Projeto de Graduação 2

INVESTIGAÇÃO SOBRE ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM PLACAS FINAS LOCALMENTE RESSONANTES

André Toshiaki Nishimoto

Brasília, dezembro de 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASILIA
Faculdade de Tecnologia

Projeto de Graduação 2

INVESTIGAÇÃO SOBRE ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES EM PLACAS FINAS LOCALMENTE RESSONANTES

André Toshiaki Nishimoto

Relatório submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro, ENM/UnB _____
Orientador

Prof. Dr. Alberto Carlos Guimarães Castro Diniz, ENM/UnB _____

Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Marcela Rodrigues Machado, ENM/UnB _____

Agradecimentos

Gostaria de deixar minha gratidão ao meu pai Satoshi, à minha mãe Olga, à minha vó Michico, às minhas tias Juliana e Hitomi, à minha prima Fabiana e aos meus irmãos Aline e Taiyo, que apesar de muito sacrifício, me deram suporte para estar na Universidade de Brasília.
Agradeço imensamente aos professores que tive a oportunidade de conhecer, em especial, Professor Adriano Todorovic que além do seu incrível conhecimento acadêmico, deixo a minha admiração pela dedicação, paciência e gentileza.
Por fim, gostaria deixar agradecimento aos meus grandes amigos, os quais proporcionaram companheirismo e experiências incríveis nessa jornada da graduação.

André Toshiaki Nishimoto

RESUMO

A evolução dos materiais de engenharia e a constante busca por inovação no campo da indústria trazem consigo o interesse pela manipulação das propriedades naturais dos materiais com intuito de se obter estruturas mais leves e de alto desempenho na atenuação de ruído e de vibração, o que fomenta o campo dos metamateriais estruturais. Tipicamente, os trabalhos desenvolvidos na área de metaestruturas analisam o comportamento dinâmico utilizando abordagem de propagação de ondas em estruturas periódicas. Em trabalhos recentes têm sido trazida a perspectiva de abordagem modal, possibilitando análise de metaestruturas finitas. Este projeto de graduação propõe modelo simplificado para pré projeto de metaestruturas, por meio da investigação do comportamento dinâmico de placas finas localmente ressonantes utilizando abordagem modal e método de modos assumidos na solução analítica. A proposta traz a possibilidade de avaliar os efeitos na resposta em frequência dos parâmetros de razão de massa e fator de perda na estrutura de base e nos ressonadores.

ABSTRACT

The evolution of engineering materials and the constant search for innovation in the field of industry bring with them an interest in manipulating the natural properties of materials in order to obtain lighter structures and high performance in noise and vibration attenuation, which promotes the field of resource metamaterials. Typically, the works developed in the area of metastructures analyze the dynamic behavior using the wave propagation approach in periodic structures. In recent works, the perspective of a modal approach has been brought, allowing the analysis of finite metastructures. This graduation final project proposes a simplified model for initial design of metastructures, by investigating the dynamic behavior of locally resonant thin plates using the modal approach and assumed-method mode in the analytical solution. The proposal brings the possibility of evaluating the effects on the frequency response of the parameters of mass and loss factor in the base structure and in the resonators.

SUMÁRIO

1 Introdução **1**
1.1 Metamateriais 2
1.1.1 Metamateriais localmente ressonantes 2
1.1.2 Abordagem modal em metamateriais localmente ressonantes 3
1.2 Sobreposição modal 4
1.3 Número de Onda 5
1.4 Objetivos 6
1.5 Metodologia 7
1.6 Estrutura do trabalho 8

2 Fundamentação Teórica **9**
2.1 Formulação Newtoniana para placa de *Kirchhoff* 9
2.2 Análise modal da placa fina 13
2.2.1 Ortogonalidade das autofunções 15
2.2.2 Condições de contorno de apoio simples 17
2.2.3 Frequências naturais 17
2.2.4 Normalização pela massa 18
2.3 Vibração forçada em uma placa fina 19
2.4 Resposta forçada em uma placa localmente ressonante 20

3 Resultados numéricos e discussão **24**
3.1 Análise da Placa de Kirchhoff 24
3.1.1 Frequências e modos naturais 25
3.1.2 Resposta em frequência da Receptância 26
3.1.3 Resposta da placa para diferentes posições de entrada 27
3.1.4 Influência do fator de amortecimento na Receptância 33
3.2 Análise da Placa com Ressonadores 40
3.2.1 Influência da razão de massa na Receptância 40
3.2.2 FRF da Receptância com presença de amortecimento proporcional 44
3.2.3 Metamaterial localmente ressonante com amortecimento estrutural nos ressonadores 45

4 Conclusões finais **49**

4.1 Recomendação para trabalhos Futuros 49

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 51

Anexos 53

I Código 54

I.1 Código para obtenção das frequências naturais da Placa fina para condição de apoio simples 54

I.2 Código para obtenção das formas modais normalizadas 55

I.3 Código para obtenção da receptâcia ao longo da placa para diferentes frequências de excitação 56

I.4 Código para ontenção da resposta em frequência da placa fina para diferentes fatores de amortecimento estrutural 58

I.5 Código de obtenção da resposta em frequência do metamaterial para diferentes razões de massa 59

I.6 Código para obtenção da resposta em frequência do metamaterial comparativo com a placa fina 61

I.7 Código para obtenção da receptância do metamaterial sob diferentes frequências de excitação e com a frequência de sintonização fixa dos ressonadores 63

I.8 Código para obtenção da resposta em frequência do metamaterial para diferentes fatores de perda na placa 65

I.9 Código para obtenção da resposta em frequência do metamaterial para diferentes fatores de perda nos ressonadores 67

I Frequências naturais 70

I.1 100 primeiras frequências naturais da placa (rad/s) 70

LISTA DE FIGURAS

1.1 Função resposta em frequência de uma placa retangular 5
1.2 Analogia entre frequência temporal e número de onda. 6

2.1 Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal da placa. 9
2.2 Momento resultante em um elemento infinitesimal da placa. 10
2.3 Visualização do deslocamento do plano ao longo do eixo x 11
2.4 Metaestrutura localmente ressonante, placa em vibração transversal. 20

