

**Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Curso de Engenharia Automotiva**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA UTILIZANDO O
MÉTODO DE MATERIAL ISOTRÓPICO COM
PENALIZAÇÃO (MISP) COM SUAVIZAÇÃO DE
GEOMETRIA**

**Autor: Vinícius dos Santos Muniz
Orientador: Prof. Dra. Carla Tatiana Mota Anflor**

**Brasília, DF
2019**



Vinícius dos Santos Muniz

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA UTILIZANDO O MÉTODO DE MATERIAL
ISOTRÓPICO SÓLIDO COM PENALIZAÇÃO (MISP) COM SUAUIZAÇÃO DE
GEOMETRIA.**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Automotiva da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Automotiva.

Orientador: Prof. Dra. Carla Mota Anflor

**Brasília, DF
2019**

CIP – Catalogação Internacional da Publicação*

Muniz, Vinícius dos Santos.

Título da Monografia: Otimização topológica utilizando o método de material isotrópico sólido com penalização (MISP) com suavização de geometria / Vinícius dos Santos Muniz. Brasília: UnB, 2019. 103 p. : il. ; 29,5 cm.

Monografia (Graduação) – Universidade de Brasília
Faculdade do Gama, Brasília, 2019. Orientação: Carla Tatiana
Mota Anflor.

1. Otimização topológica. 2. Contornos Suaves. 3. Método de homogeneização. I. Anflor, Carla Tatiana Mota. II. Otimização Estrutural topológica com Contornos Suavizados.

CDU Classificação



**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA UTILIZANDO O MÉTODO DE MATERIAL
ISOTRÓPICO COM PENALIZAÇÃO (MISP) COM SUAVIZAÇÃO DA ESTRUTURA**

Vinícius dos Santos Muniz

Monografia submetida como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Automotiva da Faculdade UnB Gama - FGA, da Universidade de Brasília, em 11 de dezembro de 2019 apresentada e aprovada pela banca examinadora abaixo assinada:

Prof. Dra.: Carla Tatiana Mota Anflor, UnB/ FGA
Orientador

Prof. Dra.: Maura Angélica Milfont Shzu, UnB/ FGA
Membro Convidado

Prof. Dra.: Suzana Moreira Avila , UnB/ FGA
Membro Convidado

Brasília, DF
2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, ao Cosme, minha família e esposa pelo apoio e por toda a paciência durante minha formação, a minha orientadora Prof. Dra. Carla Anflor pela oportunidade e aprendizado, ao mestrando Davi Gustavo por todo apoio e auxílio, a todos os integrantes do GMEC que sempre estiveram disposto a ajudar e à UNB por todo suporte durante minha graduação e a sociedade mantedora das instituições públicas.

Vinícius dos Santos Muniz

RESUMO

O aprimoramento computacional e o uso de métodos numéricos permitiram um desenvolvimento significativo do campo de otimização estrutural. O primeiro algoritmo de otimização estrutural proposto considerou a otimização de tamanho/parâmetro seguida pela otimização de forma, Silva (2002). No entanto, o remalhamento e as alterações na geometria durante o processo de otimização não eram possíveis. Bendsøe e Kikuchi (1988) propuseram o método da homogeneização, que consiste em utilizar a teoria dos compósitos para transformar a otimização da forma em uma distribuição de material, permitindo assim a otimização da topologia. Sigmund (2001) implementou o método de homogeneização usando apenas o algoritmo de 99 linhas escrito em Matlab®. O contorno do domínio otimizado resulta com aspecto de dente de serra, não sendo adequado para um processo de fabricação simples. Neste estudo, a otimização da topologia é realizada usando a rotina de 99 linhas e os projetos otimizados são suavizados usando as curvas Spline, Bézier e Hermite. Uma pesquisa abrangente sobre essas curvas, bem como a aplicação, é discutida neste trabalho. No projeto final, os elementos com densidade maior que um valor específico (0,3 e 0,9) foram suavizados através das curvas paramétricas. A influência dessas opções no design suavizado foi investigada e discutida. Após o processo de suavidade o projeto ótimo gerado por cada uma das curvas é avaliado numericamente usando o método dos elementos finitos para recuperar os campos de tensão e deformação. As estruturas utilizando curvas de Bézier apresentaram menos irregularidades que as curvas de Spline e Hermite. Bem como o uso de densidades maiores que 0,3 apresentaram um acréscimo de 0,240 Kg a estrutura final. Além disso os campos de tensão e deformação demonstraram um aumento ao se utilizar densidades maiores que 0,9.

Palavras-chave: Otimização topológica. SIMP. Contornos suavizados, Método de homogeneização, Curva de Bézier, Curva de Hermite, Spline.

ABSTRACT

The computational enhancement and the use of numerical methods allowed a significant development of the structural optimization field. The first purposed structural optimization algorithm considered the sizing optimization (also known as parameter optimization) followed by the shape optimization, Silva (2002). However, the remeshing and changes in the geometry during the optimization process were not possible. Bendsøe e Kikuchi (1988) proposed the homogenization method, which uses the composites theory to transform the shape optimization in material distribution, thus allowing the topology optimization. Sigmund (2001) implemented the homogenization method using only 99 lines algorithm written in Matlab®. The optimized design results as a sawtooth aspect being not suitable for a straightforward manufacturing process. In this study, the topology optimization is performed by using the 99 lines routine and the optimum designs are smoothed by using Spline, Bézier and Hermite curves. A comprehensive survey about these curves as well as the application is discussed herein. In the final design, those elements with a density higher than a specific value (0.3 and 0.9) were smoothed through the parametric curves. The influence of these choices on the smoothed design was investigated and discussed. After the smoothness process, the optimum design generated for each curve is numerically evaluated by using finite element method in order to recover the stress and strain fields. The smoothed structure using Bézier curves presented fewer irregularities than Spline and Hermite curves. Moreover, the structures using densities higher than 0.3 provided mass increase of 0.240 Kg. Besides that the stress and strain fields demonstrated increase in the structures using elements with densities higher than 0.9.

Keywords: Topology optimization. SIMP. Smooth boundaries. Homogenization method, Bézier Curve, Hermite Curve, Spline.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1. Exemplo das estruturas obtidas por Mitchell 1904. Fonte: Silva (2002)..	16
Figura 2.1. Exemplo de curvas de Hermite.	34
Figura 2.2. Refinamento h. Fonte: Pereira (2005)..	37
Figura 2.3. Refinamento p. Fonte: Pereira (2005)..	37
Figura 3.1. Exemplo de malha regular.	39
Figura 3.2. Exemplo de elemento.....	39
Figura 3.3. Exemplo de tabuleiro de xadrez e dependência de malha. Fonte: Shobeiri (2016)..	42
Figura 3.4. Exemplo de matriz de densidades.	43
Figura 3.5. Demonstração de distância entre dois pontos.	44
Figura 3.6. Matriz de elementos binária... ..	44
Figura 3.7. Seleção de elementos pertencentes a mesma spline..	45
Figura 3.8. Pontos de controle... ..	46
Figura 3.9. Exemplo de funcionamento do algoritmo Casteljau. Fonte: Sederberg (2014)..	49
Figura 3.10. Comparativo gráfico entre Spline e Hermite.....	50
Figura 3.11. Curvas importadas.. ..	51
Figura 3.12. Estrutura em 3D.	51
Figura 3.13. Material criado na biblioteca da plataforma comercial.....	52
Figura 3.14. Condições de contornos aplicados a estrutura.	52
Figura 3.15. Exemplo de malha de elementos.	53
Figura 3.16. Deslocamento total da estrutura.....	53
Figura 3.17. Tensão equivalente de von Mises.....	53
Figura 4.1. Viga engastada.	54
Figura 4.2. Evolução dos métodos utilizados na suavização dos contornos.....	55
Figura 4.3. Domínio inicial e condições de contorno.	55
Figura 4.4. Resultado da viga 100 x 50.....	56
Figura 4.5. Gráfico Tensão Máxima por Iterações... ..	58
Figura 4.6. Evolução do algoritmo de otimização estrutural.. ..	58
Figura 4.7. Gráfico de tempo por iteração de todas as curvas.	60
Figura 4.8. Estruturas importadas a plataforma de elementos finitos.....	63
Figura 4.9. Carga e condições de contorno aplicadas a estrutura.	63
Figura 4.10. Qualidade de elementos da malha.....	64
Figura 4.11. Tensões equivalentes de von Mises.	65
Figura 4.12. Deformações máximas.....	65
Figura 4.13. Gráficos de convergência de malha.	67
Figura A.1. Elemento retangular composto por 4 nós.	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1. – Propriedades mecânicas dos materiais utilizados nos exemplos.....	55
Tabela 4.2. – Evolução da tensão de von Mises, volume fracionário e pontos de controle função objetivo durante a otimização estrutural para uma estrutura treliçada.	57
Tabela 4.3. Tempo de processamento em cada iteração..	59
Tabela 4.4. Comparativo entre a massa total da estrutura.....	62

LISTA DE SÍMBOLOS

$C(\rho)$	Função objetivo
$g(\rho)$	Restrições de projeto
$h(\rho)$	Restrição de projeto
ρ	Variável de projeto
ρ_{min}	Densidade mínima do elemento
U	Vetor de deslocamentos globais
K	Matriz de rigidez global
ρ_e	Densidade do elemento
u_e	Deslocamento do elemento
k_0	Matriz de rigidez do elemento
$V(\rho)$	Volume relacionado as densidades de cada elemento
V_0	Volume inicial
F	Vetor de forças global
N	Total de elementos
f	Fração de volume
p	Constante de penalização
d	Distância entre dois pontos
Ω	Domínio
f_c	Forças no corpo
f_t	Trações de fronteira
E_{ijkl}	Tensor de elasticidade
U_{ad}	Tensor admissível
Ω^m	Parte do domínio ocupado por material
VOL	Volume
$P(\rho)$	Função densidade
ρ_e^{new}	Nova densidade do elemento
m	Constante para limitar a movimentação
η	Coefficiente de amortização numérico
λ	Multiplicador de Lagrange
ε	Linearizador de deslocamentos
σ_{XX}	Tensão normal na direção do eixo x
σ_{YY}	Tensão normal na direção do eixo y
σ_{XY}	Tensão cisalhante na plano xy
ν	Coefficiente de poisson
u_x	Deslocamento na direção do eixo x
u_y	Deslocamento na direção do eixo y
G_{cis}	Módulo de elasticidade transversal
\hat{H}_f	Operador de convolução
E_0	Módulo de elasticidade máximo
E_{min}	Módulo de elasticidade mínimo
E	Módulo de elasticidade
N_{SM}	Vetor com elementos sem material
N_{CM}	Vetor com elementos com material
X_{NCM}	Coordenada x do ponto médio do elemento com material
Y_{NCM}	Coordenada y do ponto médio do elemento com material
X_{NSM}	Coordenada x do ponto médio do elemento sem material
Y_{NSM}	Coordenada y do ponto médio do elemento sem material

E_S	Elementos de cada spline
X_S	Coordenada do ponto médio em X
Y_S	Coordenada do ponto médio em Y
\dot{N}	Função de forma
u	deslocamento total
\hat{u}	vetor de deslocamento composto por cada nó
ε	deformação em cada ponto
S	operador diferencial
$\hat{\varepsilon}$	vetor de deformação composto por cada nó
ε_x	deformação no eixo x
ε_y	deformação no eixo y
γ_{xy}	deformação no plano x e y
D	matriz de elasticidade
q	forças equivalentes nodais
b	distribuição de forças
l_a	comprimento do elemento
S_y	Tensão de escoamento do material
S_{sy}	Resistência ao escoamento
δ	Energia de deformação
σ_{av}	Tensão hidrostática
u_d	Energia de distorção
σ'	Tensão equivalente de von Mises
X	Eixo X
Y	Eixo Y
t	Parâmetro da curva de Bézier
w	Tipo da curva de Bézier

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO	16
1.2. JUSTIFICATIVA	17
1.3. OBJETIVOS	19
1.3.1. OBJETIVO GERAL	19
1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	19
1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	21
2.1.1. OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA	22
2.1.2. OTIMIZAÇÃO DE FORMA	22
2.1.3. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	23
2.2. MÉTODOS DE HOMOGENEIZAÇÃO	24
2.3. CRITÉRIO DE OTIMALIDADE (OC)	28
2.3.1. MODELO DE MATERIAL SÓLIDO ISOTRÓPICO COM PENALIZAÇÃO (SIMP)	30
2.4. SUAVIZAÇÃO DE CONTORNOS	30
2.4.1. CURVAS PARAMÉTRICAS	31
2.4.2. ESTUDO DOS CAMPOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO	36
3. METODOLOGIA	38
3.1. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	38
3.1.1. ELEMENTOS FINITOS	38
3.1.2. FILTROS	41
3.2 SUAVIZAÇÃO DA ESTRUTURA	42
3.2.1. SPLINE	46
3.2.2. CURVAS DE BÉZIER	48
3.2.3. CURVAS DE HERMITE	50
3.3 EXPORTAÇÃO DA GEOMETRIA	51
3.3.1. ANÁLISE ESTRUTURAL	51
4. RESULTADOS NUMÉRICOS	54
4.1 VIGA ENGASTADA 100 x 50	54
4.2 ESTUDO DOS CAMPOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO	61
5. CONCLUSÕES	69
5.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
ANEXO I: Método de elementos finitos	74

1. INTRODUÇÃO

O avanço da tecnologia dos computadores e o aumento de processamento de informações, possibilitaram ao campo da engenharia e ciência soluções de problemas cada vez mais complexos. O uso de elementos finitos e simulações fez com que grande parte dos problemas, muitas vezes discutidos apenas academicamente tivesse abrangência na indústria. Tornando assim os processos de criação de produtos cada vez mais rápidos. Além de produzir componentes mais seguros e viáveis economicamente.

A otimização estrutural foi uma das técnicas que tiveram um aumento em sua aderência industrial. Com uma maior taxa de processamento de informações foi possível a criação de algoritmos, como o simplex para otimização de parâmetros. A solução de problemas de otimização de forma se tornaram viáveis somente após a criação das linguagens de programação. No entanto, esses algoritmos enfrentavam algumas dificuldades em relação a necessidade de remalhamento da estrutura e o uso de uma topologia fixa. Diante disto, Bendsøe e Kikuchi, 1988, propuseram transformar o problema de otimização de forma em uma distribuição de material, através do método de homogeneização. Desta maneira, é alterada a topologia e a forma da estrutura sem a necessidade de remalhamento em cada iteração.

O método de homogeneização proporcionou grandes avanços no campo da otimização estrutural. Entretanto, o uso de elementos finitos proporciona a estrutura um aspecto de dente de serra. É citado por Bendsøe e Kikuchi (1988), como próximo passo da metodologia, a criação de contornos suavizados para as estruturas. Vários métodos foram introduzidos e proporcionaram estruturas ótimas de contornos suaves, como o Level Set, método de bolhas, B-splines, entre outros.

A otimização estrutural está presente como um método eficiente de obtenção de geometrias ótimas tanto na indústria como no meio acadêmico. Através dos processos de otimização obtém-se estruturas com menor peso e mesma eficiência, proporcionando uma redução nos custos. Além de gerar ganhos de sustentabilidade, uma vez que são utilizados menos recursos para produção dos componentes. Deixando claro a importância na engenharia das metodologias e processos de otimização.

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

Maxwell 1872 e Mitchell 1904 foram os precursores da otimização estrutural. Utilizando da teoria da elasticidade sobre o campo de tensões mecânicas obtiveram estruturas em formato de treliças posicionadas na direção das tensões principais, conforme demonstrado na Figura 1.1. Devido à falta de uma empregabilidade os resultados foram considerados apenas no campo acadêmico.

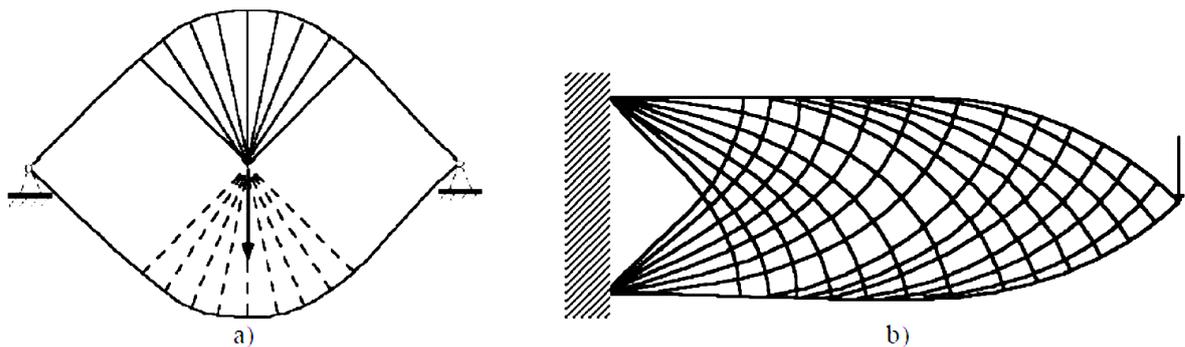


Figura 1.1. Exemplo das estruturas obtidas por Mitchell 1904. Fonte: Silva (2002).

A otimização estrutural ficou sem muita evolução até o desenvolvimento do método de elementos finitos, bem como o método simplex para solução de otimização paramétrica. Com o surgimento das linguagens de programação na década de 70 surgem os primeiros algoritmos de otimização de forma e métodos probabilísticos com algoritmos genéticos.

Os problemas de otimização de forma enfrentavam alguns obstáculos como a necessidade de remalhamento em cada iteração, devido a forma da estrutura se alterar durante todo o processo. Uma vez determinada a topologia inicialmente não é possível alterar durante o processo de otimização, o que não garante que a topologia selecionada é ideal. Diante desses impasses Bendsøe e Kikuchi (1988) desenvolveram o método de homogeneização, o qual busca transformar o método de otimização de forma em uma distribuição de material com otimização de parâmetros. A densidade de um elemento é otimizada com intuito de garantir uma continuidade entre as condições de contorno iniciais. Esse método possibilita a otimização topológica da estrutura sem precisar incorporar um módulo de remalhamento ao algoritmo. Além de deixar estabelecida a malha de elementos da estrutura que pode ser utilizada para uma otimização dos contornos. Bendsøe e Kikuchi (1988) entendem

o método deles como o primeiro passo da otimização de uma estrutura, sendo o segundo passo a ênfase em garantir contornos suaves.

O método de homogeneização foi de grande relevância para o campo de otimização estrutural e garantiu muitos estudos validando a metodologia como Bendsøe (1989). Outros métodos mais complexos para solução de otimização topológica como Sethian e Weigmann (2000) que utilizaram da metodologia desenvolvida por Osher e Sethian (1988), conhecida como método Level set combinada com a técnica de diferença finita.

O método Level set proposto Osher e Sethian (1988) baseia-se em estudos de fenômenos físicos, à exemplo disso o caso de crescimento de cristais, para propor um algoritmo chamado PSC (Propagação de Superfícies sob Curvatura). A intenção é seguir frentes de propagação onde a curvatura é dependente da velocidade, com uso de equações diferenciais parciais. A função conhecida como Level Set é definida em grande parte dos casos como a de maior dimensão conhecida \emptyset , a qual parte de uma função nível zero (zero level set).

Grande parte dos outros métodos, principalmente de homogeneização, entregam resultados limitados pelo formato dos elementos, em sua maioria com contornos descontínuos. Lee et al. (2007) combinaram a representação de contornos com critérios para desenvolvimento de espaços vazios e procuraram suavizar os contornos utilizando de curvas B-splines na otimização de forma para evolução dos contornos. Parthasarathy et al. (2011) também utilizaram de B-splines como forma de encontrar superfícies suavizadas ao utilizar funções densidade na representação das fronteiras. Sendo assim utilizaram da aproximação B-splines no campo de deslocamento ao invés do tradicionalmente usado Lagrange.

1.2. JUSTIFICATIVA

O uso de métodos de otimização tem tomado grande proporção na indústria em geral, principalmente na automotiva. Com o uso de metodologias sistemáticas é possível encontrar estruturas com a mesma performance, porém de peso reduzido, ou seja, utilizando menos material e reduzindo os custos.

A utilização de uma malha de elementos para cálculos de tensão e deformação entregam estruturas de difícil aplicação real, uma vez que não se consegue chegar a uma superfície de contornos suaves e mais próximas de uma peça manufaturada.

