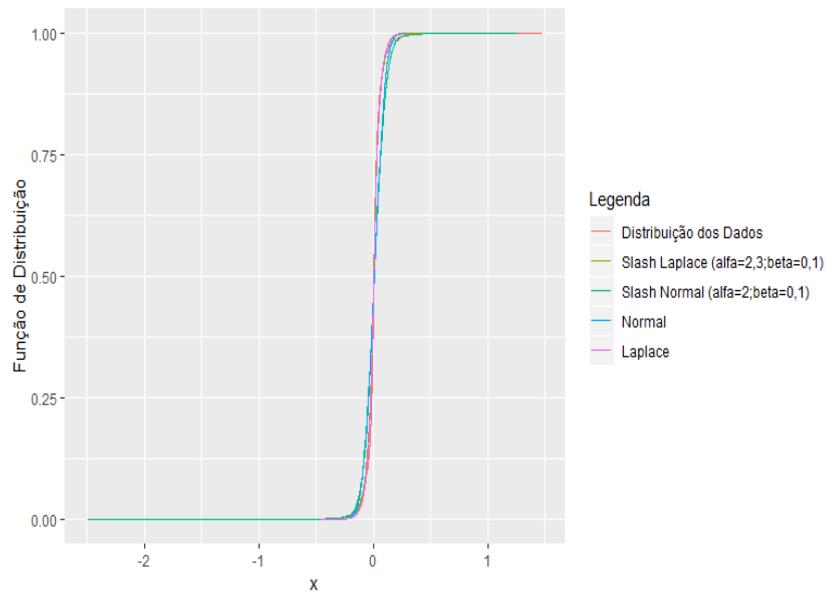


Figura 5: Funções de distribuição Acumulada nos dados da BTCUSD=X

De acordo com a Figura 5, é impossível diferenciar as distribuições acumulada dos dados com as outras distribuições. Já na Tabela 4, pode verificar diferença entre os Critérios de Informação de Akaike. Pelo o AIC, a distribuição Laplace é que melhor se adequa pois, seu AIC é o menor entre todas as distribuições.

	Normal	BDSL Normal	Laplace	BDSL Laplace
AIC	-4926,60	-4825,54	-6432,66	-6531,16

Tabela 4: Coeficiente de Determinação nos dados do Bitcoin

3.3 DÓLAR

Para os dados da taxa de câmbio, obteve-se um tamanho de amostra igual a 2181. A Tabela 5 apresenta estatísticas utilizadas na estimação dos parâmetros das distribuições discutidas no trabalho.

Tamanho da Amostra	2181
Média Amostral	0.00
Mediana Amostral	0.00
σ	0.01
Soma da Diferença Absoluta	0.01

Tabela 5: Estatísticas do Log-retorno Dólar

A Estatística de Kolmogorov-Smirnov (D_n) da BDSL Laplace e BDSL Normal são 0,024 e 0,072; respectivamente. As Funções de Distribuição Acumulada da Figura 6 correspondem às seguintes curvas:

- *BDSL Laplace* $(\mu, b, \alpha, \beta) = (0; 0, 01; 2, 7; 0, 1)$ curva marrom;
- *Laplace* $(\mu, b) = (0; 0, 01)$ curva roxa;
- *BDSL Normal* $(\mu, \sigma, \alpha, \beta) = (0; 0, 08; 2; 0.1)$ curva verde;
- *Normal* $(\mu, \sigma) = (0; 0, 08)$ curva azul.