3.1 Placa de fina em estudo. 24
3.2 Modos Normalizados nas frequências naturais de análise, Tabela (3.2). 26
3.3 Amplitude da resposta em frequência da receptância resposta no centro da placa para diferentes posições de entrada, Tabela (3.3). 27
3.4 Comparação do modo (2,2) para excitação pontual na posição de contorno. 28
3.5 Comparação do modo (5,5) para excitação pontual na posição de contorno. 28
3.6 Comparação do modo (7,7) para excitação pontual na posição de contorno. 29
3.7 Comparação do modo (10,10) para excitação pontual na posição de contorno. 29
3.8 Comparação do modo (2,2) para excitação pontual $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m. 29
3.9 Comparação do modo (5,5) para excitação pontual $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m. 30
3.10 Comparação do modo (7,7) para excitação pontual $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m. 30
3.11 Comparação do modo (10,10) para excitação pontual $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m. 30
3.12 Comparação do modo (2,2) para excitação pontual $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$. 31
3.13 Comparação do modo (5,5) para excitação pontual $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$. 31
3.14 Comparação do modo (7,7) para excitação pontual $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$. 32
3.15 Comparação do modo (10,10) para excitação pontual $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$. 32
3.16 Amplitude de FRF da receptância da placa com amortecimento estrutural (3.4). 33
3.17 $\omega = 349$ rad/s. 34
3.18 Receptância para $\omega = 349rad/s$. 35
3.19 $\omega = 2178$ rad/s. 36
3.20 Receptância para $\omega = 2178rad/s$. 36
3.21 $\omega = 4278rad/s$. 37
3.22 Receptância para $\omega = 4278rad/s$. 38
3.23 $\omega = 8712rad/s$. 39
3.24 Receptância para $\omega = 8712rad/s$. 40
3.25 Amplitude de FRF Receptância com ressonadores. 41

3.26 Receptância da placa com ressonadores, razão de massa $\epsilon = 0.1$. 42
3.27 Amplitude de resposta em frequência da receptância para razão de massa de ressonadores $\epsilon = 0.3$. 44
3.28 Receptâncias da placa para ressoandores com razão de massa $\epsilon = 0.3$ na posição de entrada $x_e = 0.1m$ e $y_e = 0.1m$. 45
3.29 Amplitude de FRF Receptância da Placa com ressonadores para amortecimentos estruturais $\eta = 0$, $\eta = 0.001$, $\eta = 0.01$, $\eta = 0.1$ e $\eta = 0.5$. 46
3.30 Amplitude de FRF Receptância da Placa Localmente ressonante com presença de amortecimentos estruturais nos ressonadores de $\eta_p = 0$, $\eta_p = 0.001$, $\eta_p = 0.01$, $\eta_p = 0.1$ e $\eta_p = 0.5$. 47

LISTA DE TABELAS

3.1 Caracterísicas da placa. 25
3.2 Frequências naturais. 25
3.3 Posição de entrada do forçamento. 26
3.4 Amortecimento estrutural na placa 33

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a	Comprimento	[m]
b	Largura	[m]
c	Velocidade de fase	[m/s]
h	Espessura	[m]
k	Número de onda	[1/m]
k_p	rigidez equivalente dos ressonadores	[kg/s^2]
m_p	Massa dos ressonadores	[kg]
p	Forçamento em coordenadas normais	[N/m^2]
q	Forçamento por unidade de área	[N/m^2]
t	Tempo	[s]
u	Deslocamento em x	[m]
v	Deslocamento em Y	[m]
y	Deslocamento em coordenadas normais	[m]
w	Deslocamento em Z	[m]
A	Área	[m^2]
I	Momento de inércia	[m^4]
M	Momento fletor	[N$\cdot$ m]
N	Tensão normal	[N/m^2]
Q	Tensão cisalhante	[N/m^2]
W	Forma modal	[m]

Símbolos Gregos

λ	Comprimento de onda	[m]
ω	Frequência	[rad/s]
ω_p	Frequência Natural dos ressonadores	[rad/s]
$\omega_{m,n}$	Frequência Natural	[rad/s]
ρ	Densidade	[m^3/kg]
σ	Tensão	[N/m^2]
$\in$	Deformação	[m]
ρ	Massa específica	[kg/m^3]
Δ	Variação entre duas grandezas similares	

Grupos Adimensionais

α	Constante de integração
β	Constante de integração
γ	Constante de integração
ν	Coeficiente de Poisson
Λ	Autovalor
m	Modo em x
n	Modo em y
A_1	Amplitude
N	Conta modos
g	Função temporal
ϵ	Razão de massa
$\mathbf{m}$	Operador inercial
$\mathbf{L}$	Operador de rigidez

Subscritos

e	Entrada
r	Resposta
m, n	modo
p	Ressonador

Capítulo 1

Introdução

A evolução dos materiais de engenharia é acompanhada de relações históricas do homem e a sua capacidade de manusear, transformar e descobrir recursos disponíveis. A humanidade se viu nas eras de pedra, de cobre, de bronze, de ferro, em que grandes mudanças se deram até o surgimento das ligas com propriedades mecânicas superiores, na década de 1950. Tal desenvolvimento, em conjunto com a área de materiais poliméricos e compósitos, foi fruto da demanda tecnológica criada a partir da indústria aeronáutica e atualmente está presente no cotidiano da sociedade [1]. O ano 1968 é marcado por um questionamento que traz uma mudança de rumo nas possibilidades do homem de manipular propriedades dos recursos naturais. Veselago marca a origem teórica de metamateriais ao propor a possibilidade de se obter materiais com permissibilidade elétrica e magnética negativas [2]. Dessa forma, metamateriais podem ser definidos como materiais projetados de maneira que possuam propriedades incomuns e efetivas por meio de seu arranjo estrutural [3]. O desenvolvimento acadêmico e a elaboração de projetos nessa área de estudos visam viabilizar, de forma racional, meios e materiais artificiais com características eletromagnéticas, ópticas, mecânicas com desempenho dinâmico excepcionais não encontrados na natureza, que antes pareciam restrições fundamentais [3].

A intrínseca relação entre o desenvolvimento tecnológico, desenvolvimento sustentável e o conforto humano na indústria demanda soluções cada vez mais inovadoras, que sejam leves, de baixo custo e grande benefício, com capacidade excepcional de atenuação de ruídos. Soluções para isolamento acústico com metamateriais localmente ressonantes, têm sido um campo de estudos relevante na engenharia mecânica [4].