Sendo necessário o uso de uma malha refinada na intenção de gerar fronteiras suaves aumentando o tempo computacional e consequentemente o custo.

A procura por novas metodologias onde se buscam estruturas suavizadas tem sido mais frequente. Sethian e Weigmann (2000) foram os primeiros a aplicar o Level Set para solução de problemas de otimização topológica, combinando-o com a técnica de diferenças finitas.

Lee et al. (2007) estavam à procura de contornos suaves e utilizaram de uma relação direta entre a representação de contornos e a imersão de novos vazios na estrutura combinados com curvas B-splines. Utilizaram de um método ESO (otimização estrutural evolucionária), B-splines e desenvolveram critérios de seleção na intenção de computar a influência de novos furos na eficiência da estrutura, medido através da sensibilidade em torno da função objetivo em sacrifício as limitações. Os pontos de contorno são representados por curvas B-splines e seus pontos de controle. A melhora do design é acompanhada pela movimentação dos pontos de controle e criação de novas curvas ao se inserir novos vazios no domínio.

Yi e Kim (2017) observaram que existe um grande gargalo entre os resultados da otimização e a parametrização de um modelo em CAD, pronto para otimização e manufatura. Utilizando um método de contorno ativo, empregaram um processamento de imagens para traçar B-splines nos contornos e extrair as informações dos segmentos dispostos no contorno da estrutura. Um algoritmo foi elaborado para identificar características geométricas como: redondeza, curvatura dos segmentos, linhas, arcos, círculos e filetes, sendo feita uma descrição e otimização na construção de um modelo parametrizado em CAD.

A construção das curvas de contorno da estrutura através de splines é de extrema importância, principalmente de uma forma que não interfira na performance e nem aumente significativamente o custo computacional do algoritmo. Zoz (1999) realizou um estudo da performance de algoritmos para splines Bézier, B-splines e casteljau.

O método desenvolvido busca uma forma simples de se obter superfícies suavizadas após uma análise geométrica dos resultados obtidos no método homogeneização. Operando um método de homogeneização, combinado com elementos finitos (MEF) para solução de distâncias e tensões, contando ainda com o critério de otimização e SIMP (Material Sólido Isotrópico com Penalização) para solução das equações de otimização e transformação em uma distribuição de

material. Bem como um algoritmo para cálculo de curvas de interpolação e análise de performance entre as curvas de Bézier, Hermite e Splines. Após a obtenção da estrutura é realizado um estudo dos campos de tensão e deformação para validação de toda a metodologia.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. OBJETIVO GERAL

Elaborar um algoritmo numérico em MATLAB® para suavização de superfícies resultantes de uma otimização topológica, ademais uma análise de performance entre o uso de curva de Bézier, Hermite e Spline. Além de verificar o impacto em relação ao emprego de uma condição inicial, a qual diz que elementos com densidades maiores que 0,3 ou 0,9 pertencem ao contorno desde que estejam próximos a estrutura. O método realiza uma análise geométrica dos resultados de otimização topológica entregues pelo código criado por Sigmund (2001), calculando assim uma superfície suavizada baseada nas curvas de interpolação. A metodologia é validada em um estudo dos campos de tensão e deformação das estruturas obtidas.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A proposta do trabalho é feita a partir de alguns objetivos específicos:

- Comparar as performances entre o uso de curvas de Bézier, Hermite e Spline.
- Realizar um estudo dos campos de tensão e deformação utilizando uma convergência de malha através do refinamento h .
- Comparar os campos de tensão e deformação de cada estrutura obtida ao se alterar as curvas do contorno.
- Comparar a influência da seleção de densidade para elementos presentes no contorno da estrutura.

1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

Apresenta-se nesta seção a estrutura do trabalho com um descritivo a respeito de cada capítulo para um melhor entendimento.

O capítulo 1 apresenta uma introdução a respeito do tema abordado, é evidenciado as principais justificativas e objetivos para este trabalho e uma apresentação acerca da estrutura do texto.

O capítulo 2 demonstra a fundamentação teórica destacando as principais teorias utilizadas durante o trabalho, como Otimização Topológica, Método da Homogeneização e Curvas Paramétricas.

O capítulo 3 indica toda a metodologia empregada durante a realização do trabalho, demonstrando o funcionamento do algoritmo desenvolvido para suavização das estruturas.

O capítulo 4 exhibe todos as discussões e resultados obtidos ao se empregar toda a metodologia descrita no capítulo 3. Evidencia-se as estruturas obtidas pelo algoritmo de suavização, um comparativo entre o comportamento das curvas de Bézier, Hermite e spline, bem como são verificados os campos de tensão e deformação.

O capítulo 5 discute a respeito de todos os resultados obtidos e realiza uma sugestão de trabalhos futuros.

Por fim é disposto o Anexo I, o qual apresenta brevemente sobre a metodologia de elementos finitos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A indústria aeronáutica foi a primeira a utilizar os conceitos de otimização estrutural. Para as aeronaves a redução de peso é mais importante do que o custo da estrutura em muitos dos casos. Na indústria civil, mecânica e automotiva em situações onde o peso não influencia na performance, o custo é um parâmetro primário para as decisões de projeto. Uma vez que as matérias primas são recursos limitados, assim como as fontes primárias de energia, se torna necessário o emprego dos conceitos de otimização nos projetos da indústria, Haftka e Gürdal (1992).

As análises estruturais para obtenção de deslocamentos e tensões das estruturas eram resolvidas através de equações diferenciais e vários métodos numéricos como séries infinitas, antes do advento dos computadores. O desenvolvimento de um projeto ótimo pode buscar então pelo melhor momento de inércia na viga respeitando as restrições de projeto, por exemplo. O advento dos computadores e o aumento da quantidade de processamento possibilitaram a implementação do método dos elementos finitos. A partir deste momento pode-se dividir todo o domínio em elementos e isso permite que se atribuam parâmetros (densidade, módulo de elasticidade) a cada um desses elementos. Com isso é possível então obter estruturas ótimas ao se procurar pela melhor distribuição dos parâmetros no domínio, Haftka e Gürdal (1992).

A Otimização Estrutural busca criar uma metodologia para obtenção de estruturas otimizadas com aplicação de algoritmos. Um problema típico de otimização estrutural é apresentado na Eq. (1). Para um melhor entendimento do problema é necessário o conhecimento de alguns conceitos. A função objetivo representa uma função matemática, a qual deve ser otimizada durante o processo e pode apresentar uma medida da eficiência do método sendo demonstrado por C . As variáveis de projeto são parâmetros que serão alterados para que se encontre uma convergência da função objetivo, no caso é demonstrado como ρ . As restrições de projeto possuem o objetivo de indicar até que ponto a estrutura pode ser otimizada, dessa forma é evitado situações em que o algoritmo retira todo o material da estrutura, representadas por $g(\rho)$ e $h(\rho)$. Além disso evita com que se crie estruturas descontínuas, ou seja,

não apresentando uma conformidade em relação as condições de contorno estabelecidas.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar ou maximizar } C(\rho) \iff \text{função objetivo} \\
 & \text{Tal que:} \\
 & \left. \begin{aligned} & g(\rho) \leq 0 \\ & h(\rho) = 0 \end{aligned} \right\} \iff \text{restrições do problema} \\
 & \rho_{min} \leq \rho \leq \rho_e
 \end{aligned} \tag{1}$$

É possível encontrar alguns tipos de otimização estrutural. As metodologias desenvolvidas podem alterar desde os parâmetros como a forma e a topologia da estrutura. Serão apresentados neste capítulo alguns conceitos iniciais de otimização paramétrica e otimização de forma, sendo que será enfatizada a metodologia de otimização topológica, a qual é utilizada neste estudo.

2.1.1. OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA

Um dos principais e mais utilizados métodos de otimização é o paramétrico. Essa metodologia busca encontrar os parâmetros ótimos de uma estrutura mantendo a sua forma inicial. Silva (2003) apresenta um exemplo prático que clarifica a quantidade de cálculos praticados com o aumento das variáveis e combinações, deixando claro a importância de se utilizar um algoritmo de otimização.

Em uma asa de avião as possíveis variáveis são: espessura das nervuras, momento de inércia das longarinas, distância entre as nervuras, distância entre as longarinas, espessura da chapa em diferentes pontos e material da estrutura totalizando 10 parâmetros. Para o cálculo da rigidez da asa levando em conta que será possível a alteração de apenas 3 dos 10 parâmetros citados acima e que cada um desses pode assumir 10 valores teríamos um total de 10^3 combinações. Cada análise em elementos finitos levaria 0,1 segundos, com um tempo total de 100 segundos. Se ao invés de 3 parâmetros fosse utilizado todos os 10, teríamos um total de 10^{10} combinações considerando que cada análise levaria 10 segundos. A análise final levaria um total de 3.200 anos.

2.1.2. OTIMIZAÇÃO DE FORMA

Os métodos de otimização de forma procuram garantir uma estrutura final otimizada considerando as coordenadas dos pontos ou parâmetros de curvas splines como variáveis passíveis de otimização. Esse método trabalha exatamente nos contornos e na forma externa da superfície, sendo utilizado muitas vezes com a

intenção de reduzir pontos de concentração de tensão. O método inicia-se com a definição do domínio e as condições de contorno, logo após são selecionadas as direções e áreas a serem otimizadas. Desta forma o desenvolvimento do algoritmo irá calcular quais as sensibilidades e a influência na função objetivo otimizando a forma da estrutura.

A metodologia de otimização de forma pode ser implementada de diferentes maneiras, um exemplo das possibilidades é com o uso da representação de uma malha de elementos finitos. Dessa forma é possível empregar as coordenadas dos nós de cada elemento como variáveis de projeto, calculando em cada interação o impacto na função objetivo, (Haftka e Grandhi, 1986). Apesar do potencial demonstrado pelo método é preciso em cada interação fazer um remalhamento devido a alteração da forma da estrutura. Outra possibilidade é apresentada por Tvergaard (1973), em que os contornos são representados por uma série de curvas simples, como arcos, splines, linhas retas, entre outros. As otimizações são realizadas com as restrições de utilizar as curvas simples para construção do contorno ótimo. Entretanto este método também depende de uma malha de elementos e, portanto, deve-se empregar um remalhamento em cada interação.

Strang e Kohn (1986) apresentaram uma metodologia que emprega a teoria dos compósitos para otimização de forma. Desta maneira o método busca definir se o elemento da malha irá compor material ou não, através da união de três sistemáticas: otimização de projetos, relaxamento e homogeneização. Bendsøe e Kikuchi (1988) empregaram a metodologia em casos práticos e demonstraram a eficiência de se alterar a forma em conjunto com a topologia.

2.1.3. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A otimização topológica é o método que garante a menor massa dentre os outros, devido a possibilidade de gerar furos no interior da estrutura em cada interação. Com o uso do método da homogeneização e transformando um método de otimização de forma em uma distribuição de material é possível então empregar uma otimização topológica, conforme descrito por Bendsøe e Kikuchi (1988). A teoria dos compósitos pode ser empregada com o método de otimização topológica considerando os vazios como materiais de rigidez muito baixa, próximas a do ar.

Sigmund (2001) trouxe uma formulação simplificada com o intuito de facilitar a implementação de algoritmos para computação, a qual pôde ser usada como exemplo para simplificar o entendimento do método. A Eq. (2) traz uma aproximação baseada em uma abordagem da lei de energia. Onde a função objetivo é minimizar a flexibilidade sujeito as restrições de volume fracionário, bem como a Lei de Hooke e as variáveis de projeto como valores de densidade variando entre zero e um.

$$\left. \begin{aligned} \min_{\rho} : C(\rho) &= U^T K U = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p u_e^T k_0 u_e \\ \text{sujeito a: } \frac{V(\rho)}{V_0} &= f \\ &: K U = F \\ &: 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

onde U e F representam os deslocamentos e forças globais, respectivamente. A variável K é a matriz de rigidez global, u_e e k_0 são os vetores de deslocamento e a matriz de rigidez de cada elemento, respectivamente. Os valores de $V(\rho)$ e V_0 demonstram o do volume de material e o volume de projeto, f a fração de volume. Em que ρ_{min} é o vetor relativo as densidades mínimas e N é o total de elementos, obtido através da multiplicação do número de elementos na horizontal pelo número de elementos na vertical do domínio empregando uma malha regular. A variável p representa o valor de penalização do método com a intenção de constituir matrizes de densidade em que a maior parte dos elementos terão valores de 0 e 1. Reduzindo assim a incidência de elementos com densidades intermediárias.

A sensibilidade da função objetiva como pode ser vista na Eq. (3) são gradientes e derivadas da função custo em relação a quantidade de material em cada elemento. Esta sensibilidade demonstra a influência da massa do elemento na flexibilidade, possibilitando definir pelo critério de otimalidade a atualização das variáveis de projeto.

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = p(\rho_e)^{p-1} u_e^T k_0 u_e \quad (3)$$

2.2. MÉTODOS DE HOMOGENEIZAÇÃO

No período da década de 70 e 80 alguns softwares CAE disponibilizaram módulos de otimização de forma, utilizando da mesma análise de sensibilidade empregada em uma otimização paramétrica. No entanto, só era efetivo se os contornos da estrutura fossem descritos por curvas paramétricas. Porém ao se alterar

a forma da estrutura é necessário alterar o modelo de elementos finitos, dessa forma é preciso empregar um modelo de remalhamento integrado ao processo de otimização. O uso de equações paramétricas para representação da estrutura restringe as possibilidades de solução e o resultado final, dificultando a alteração da topologia da estrutura durante as iterações.

A teoria da metodologia de movimentação dos contornos da estrutura ganhou grande ênfase devido as dificuldades encontradas com a otimização de forma. Haftka e Gandhi (1986) implementaram essa lógica utilizando um modelo de elementos finitos e considerando as coordenadas dos nós como variáveis de projeto. Com o estado da arte de otimização de forma muito bem estabelecido no meio científico Bendsøe e Kikuchi (1988) buscam então uma metodologia capaz de otimizar tanto a forma como a topologia da estrutura e também solucionar os problemas citados acima. Para isso a representação dos contornos por curvas paramétricas se torna inviável, devido a impossibilidade de alteração de topologia durante o processo. É proposto então transformar uma otimização de forma em uma distribuição de material utilizando materiais compósitos, com dois tipos de matérias, vazio e sólido. Dessa forma não se busca uma otimização de contornos e sim uma distribuição ótima de microestrutura composta por espaços vazios e sólidos. O método de homogeneização é aplicado com o intuito de determinar equações construtivas macroscópicas com constituintes microscópicos.

O método considera a estrutura em um sentido amplo, definindo as cargas aplicadas, o volume e condições de contorno impondo a condição que a estrutura final precisa conectar as superfícies tracionadas. Inicialmente é tratado a estrutura como um bloco sólido ou um espaço vazio, onde é retirado ou aplicado material de maneira ótima, empregado em um domínio fixo com intenção de simplificar a geometria e construção do modelo de elementos finitos, evitando a necessidade de empregar um módulo de remalhamento. Bendsøe e Kikuchi (1988) consideram o método de homogeneização como um primeiro passo, devido a não entregar uma superfície com contornos suavizados entendendo que o próximo passo seria então aplicar um método para otimizar os contornos produzindo estruturas suavizadas. Essa divisão em duas etapas diminuiria o custo computacional, devido a já se conhecer o modelo de elementos finitos da estrutura final.

A formulação do método parte então da teoria de elasticidade linear, com o uso da energia bilinear conforme apresentado na Eq. (4). Considera-se uma estrutura

mecânica ocupando um domínio Ω em R^3 , com as imposições de forças no corpo f_c e trações de fronteira f_t . O projeto ótimo é encontrado minimizando a flexibilidade e procurando a escolha ótima de E_{ijkl} a partir de opções admissíveis U_{ad} .

$$a_E(u, v) = \int_{\Omega} E_{ijkl} \epsilon_{kl}(u) \epsilon_{ij}(v) dX \quad (4)$$

Vetor com deformações linearizadas:

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (5)$$

Carregamento linear:

$$L(v) = \int_{\Omega} f_c \cdot v dX + \int_{\Omega} f_t \cdot v ds \quad (6)$$

Flexibilidade mínima:

$$\text{minimizar } L(u) \quad (7a)$$

$$E_{ijkl} \in U_{ad} \quad (7b)$$

$$\text{sujeito a } a_E(u, v) = L(v) \quad \forall v \in U, \text{ restrições de projeto} \quad (7c)$$

Para obter a otimização de forma deve ser feita uma pequena alteração nos valores de E_{ijkl} mostrado em Eq. (8). Onde $P(\rho)$ representa a parte que é ocupada por material Ω^m em Ω de acordo com Eq. (9).

$$E_{ijkl}(\rho) = P(\rho) \overline{E_{ijkl}} \quad (8)$$

$$P(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{se } \rho \in \Omega^m \\ 0 & \text{se } \rho \in \Omega / \Omega^m \end{cases} \quad (9)$$

Uma outra restrição para otimização se trata do valor em relação ao volume mostrada na Eq. (10):

$$\int_{\Omega} P(\rho) d\rho = VOL \quad (10)$$

Empregando a metodologia de compósitos, toda a estrutura é descrita por uma função de densidade, a qual pode variar em um intervalo $[0,1]$, sendo que 0 é considerado um material de baixa resistência e a unidade como material sólido. Dessa

forma a otimização passa a ser uma otimização paramétrica com os valores de densidade como variáveis de projeto. Essa metodologia então otimiza ao mesmo tempo a distribuição de material, bem como a forma ótima. Bendsøe (1989) descreve algumas formas de se trabalhar com funções de densidade que empregam variáveis de otimização contínuas.

Para se empregar uma otimização utilizando de elementos finitos é necessário então o uso de algoritmos de otimização discretos. Bendsøe (1989) introduziu uma função de densidade artificial $P(\rho)$, $\rho \in \Omega$, $0 \leq P(\rho) \leq 1$ com valor de penalidade $p \gg 1$ alterando a formulação da Eq. (8) e da Eq. (10), conforme demonstrado na Eq. (11). Com esse método foi possível encontrar valores intermediários de densidade, no entanto grande parte dos elementos apresentam valores 1 ou 0. Esse modelo apresentou também uma grande dependência de malha, além de uma dificuldade de representação física dos valores intermediários.

$$E_{ijkl}(\rho) = [P(\rho)]^p \bar{E}_{ijkl}, VOL = \int_{\Omega} P(\rho) dx \quad (11)$$

A Eq. (7) pode ser reformulada para o caso de uso de funções discretas e redefinida conforme Eq. (12) (Bendsøe (1989) e Sigmund (2001)).

$$\begin{aligned} \min_{\rho} C(\rho) &= U^T K U = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p u_e^T k_0 u_e \\ \text{sujeito a:} \quad &\frac{V(\rho)}{V_0} = f \\ &K U = F \\ &0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

onde U e F representam deslocamentos e forças globais, respectivamente. A matriz de rigidez global é representada por K , u_e e k_e são, respectivamente, deslocamento e matriz de rigidez do elemento. A variável de projeto é representada por ρ , sendo ρ_{min} o vetor composto pelas densidades relativas mínimas. A constante N é o número total de elementos presente na malha, o fator de penalização é apresentado como p . O volume de material e de domínio são evidenciados por $V(\rho)$ e V_0 , respectivamente e f é a fração de volume.

O método apresentado pela Eq. (12) pode ser resolvido por vários algoritmos de aproximação como critério de otimalidade (OC), programação linear sequencial

(SLP), método de movimentação de assíntotas (MMA) e entre outros. O critério de otimalidade, o qual será utilizado nesse estudo, parte de um processo heurístico baseado no multiplicador de Lagrange encontrado a partir de um algoritmo de bissecção. Bendsøe (1995) propôs o uso da equação (13) para atualização das variáveis de projeto de acordo com o critério de otimalidade.

$$\rho_e^{new} = \begin{cases} \max(\rho_{min}, \rho_e - m) & \text{se } \rho_e B_e^\eta \leq \max(\rho_{min}, \rho_e - m) \\ \rho_e B_e^\eta & \text{se } \max(\rho_{min}, \rho_e - m) < \rho_e B_e^\eta < \min(1, \rho_e + m) \\ \min(1, \rho_e + m) & \text{se } \min(1, \rho_e + m) \leq \rho_e B_e^\eta \end{cases} \quad (13)$$

sendo que m representa o limite de movimentação.. Colocado na intenção de estabilizar a iteração, para que o valor não tenha grandes alterações e um elemento ir de um vazio para um espaço sólido em uma iteração. O coeficiente numérico amortização η é disposto na intenção de também auxiliar na estabilização da iteração. Pode-se encontrar B_e conforme apresentado na Eq. (14).

$$B_e = \frac{-\frac{\partial C}{\partial \rho_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e}} \quad (14)$$

λ é o multiplicador de Lagrange encontrado pelo algoritmo de bissecção.