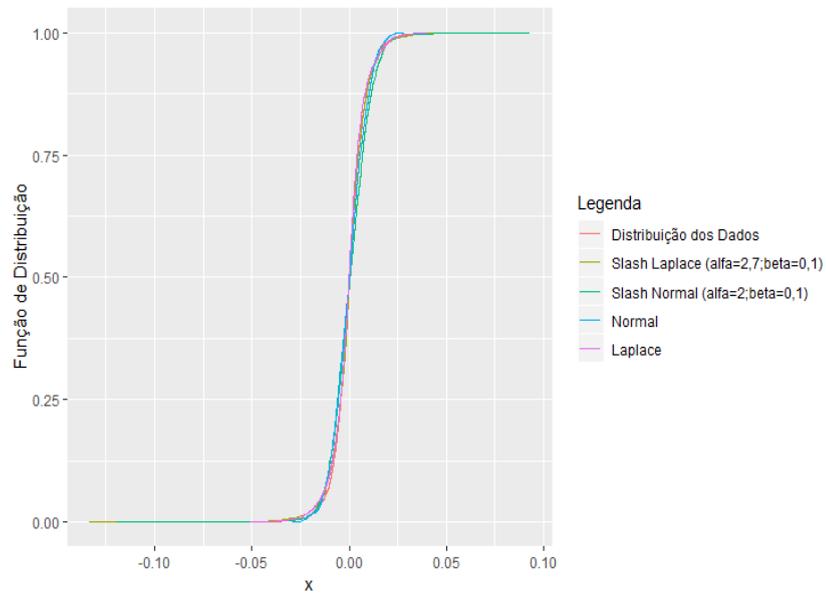


Figura 6: Funções de distribuição Acumulada nos dados do Dólar pelo Real

De acordo com a Figura 6, é impossível diferenciar as distribuições acumulada dos dados com as outras distribuições. Já na Tabela 6, pode verificar diferença entre os Critérios de Informação de Akaike. Pelo o AIC, a distribuição Laplace é que melhor se adequa pois, seu AIC é o menor entre todas as distribuições.

	Normal	BDSL Normal	Laplace	BDSL Laplace
AIC	-14545,6	-14699,4	-14847,8	-14840,8

Tabela 6: Coeficiente de Determinação das Distribuições de Estudo

3.4 PETROBAS

Para os dados da PETR4.SA foi obtido um tamanho de amostra de 2158. A Tabela 7 apresenta estatísticas utilizadas na estimação dos parâmetros das distribuições discutidas no trabalho.

Tamanho da Amostra	2158
Média Amostral	-0.00
Mediana Amostral	0.00
σ	0.03
Soma da Diferença Absoluta	0.02
Estatística Dickey-Fuller	-31.94
$P - valor$	<0.01

Tabela 7: Estatísticas do Log-retorno PETR4.SA

A Estatística de Kolmogorov-Smirnov (D_n) da BDSL Laplace e BDSL Normal são 0,02 e 0,08; respectivamente. As Funções de Distribuição Acumulada da Figura 7 correspondem às seguintes curvas:

- $BDSL \ Laplace(\mu, b, \alpha, \beta) = (0; 0,02; 2,9; 0,1)$ curva marrom;
- $Laplace(\mu, b) = (0; 0,02)$ curva roxa;
- $BDSL \ Normal(\mu, \sigma, \alpha, \beta) = (0; 0,03; 1,6; 0,1)$ curva verde;
- $Normal(\mu, \sigma) = (0; 0,03)$ curva azul.