Tipicamente, os trabalhos desenvolvidos na área de metamateriais têm como foco analisar comportamento dinâmico dos metamateriais estruturais, ou metaestruturas, sob uma abordagem de propagação de ondas em estruturas periódicas. Essa abordagem consiste em definir uma estrutura infinita, composta por células unitárias periódicas, cujo comportamento equivalente localmente ressonante é estendido ao longo da estrutura principal, considerado o comportamento dinâmico equivalente total. Alternativamente, [5], propôs uma abordagem modal para a análise desse tipo de estrutura, que por sua vez, simplifica a análise de uma estrutura finita, típica em aplicações de engenharia mecânica, com uma consideração de infinitos ressonadores distribuídos ao longo da

estrutura de base.

1.1 Metamateriais

Metamateriais podem ser definidos como materiais projetados que possuem propriedades dinâmicas excepcionais dadas por meio de seu arranjo estrutural e geométrico [3], isto é, possuem propriedades diferentes das quais podem ser comumente encontradas na natureza. A primeira evidência de um metamaterial factível e fabricado surgiu com [6], ao desenvolver o primeiro metamaterial eletromagnético a partir de ressonadores periódicos de cobre em uma matriz de fibra de vidro, materiais comumente utilizados. No âmbito da engenharia mecânica, num período próximo ao trabalho de Shelby, foi publicado o primeiro metamaterial desenvolvido por [7], chamado de material sônico localmente ressonante, isto é, uma estrutura que possui um determinado comportamento excepcional em frequência capaz de criar bandas espectrais conhecidas como *bandgaps* [7] .

Os "*bandgaps*"são uma banda de frequência na qual a onda não é propagada, esse fenômeno é observado por meio de sobreposição de ondas destrutivas, conhecida como *Bragg destructive scattering* ou cristais fonônicos. Essa ocorrência está atrelada à relação próxima entre o comprimento de onda incidente e a ordem de grandeza da rede do metamaterial. Outra forma de obtenção de *bandgap* está nos metamateriais localmente ressonantes, os quais são aplicados quando o comprimento de onda é muito maior que a dimensão da célula unitária, o que possibilita atenuação em mais baixas frequências [8], sendo ideal para aplicações de atenuação de ruído e vibrações em engenharia mecânica.

1.1.1 Metamateriais localmente ressonantes

Uma das principais características de metamateriais localmente ressonantes são a possibilidade de criar *bandgaps*, mesmo quando os comprimentos de onda são muito maiores que a sua célula unitária, o que viabiliza diversas aplicações [5]. Uma das áreas de estudo é a atenuação de ruídos, que tem sido um tema de interesse na engenharia mecânica devido à constante busca de inovação para redução de massa das estruturas, mantendo a eficiência de suas propriedades de atenuação. Um exemplo de aplicação está na indústria automotiva. Os avanços nesse setor retratam a evolução tecnológica dos últimos 60 anos, e possuem forte demanda por inovações devido à capacidade de interligar tecnologias de ponta, como as provenientes da indústria aeronáutica, à produção e comercialização em massa dos bens de consumo [9]. Uma das aplicações dessa classe de metamateriais consiste no isolamento acústico no painel do chassi que isola o motor da cabine, *firewall*, por meio de ressonadores simples de acrílico com fixação magnética, que agem no caminho de transmissão de estrutura [10]. Outra solução nessa indústria é observada no trabalho de [11], que propõe a atenuação de ruídos, no interior do veículo, provenientes da interação dos pneus em carros com o pavimento, por meio de um arranjo de ressonadores localmente ressonantes, substituindo a solução acústica convencional de absorvedor dinâmico de vibração.

Quando se trata de metamateriais localmente ressonantes, busca-se desenvolver uma propriedade equivalente em uma célula unitária e a extensão de seu comportamento dinâmico para a estrutura global. O princípio de funcionamento desse ressonador local é similar a um absorvedor dinâmico de vibrações (ADV) clássico, que consiste em agir na amplitude e fase de resposta em frequência do sistema primário transferir energia mecânica para a ressonância do sistema secundário [12]. A vantagem de aplicação dos ressonadores está na especialidade de atenuar vibrações em uma banda de frequências e não se limitar a uma frequência específica, como ADVs comuns. Não se limitando a essa propriedade, o projeto de ressonadores é de vasta possibilidade para diversos casos, visto que o avanço da tecnologia em manufaturas aditivas possibilita geometrias mais complexas. Algumas características desses tipo de metamateriais estruturais geram diversas abordagens para estudo nessa área.

Ao pontuar sobre a importância da manufatura aditiva na viabilidade e motivação para obter o sucesso dos metamateriais, um estudo para entender a influência dos erros metrológicos foi realizado utilizando método Bayesiano [13]. Não se limitando a aplicação automotiva, ou especificamente a manufatura, foi desenvolvida uma estrutura periódica para enclausuramento acústico ao colocar um ressonador local em cada célula unitária [14]. Comparações com soluções convencionais foram realizadas para avaliar a qualidade da solução e obtiveram resultados surpreendentes para o isolamento acústico.

1.1.2 Abordagem modal em metamateriais localmente ressonantes

Ao se tratar da forma como os problemas a respeito dessa classe de metamateriais são analisados, comumente é realizada a construção de uma unidade celular com propriedades de interesse e o posterior interação com o comportamento global de uma estrutura periódica, meio infinito. A análise é tipicamente realizada por meio das ondas dispersivas, usando técnicas como o método da expansão de ondas para obtenção de *bandgaps* do metamaterial [5].

Dentre os trabalhos que abordam estruturas localmente ressonante sob a ótica de estrutura infinita e propagação de ondas, [15] apresentam uma análise a respeito do controle da transmissão de ondas flexurais por meio de distribuição de neutralizadores contínuos em viga infinita. Análises foram realizadas com base na eficiência de transmissão e concluiu-se que o amortecimento nos ressonadores, a massa e as distâncias entre as células unitárias são fatores que influenciam diretamente nas propriedades dos *bandgaps*. O impacto do amortecimento nas curvas de dispersão de metamateriais localmente ressonantes foi estudado no trabalho [16]. Ao aplicar o método de célula unitária adicionando ressonadores em uma estrutura primária de placa, concluiu que a o aumento do amortecimento na estrutura de base não interfere significativamente no *bandgap* e que a atenuação é natural como sistema amortecido fora da banda. Em caso de amortecimento no ressoandor, o autor observa o aumento do *bandgap* e redução do desempenho da atenuação do pico de ressonância [16].