2.3. CRITÉRIO DE OTIMALIDADE (OC)

Os métodos de otimização estrutural foram concebidos para serem resolvidos sistematicamente e com a menor intervenção possível. Devido a esse desenvolvimento sistemático, uma série de algoritmos foram propostos para resolução das equações de otimização vistas em 2.2. Vários métodos numéricos foram desenvolvidos para solução de problemas de otimização em diversos campos da engenharia e ciência. No entanto o método de otimalidade teve uma grande aderência aos problemas de otimização estrutural devido ao fato de ser muito eficiente em problemas com uma pequena quantidade de restrições comparada a quantidade de variáveis de projeto, Haftka e Gandhi (1986).

A exposição do critério de otimalidade (OC) foi pela primeira vez proposto por Wasiutynski (1960). Sendo muito mais heurístico e investigativo em uma solução que aprimore diretamente a função objetivo, diferentemente do que é visto no método de movimentação das assíntotas (MMA).

Os multiplicadores de Lagrange são aplicados com o objetivo de encontrar os pontos de máximo e mínimo da equação característica do problema de otimização, respeitando as suas restrições, conforme a Eq. (7). Desta maneira as condições de otimalidade da variável de projeto ρ são um subconjunto das condições estacionárias da equação de Lagrange, demonstrada na Eq. (15).

$$\mathcal{L} = l(u) - \{a_E(u, \bar{u}) - l(\bar{u})\} + \Lambda \left(\int P(\rho) d\Omega - V \right) + \int_{\Omega} \lambda^+(\rho)(P(\rho) - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda^-(\rho)(\rho_{min} - P(\rho)) d\Omega \quad (15)$$

ende \bar{u} é um multiplicador de Lagrange na conjuntura de equilíbrio pertencente ao campo de deslocamento cinematicamente permitido. Em uma condição de $\rho \geq \rho_{min} \geq 0$ têm-se que $u = \bar{u}$, no entanto, para ρ pode ser visto em Eq. (16).

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \rho} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl} = \Lambda + \lambda^+ - \lambda^- \quad (16)$$

Com comutação de condições:

$$\lambda^- \geq 0, \lambda^+ \geq 0, \lambda^-(\rho_{min} - P(\rho)) = 0, \lambda^+(P(\rho) - 1) = 0 \quad (17)$$

No que tange a valores intermediários a condição da Eq. (16) se torna constante e igual a Λ como em Eq. (18).

$$pP(\rho)^{p-1} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) = \Lambda \quad (18)$$

Bendsøe (1995) propôs o uso da Eq. (19) para atualização das variáveis de projeto de acordo com o critério de otimalidade.

$$\rho_e^{new} = \begin{cases} \max(\rho_{min}, \rho_e - m) & \text{se } \rho_e B_e^\eta \leq \max(\rho_{min}, \rho_e - m) \\ \rho_e B_e^\eta & \text{se } \max(\rho_{min}, \rho_e - m) < \rho_e B_e^\eta < \min(1, \rho_e + m) \\ \min(1, \rho_e + m) & \text{se } \min(1, \rho_e + m) \leq \rho_e B_e^\eta \end{cases} \quad (19)$$

Correspondendo m ao limite de movimentação, disposto na intenção de estabilizar a iteração, e assim não tenha grandes alterações que façam um elemento, em uma única alteração, variar de um espaço destituído de material a maciço. A constante η é um coeficiente amortizador numérico assentado no fim de auxiliar na consolidação da iteração e B_e é elucidado a partir da Eq. (20).

$$B_e = \frac{\frac{\partial c}{\partial \rho_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e}} \quad (20)$$

λ é o multiplicador de Lagrange estabelecido através do algoritmo de bissecção.

2.3.1. MODELO DE MATERIAL SÓLIDO ISOTRÓPICO COM PENALIZAÇÃO (SIMP)

Alterando-se os procedimentos para uma forma discreta algumas modificações de variáveis precisam ser feitas. É nessa hora que utiliza-se o SIMP substituindo as variáveis de integração das equações por variáveis contínuas, entretanto deve ser adicionado um termo de penalização (p) como visto em Eq. (21) o que garante valores de densidade entre 0 – 1.

$$E_{ijkl}(\rho) = P(\rho)^p E_{ijkl}^0, \quad p > 1$$

$$\int_{\Omega} P(\rho) d\Omega \leq V(\rho) dV; \quad 0 \leq P(\rho) \leq 1, \quad \rho \in \Omega \quad (21)$$

Uma observação que deve ser feita em relação ao uso do SIMP, se encontra em valores mínimos para o funcionamento correto do método. Para obter valores apenas de 0 – 1 deve-se considerar o valor de $p > 1$, dessa forma os valores intermediários de densidade são evitados, os quais produzem um custo computacional e não oferecem uma rigidez relevante para a performance da estrutura. Utilizando de uma limitação de volume, deve ser considerada uma penalização $p \geq 3$, assegurando assim uma distribuição em sua grande parte binária.

2.4. SUAUIZAÇÃO DE CONTORNOS

O método de homogeneização descrito acima é considerado o primeiro passo de uma otimização topológica e o segundo passo enfatiza o desenvolvimento de metodologias capazes de gerar uma estrutura com contornos suavizados. Vários estudos foram feitos com o propósito de se obter uma geometria final com delineamentos abonançados como visto em Yi e Kim (2017), em Lee et al. (2007) e Lin e Chao (2000). Nesse estudo serão aplicadas Curvas de Bézier, Curvas de Hermite e Splines para solução dos contornos suaves. Essas curvas paramétricas são

as principais utilizadas em computação gráfica e com funcionamento demonstrado a seguir.

2.4.1. CURVAS PARAMÉTRICAS

Coordenadas cartesianas geralmente são descritas por funções $y = f(x)$, que dependem de uma variável x . Dessa forma o valor de y depende da variável x implícita na função $f(x)$. Sendo assim seu uso limita-se a somente algumas representações gráficas. As curvas paramétricas são definidas então por um parâmetro t e o posicionamento no espaço descrito por $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Forma muito utilizada na ciência ao se considerar o parâmetro t como o valor de tempo e os valores de x e y descrevendo a posição no tempo definido. Essa possibilidade de definir a posição de pontos em relação a um parâmetro fez com que as curvas paramétricas ganhassem relevância na computação gráfica.

O engenheiro Pierrer Bézier da Renault e o matemático Paul de Casteljaou da Citroën na década de 60 foram os responsáveis pela criação das “curvas de Bézier”. Estas curvas proporcionaram um grande avanço na indústria automotiva e foram bases para o desenvolvimento dos softwares de gráficos CAD (*computer aided design*). Possibilitando a criação de designs e desenhos 3D com auxílio do computador implementados em quase toda a indústria hoje em dia.

Rabut (2002) transcreve algumas cartas enviadas por Pierrer Bézier com intuito de entender o que motivou e qual o cenário do engenheiro ao criar então as curvas que levaram o nome dele. Pierrer foi contratado pela Renault logo após a crise de 1929 para integrar o setor de ferramentas e matrizes, este que pertencia ao departamento de planejamento de processos. Sendo ele responsável por escolher e implementar melhorias aos processos de fabricação de componentes mecânicos.

Todos os componentes em que era necessário alguma precisão eram planos, cilíndricos ou cônicos, os quais eram definidos apenas com linhas retas ou círculos. O desenho da carroceria era feito de forma artística e a referência era o estilista, dessa maneira o seu julgamento era subjetivo e alterava-se com o tempo. Os designers precisavam de muitas habilidades matemáticas e utilizavam de quadros de curvaturas, curvas francesas, estrias de madeira e régua de aço para descrever a geometria do projeto. Os desenhos em sua grande maioria não tinham precisão, ocasionando carros com diferença de vários milímetros entre os lados. Desta maneira, uma série

de problemas eram gerados durante a manufatura, como por exemplo, peças que deveriam estar em contato apresentavam lacunas entre elas. Além de muito dos processos serem extremamente manuais e com muita interferência durante toda a cadeia de produção.

Os computadores começaram a chegar nas indústrias por volta dos anos de 1950 e em grande parte para atividades administrativas, algumas raras vezes, quando disponível, era utilizado para atividades científicas e técnicas. Por volta dos anos de 1955 começam a surgir as primeiras máquinas controladas numericamente, fazendo perfurações em pontos específicos, entre outras atividades. Com o avanço da tecnologia pode-se observar máquinas de fresa em linha reta e arcos. Desta forma esperava-se que com o tempo fosse possível então uma solução para construção de carrocerias. Para este tipo de componente é necessário a construção de curvas, as quais são essenciais para criar superfícies. As características não planas e definidas por várias projeções utilizando pequenos arcos de círculos ou parábolas não é ideal, uma vez que em muitos casos pode ser preciso uma mudança local.

A ideia de Bézier era inscrever uma curva de forma apropriada em um cubo, dessa maneira, alterando-se o cubo em um paralelepípedo e depois em um polígono, irá se alterar também a forma da curva. Ele observou a possibilidade de maiores alterações nas curvas implementando funções matemáticas ao invés de transformações lineares, como utilizadas no cubo e no paralelepípedo. Uma dessas funções empregadas por ele foi a função de Bernstein que originaram as B-splines.

Esse capítulo irá elucidar algumas das mais importantes curvas paramétricas como splines, curvas de Bézier e curvas de Hermite.

2.4.1.1. SPLINE

As curvas splines vieram como um ótimo aliado para os designers considerando que é uma representação matemática onde obtém-se o controle da forma e constrói superfícies com certa facilidade alterando somente os pontos de controle e o polinômio de interpolação.

Assumindo que $n + 1$ pontos x_0, x_1, \dots, x_n com uma restrição de $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Contendo um valor de $w \geq 0$ que representa o grau da spline S , a qual deve possuir todos os nós citados acima de tal forma que:

- Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, S é um polinômio de grau $\leq w$;
- S tem uma derivada $(w - 1)^{st}$ contínua no intervalo $[x_0, x_n]$.

Portanto S é um pedaço de polinômio com grau máximo de w e as derivadas no grau máximo de $w - 1$.

Uma spline de grau 1 é chamada de spline linear, mostrado na Eq. (22), uma de grau 2 é a spline quadrática e a de grau 3 spline cúbica.

$$S(x) = \begin{cases} p_1(x) = a_1 + b_1x, x \in [x_0, x_1), \\ p_2(x) = a_2 + b_2x, x \in [x_1, x_2), \\ \dots \\ p_n(x) = a_n + b_nx, x \in [x_{n-1}, x_n), \end{cases} \quad (22)$$

A spline cúbica é uma das mais utilizadas na construção de curvas suavizadas em computação gráfica devido a:

- Menor grau de polinômio que pode suportar uma inflexão;
- Possuir um bom comportamento numérico;
- Garante continuidade até a derivada de segunda ordem.

2.4.1.2. CURVAS DE BÉZIER

A representação de superfícies e linhas amenas de forma computacional surgiram de um mecanismo concebido por Pierre Bézier na década de 60, o qual foi apresentado como curvas de Bézier. Essa inovação foi a porta de entrada para o entendimento da computação gráfica e assim favoreceu o surgimento de diversos softwares CAD como Maya, Blender e 3D Max.

Para maior entendimento a respeito das curvas também conhecidas como “Bézier Curves” têm-se então 4 pontos de controle $P = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$, que estabeleceram sua curvatura dependendo da disposição espacial. Ainda que se tenha um vetor com valores de função definidos parametricamente $Q(t)$, com variações em iguais a $0 \leq t \leq 1$ percorrendo toda a curva.

O polinômio de *Bernstein* de grau w pode ser descrito na Eq. (23). As curvas de Bézier pertencem a um caso especial de $w = 3$ como demonstrado na Eq. (24).

$$B_i^w(t) = \binom{w}{i} t^i (1-t)^{w-i} \quad (23)$$

$$\binom{w}{i} = \frac{w!}{i!(w-i)!} \quad (24)$$

$$Q_3(t) = B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + B_2^3(t)P_2 + B_3^3(t)P_3 \quad (25)$$

Cada B_i^3 são valores escalares em \mathfrak{R} e os pontos de controle P_i em \mathfrak{R}^3 . A Eq. (25) pode ser descrita de forma matricial na Eq. (26).

$$Q_3(t) = [B][P] \quad (26)$$

Algumas propriedades das “Bézier Curve” são explicadas em concordância ao polinômio de Bernstein: cada função é base real, o grau de cada polinômio é uma a menos que o número total de pontos e o primeiro e últimos pontos coincidente com os pontos da curva.

2.4.1.3. CURVA DE HERMITE

Curvas de Hermite apresentam um caso em particular de splines, onde são definidos os pontos de controle e também os vetores tangentes dos pontos de extremidade da curva. Dessa forma mesmo que se tenham os mesmos pontos de controle é possível encontrar curvas com formatos distintos alterando-se apenas os vetores tangentes, conforme demonstrado na Figura 2.1.

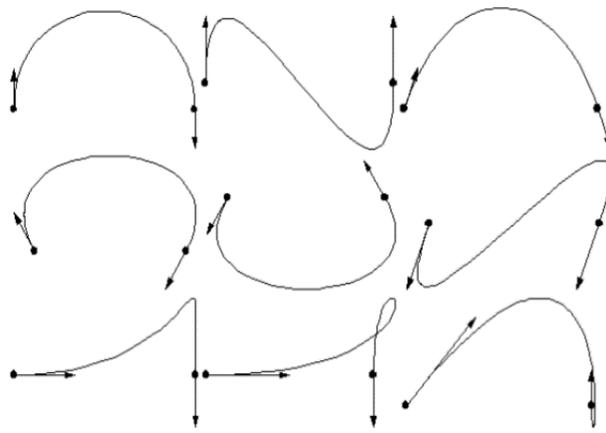


Figura 2.1. Exemplo de curvas de Hermite.

A curva de Hermite é estabelecida então pelos pontos iniciais e finais $X(0)$ e $X(1)$, além dos valores da primeira derivada nos pontos das extremidades $X'(0)$ e $X'(1)$. Com esses valores é possível então determinar a matriz de Hermite M que é bem característica dessa curva, conforme demonstrado por Angel e Shreiner (2012). Para isso inicia-se com um polinômio de interpolação com suas respectivas constantes conforme demonstrado na Eq. 27.

$$X(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \quad (27)$$

A primeira derivada então da Eq. 31:

$$X'(t) = 3at^2 + 2bt + c \quad (28)$$

Representando matricialmente:

$$X(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$X'(t) = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (30)$$

Substituindo os valores de $X(0)$, $X(1)$, $X'(0)$ e $X'(1)$:

$$X(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$X(1) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$X'(0) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$X'(1) = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (34)$$

Representando todas as equações em uma única matriz temos:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X'(0) \\ X'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (35)$$

Invertendo as equações para se encontrar os valores dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X'(0) \\ X'(1) \end{bmatrix} = M \cdot G$$

(36)

Sendo que M representa a matriz de Hermite e G a matriz de geometria, dessa forma apenas alterando os valores da geometria é possível então encontrar o polinômio de interpolação da curva Hermite, uma vez que a matriz de Hermite sempre será encontrada na equação.

2.4.2. ESTUDO DOS CAMPOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

Parte fundamental de um projeto de engenharia é a validação dos dados obtidos pela solução numérica, verificando se a estrutura irá ter a capacidade de sustentar os esforços pré-definidos. Bem como definir o material que suporte as tensões e deformações exigidas pelas condições de trabalho da estrutura. O método de elementos finitos e o uso de softwares para solução de problemas em diversos campos da engenharia foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar a tomada de decisão e realizar simulações computacionais. As simulações através das plataformas de elementos finitos proporcionam uma redução de custo e possibilidade de empregar outras óticas e condições ao problema. Todo esse processo incentiva melhorias no processo de desenvolvimento de componentes. Nesse estudo será utilizada uma plataforma comercial de elementos finitos para comparativo de projeto possibilitando um estudo dos campos de tensão e deformação da estrutura otimizada.

2.4.2.1. CONVERGÊNCIA DE MALHA

A principal ideia do método de elementos finitos é a divisão do domínio em vários elementos e solucionar o problema de forma discreta. O resultado final dessa metodologia é uma aproximação e contém um erro médio em cada solução. A convergência de malha busca um refinamento de resultados para que então se tenha uma solução com menor erro implícito.

Existem basicamente duas formas de se refinar a malha de elementos. A primeira forma é mais simples utiliza um maior número de elementos, ponderando o aumento considerável do custo computacional em cada operação, chamado muitas vezes de refinamento h , Zienkiewicz, et al. (2005) demonstrado na Figura 2.2.

Geralmente o processo se inicia com o uso de uma malha grosseira, com elementos grandes, medindo em cada iteração o erro médio do processo e alterando tamanho dos elementos. Repetindo o processo até se alcançar um erro médio admissível para o usuário, Aymone (1996).

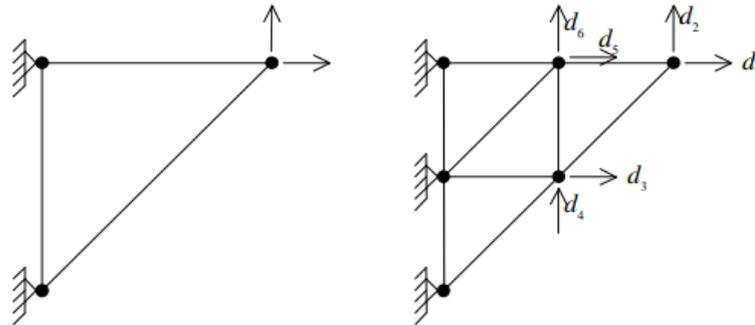


Figura 2.2. Refinamento h. Fonte: Pereira (2005).

Outra forma de refinamento consiste em alterar o grau do polinômio utilizado para solução dos deslocamentos entre cada nó, chamado de refinamento p , Zienkiewicz, et al. (2005), visto em Figura 2.3. Permitindo uma solução com menos graus de liberdade e conseqüentemente com um menor custo computacional, com o uso de uma malha inicial adequada a convergência é alta, Aymone (1996). Sendo recomendado para estruturas com pontos de singularidades, como os concentradores de tensão, visto que essas regiões podem gerar instabilidades, Novotny e Fancello (1998).

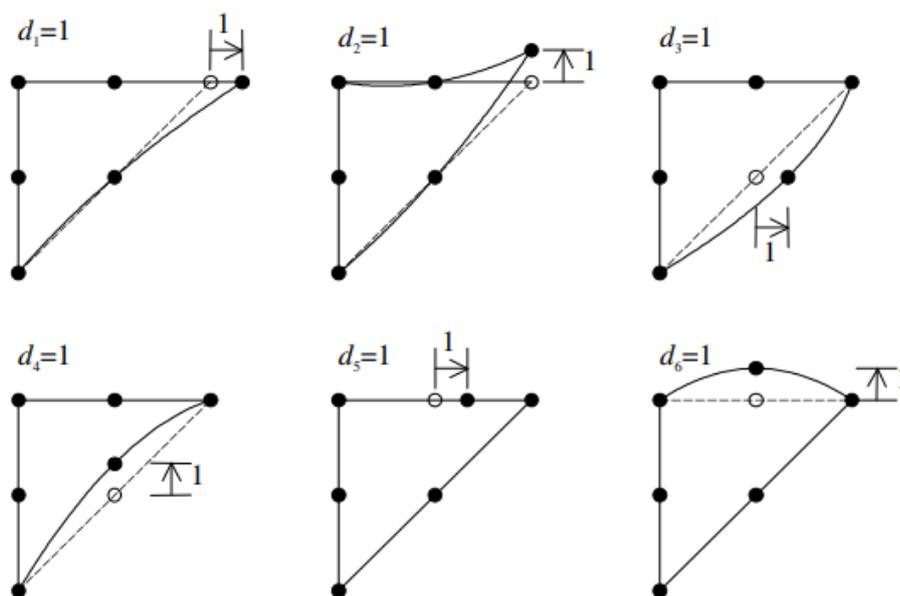


Figura 2.3. Refinamento p. Fonte: Pereira (2005).