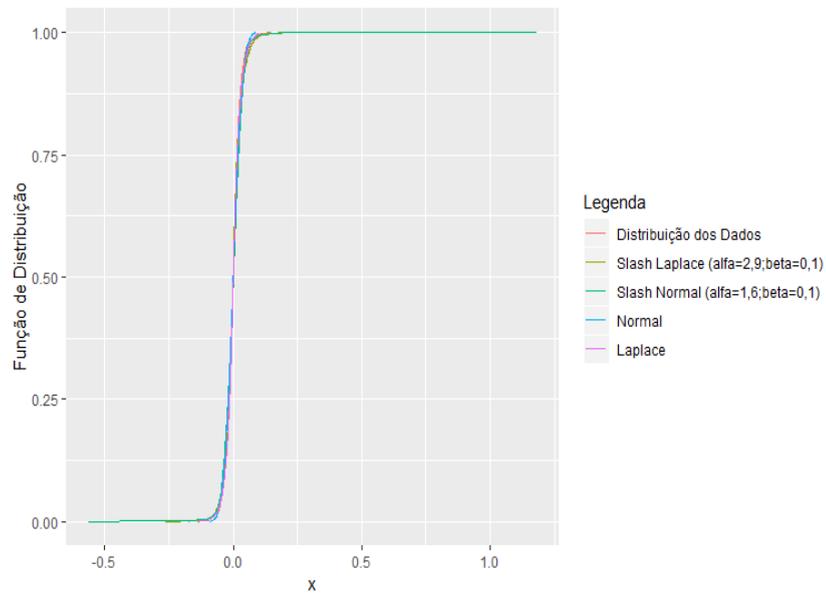


Figura 7: Funções de distribuição Acumulada nos dados da Petrobas

De acordo com a Figura 7, é impossível diferenciar as distribuições acumulada dos dados com as outras distribuições. Já na Tabela 8, pode verificar diferença entre os Critérios de Informação de Akaike. Pelo o AIC, a distribuição Laplace é que melhor se adequa pois, seu AIC é o menor.

	Normal	BDSL Normal	Laplace	BDSL Laplace
AIC	-8927,9	-9029,5	-9190,2	-9176,4

Tabela 8: Coeficiente de Determinação dos dados da Petrobas

4. Conclusão

Neste trabalho, foi apresentada uma aplicação prática das Distribuições Tipo Slash com foco em dados financeiros. Os resultados indicaram que não se obteve um ajuste significativo para os ativos financeiros, pois a distribuição Laplace tem menos parâmetros que a BDSL Laplace e apresentar os mesmo resultados quando é verificado o gráfico da função de distribuição acumulada. Além disso, o AIC da distribuição Laplace é menor que o das distribuições tipo Slash.

Vale lembrar que o estudo não utilizou nenhum método de estimação, por isso, em estudos futuros, seria interessante utilizar uma técnica de estimação robusta (momentos, mínimos quadrados ou verossimilhança), a fim de otimizar o AIC. Além de verificar o uso da distribuição Laplace em modelos autoregressivos uni ou multi-variados.

Referências Bibliográficas

- [1] JM del Castillo. Slash distributions of the sum of independent logistic random variables. *Statistics & Probability Letters*, 110:111–118, 2016.
- [2] Wenhao Gui, P Chen, and Haiyan Wu. A folded normal slash distribution and its applications to non-negative measurements. *J. Data Sci*, 11(2):231–247, 2013.
- [3] Wenhao Gui, Pei-Hua Chen, and Haiyan Wu. An epsilon half normal slash distribution and its applications to nonnegative measurements. *Open Journal of Optimization*, 2(01):1, 2013.
- [4] Samuel Kotz, Tomasz Kozubowski, and Krzysztof Podgorski. *The Laplace distribution and generalizations: a revisit with applications to communications, economics, engineering, and finance*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] Robert M Norton. The double exponential distribution: Using calculus to find a maximum likelihood estimator. *The American Statistician*, 38(2):135–136, 1984.
- [6] A MORETTIN PEDRO and MC TOLOI CLÉLIA. Análise de series temporais. *Ed: Blücher, ABE-Projeto Fisher*, 2006.
- [7] Bindu Punathumparambath. A new family of skewed slash distributions generated by the normal kernel. *Statistica*, 71(3):345–353, 2011.
- [8] Jimmy Reyes, Héctor W Gómez, and Heleno Bolfarine. Modified slash distribution. *Statistics*, 47(5):929–941, 2013.
- [9] William H Rogers and John W Tukey. Understanding some long-tailed symmetrical distributions. *Statistica Neerlandica*, 26(3):211–226, 1972.
- [10] Gideon Schwarz et al. Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, 6(2):461–464, 1978.
- [11] Shodhganga. Slash distributions and applications. <http://shodhganga.inflibnet.ac.in>.
- [12] Peter Zörnig. *A generalized type of slash distribution based on the division by a beta variable*. Submetido para publicação, 2018.