O trabalho [5] apresenta um problema dual na abordagem de propagação de ondas em uma estrutura periódica infinita, a partir de uma análise modal de uma estrutura finita com a definição de infinitos ressonadores. O autor modelou o sistema de estrutura com ressonadores a partir

somente de sua frequência natural e da razão de massa total dos ressonadores, que foi derivada colocando o *bandgap* num intervalo de frequência pré-determinada. Dessa forma, as considerações realizadas foram capazes de produzir um *insight* analítico e uma regra simplificada para um projeto de metamaterial. Um método para compreender a importância da posição do ressonador e da sua massa também foi discutida no contexto da aproximação da soma de Riemann em uma integral. Outro método para determinar a quantidade otimizada de ressonadores para setar a condição de contorno de infinitos ressonadores também foi realizado no mesmo trabalho. Em uma outra publicação [4], os autores propõem uma abordagem modal em uma estrutura unidimensional e utilizam-se condições de contorno específicas usando um operador geral para formulação. Por meio da aproximação para infinitos ressonadores calibrados na mesma frequência, a solução analítica para metamaterial de viga foi validada numericamente e experimentalmente no trabalho. Dessa forma, a publicação traz sua análise que pode ser prontamente estendida a outros tipos de materiais localmente ressonantes, como por exemplo placas e outras estruturas bidimensionais [5].

1.2 Sobreposição modal

A densidade modal, número de modos por unidade de frequência, pode ser representada pela equação 1.1:

$$n(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega}, \tag{1.1}$$

onde $N(\omega)$ é conta modos, que quantifica o número de picos de ressonância em um intervalo de frequência ω.

A banda de meia potência $\Delta(\omega)$, consiste no intervalo de frequências que compreende uma queda de metade da potência a partir do pico de ressonância, pode ser aproximada pelo produto da frequência de ressonância e o fator de perda modal.[17].

O fator de sobreposição modal $M(\omega)$ é dado pela razão entre a banda de meia potência $\Delta(\omega)$ e a distância média entre as frequências naturais dada por $\delta(\omega) = \frac{1}{n(\omega)}$ associadas a cada modo de vibrar, que por conseguinte é o produto entre a frequência natural ω, fator de perda η e a densidade modal $n(\omega)$, ou seja

$$M(\omega) = \omega\eta n(\omega) = \frac{\Delta(\omega)}{\delta(\omega)}. \tag{1.2}$$

De forma geral, $M(\omega)$ representa a transição entre o regime, o qual a resposta em frequência possibilita a distinção dos picos de ressonância, e o regime em que a resposta em frequência depende da amplitude relativa e a resposta em fase do número de modos localmente ressonantes [17]. Essa diferenciação dos dois regimes representam a transição das baixas para altas frequências e pode ser entendida por meio da Figura (1.1), onde o valor de $M = 1$ aponta a região de transição, verificada pela diferença nos picos da resposta.

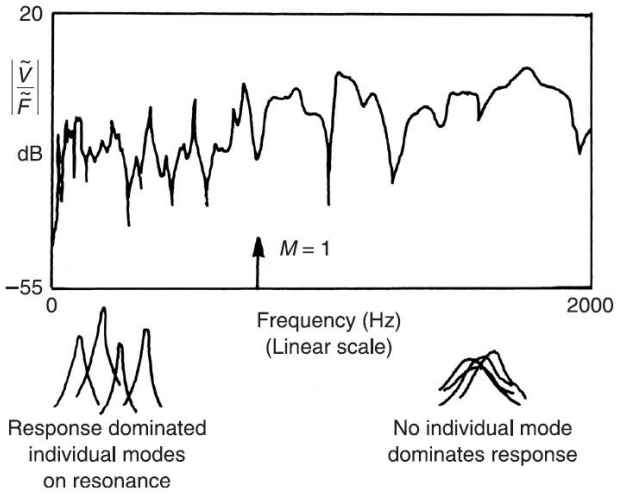


Figura 1.1: Função resposta em frequência de uma placa retangular . [17]

1.3 Número de Onda

O número de onda pode ser entendido fisicamente como uma frequência espacial, ou seja

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}. \tag{1.3}$$

A analogia entre a frequência temporal ω e frequência espacial k pode ser vista pela Figura (1.2) O período espacial de uma onda harmônica simples é definido como comprimento de onda λ [18]. Da mesma maneira que a frequência temporal consiste no número de ciclos por unidade de tempo, o número de onda relaciona ciclos por unidade de comprimento.

A definição do número de onda, como a razão entre a frequência ω e a velocidade de fase c, permite a compreensão de forma mais objetiva para análise matemática do comportamento da onda ao longo do trabalho. Além disso, a magnitude do vetor número de onda indica a direção de propagação assim como variação espacial da fase.

Pela equação 1.3, é vista a dependência entre as duas quantidades. A relação entre k e ω é denominada relação de dispersão [18], que indica como um distúrbio, não simplesmente harmônico no tempo, se propagará através de um meio em sua forma espacial. Uma importante relação do número de onda com o comportamento da resposta estrutural se encontra na classificação das ondas. A partir das definições apresentadas, para k real o tipo de onda é o propagante. Em caso de frequência espacial imaginária, a onda é não propagante e denominada evanescente. Para o caso onde o número de onda é complexo, possuindo parte real e outra imaginária, a onda apresenta um comportamento propagante com característica de decaimento.