3. METODOLOGIA

Esse capítulo tem o intuito de descrever a metodologia utilizada no estudo para obtenção dos resultados numéricos. Utilizou-se o algoritmo de Sigmund (2001) em Matlab® para desenvolvimento da otimização topológica e a partir dos resultados elaborar curvas de suavização dos contornos da estrutura. Empregou-se curvas Splines, Bézier e Hermite para verificar a influência nas estruturas otimizadas. Um comparativo de todo o trabalho desenvolvido é feito através de um estudo dos campos de tensão e deformação utilizando uma plataforma comercial de elementos finitos. Esse capítulo é dividido em Otimização topológica, explicando o funcionamento do algoritmo elaborado por Sigmund (2001). Comenta-se sobre a suavização dos contornos, descrevendo a construção das curvas. Além de uma análise dos campos de tensão e deformação, demonstrando os processos utilizados na plataforma de elementos finitos.

3.1. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

O algoritmo desenvolvido por Sigmund (2001) apresenta um código para otimização topológica em Matlab® utilizando apenas 99 linhas. Para isso ele utiliza uma malha de elementos finitos fixa, diminuindo o custo computacional e simplificando a solução do problema através do método da homogeneização de Bendsøe e Kikuchi (1988). Emprega-se para solução do método da homogeneização o critério de otimalidade e o modelo de material isotrópico com penalização (SIMP). Desta forma são distribuídas densidades em uma matriz de elementos, sendo que os resultados são impressos em variação de branco e preto a variar com a densidade de cada elemento no intervalo de 0 a 1.

3.1.1. ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos é utilizado para solução das equações de equilíbrio resultando em tensão e deformação de cada elemento da malha, esses são entrada para o método da homogeneização solucionado de forma discreta.

O método consiste na divisão de um problema contínuo em uma malha de elementos e pontos que respeitam a lei de Hooke $K = UF$, sendo possível encontrar os valores de deslocamentos e tensões em cada ponto, conforme demonstrado por Bathe (1996).

Para redução do custo computacional Sigmund (2001) utiliza um sistema de malha fixa com elementos numerados do canto superior esquerdo até o canto inferior direito conforme ilustrado na Figura 3.1. A malha é composta por elementos quadrados com 4 nós e 2 graus de liberdade em cada, um na vertical e outro na horizontal, como na Figura 3.2. Outra vantagem desse método é o uso de uma mesma matriz de rigidez para cada elemento, como em Sigmund (2001) e Andreassen et al. (2011).

1	4	7	10
2	5	8	11
3	6	9	12

Figura 3.1. Exemplo de malha regular.

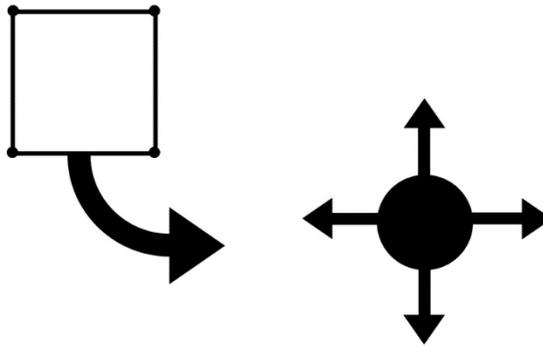


Figura 3.2. Exemplo de elemento.

Considerando o modelo de malha pré-fixado e o método de elementos finitos. Sigmund (2001) emprega o problema de otimização topológica discreto, baseado na lei de força objetivando minimizar a flexibilidade e maximizar a resistência conforme Eq. (37).

$$\left. \begin{aligned} \min_{\rho} : C(\rho) &= U^T K U = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p u_e^t k_0 u_e \\ \text{sujeito a: } \frac{V(\rho)}{V_0} &= f \\ &: K U = F \\ &: 0 < \rho_{min} \leq \rho \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

com U é a matriz de deformação, K a matriz de rigidez, F o vetor de forças, C a função objetivo, ρ a variável de projeto, N o número total de elementos composto pela produto

de elementos na vertical e na horizontal, p constante de penalização, $V(\rho)$ volume de material e V_0 volume do domínio.

O princípio de materiais compósitos no método de homogeneização aplica uma densidade que varia no intervalo de 0 a 1. Estas densidades determinam o módulo de elasticidade do material que será empregado em cada elemento, conforme demonstrado na Eq. (38).

$$E_e(\rho_e) = E_{min} + \rho_e^p (E_0 - E_{min}) \quad (38)$$

onde E_e representa o módulo de elasticidade do elemento, as densidades de cada elemento são demonstradas por ρ_e . O módulo de elasticidade mínimo, geralmente próximo a do ar é estabelecido por E_{min} , o fator de penalização é p e o módulo de elasticidade do material E_0 .

Para solucionar a Eq. (37) Sigmund (2001) emprega o algoritmo do critério de otimalidade desenvolvido por Bendsøe (1995), devido a simplicidade. O algoritmo calcula em cada iteração os valores da variável de projeto para cada elemento presente na malha conforme os critérios apresentados na Eq. (39).

$$\rho_e^{new} = \begin{cases} \max(\rho_{min}, \rho - m) & \text{se } \rho_e B_e^\eta \leq \max(\rho_{min}, \rho - m) \\ \rho_e B_e^\eta & \text{se } \max(\rho_{min}, \rho - m) < \rho_e B_e^\eta < \min(1, \rho_e + m) \\ \min(1, \rho_e + m) & \text{se } \min(1, \rho_e + m) \leq \rho_e B_e^\eta \end{cases} \quad (39)$$

uma vez que m é considerado como um limite superior positivo, η é um coeficiente de amortecimento (geralmente $\eta = 1/2$). B_e é calculado através da Eq. (40), que utiliza um multiplicador de Lagrange λ calculado pelo método da bissecção.

$$B_e = \frac{-\frac{\partial c}{\partial \rho_e}}{\lambda \frac{\partial c}{\partial \rho_e}} \quad (40)$$

A sensibilidade da função objetivo é calculada através da primeira derivada conforme Eq. (41), através dessa sensibilidade é possível entender o impacto na função objetivo ao se alterar a densidade no elemento, bem como no volume.

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -p(\rho_e)^{p-1} u_e^T k_0 u_e \quad (41)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e} = 1 \quad (42)$$

3.1.1.1. TENSÃO EQUIVALENTE DE von MISES

O cálculo da tensão de von Mises é obtido através da Eq. (43) podendo calcular em cada elemento e verificando onde a estrutura é mais solicitada.

$$\sigma_e^{vm} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{XX} - \sigma_{YY})^2 + (\sigma_{YY} - \sigma_{XY})^2 + (\sigma_{XY} - \sigma_{XX})^2]} \quad (43)$$

onde,

$$\sigma_{XX} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u_X}{\partial X} + \nu \frac{\partial u_Y}{\partial Y} \right) \quad (44a)$$

$$\sigma_{YY} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial u_X}{\partial X} + \frac{\partial u_Y}{\partial Y} \right) \quad (44b)$$

$$\sigma_{XY} = 2G_{cis.} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_X}{\partial X} + \frac{\partial u_Y}{\partial Y} \right) \quad (44c)$$

sendo que E representa o módulo de Young, ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo transversal do material e u_X e u_Y são respectivamente, a variação de deslocamento em X e Y .

3.1.2. FILTROS

A presença do chamado “tabuleiro de xadrez” é uma característica recorrente em muitos algoritmos de otimização. Essa particularidade apresenta uma falsa noção para o cálculo de rigidez, além de produzir estruturas de difícil manufatura e baixo desempenho. A solução para evitar os problemas em relação aos *checkerboard* foi a criação de diversos filtros. Em Sigmund (2007) é possível verificar uma análise sobre vários desses filtros, observando suas características e funcionalidades. A garantia de existência de uma solução para o problema independente da malha é atingida ao utilizar os filtros, revisada por Sigmund e Petersson (2007). Um exemplo de dependência de malha e tabuleiro de xadrez pode ser visto na Figura 3.3.

O funcionamento do filtro parte de uma modificação da equação de sensibilidade da função objetivo em relação ao elemento como:

$$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_e \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f} \sum_{f=1}^N \widehat{H}_f x_f \frac{\partial c}{\partial \rho_f} \quad (45)$$

onde o operador de convolução:

$$\widehat{H}_f = r_{min} - dist(e, f) \\ \{f \in N \mid dist(e, dist(e, f) \leq r_{min}\}, e = 1, \dots, N \quad (46)$$

dados que $dist(e, f)$ é a distância entre o centro do elemento e e f , tendo que o operador de convolução é igual a zero em regiões fora da atuação do filtro. Com a modificação a sensibilidade passa a decair linearmente com o aumento da distância entre os elementos analisados.

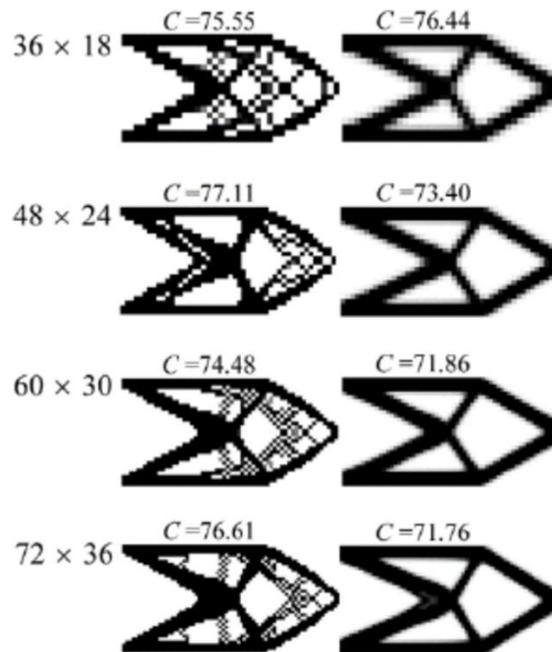


Figura 3.3. Exemplo de tabuleiro de xadrez e dependência de malha. Fonte: Shobeiri (2016).

3.2 SUAVIZAÇÃO DA ESTRUTURA

A busca por contornos suaves tem a intenção de promover estruturas mais viáveis de manufatura, bem como evitar a presença de concentradores de tensões nos componentes. O uso de elementos finitos para solução do método da homogeneização proporciona componentes com aspecto de serra. Desta forma Bendsøe e Kikuchi (1988) indicam que o próximo passo seria a criação de metodologias para obtenção de contornos suavizados. A metodização automática

desse processo de busca por contornos suaves acarreta uma autonomia do processo, ocasionando assim a redução da decisão do projetista.

O algoritmo busca encontrar os elementos que estão no perímetro da estrutura, mais especificamente na fronteira entre os elementos correspondentes como vazios e elementos sólidos. A resposta obtida pelo método de homogeneização passa por uma análise e então são considerados elementos com material todos aqueles com densidades maiores que 0,3. Para efeito de comparação também são feitas simulações para densidades maiores que 0,9, dessa forma é possível analisar o impacto na estrutura final.

A Figura 3.4 apresenta uma parte da matriz de densidade da estrutura, verifica-se que as células com densidade igual a 1 representam elementos sólidos. A medida que os valores diminuem é reduzida a rigidez do elemento. É possível observar uma redução na densidade de elementos que estão mais afastados da estrutura. O uso de duas densidades tem como objetivo apresentar quanto de material é adicionado ao se considerar densidades muito baixas como 0,3 e quanto material é retirado ao se utilizar densidades altas como 0,9.

1	0,77	0,47	0,21	0,048	0,0048	5,07e-14
1	1	1	0,80	0,38	0,12	0,01
1	1	1	1	1	0,67	0,26
1	1	1	1	1	1	0,93

Figura 3.4. Exemplo de matriz de densidades.

Para se encontrar os elementos de fronteira primeiramente foi feita a numeração dos elementos do canto superior esquerdo até o canto inferior direito da matriz. Dividido em dois vetores com o número dos elementos que possuem material N_{CM} e com os sem material N_{SM} , por exemplo:

$$N_{SM} = \begin{bmatrix} N_{SM1} \\ N_{SM2} \\ \vdots \\ N_{SMn-1} \\ N_{SMn} \end{bmatrix} \quad N_{CM} = \begin{bmatrix} N_{CM1} \\ N_{CM2} \\ \vdots \\ N_{CMn-1} \\ N_{CMn} \end{bmatrix}$$

(47)

A partir da matriz binária pode-se organizar e dividir os pontos de controle, que serão utilizados para desenhar as curvas. Foi elaborado um algoritmo com intuito de buscar na matriz elementos com valores iguais a 1. A medida em que o algoritmo encontra um elemento com valor de 1, é realizada uma busca na vizinhança de outro elemento com mesmo valor. Desta maneira na próxima iteração o algoritmo buscaria na vizinhança do próximo elemento por outros elementos com valores unitários, conforme apresentado na Figura 3.7. O resultado desse algoritmo é um vetor com as coordenadas X e Y de cada ponto médio na Eq. (49).

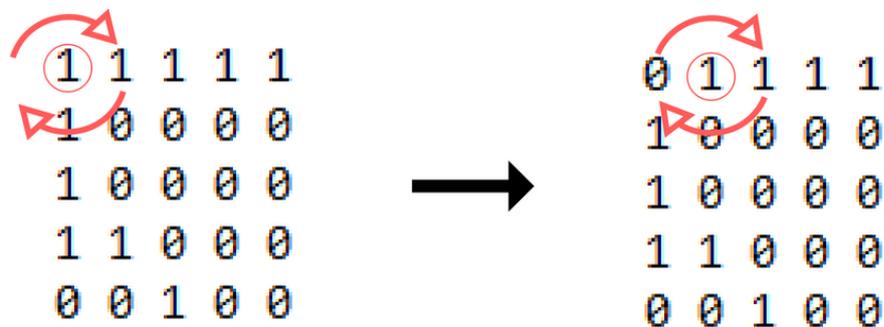


Figura 3.7. Seleção de elementos pertencentes a mesma spline.

$$E_S = \begin{bmatrix} X_{S1} & Y_{S1} \\ \vdots & \vdots \\ X_{Sn} & Y_{Sn} \end{bmatrix}$$

(49)

onde E_S representa os elementos em cada segmento, sendo realimentado sempre que o algoritmo encerrar um processo, X_s e Y_s são os valores respectivos da coordenada do ponto médio do elemento em X e Y .

Obtendo todos esses pontos e coordenadas é elaborado um algoritmo que utiliza polinômios de interpolação para definir as curvas que representam os contornos suavizados da estrutura. A seleção dos pontos de controle para desenhar as curvas utiliza da mesma metodologia para identificar os pontos pertencentes ao contorno da estrutura. Ou seja, é empregado um estudo de distância entre dois pontos no vetor da Eq. (49), observa-se que ao se encontrar valores de distância igual 1 os elementos estão ou na horizontal ou na vertical do elemento anterior, caso sejam valores diferente de um indicam que os elementos se encontram em diagonal. Dessa maneira são estipulados pontos de controle todas as vezes que se alteram os valores da

distância entre dois pontos, bem como quando se identifica os cantos da estrutura como demonstrado na Figura 3.8.

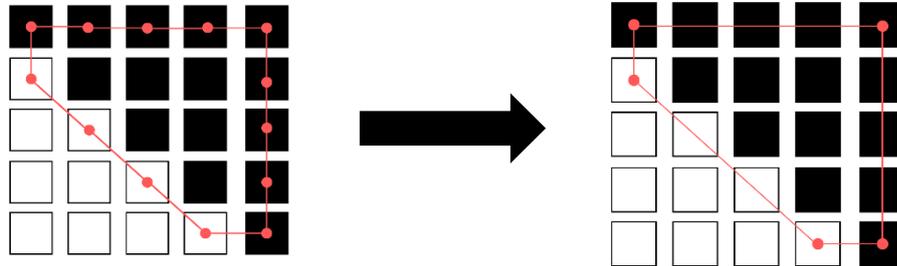


Figura 3.8. Pontos de controle.

3.2.1. SPLINE

As splines fazem parte do grupo de curvas polinomiais, as quais fazem aproximações interpolando polinômios entre os pontos de controle. Dessa forma é possível se alterar a forma de uma curva pela alteração dos pontos de controle, ou também o grau do polinômio utilizado. Com essa facilidade de implementação as curvas polinomiais ganharam grande aderência na computação gráfica.

Para uma representação gráfica de equações matemáticas é preciso que exista uma única constante ou no mínimo 2 pontos. Uma constante representa uma linha paralela ao eixo X , uma vez que $Y = cte$. Em um caso com 2 pontos uma equação linear simples $Y = aX + b$ é suficiente para representação gráfica. Ficando claro que o grau do polinômio de interpolação está relacionado a quantidade de pontos de controle, sendo exatamente igual a $N - 1$, com N representando o número total de pontos. Dessa forma para uma quantidade alta de pontos o polinômio de interpolação deverá ter um alto grau, se tornando instável.

Polinômios de interpolação de terceiro grau $Y(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ são os mais utilizados devido à:

- Menor grau possível que permite inflexão;
- Apresentar um bom comportamento numérico.

Diante dos problemas com instabilidade de polinômios de alto grau, uma metodologia foi desenvolvida empregando polinômios de terceiro grau para interpolação a cada 2 pontos utilizando vários segmentos de curvas, garantido pela continuidade entres eles.

Considerando um polinômio cúbico de interpolação entre os pontos i e $i + 1$ como em Eq. (50).

$$f_i(X) = a_i + b_iX + c_iX^2 + d_iX^3 \quad (50)$$

A garantia de continuidade entre os segmentos é dada ao se considerar que os pontos de controle pertencerão a ambos os segmentos demonstrado em Eq. (51) e Eq. (52).

$$f_i(X_i) = X_i \quad (51)$$

$$f_i(X_{i+1}) = Y_{i+1} \quad (52)$$

Substituindo esses valores na Eq. (50).

$$a_i + b_iX_i + c_iX_i^2 + d_iX_i^3 = Y_i \quad (53)$$

$$a_i + b_iX_{i+1} + c_iX_{i+1}^2 + d_iX_{i+1}^3 = Y_{i+1} \quad (54)$$

A mesma inclinação entre os segmentos também deve ser mantida Eq. (55).

$$f_i'(X_{i+1}) = f_{i+1}'(X_{i+1}) \quad (55)$$

Visto que:

$$f_i'X = b_i + 2c_iX + 3d_iX^2 \quad (56)$$

Substituindo os valores de Eq. (56) em Eq. (55):

$$b_i + 2c_iX_{i+1} + 3d_iX_{i+1}^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1}X_{i+1} + 3d_{i+1}X_{i+1}^2 \quad (57)$$

$$b_i - b_{i+1} + X_{i+1}(2c_i - 2c_{i+1}) + X_{i+1}^2(3d_i - 3d_{i+1}) = 0 \quad (58)$$

Para se manter a mesma curvatura entre os dois segmentos deve se considerar a equidade da segunda derivada de cada segmento de polinômio.

$$f_i''(X_{i+1}) = f_{i+1}''(X_{i+1}) \quad (59)$$

A segunda derivada é representada pela Eq. (60).

$$f_i''(X_i) = 2c_i + 6d_iX_i \quad (60)$$

Substituindo os valores de Eq. (59).

$$2c_i + 6d_iX_{i+1} = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}X_{i+1} \quad (61)$$

$$2c_i - 2c_{i+1} + X_{i+1}(6d_i - 6d_{i+1}) = 0 \quad (62)$$

O estudo opera um algoritmo com uma função própria do Matlab® através do comando spline. Essa função soluciona as equações para obtenção dos coeficientes do polinômio de interpolação que passa através dos pontos de controle no contorno da estrutura, representando ainda graficamente os segmentos. Para o funcionamento desta função é exigido as coordenadas X e Y dos pontos de controle, bem como uma subdivisão entre as coordenadas X dos pontos subsequentes.

3.2.2. CURVAS DE BÉZIER

As curvas de Bézier são a base da grande maioria de softwares CAD que utilizam curvas polinomiais e paramétricas possibilitando a representação de diferentes formas. O algoritmo de Casteljau é um dos utilizados comumente para representação de curvas de Bézier sendo empregado aqui para cálculo dos contornos suavizados tendo como entrada os pontos de controle definidos pelo algoritmo.

3.2.2.1. ALGORITMO DE CASTELJAU

Casteljau é um algoritmo que trabalha com curvas Bézier avaliando e subdividindo. As subdivisões são realizadas através de interpolações lineares dos coeficientes da curva e construindo um polinômio com mesmo grau. Sederberg (2014) utiliza um exemplo com 4 pontos de controle de uma curva Bézier $P_0^0, P_1^0, P_2^0, P_3^0$ demonstrado na Figura 3.9. O algoritmo envolve a computação de uma sequência de ponto de acordo com a Eq. (63).

$$P_i^j = (1 - \tau)P_i^{j-1} + \tau P_{i+1}^{j-1}, j = 1, \dots, n; i = 0, \dots, n - j \quad (63)$$

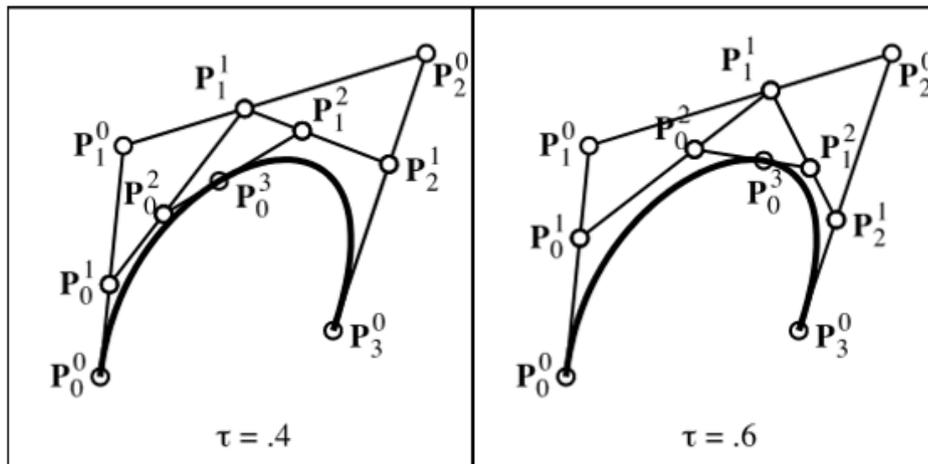


Figura 3.9. Exemplo de funcionamento do algoritmo Casteljau. Fonte: Sederberg (2014).

sendo $\tau = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}$. Nesse exemplo foi utilizada uma curva de Bezier cúbica, entretanto o método de Casteljau pode ser aplicado em qualquer grau. Observa-se também que o método descrito trabalha por níveis, quanto maior o nível da curva, maior a quantidade de pontos utilizados.

O funcionamento do algoritmo pode ser explicado utilizando o exemplo acima. Partindo dos quatro pontos P_0^0, P_1^0, P_2^0 e P_3^0 de controle estabelecidos pela curva de Bezier tem-se então os coeficientes geométricos da curva representados na Eq. (64).

$$P_0^1(\tau) = (1 - \tau)P_0^0 + \tau P_1^0 \quad (64a)$$

$$P_1^1(\tau) = (1 - \tau)P_1^0 + \tau P_2^0 \quad (64b)$$

$$P_2^1(\tau) = (1 - \tau)P_2^0 + \tau P_3^0 \quad (64c)$$

$$P_0^2(\tau) = (1 - \tau)P_0^1 + \tau P_1^1 \quad (64d)$$

$$P_1^2(\tau) = (1 - \tau)P_1^1 + \tau P_2^1 \quad (64e)$$

$$P_0^3(\tau) = (1 - \tau)P_0^2 + \tau P_1^2 \quad (64f)$$

Substituindo os valores em $P_0^3(\tau)$ temos a expressão da curva Bézier mostrado na Eq. (65).

$$P_0^3(\tau) = (1 - \tau)^3 P_0^0 + 3\tau(1 - \tau)^2 P_1^0 + 3\tau^2(1 - \tau)P_2^0 + \tau^3 P_3^0 \quad (65)$$

Nessa expressão a curva passará pelos pontos iniciais e finais e pelo ponto definido pelo algoritmo Casteljau P_0^3 .

3.2.3. CURVAS DE HERMITE

As curvas de Hermite apresentam um comportamento e uma metodologia de cálculo parecida com as Splines, no entanto a diferença consiste na determinação de dois vetores tangente aos pontos de controle inicial e final. Dessa forma o algoritmo de solução do polinômio de interpolação possui uma matriz característica conforme Eq. (66)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X'(0) \\ X'(1) \end{bmatrix} = M.G$$

(66)

Alterando-se os valores do ponto de controle inicial e final, bem como os vetores tangentes é possível a determinação dos coeficientes e a representação gráfica dos segmentos. Nesse estudo é empregado uma função própria de Hermite do Matlab®, o qual garante uma representação gráfica monótono devido a interpolação dos vetores tangentes. A função própria do Matlab® para o cálculo das curvas de Hermite (pchip) opera da mesma maneira que a função spline exigindo um vetor de coordenadas X e Y , além de um vetor com subdivisões da coordenada X dos pontos subsequentes. A diferença gráfica entre as curvas Spline e Hermite pode ser observada no exemplo da Figura 3.10, ficando claro que a curva Spline nem sempre garante um exemplo monótono.

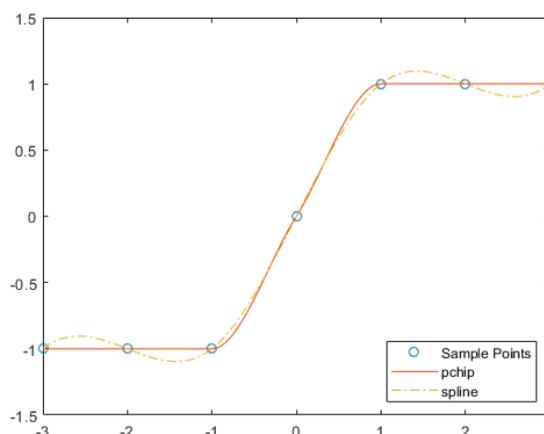


Figura 3.10. Comparativo gráfico entre Spline e Hermite.

3.3 EXPORTAÇÃO DA GEOMETRIA

Todos os contornos calculados pelas curvas paramétricas foram exportados do Matlab® através de um arquivo de texto, contendo todas as coordenadas X e Y das curvas. Esse arquivo foi importado para plataforma comercial de elementos finitos sendo utilizado para desenho da estrutura em 3D com uma espessura de valor unitário conforme Figura 3.11 e Figura 3.12.

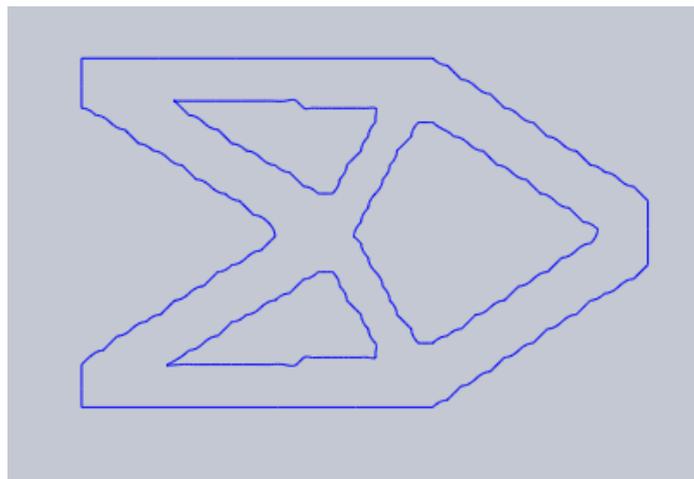


Figura 3.11. Curvas importadas.

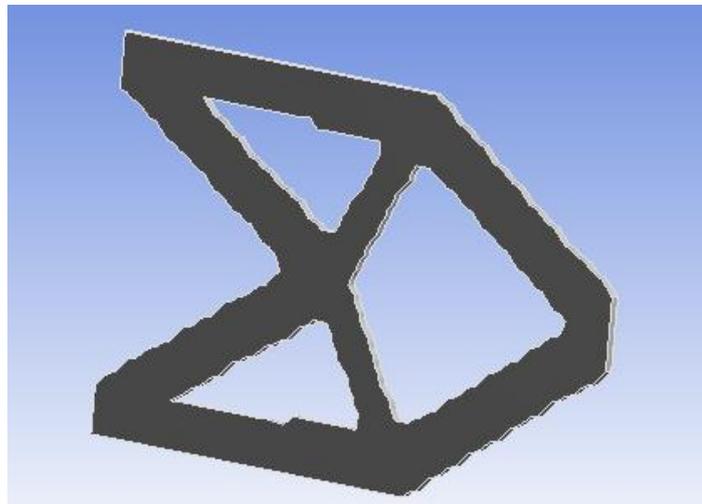


Figura 3.12. Estrutura em 3D.

3.3.1. ANÁLISE ESTRUTURAL

A estrutura em 3D obtida é utilizada na plataforma para análise estrutural e obtenção dos campos de tensão e deformação. Nesse caso o material pode ser criado

na biblioteca do software para ser empregado a toda estrutura. A Figura 3.13 demonstra um exemplo do material usado no estudo aplicado ao software.

The screenshot displays the ANSYS Engineering Data interface. The main window shows the 'Properties of Outline Row 3: unitário' table, which lists material properties and their values. The 'Table of Properties Row 2: unitário Field Variables' window is also visible, showing a table with columns for Variable Name, Unit, Default Data, Lower Limit, and Upper Limit.

Property	Value	Unit
Material Field Variables	Table	
Density	1000	kg m ⁻³
Isotropic Elasticity		
Derive from	Young's Modulu...	
Young's Modulus	1E+06	Pa
Poisson's Ratio	0,33	
Bulk Modulus	9,8039E+05	Pa
Shear Modulus	3,7594E+05	Pa

Variable Name	Unit	Default Data	Lower Limit	Upper
Temperature	C	22	Program Controlled	Program C

Figura 3.13. Material criado na biblioteca da plataforma comercial.

Uma vez que serão aplicadas apenas cargas estáticas, será utilizado o módulo de análise de estruturas estáticas. Ainda na parte de pré-processamento deve ser definida as condições de contorno, tanto apoio fixo quanto esforços aplicados a estrutura. Na Figura 3.14 é possível observar os apoios fixos aplicados as faces marcadas da estrutura circuladas em vermelho, bem como a face em que foi aplicada uma carga de -1 N na direção do eixo Y.

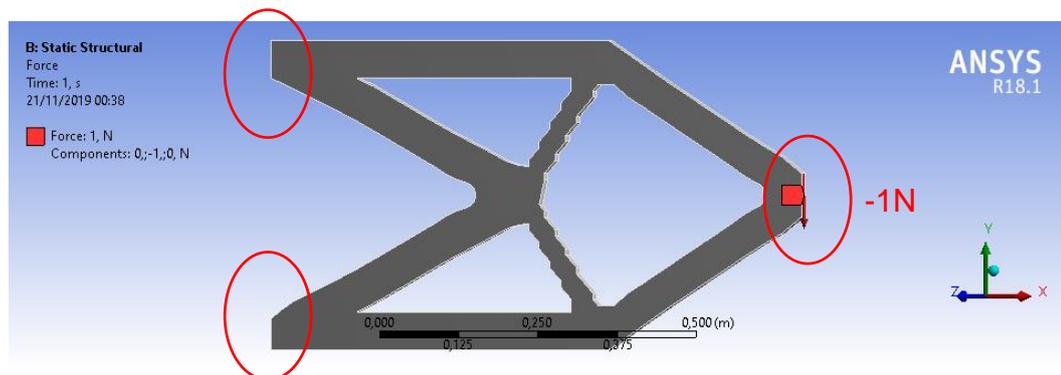


Figura 3.14. Condições de contornos aplicados a estrutura.

Na parte do pré-processamento configura-se a malha de elemento, essencial para um estudo de convergência de malha. Um exemplo de malha é observado na Figura 3.15. O software possibilita determinar o tamanho dos elementos, a qualidade

em função dos limites de erro, além do tipo de elemento. Nesse estudo é considerada apenas um refinamento de malha h , alterando-se apenas o tamanho dos elementos. Para o processo de otimização é necessário uma malha de elementos regulada para garantir uma convergência de resultados.

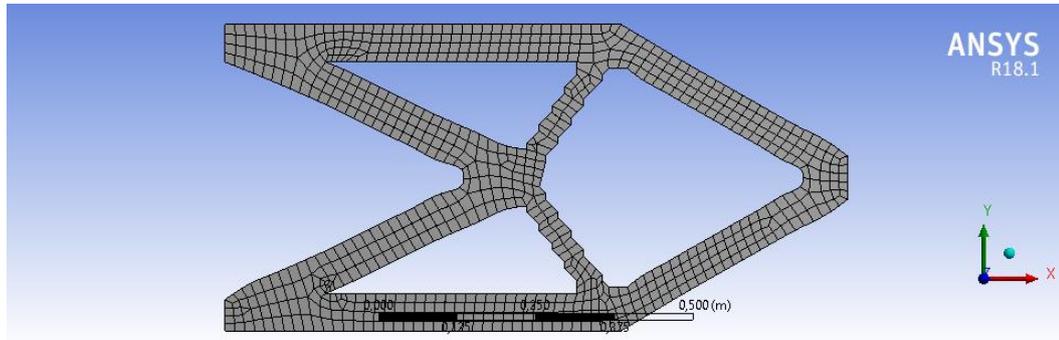


Figura 3.15. Exemplo de malha de elementos.

Com na plataforma comercial é possível obter a deformação total e a tensão equivalente de von Mises, parâmetros calculados também pelo algoritmo em Matlab® e que podem ter os resultados comparados. A Figura 3.16 e Figura 3.17 demonstram um exemplo de resultados obtidos pelo software para deformação e tensão, respectivamente.

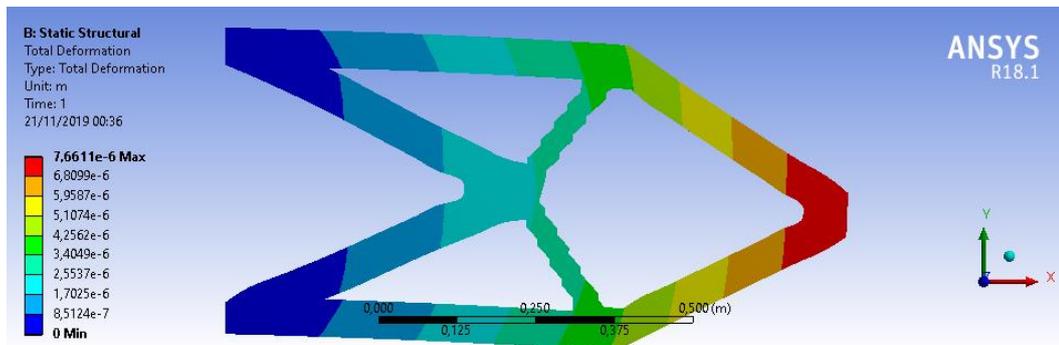


Figura 3.16. Deslocamento total da estrutura.

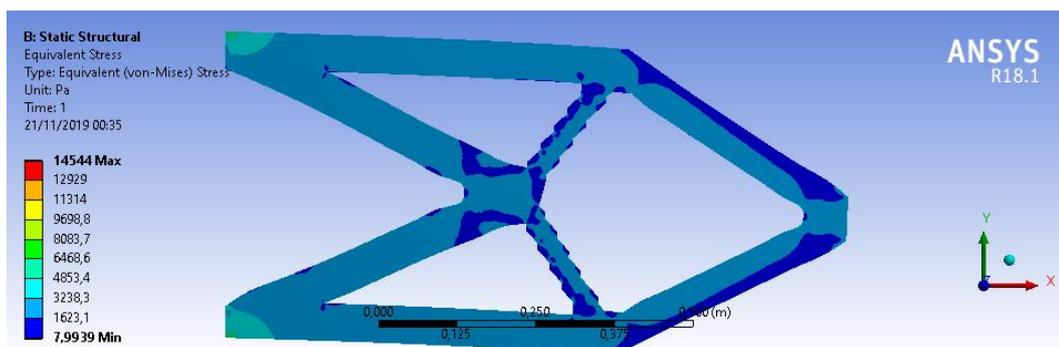


Figura 3.17. Tensão equivalente de von Mises.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Esse estudo tem como objetivo utilizar o código em Matlab® de otimização topológica desenvolvido por Sigmund (2001), bem como um algoritmo desenvolvido para solução de contornos suavizados em uma estrutura treliçada. Além de observar o comportamento ao se utilizar curvas de interpolação spline, Bézier e Hermite, bem como a influência de seleção de elementos com densidades maior que 0,3 e maiores que 0,9 que serão considerados como pertencentes ao perímetro da estrutura. O estudo dos campos de tensão e deformação dos resultados entregues pelos códigos em Matlab® são realizados em uma plataforma comercial de elementos finitos para comparar os resultados. A Figura 4.1 apresenta o domínio inicial, bem como as condições de contorno, demonstrando apoios fixos e uma carga de -1 N aplicada na direção do eixo Y. O estudo desenvolvido no trabalho de conclusão de curso 1 demonstrou o comportamento do código e a evolução em relação ao refinamento da malha. Apresentou-se ainda outros exemplos clássicos, assim como a influência da constante de raio mínimo na produção dos chamados tabuleiros de xadrez e na dependência de malha empregados por Sigmund (2001). Nesse estudo será utilizada uma malha de elementos de tamanhos unitários de 100 x 50.

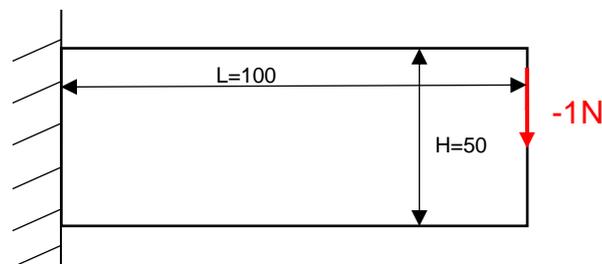


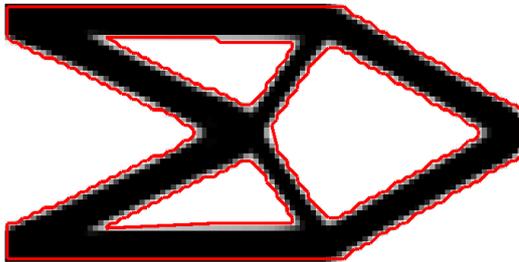
Figura 4.1. Viga engastada.

4.1 VIGA ENGASTADA 100 x 50

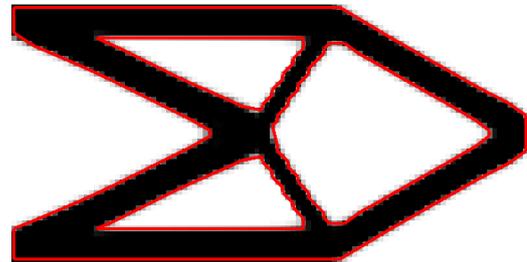
O algoritmo apresentado no TCC1 utilizou as curvas de Bézier para interpolação dos pontos de controle apresentados pela programação matemática. Nesse estudo foi realizado um estudo em relação a influência de seleção entre elementos com densidade maior que 0,3 e 0,9. Bem como o estudo dos campos de tensões em cada uma das estruturas. Ao final foi realizado um comparativo em relação aos resultados desenvolvidos pelo algoritmo de Sigmund (2001). Nesse estudo foi alterado o algoritmo de projeções das curvas paramétricas com a intenção de reduzir os concentradores de tensão apresentado na Figura 4.2. O algoritmo exige algumas

constantes de entrada para o desenvolvimento do programa, essas constantes estão relacionadas à:

- A malha de elementos será utilizada, o algoritmo utiliza um Sistema de malhas fixas para reduzir o custo computacional;
- Filtro de independência de malha utilizado;
- Fator de penalização (apresentado na seção 2.3.1.);
- Fração de volume;
- Raio mínimo;
- Qual curva será utilizada na suavização;
- Condições de contorno, Figura 4.3;
- Propriedades mecânicas do material aplicadas no algoritmo do Matlab®, Tabela 4.1.



Resultado sem alteração para concentradores de tensão



Resultado com alteração para reduzir concentradores de tensão

Figura 4.2. Evolução dos métodos utilizados na suavização dos contornos.

Tabela 4.1. – Propriedades mecânicas dos materiais utilizados nos exemplos.