O desenvolvimento analítico da propagação de ondas em placas finas, utilizado nesse trabalho, considera uma solução harmônica de uma onda se propagando ao longo da placa, ([17]), do tipo:

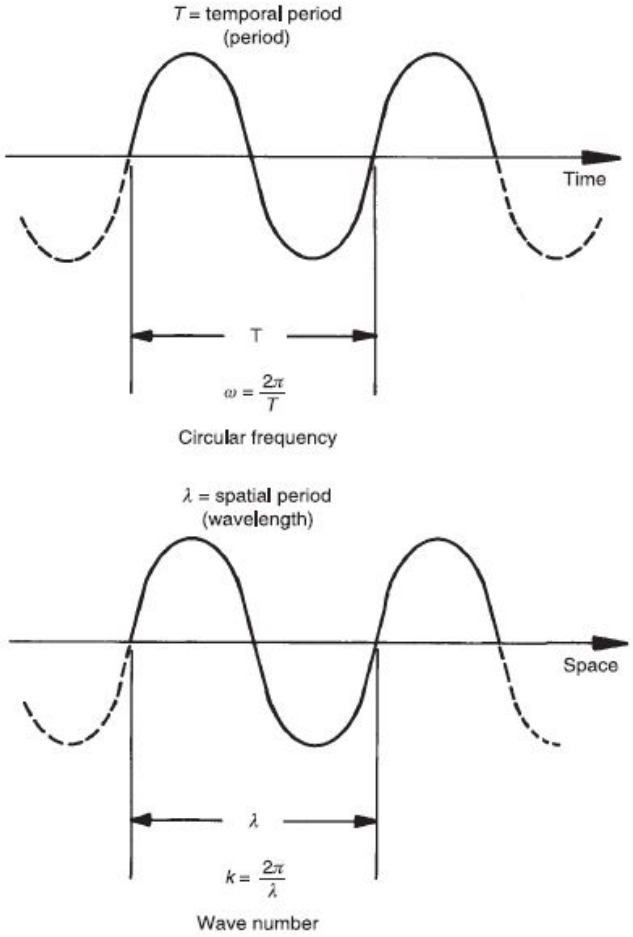


Figura 1.2: Analogia entre frequência temporal e número de onda.
[18]

$$w(x, y, t) = Ae^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}, \tag{1.4}$$

tal que o deslocamento é substituído na equação do movimento para a placa de *Kirchoff* para encontrar a curva de dispersão. A forma dessa solução foi exposta para indicar que o valor do número de onda influencia diretamente na resposta do decaimento ao longo do espaço, o que implica eventualmente que a distância de atenuação ao longo de uma placa é relacionada ao número de onda. Por essas razões, o entendimento da frequência espacial possui uma vital importância para a representação de campos de onda bidimensional e tridimensional.

1.4 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo investigar o comportamento dinâmico de placas finas localmente ressoantes por meio de uma abordagem modal.

Nesse sentido, o desempenho de atenuação dessas estruturas será analisado com respeito a

diferentes parâmetros, como posição do forçamento pontual, amortecimento estrutural da placa e ressonadores, razão de massa dos ressonadores a partir de funções resposta em frequências. Esses parâmetros são tipicamente considerados no projeto de metaestruturas.

Em linhas gerais, espera-se obter uma abordagem simplificada adequada para o pré-projeto desse tipo de solução em atenuação de ruídos e vibrações.

1.5 Metodologia

Nessa seção, apresenta-se a metodologia utilizada para se alcançar os objetivos estabelecidos.

Análise dinâmica de uma placa fina simples

- Solução analítica: Etapa de desenvolvimento das soluções analíticas das frequências naturais e dos modos normalizados, e da resposta em frequência da receptância para forçamento pontual;

- Resposta livre: Implementação das soluções analíticas para vibração livre e geração das frequências naturais e modos normalizados;

- Resposta forçada: Implementação da solução analítica para vibração com forçamento pontual para diferentes posições de entrada;

- Análise paramétrica: Implementação da solução analítica da resposta em frequência e da receptância ao longo da placa para avaliar a influência do amortecimento na estrutura bidimensional.

Analise dinâmica de um metamaterial

- Equação do movimento: Etapa de desenvolvimento da equação de movimento de uma placa fina com ressonadores;

- Solução aproximada por modos assumidos: Consideração do método de modos assumidos para aproximação da forma modal do metamaterial com a da placa fina;

- Reposta forçada: Implemetação da solução analítica da resposta em frequência do metamaterial localmente ressonante para forçamento pontual;

- Análise paramétrica com razão de massa dos ressonadores: Implementação da solução analítica da resposta em frequência e da receptância para diferentes razões de massa para análise da sua influência e a efetividade no desempenho dinâmico dos *bandgaps*;

- Análise paramétrica com amortecimento na estrutura primária do metamaterial: Implementação da solução analítica da resposta em frequência para diferentes amortecimentos estruturais na placa com ressonadores para análise da sua influência no *bandgap*;

- Análise paramétrica com amortecimento no ressonador: Implementação da solução analítica da resposta em frequência para diferentes amortecimentos estruturais nos ressonadores do metamaterial para análise da sua influência no *bandgap*.

Por meio da metodologia apresentada, pretende-se avaliar, com caráter investigativo, a atenuação de vibrações de placas finas localmente ressonantes, visando obter uma abordagem simplificada

desse tipo de solução para supressão de vibração.

1.6 Estrutura do trabalho

- Capítulo 1 - Introdução

O capítulo consiste em expor a motivação e o objetivo do trabalho e contextualizar sobre o crescente interesse e demanda por metamateriais e na apresentação de conceitos relevantes para o trabalho.

- Capítulo 2 - Fundamentação Teórica

Nesse capítulo será estudado e revisada a teoria de dinâmica de estruturas e trabalhos na área de metamateriais para obtenção de soluções analíticas da placa fina e do metamaterial localmente ressonante.

- Capítulo 3 - Resultados Numéricos e Discussção

Consiste na implementação das soluções analíticas para placa fina simples e metamaterial localmente ressonante para análises paramétricas no intuito de avaliar o modelo simples para pré projetos de metamateriais estruturais.

- Capítulo 4 - Conclusão

Finalização do trabalho apresentando uma síntese dos resultados e conclusões obtidos e colocando sugestões de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica que embasa a formulação da modelagem analítica de placa fina simples e localmente ressonante, desde os conceitos cinemáticos com a formulação newtoniana até a obtenção de resposta em frequência para implementação e avaliação dos resultados.

2.1 Formulação Newtoniana para placa de *Kirchhoff*

Na dinâmica de placas, assume-se a consideração da não deformação do plano médio da placa, essa hipótese permite a analogia da formulação newtoniana da placa com a da viga de *Euler-Bernoulli*, que é conhecida como hipótese de *Kirchhoff* [17].