Propriedades Mecânicas	Valores considerados
Módulo de elasticidade mínimo (MPa)	10^{-9}
Módulo de elasticidade máximo (MPa)	1
Coefficiente de Poisson	0,33

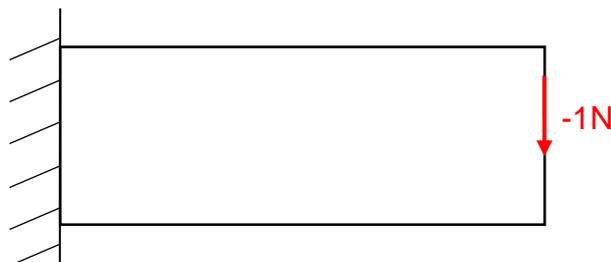


Figura 4.3. Domínio inicial e condições de contorno.

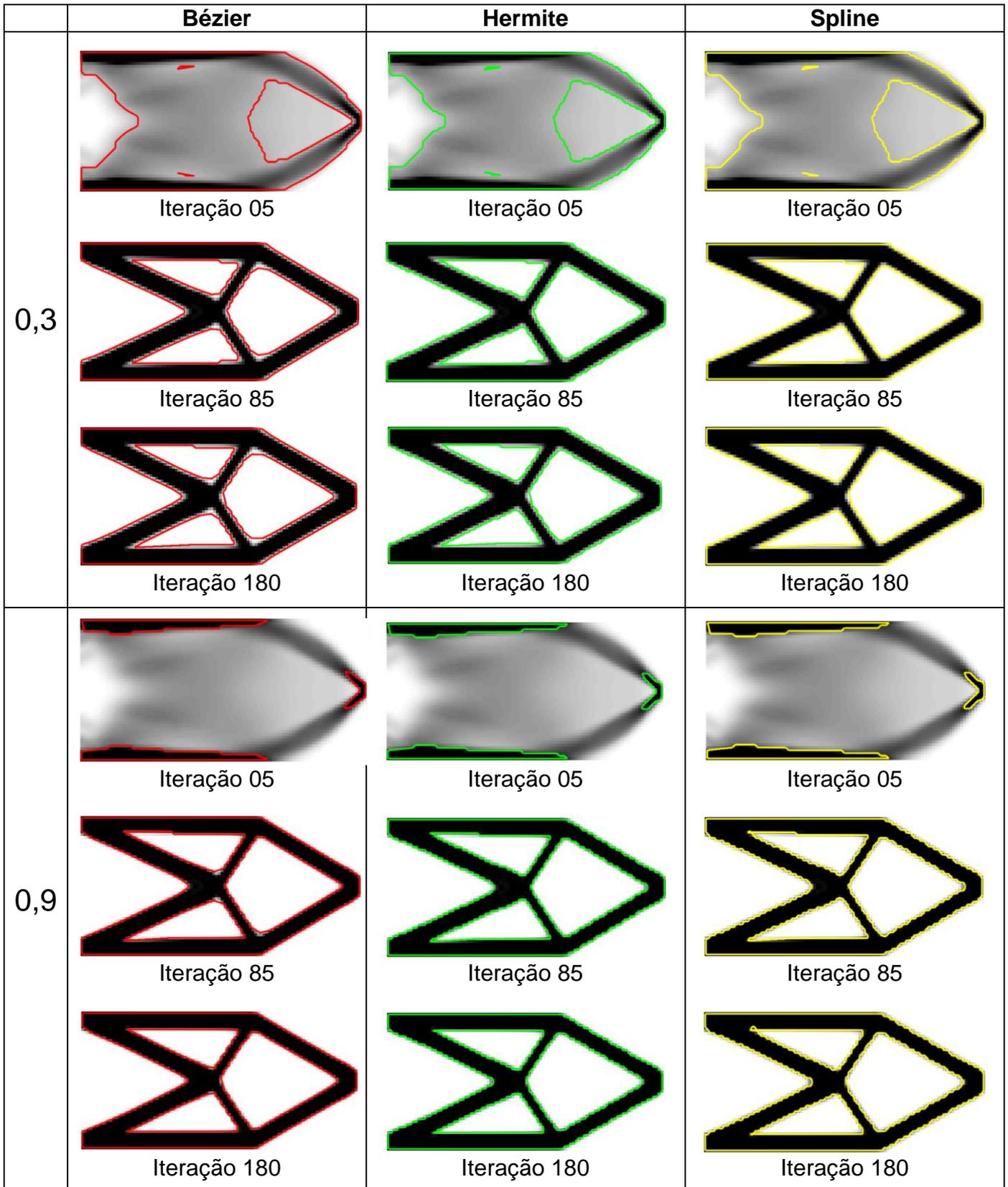


Figura 4.4. Resultado da viga 100 x 50.

O algoritmo convergiu a um resultado após 180 iterações, é possível observar a evolução da estrutura e comparativos entre as seleções de densidades, 0,3 e 0,9, na Figura 4.4. A Tabela 4.2 apresenta os valores de tensão máxima, fração de volume e quantidade de pontos de controle utilizados para densidade maiores de 0,3 e 0,9.

Na figura 4.4, fica evidente um melhor comportamento do método que utiliza elementos com densidades maiores que 0,9. Apresentam-se mais linhas retas e com menos pontos de concentração de tensão. Além de estar melhor representando a estrutura desenvolvida pelo código de otimização topológica, uma vez que as curvas de suavização estão mais próximas da estrutura ótima desenvolvida pelo método SIMP.

Tabela 4.2. Evolução da tensão de von Mises, volume fracionário e pontos de controle função objetivo durante a otimização estrutural para uma estrutura treliçada.

Iterações	Volume fracionário (%)	Tensão máxima de von Mises (MPa)
1	100	$10,16 \times 10^{-2}$
5	36,80	$3,15 \times 10^{-2}$
25	41,12	$1,33 \times 10^{-2}$
45	40,52	$1,31 \times 10^{-2}$
75	40,52	$1,31 \times 10^{-2}$
105	40,44	$1,31 \times 10^{-2}$
180	40,04	$1,30 \times 10^{-2}$

Observa-se na Tabela 4.2 que a tensão máxima se inicia a um valor bem elevado de $10,16 \times 10^{-2}$ MPa e com o aumento das iterações ela se estabiliza próximo ao valor de $1,31 \times 10^{-2}$ MPa. Nota-se que a medida que a tensão máxima se estabiliza o mesmo comportamento é apresentado pelo volume fracionário. Demonstrando que a estrutura já se encontra em um formato otimizado e o algoritmo está apenas redistribuindo as densidades para chegar ao valor de convergência em relação a função objetivo. Esse comportamento da tensão e do volume fracionário fica mais evidente quando apresentado graficamente na Figura 4.5, observando a tensão estabilizando em $1,34 \times 10^{-2}$ MPa na iteração 18. Após a iteração 18 o gráfico se torna linear, com pequenas variações e valores de tensão próximos a $1,31 \times 10^{-2}$ MPa.

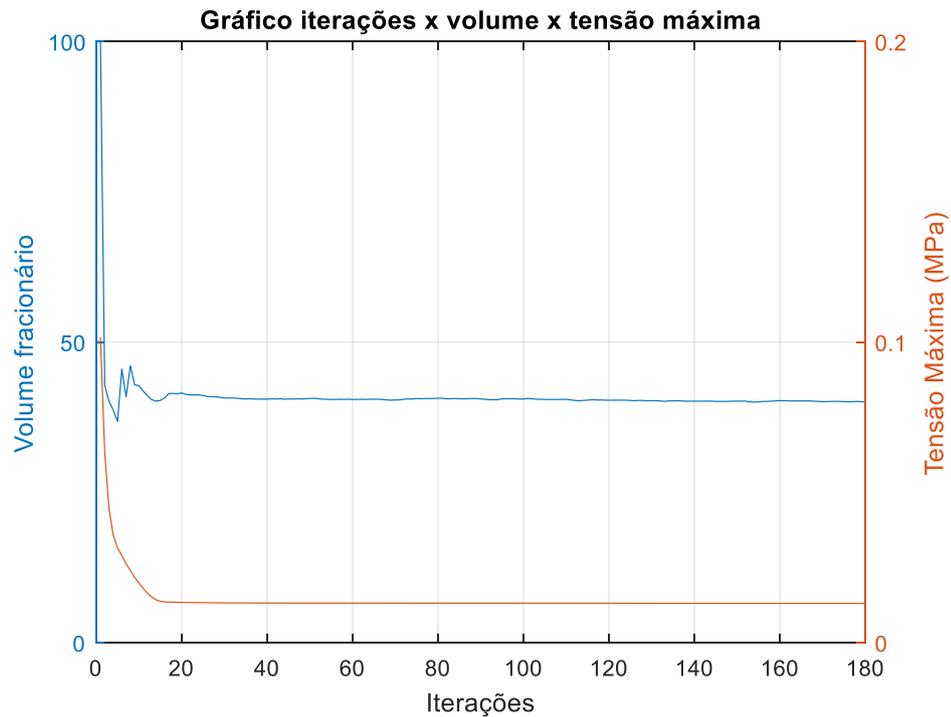


Figura 4.5. Gráfico Tensão Máxima por Iterações.

Constata-se uma redução tanto no gráfico de tensão máxima quanto no gráfico de volume devido ao processo de otimização. As densidades iniciais de todos os elementos são inseridas como valor da fração volumétrica para realocação gradual posteriormente como visto na Figura 4.6. A parte linear do gráfico indica uma menor alteração na topologia da estrutura como forma de preservar a conformidade e elementos mais solicitados.

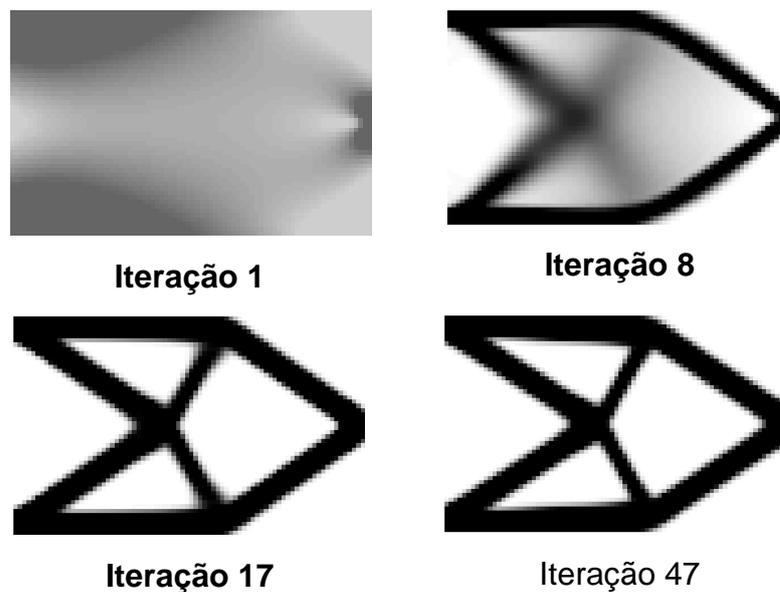


Figura 4.6. Evolução do algoritmo de otimização estrutural.

Os resultados das curvas de interpolação podem ser comparados tanto pelo desempenho visual, quanto pelo desempenho mecânico, além do custo computacional para o processamento. A Tabela 4.3 apresenta o tempo de processamento em segundos para cada iteração dos casos apresentados anteriormente. Os tempos de processamento foram obtido utilizando um processador core i3 de 2,27GHz, 4 Gb de memória ram e um sistema operacional de 64 bits.

Tabela 4.3. Tempo de processamento em cada iteração.

	Iterações	Pontos de controle	Tempo de processamento Bézier (s)	Tempo de processamento Hermite (s)	Tempo de processamento Spline (s)
0,3	5	0	9,21	10,11	9,49
	25	186	23,42	23,07	22,27
	45	302	39,76	39,27	37,65
	75	312	69,51	67,28	63,27
	105	315	107,76	103,23	100,60
	180	313	212,75	202,94	210,31
0,9	5	0	7,92	7,58	8,33
	25	56	20,92	20,16	21,50
	45	330	35,29	39,00	38,55
	75	334	61,41	89,77	76,33
	105	334	98,79	139,12	123,75
	180	334	192,09	269,12	248,23

O tempo de processamento do algoritmo aumenta conforme o aumento do número de pontos controle, bem como a quantidade de curvas necessárias para compor todo o perímetro da estrutura. Apesar do número de pontos de controle se tornarem praticamente constantes após o algoritmo determinar o formato ótimo, o tempo de processamento continua aumentando devido ao custo intrínseco de um processo iterativo, conforme apresentado na Figura 4.7. Nota-se que o aumento dos pontos de controle utilizando curvas de bézier não acrescenta tempo ao processamento, observa-se uma redução de 8 segundos ao se compara o uso das duas densidades. As curvas de Hermite apresentam um aumento de 20 segundos em relação aos dois cenários, comparando o momento em que os pontos de controle se estabilizam a partir da iteração 75, conforme visto na Tabela 3. Assim como observado com as curvas de Hermite, as curvas spline apresentam um acréscimo de 13 segundos entre os dois procedimentos na iteração 75.

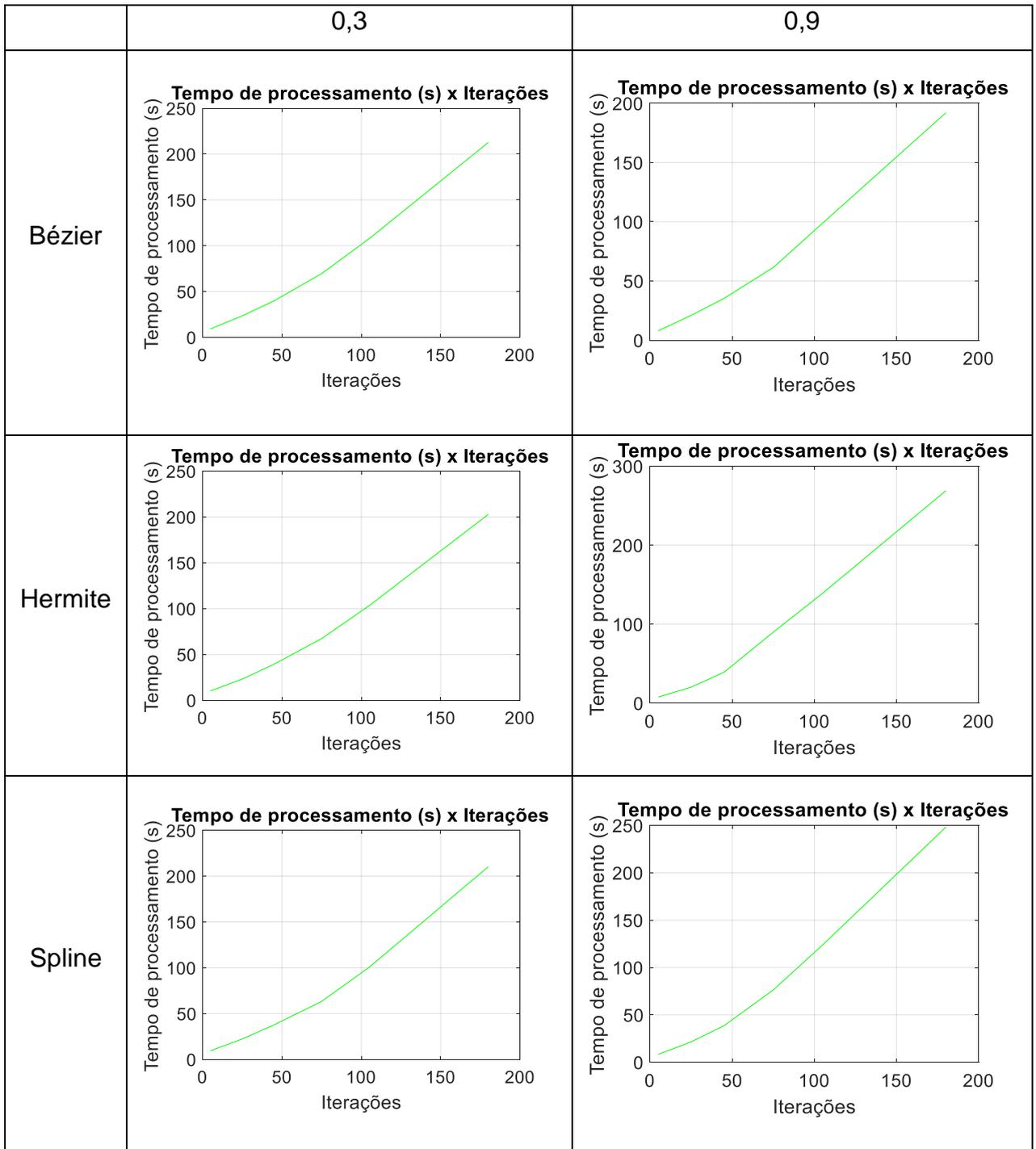


Figura 4.7. Gráfico de tempo por iteração de todas as curvas.

A utilização elementos com densidades maiores que 0,9 proporcionaram curvas mais próximas a estrutura original em todas as curvas, influenciando menos a estrutura obtida pela otimização topológica. Nota-se que o uso de curvas de Bézier proporcionaram contornos mais suaves e com menos concentradores de tensão ao se comparar com as outras curvas. As curvas de Bézier não precisam

necessariamente passar por todos os pontos de controle, apenas os pontos iniciais e finais devem estar presentes na curva. Curvas de Hermite e Spline são definidas passando por todos os pontos de controle, apresentando contornos mais ondulados. Os custos computacionais para curvas de Bézier apresentaram uma redução de 8 segundos comparando os dois cenários. Por sua vez as curvas de Hermite e Spline tiveram um acréscimo de 20 e 13 segundos, respectivamente, ao se adicionar mais pontos de controle.

4.2 ESTUDO DOS CAMPOS DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO

A partir dos resultados obtidos anteriormente as curvas foram exportadas para uma plataforma de elementos finitos com o intuito de obter os campos de tensão e deformação, bem como verificar o impacto no peso da peça comparando dessa forma as estruturas otimizadas.

O processo de suavização dos contornos considera alguns elementos com densidade acima de $0,3 \times 10^{-6} \text{Kg/mm}^3$ e $0,9 \times 10^{-6} \text{Kg/mm}^3$ como elementos completamente sólidos e com densidades de $1 \times 10^{-6} \text{Kg/mm}^3$. Desta maneira o contorno suave em torno da estrutura adiciona uma massa e volume a essa estrutura. O impacto dessas considerações é calculado utilizando as propriedades mecânicas conforme demonstrado pela Tabela 4.1. O valor de massa total da estrutura obtida pelo método de homogeneização pode ser calculado pela soma de toda a matriz de densidade no Matlab®. O cálculo das massas pela plataforma de elementos finitos é obtido ao se incluir as propriedades mecânicas do material a base de dados e aplicar a todo o sólido. A estrutura importada para software de elementos finitos utiliza um dimensionamento em que cada lado de um elemento representa 10mm e densidade de $1 \times 10^{-6} \text{Kg/mm}^3$, desta forma é obtido a massa em Kg e volume em mm^3 . A Tabela 4.4 apresenta um comparativo entre a estrutura sem o método de suavização e as estruturas suavizadas com as curvas paramétricas, demonstrando os valores de massa e volume em cada uma delas.

Tabela 4.4. – Comparativo entre a massa total da estrutura.

Estrutura	Massa (Kg) (Densidades maiores que 0,3)	Massa (Kg) (Densidades maiores que 0,9)	Volume (mm^3) (Densidades maiores que 0,3)	Volume (mm^3) (Densidades maiores que 0,9)
Sem contorno suavizado	2,000	2,000	$2,000 \times 10^6$	$2,000 \times 10^6$
Curvas de Bézier	2,254	1,906	$2,254 \times 10^6$	$1,906 \times 10^6$
Curvas de Hermite	2,239	1,906	$2,239 \times 10^6$	$1,906 \times 10^6$
Curvas Spline	2,240	1,907	$2,240 \times 10^6$	$1,907 \times 10^6$

A Tabela 4.4 demonstra que as curva paramétricas utilizada influenciaram em um aumento da massa entre 0,239 e 0,254 *Kg* ao se utilizar elementos com densidades maiores que 0,3. É apresentado também um aumento do volume entre $0,239 \times 10^6$ e $0,254 \times 10^6 \text{ mm}^3$ com o uso das densidades maiores que 0,3. O uso de densidades maiores que 0,9 resultaram em estruturas com 0,094 e 0,093 *Kg* a menos que as estruturas otimizadas. Além de uma redução também em relação ao volume de $0,094 \times 10^6$ e $0,093 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Os valores de densidade e volume para esses casos estão menores do que a otimização topológica, devido as curvas passarem no interior de alguns elementos. O algoritmo de suavização apresentou estruturas com uma redução em média de 4,7% da massa e do volume para estruturas com elementos de densidades maior que 0,9. Pode-se observar também um aumento de 11,27% ao se empregar elementos com densidades maiores que 0,3, representando um ganho considerável de massa e volume. A Figura 4.8 apresenta todas as estruturas importadas a plataforma.

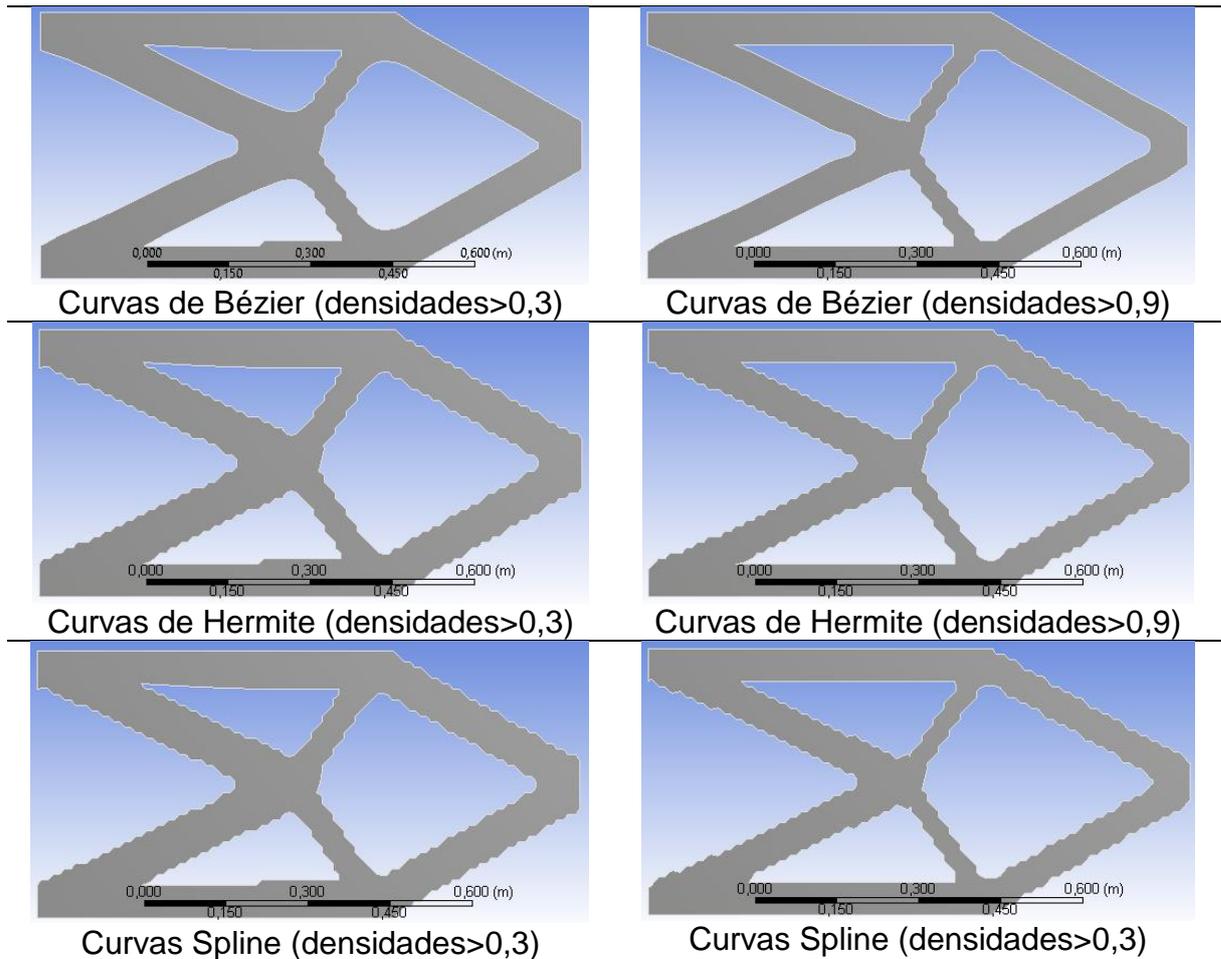


Figura 4.8. Estruturas importadas a plataforma de elementos finitos.

As condições de contorno foram adicionadas a estrutura conforme o exemplo exposto na seção 4.1, demonstrado em Figura 4.9 os pontos de apoio fixo da estrutura e a carga de -1 N aplicada na direção do eixo Y, circulado em vermelho.

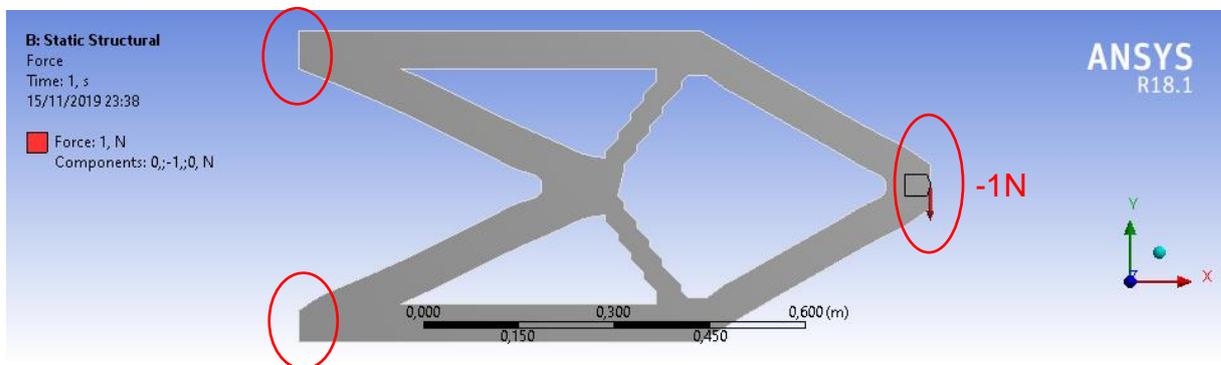


Figura 4.9. Carga e condições de contorno aplicadas a estrutura.

A convergência de malha e o refinamento realizado na plataforma de elementos finitos, necessita de atenção a algumas das métricas apresentadas pelo próprio

software. Entre elas a qualidade do elemento, esta métrica altera-se entre 0 e 1, sendo 1 um elemento em forma de um quadrado. A Figura 4.10 apresenta os gráficos de qualidade de elementos em cada uma das estruturas.

Ao se observar a Figura 4.10 verifica-se que os valores de qualidade de elemento mínimo presentes nas estruturas se encontram em torno de 0,4 e 0,5. Demonstrando uma boa malha com elementos em sua maioria com valores próximos a área de quadrados e que garantem a convergência dos resultados. Observa-se que a malha de Hermite apresentou os menores valores de qualidade de elemento devido a presença de pontos de concentração de tensão. Estes pontos de concentração de tensão dificultam a criação da malha e reduzem a qualidade da malha de elementos.

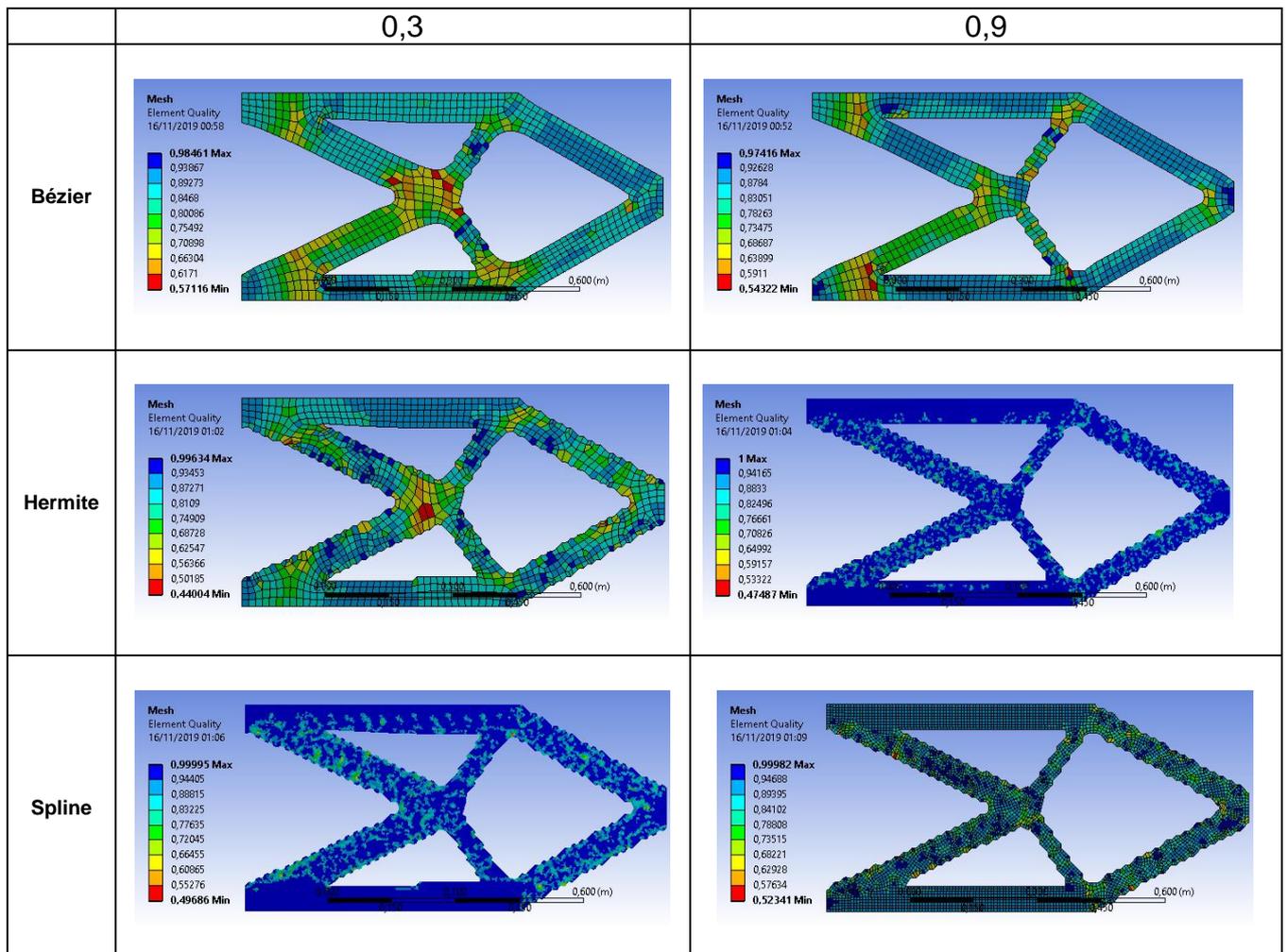


Figura 4.10. Qualidade de elementos da malha.

A Figura 4.11, Figura 4.12 e Figura 4.13 apresentam os campos de tensão, deformação e o gráfico de convergência em todas as estruturas utilizadas nesse estudo.

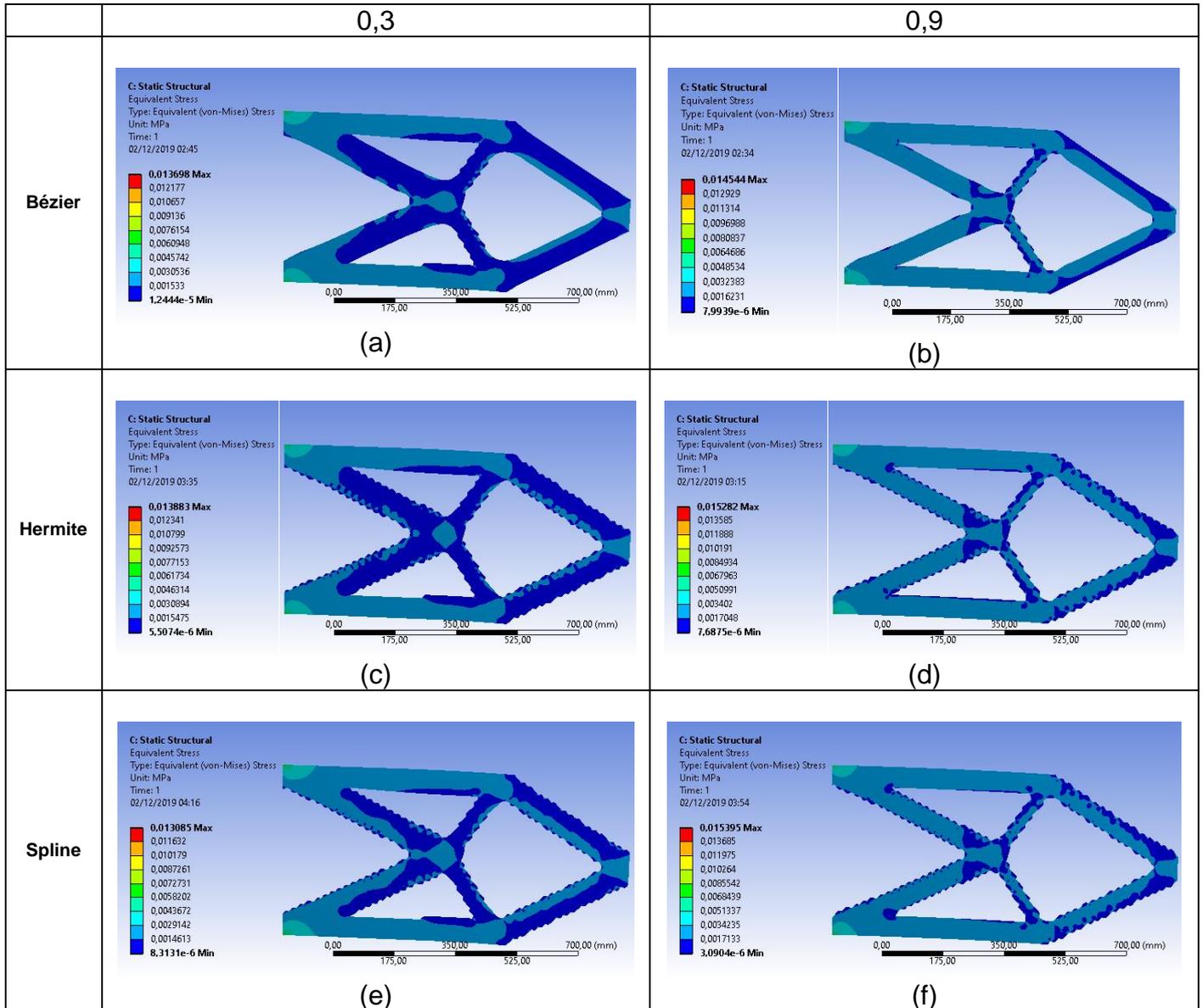


Figura 4.11. Tensões equivalentes de von Mises.

Em todas as estruturas é possível observar as maiores tensões presentes próximas aos pontos de apoio fixo, bem como as maiores deformações na região de aplicação do carregamento, conforme demonstrado na Figura 4.11 e na Figura 4.12. Em alguns casos é possível observar valores superiores de tensões comparado com os obtidos em Matlab® como na Figura 4.11 (b), Figura 4.11 (d) e Figura 4.11 (f). As tensões demonstradas na Figura 4.11 (a), Figura 4.11 (c) e Figura 4.11 (e) apresentam valores mais próximos aos obtidos no estudo anterior. Todas as estruturas

apresentaram as tensões mais elevadas nos cantos próximos a fixação dos componentes, demonstrando que é necessário fazer um arredondamento desses pontos. Nota-se que nas regiões que apresentam irregularidades apresentam tensões inferiores, comprova-se assim que esses pontos apenas acrescentam material a estrutura, sem nenhum benefício de performance.

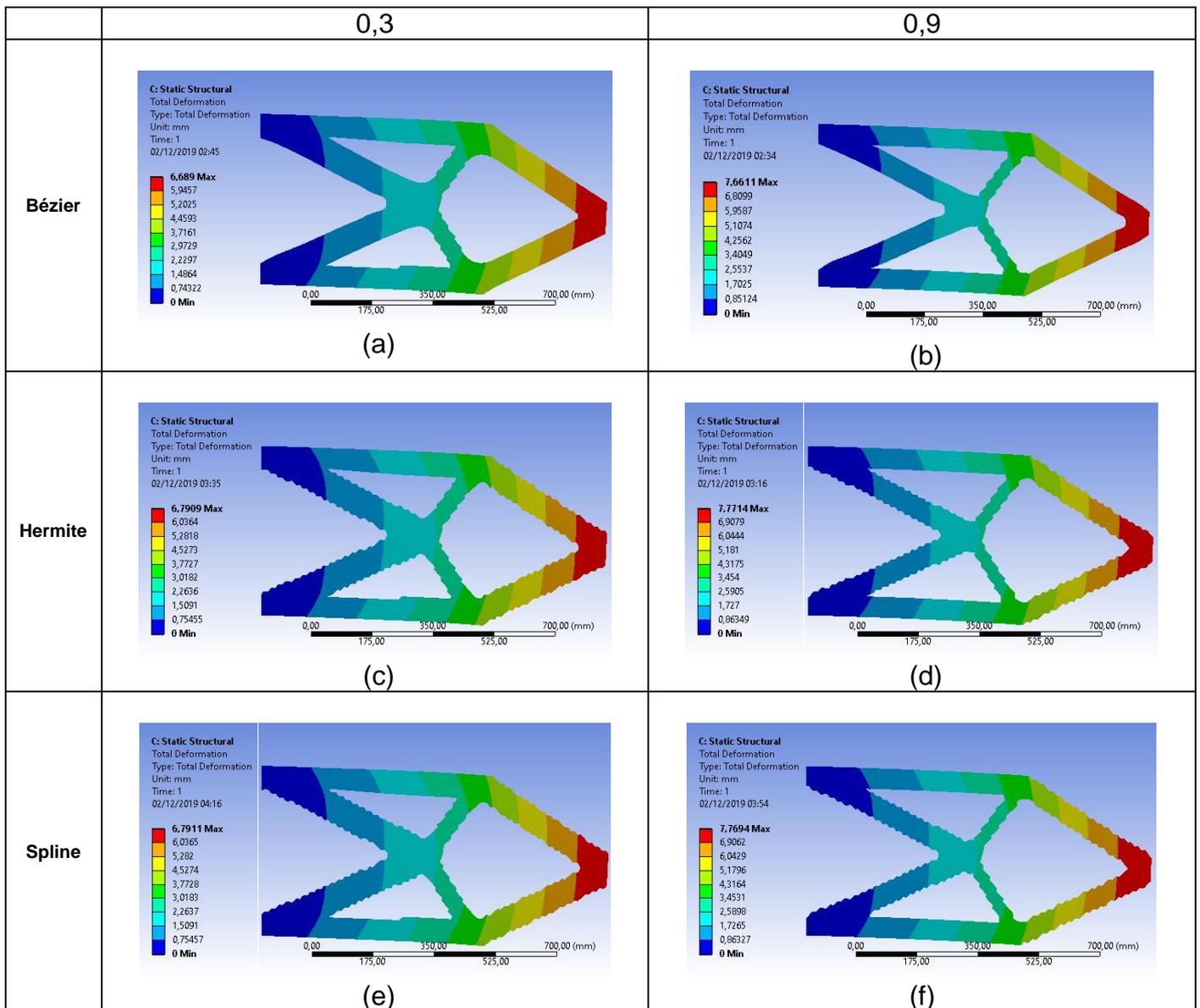


Figura 4.12. Deformações máximas.

Os resultados comprovam a eficiência do método garantindo uma estrutura de peso e volume reduzido com capacidade de suportar as condições de contorno aplicadas. As tensões máximas apresentadas são inferiores ao módulo de Young, o que garante uma estrutura que suporte as cargas sem o rompimento ou deformação

plásticas. As deformações máximas apresentadas na Figura 4.12 são de escala milimétrica e apresentam uma estrutura rígida, com deformações em torno de 6,6 mm e 7,7 mm.