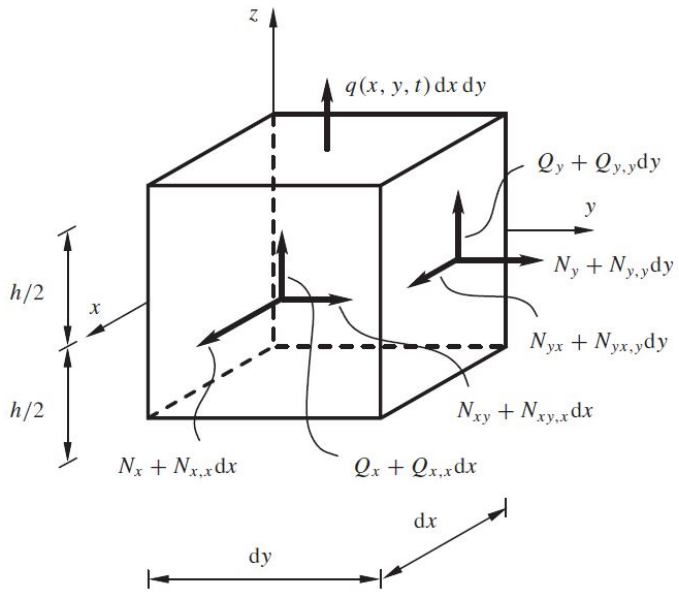


Figura 2.1: Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal da placa. [17]

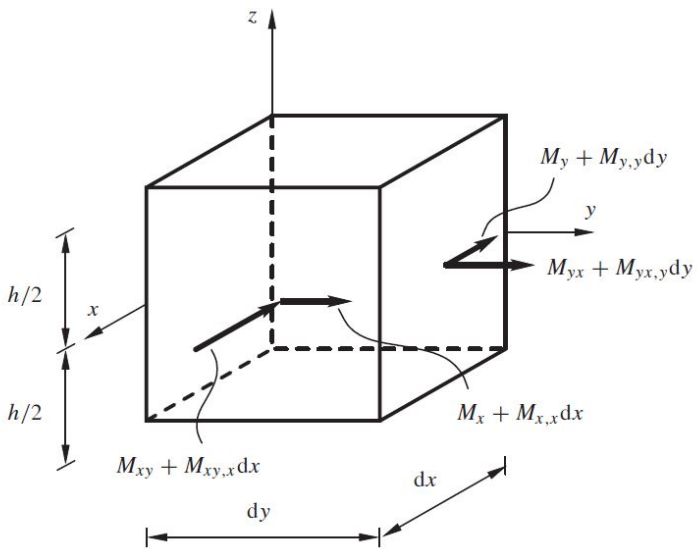


Figura 2.2: Momento resultante em um elemento infinitesimal da placa.
[17]

Seja demonstrada na Figura (2.1), o diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal de uma placa, tal que a mesma possui uma espessura constante h com um plano neutro coincidindo com o plano $x - y$. É explicitada a distribuição das tensões normais, $\sigma_x x$ e $\sigma_y y$,e das tensões cisalhantes $\sigma_x y$ $\sigma_x z$ e $\sigma_y z$. Nesse modelo, é desconsiderada a tensão $\sigma_z z$.

As tensões foram integradas no domínio da espessura, a fim de trabalhar com duas dimensões [17]. As tensões resultantes nas respectivas direções são definidas como:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} d_z, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} d_z, \quad N_x y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} d_z, \tag{2.1}$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} d_z, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} d_z, \tag{2.2}$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{xx} d_z, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{yy} d_z, \quad M_x y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{xy} d_z, \tag{2.3}$$

em que as tensões normais resultantes são descritas por 2.1, as tensões cisalhantes resultante por 2.2 e os momentos resultantes foram representadas por 2.3. As forças e momentos resultantes são demonstradas nas Figuras (2.1) e (2.2). Essas possuem a unidade de força pelo comprimento e unidade de momento pelo comprimento da placa. Para caso em que não existe o forçamento sobre o plano da placa, tem-se que $N_x = N_y = N_{xy} = 0$. Isso não implica que a tensão correspondente seja nula. A partir da lei de Hooke´s pode-se obter as tensões:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}[\epsilon_x x + \nu\epsilon_{yy}], \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}[\epsilon_x x + \nu\epsilon_{yy}], \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2}\epsilon_{xy}. \tag{2.4}$$

Ao assumir que a placa possui uma rigidez infinita para cisalhamento transversal, tem-se que $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$. Essa consideração implica que as forças cisalhantes Q_x e Q_y não poderiam ser determinadas pela teoria da elasticidade, entretanto podem ser determinadas a partir da equação de equilíbrio de momentos, explicada posteriormente.

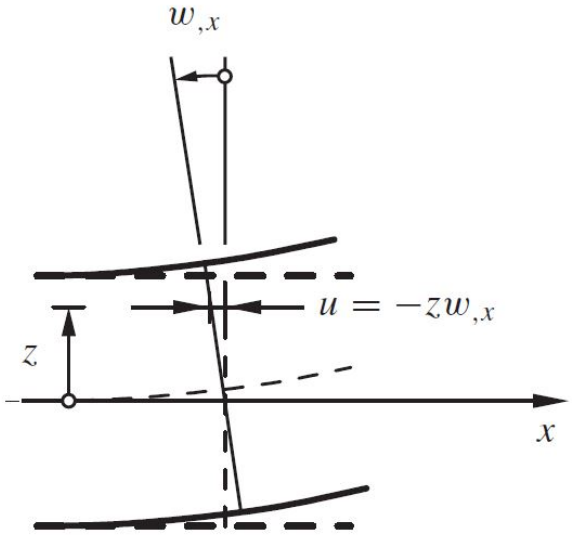


Figura 2.3: Visualização do deslocamento do plano ao longo do eixo x
[17]

Foi relacionada a tensão com o campo de deslocamento de placa, tal que os campos de deslocamento transversal do ponto neutro da placa sejam denotados como $w(x, y, t)$ [17]. Devido ao deslocamento transversal e de acordo com a relação cinemática descrita anteriormente, os deslocamentos ao longo das direções dos eixos x e y podem ser observadas, como mostrado na Figura (2.3), respectivamente:

$$u(x, y, z, t) = -z\omega_{,x}(x, y, t) \quad \text{e} \quad v(x, y, z, t) = -z\omega_{,y}(x, y, t). \tag{2.5}$$