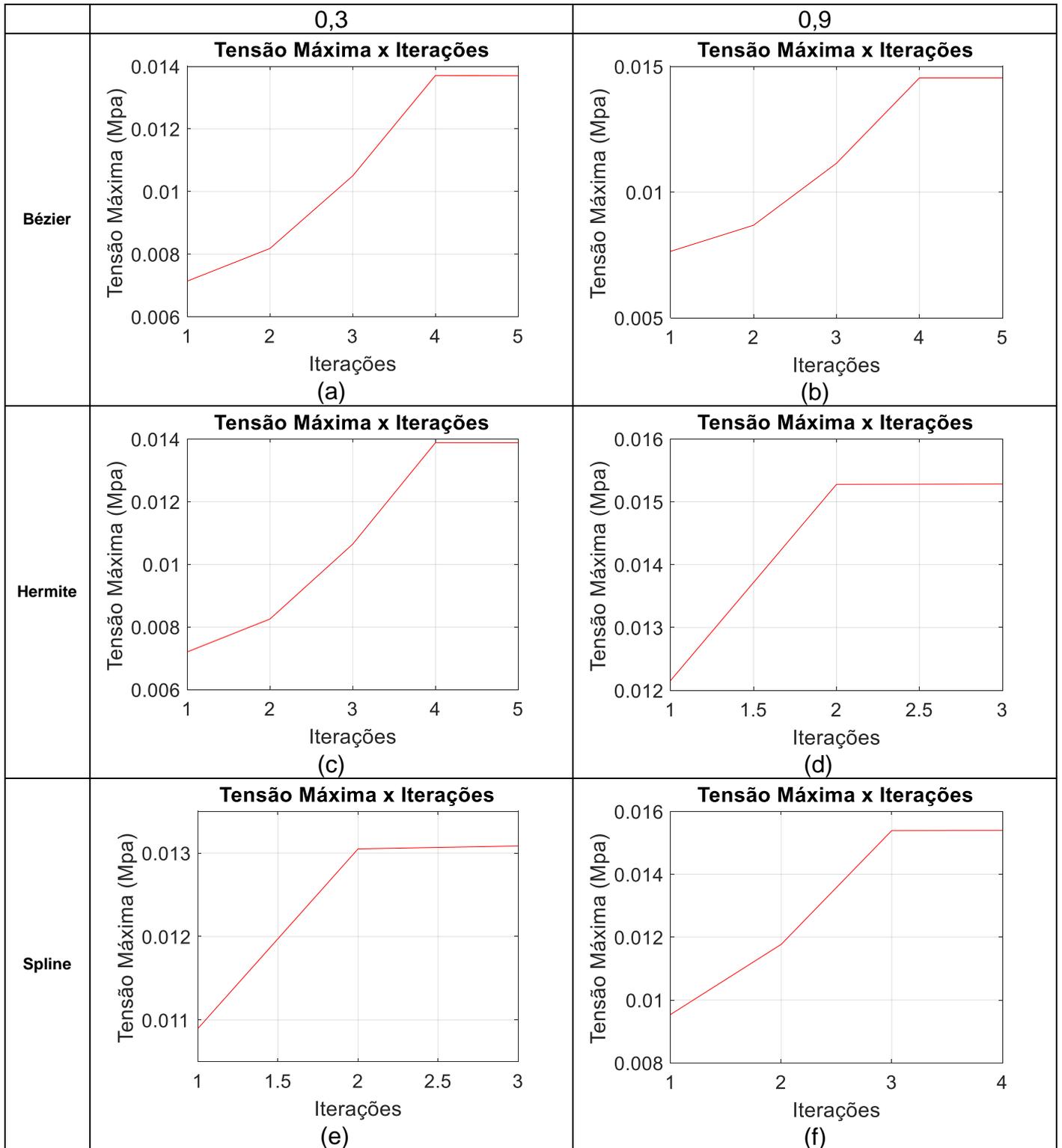


Figura 4.13. Gráficos de convergência de malha.

A Figura 4.13 apresentam gráficos com comportamento próximos ao linear para convergência das tensões o que era esperado para um estudo de convergência de malha, observa-se uma diferença relevante de aumento das tensões em cada iteração principalmente entre as iniciais e finais ocasionando devido a malha configurada.

Os estudos dos campos de tensão e deformação demonstram a eficiência do método em estabelecer estruturas otimizadas com peso reduzido e capacidade de suportar as mesmas cargas aplicadas. Nota-se que ainda é necessário melhorar o método em relação aos concentradores de tensão, bem como a criação das malhas para o estudo dos campos de tensão e deformação que divergiram em algumas ocasiões. As tensões elevadas nos cantos da estrutura próximos aos pontos de fixação demonstram a necessidade de arredondamento desses locais devido a concentração de tensão. A utilização de outras curvas não apresentou uma menor eficiência mecânica das peças, apenas em relação a uma maior quantidade de concentradores de tensão e visual.

5. CONCLUSÕES

O trabalho desenvolvido nesta dissertação apresentou a implementação de uma rotina de suavização de contornos a partir do método de homogeneização desenvolvido por Sigmund (2001). Foi apresentado um comparativo entre a utilização de curvas de Bézier, Hermite e Spline para definir os contornos suavizados. O estudo dos campos de tensão e deformação, bem como a convergência de malha em uma plataforma de elementos finitos possibilitou verificar o impacto das estruturas suavizadas em relação a estrutura otimizada. O comparativo entre as densidades definidas no algoritmo possibilitou visualizar a influência em relação a adicionar massa a estrutura.

As curvas de Bézier não apresentam um aumento no custo computacional significativo em relação ao aumento dos pontos de controle. Entretanto, curvas Spline e de Hermite apresentaram um aumento do custo computacional ao se adicionar mais pontos de controle a estrutura. O uso de elementos com densidades maiores que 0,9 proporcionaram uma estrutura mais próxima a otimizada. Por sua vez o uso de densidades maiores que 0,3 implementaram curvas mais distantes da estrutura. Deixando claro na implementação da plataforma de elementos finitos o aumento de em média 0,240 *Kg* a estrutura final para densidades maiores que 0,3. As estruturas obtidas com densidades maiores que 0,9 resultaram em estruturas em média 0,094 *Kg* mais leves.

Os estudos dos campos de tensão e deformação pelo software de elementos finitos apresentaram valores superiores a tensão máxima em algumas das estruturas. Foram apresentadas tensões de $1,45 \times 10^{-2}$ MPa, $1,52 \times 10^{-2}$ MPa e $1,53 \times 10^{-2}$ MPa superiores a encontrada no Matlab® em torno de $1,31 \times 10^{-2}$ MPa. As deformações máximas variaram entre 6,6 *mm* e 7,7 *mm* demonstrando estruturas bem rígidas.

Foi observado a existência de concentradores de tensão nos cantos da estrutura próximos aos apoios fixos, o que demonstra a necessidade de melhoria para obtenção de cantos arredondados. As regiões de irregularidades apresentam baixas tensões não apresentando relevância a performance da estrutura.

5.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

- Implementar técnicas para arredondar os cantos da estrutura suavizadas;
- Implementar melhorias em relação as regiões que apresentam irregularidades;

- Implementar a formulação para outros problemas clássicos da literatura;
- Realizar estudo comparativo entre outros métodos de otimização com contornos suavizados;
- Realizar estudo sobre outras variáveis das curvas paramétricas que podem influenciar nos resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREASSEN, E. et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.L.], v. 43, n. 1, p. 1-16, 2011.

ANGEL, Edward; SHREINER, Dave; **Interactive Computer Graphics: A top-down approach with shader based opengl**. 6. ed. [S.l.]: Pearson, 2012.

AYMONE, J.L.F. Implementação de estratégia de refinamento tipo h, sem formação de nós irregulares, no sistema Gaeli. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1996.

BATHE, Klaus-Jürgen. **Finite element procedures**. 1 ed. Estados Unidos da América: Prentice Hall, Pearson Education, Inc., 1996. 1065 p.

BENDSOE, Martin P.. **Optimization of structural topology, shape, and material**. 1 ed. [S.L.]: Springer Science & Business Media, 1995. 273 p.

BENDSOE, Martin Philip; KIKUCHI, Noboru. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North Holland, v. 71, p. 197-224, 1988.

BENDSØE, M. P.. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.L.], v. 1, n. 4, p. 193-202, 1989.

HAFTKA, Raphael T.; V.GRANDHI, Ramana. Structural shape optimization—A survey: subtítulo do artigo. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**: v. 57, n. 1, p. 91-106, 1986.

HAFTKA, Raphael T.; GÜRDAL, Zafer; **Elements of Structural Optimization**. ed. London: Kluwer Academic Publishers, 1992.

LEE, S. et al. Smooth Boundary Topology Optimization Using B-spline and Hole Generation. **International Journal of CAD/CAM**, [S.L.], v. 7, n. 1, p. 11-20, 2007.

LIN, C.-Y.; CHAO, L.-S.. Automated image interpretation for integrated topology and shape optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**: v. 20, n. 2, p. 125-137, 2000.

NOVOTNY, A.A.; FANCELLO, E.A. Um refinamento h, p e hp adaptativo na análise de flexão de placas semi-espessas. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingenieria**, vol. 14, n. 1, p. 25-48, 1998.

OSHER, Stanley; SETHIAN, James A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. **Journal of Computational Physics**, [S.L.], v. 79, n. 1, p. 12-49, 1988.

PARTHASARATHY, Anand; KUMAR, Ashok V.. Topology optimization using B-spline finite elements. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.L.], v. 44, 2011.

PEREIRA, Orlando J. B. A. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos na Análise de Problemas Planos de Elasticidade**. Lisboa, 2005.

RABUT, Christophe. On Pierre Bézier's life and motivations. **Computer-Aided Design**, v. 34, n. 7, p. 493-510, 2002.

Sederberg, T. W. Computer Aided Geometric Design Course Notes, **Department of Computer Science Brigham Young University**, 2014

SETHIAN, J. A.; WIEGMANN, Andreas. Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods. **Journal of Computational Physics**, [S.L], v. 163, n. 2, p. 489-528, 2000.

SIGMUND, Ole. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.L], v. 33, n. 4, p. 401-424, 2007.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [S.L], v. 21, n. 2, p. 120-127, 2001.

SIGMUND, O.; , J. Petersson. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, [S.L], v. 16, p. 68-75, 1998.

SILVA, Emílio Carlos Nelli. Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas. **Revista Máquinas e Metais**, São Paulo, 2002.

SILVA, Emílio Carlos Nelli. PMR 5215 – OTIMIZAÇÃO APLICADA AO PROJETO DE SISTEMAS MECÂNICOS. São Paulo, 2003. (Apostila).

SHOBEIRI, Vahid. Structural Topology Optimization Based on the Smoothed Finite Element Method. **Latin American Journal of Solid and Structures**, v. 13, n. 2, p. 378-390, 2016.

STRANG, Gilbert; KOHN, Robert V.. Optimal design in elasticity and plasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 22, n. 1, p. 183-188, 1986.

TVERGAARD, Viggo. Influence of post-buckling behaviour on optimum design of stiffened panels. **International Journal of Solids and Structures**, v. 9, n. 12, p. 1519-1533, 1973.

YI, Guilian; KIM, & Nam H.. Identifying boundaries of topology optimization results using basic parametric features. **Struct Multidisc Optim**, [S.L], v. 55, p. 1641-1654, 2017.

Z Wasiutynski. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to equal strength. **Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Techniques**, [S.L], v. 8, n. 6, p. 259-268, 1960.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.; ZHU, J.Z.; **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 6. ed. [S.l.]: Elsevier, 2005.

ZOZ, Jeverson. **ESTUDO DE MÉTODOS E ALGORITMOS DE SPLINES BEZIER, CASTELJAU E B-SPLINE**. 1999. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 1999.

ANEXO I: Método de elementos finitos

O estudo de estruturas antes do desenvolvimento do método de elementos finitos (MEF) era feito através da solução de sistemas de equações de derivadas parciais, utilizando de séries de Fourier para auxiliar na solução dos problemas. Devido a tal complexidade essa metodologia era utilizada para solução de estruturas de geometria simples. O método de diferenças finitas também foi utilizado como o intuito de vencer algumas das limitações oferecidas pelo método das derivadas parciais. No entanto, a partir da década de 60 com o advento do computador o método de elementos finitos toma grande proporção e demonstra um elevado avanço tecnológico deixando os métodos anteriores praticamente extintos conforme abordado.

Zienkiewicz, et al (2005) diz que o método de elementos finitos é a representação por um número finito de elementos (divisões) de um problema contínuo. Esse modelo apresenta também um número finito de parâmetros, bem como o resultado representado pela união dessas divisões deve respeitar o padrão de problemas discretos.

Alguns métodos para solução de análise estrutural sendo os principais a aproximação de Galerkin, que utiliza diferenças finitas, e o método de Rayleigh Ritz, o qual utiliza a energia potencial para equacionar o método de elementos finitos. Será abordado o método de Galerkin com intuito de elucidar o funcionamento da metodologia de elementos finitos, conforme descrito por Zienkiewicz, et al (2005).

Utilizando de uma malha retangular composta por 4 nós com distância a e b , conforme demonstrado pela Figura A.1. O deslocamento de cada elemento pode ser aproximado em um vetor como em Eq. A.1. Sendo que a representa o total de nós em cada elemento, e o elemento estudado, u o deslocamento total, \hat{u} o vetor composto por cada nó em cada elemento, \dot{N} é chamado de função de forma, em alguns casos é empregado uma função de interpolação, geralmente emprega-se uma matriz identidade exposto em Eq. A.3.

$$u \approx \hat{u} = \sum_a \dot{N}_a \tilde{u}_a^e = [\dot{N}_1, \dot{N}_2, \dots] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}^e = \dot{N} \tilde{u}^e \quad (\text{A.1})$$

Devido a se empregar dois graus de liberdade cada nó terá um deslocamento na horizontal e outro na vertical conforme em Eq. A.2.

$$u = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{N}_a(x_a, y_a) = I \quad (\text{A.3})$$

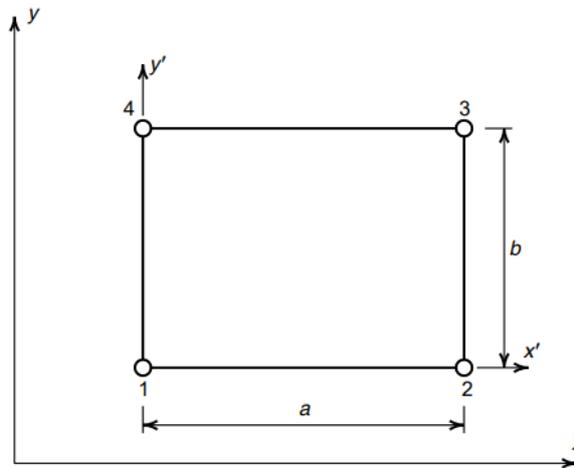


Figura A.1. Elemento retangular composto por 4 nós. Fonte: Pereira (2005).

Para o cálculo é utilizado coordenadas cartesianas locais que são calculadas de acordo ao plano de coordenadas cartesianas globais.

$$x' = x - x_1 \quad (\text{A.4})$$

$$y' = y - y_1 \quad (\text{A.5})$$

O cálculo de deformação em cada nó é operado segundo Eq. A.6 para o eixo X e Eq. A.6 para o eixo Y , com coeficientes α .

$$u = \alpha_1 + x'\alpha_2 + y'\alpha_3 + x'y'\alpha_4 \quad (\text{A.7})$$

$$v = \alpha_5 + x'\alpha_6 + y'\alpha_7 + x'y'\alpha_8 \quad (\text{A.8})$$

Substituindo os valores de coordenadas de cada nó demonstrado na Figura A.1, obtém-se:

$$\tilde{u}_1 = \alpha_1 \quad (\text{A.9a})$$

$$\tilde{u}_2 = \alpha_1 + a\alpha_2 \quad (\text{A.9b})$$

$$\tilde{u}_3 = \alpha_1 + a\alpha_2 + b\alpha_3 + ab\alpha_4 \quad (\text{A.9c})$$

$$\tilde{u}_4 = \alpha_1 + b\alpha_3 \quad (\text{A.9d})$$

A equação de deformação pode ser escrita em função dos deslocamentos nodais tanto para horizontal como vertical:

$$u = \frac{1}{ab} [(a - x')(b - y')\tilde{u}_1 + x'(b - y')\tilde{u}_2 + x'y'\tilde{u}_3 + (a - x')\tilde{u}_4] \quad (\text{A.10})$$

A partir da Eq. A.10. Obtém-se as equações para função de forma \dot{N}_a :

$$\dot{N}_1 = \frac{(a - x')(b - y')}{(ab)} \quad (\text{A.11a})$$

$$\dot{N}_2 = \frac{x'(b - y')}{(ab)} \quad (\text{A.11b})$$

$$\dot{N}_3 = \frac{x'y'}{(ab)} \quad (\text{A.11c})$$

$$\dot{N}_4 = \frac{(a - x')y'}{(ab)} \quad (\text{A.11d})$$

Com o cálculo dos deslocamentos em cada ponto é possível determinar a deformação em cada ponto:

$$\varepsilon = Su \quad (\text{A.12})$$

Sendo que S é um operador diferencial adequado. Utilizando a Eq. A.10, podemos aproximar a Eq. A.12 em:

$$\varepsilon \approx \hat{\varepsilon} = B\tilde{u}^e \quad (\text{A.13})$$

B pode ser determinado por:

$$B = S\dot{N} \quad (\text{A.14})$$

Para se determinar o plano de tensão é necessário calcular a deformação relevante no plano conforme:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

O plano de deformação é utilizado para definir o plano de tensão, sendo que é considerado um valor de deformação inicial ε_0 e também uma tensão inicial σ_0 que correspondem as condições iniciais do material. A tensão então pode ser determinada a partir da variação das deformações ε conforme, assumindo um comportamento elástico linear:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (\text{A.16})$$

D é uma matriz de elasticidade contendo as propriedades do material. Para um estudo de tensão no plano, deve ser considerado três componentes de tensão:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Pode-se obter a matriz D utilizando de equações habituais de relação tensão-deformação:

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{x0} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \sigma_{x0}) - \frac{\nu}{E}(\sigma_y - \sigma_{y0}) \quad (\text{A.18})$$

$$\varepsilon_y - \varepsilon_{y0} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x - \sigma_{x0}) + \frac{1}{E}(\sigma_y - \sigma_{y0}) \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma_{xy} - \gamma_{xy0} = \frac{2(1 + \nu)}{E}(\tau_{xy} - \tau_{xy0})$$

(A.20)

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

(A.21)

considerando E como módulo de elasticidades do material e ν coeficiente de Poisson do material. As forças equivalentes nodais, o qual representa a distribuição de forças no elemento podem ser obtidas:

$$q = \begin{bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(A.22)

Tendo a mesma quantidade de componentes presente no cálculo dos deslocamentos u_a^e . A distribuição de forças b , corresponde a quantidade de força atuante na unidade de medida de volume no elemento.

$$q_a^e = \begin{bmatrix} u_a^e \\ v_a^e \end{bmatrix}$$

(A.23)

$$b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}$$

(A.24)

Caso não se tenha uma força equivalente nodal, as forças b em cada nó devem respeitar o equilíbrio:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$$

(A.25)

A determinação das forças nodais atuantes devido ao deslocamento pode ser calculada:

$$t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

(A.26)

Sendo t a rigidez do plano de tensão, e as componentes n_x e n_y perpendiculares ao plano do elemento. A resultante em cada lado do retângulo é dada pelo produto de t pelo comprimento da face l_a :

$$l_a t = \begin{bmatrix} l_a t_x \\ l_a t_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Combinando as equações de deformação e tensão, obtém-se:

$$q = B^T [D(B\tilde{u}^e - \varepsilon_0) + \sigma_0] \Delta t = K^e \tilde{u}^e + f^e \quad (\text{A.28})$$

Que representa a lei de Hooke, utilizada nos métodos de elementos finitos. Como pode ser observado em um único estudo de um elemento com 4 nós o método mais simples possui uma quantidade considerável de cálculos, ao se pensar então em um estudo com 4.000 elementos cada um com 4 nós torna-se inviável o cálculo manual desse problema. Devido a isso e com o advento do computador vários softwares foram desenvolvidos para solução de diversos problemas de engenharia e ciência podendo citar os mais conhecidos ANSYS, Abaqus, SolidWorks, Catia que apresentam módulos de elementos finitos. Além da possibilidade de se utilizar algoritmos em Matlab, C++, Python também com uma quantidade considerável de estudos para solução de análises estruturais.