Desse modo, o campo de tensão é obtido como:

$$\epsilon_{xx} = u_{,x} = -zw_{,xx}(x, y, t), \tag{2.6}$$

$$\epsilon_{yy} = v_{,y} = -zw_{,yy}(x, y, t), \tag{2.7}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,x} + v_{,y}) = -zw_{,xy}(x, y, t). \tag{2.8}$$

O campo de deslocamento 2.5 produz $\epsilon_{xz} = 0$ e $\epsilon_{yz} = 0$. Ao substituir as expressões dos campos de tensão 2.6, 2.7 e 2.8 na equação 2.4, e usar as expressões resultantes nas relações dadas em 2.3, pode-se obter:

$$M_x = -D[w_{,xx} + \nu w_{,yy}], \tag{2.9}$$

$$M_y = -D[w_{,yy} + \nu w_{,xx}], \tag{2.10}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)w_{,xy}, \tag{2.11}$$

Em que:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{2.12}$$

A partir da segunda lei de Newton, para o movimento transversal do elemento infinitesimal da Figura(2.1), obtém-se:

$$\rho h w_{,tt} = Q_{x,x} + Q_{y,y} + q(x,y,t), \tag{2.13}$$

onde $q(x,y,t)$ é um carregamento distribuído externo.

As equações do momento para elemento infinitesimal sobre as direções dos eixos x e y se destrincham em:

$$I w_{,xtt} = -M_{x,x} - N_{xy,y} + Q_x, \tag{2.14}$$

$$I w_{,ytt} = -M_{y,y} - N_{xy,y} + Q_y, \tag{2.15}$$

Em que $w_{,xtt}$ e $w_{,ytt}$ representam, respectivamente, a aceleração angular sobre os respectivos eixos ortogonais entre si. Desse modo,

$$I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz = \frac{\rho h^3}{12} \tag{2.16}$$

corresponde ao momento de inércia por unidade de área da placa. Resolvendo para Q_x e Q_y, substituindo-os nas equações 2.14 e 2.15 respectivamente e, por fim, inserindo na equação do movimento transversal do elemento infinitesimal 2.13, encontra-se:

$$\rho h w_{,tt} - I(w_{,xxtt} + w_{,yytt}) - (M_{x,xxx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yyy}) = q(x,y,t). \tag{2.17}$$

Por fim, ao utilizar as relações de momento e deslocamento das equações 2.9, 2.10 e 2.11 na equação 2.18 e assumindo que a espessura h seja constante, chega-se a equação do movimento de placa

$$\rho h w_{,tt} - I\nabla^2 w_{tt} + D\nabla^4 w = q(x,y,t), \tag{2.18}$$

Onde

$$\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \tag{2.19}$$

A equação diferencial parcial 2.20 corresponde ao modelo de placa de *Kirchhoff-Rayleigh*. Para o trabalho em questão, será considerado o modelo simplificado de equação onde o momento de inércia da placa é negligenciado. Desse modo, obtém-se a equação de placa de *Kirchhoff*:

$$\rho h w_{,tt} + D\nabla^4 w = q(x, y, t). \tag{2.20}$$

2.2 Análise modal da placa fina

Considera-se uma placa de *Kirchhoff*, obtida na seção anterior na equação 2.20, sem forçamento, governado pela equação do movimento [17]:

$$\rho h w_{,tt} + D\nabla^4 w = 0 \tag{2.21}$$

Realiza-se a separação da parcela espacial e a parte temporal por meio de uma solução modal:

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}, \tag{2.22}$$

tal que W corresponde a uma função qualquer de caráter espacial, ω a frequência. Ao substituir na equação do movimento 2.21, encontra-se:

$$(\nabla^4 - \frac{\omega^2 \rho h}{D})W = 0, \tag{2.23}$$

$$\gamma^4 = \frac{\omega^2 h}{D} \tag{2.24}$$

$$(\nabla^4 - \gamma^4)W = 0. \tag{2.25}$$

Pelo método de fatoração do operador, chega-se a:

$$(\nabla^2 + \gamma^2)(\nabla^2 - \gamma^2)W = 0. \tag{2.26}$$

Ao definir duas funções espaciais independentes W_1 e W_2, tal que:

$$(\nabla^2 + \gamma^2)W_1 = 0 \tag{2.27}$$

$$(\nabla^2 - \gamma^2)W_2 = 0 \tag{2.28}$$

e $W(x, y)$ como a soma de das duas funções espaciais, pode-se concluir que tal consideração consiste na solução da equação 2.25.

$$W(x, y) = W_1(x, y) + W_2(x, y) \tag{2.29}$$

A consideração da função espacial em duas partes possibilita a representação da equação 2.27 na forma similar à equação de *Helmholtz*. Essa equação possui solução conhecida na forma

$$\begin{aligned} W_1(x,y) &= A_1 \sin(\alpha x)\sin(\beta y) + A_2 \sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ &+ A_3 \cos(\alpha x)\sin(\beta y) + A_4 \cos(\alpha x)\cos(\beta y), \end{aligned} \tag{2.30}$$

em que A_j consiste nas constantes de integração e α β e γ se relacionam como mostra 2.31:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \tag{2.31}$$

Na equação 2.28, W_2 pode ser escrito por meio de separação de variáveis:

$$W_2 = X(x)Y(y). \tag{2.32}$$

Ao substituir na equação 2.28, tem-se:

$$\frac{d^2XY}{dx^2} + \frac{d^2XY}{dy^2} - XY\gamma^2 = 0. \tag{2.33}$$

Ao dividir por X(x)Y(y) e isolando os termos de γ^2 tem-se:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \gamma^2, \tag{2.34}$$

Em que é possível evidenciar que para a afirmação ser verdadeira:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \overline{\alpha}^2 >>> \frac{d^2X}{dx^2} - X\overline{\alpha}^2 = 0 \tag{2.35}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \overline{\beta}^2 >>> \frac{d^2Y}{dy^2} - Y\overline{\beta}^2 = 0 \tag{2.36}$$

De forma similar à solução anterior $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$ são constantes, tal que:

$$\overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}^2 = \gamma^2 \tag{2.37}$$

Ao considerar X e Y como uma forma exponencial e realizando manipulações trigonométricas, chega-se à solução geral:

$$X(x) = C_1 \sinh \overline{\alpha}x + C_2 \cosh \overline{\alpha}x, \tag{2.38}$$

$$Y(y) = C_3 \sinh \overline{\beta}y + C_4 \cosh \overline{\beta}y. \tag{2.39}$$

Solução de W_2 dada pelo produto entre as funções da separação de variáveis (2.32), as constantes foram redefinidas para A_j, $5 =< j =< 8$.

$$W_2(x,y) = A_5 \sinh \overline{\alpha}x \sinh \overline{\beta}y + A_6 \sinh \overline{\alpha}x \cosh \overline{\beta}y + A_7 \cosh \overline{\alpha}x \sinh \overline{\beta}y + A_8 \cosh \overline{\alpha}x \cosh \overline{\beta}y,$$

tal que C_i são as constantes de integração.

Utilizando a solução encontrada para a segunda função de deslocamento, é possível representar a solução geral para $W(x, y)$ dada na forma 2.29:

$$\begin{aligned} W(x,y) = A_1 \sin(\alpha x)\sin(\beta y) + A_2 \sin(\alpha x)\cos(\beta y) + A_3 \cos(\alpha x)\sin(\beta y) + \\ A_4 \cos(\alpha x)\cos(\beta y) + A_5 \sinh \overline{\alpha} x \sinh \overline{\beta} y + A_6 \sinh \overline{\alpha} x \cosh \overline{\beta} y \\ + A_7 \cosh \overline{\alpha} x \sinh \overline{\beta} y + A_8 \cosh \overline{\alpha} x \cosh \overline{\beta} y \end{aligned} \tag{2.40}$$

O deslocamento $W(x, y)$ (2.40) consiste na forma mais geral de solução para a equação (2.25) tal que as autofunções dependerão das condições de contorno. Desse modo, a solução modal será obtida por meio da avaliação da condição de contorno, sua implementação na solução geral e a normalização pelo termo inércia do problema.

2.2.1 Ortogonalidade das autofunções

As autofunções constituem uma base para a expansão da resposta de um sistema contínuo [19]. Para o estudo de vibrações em estruturas, elas podem ser interpretadas como modos de vibrar associados a cada frequência natural, das infinitas existentes, de um sistema que tem infinitos graus de liberdade, em que o entendimento da ortogonalidade das mesmas é de suma importância para o entendimento da manipulação matemática do desenvolvimento analítico em análise modal.

Para avaliar a ortogonalidade, é possível fazer uma analogia entre as autofunções e os autovetores dos sistemas discretos. Nesse âmbito, os modos naturais, associados às autofunções, constituem uma base linearmente independente, em que a sua verificação consiste na veracidade de que a base é ortogonal e, por conseguinte, linearmente independente [19]. Para o caso geral, a equação de movimento pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{m}(\ddot{w}) + \mathbf{L}(w) = 0 \tag{2.41}$$

tal que $\mathbf{m}$ corresponde ao operador diferencial inercial e $\mathbf{L}$ ao operador diferencial de rigidez. No caso em estudo, eles correspondem o ρh e $D\nabla^4$, respectivamente, da equação de governo da placa de *Kirchhoff*. Para obter a relação de ortogonalidade das autofunções, será abordado, primeiramente, o desenvolvimento do problema de autovetores.

Para abordagem modal, considera-se a solução separável $w(x, y, t) = W(x, y)g(t)$ e substituindo na equação (2.44) :

$$\mathbf{m}(W)(\ddot{g}) + \mathbf{L}(W)(g) = 0 \tag{2.42}$$

A equação (2.42) pode ser reescrita separando por meio das dependências espaciais e temporais, tal que as respectivas razões podem ser representadas por uma constante Λ, que no estudo, corresponde ao autovalor associado à cada autovetor:

$$\frac{\mathbf{L}(W)}{\mathbf{m}(W)} = -\frac{(\ddot{g})}{(g)} = \Lambda \tag{2.43}$$

Reescrevendo a parte espacial, pode-se chegar em um problema de autovetor e autovalor. Do ponto de vista matemático, a solução pode ser dada por $W = 0$, entretanto, para sentido físico, a solução requer uma situação tal que $W \neq 0$.

$$(\mathbf{L} - \Lambda\mathbf{m})W = 0 \tag{2.44}$$

Considera-se nesse momento, as normalizações do tipo:

$$\int_D (\mathbf{m})(W)(W)dD = 1. \tag{2.45}$$

$$\int_D (\mathbf{L})(W)(W)dD = \Lambda. \tag{2.46}$$

Considerando-se dois modos r e s, dentro da base de solução, representados por frequências e modos, tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{L}(W_r) = \Lambda_r \mathbf{m}(W_r), \\ \mathbf{L}(W_s) = \Lambda_s \mathbf{m}(W_s). \end{cases} \tag{2.47}$$

Ao realizar a pré-multiplicação das equações (2.47) por W_s e W_r e as integrando no domínio é possível encontrar a seguinte equação:

$$\int_D [\mathbf{L}(W_r)W_s - \mathbf{L}(W_s)W_r]dD = \int_D [\Lambda_r \mathbf{m}(W_r)W_s - \Lambda_s \mathbf{m}(W_s)W_r]dD \tag{2.48}$$

Por meio da simetria dos operadores pelo auto problema adjunto, a seguinte propriedade é estabelecida [19]:

$$\int_D \mathbf{L}(W_r)W_s dD = \int_D W_r \mathbf{L}(W_s)dD. \tag{2.49}$$

$$\int_D \mathbf{m}(W_r)W_s dD = \int_D W_r \mathbf{m}(W_s)dD. \tag{2.50}$$

Utilizando-se dessa propriedade, pode-se chegar a

$$(\Lambda_r - \Lambda_s) \int_D \mathbf{m}(W_s)W_r dD = 0 \tag{2.51}$$

Pode-se concluir por meio da equação (2.51) que para situações em que Λ_r eΛ_s são diferentes, tem-se que

$$\int_D \mathbf{m}(W_s)W_r dD = 0 \tag{2.52}$$

e que por consequência:

$$\int_D \mathbf{L}(W_s)W_r dD = 0. \tag{2.53}$$

O desenvolvimento anterior infere que as autofunções são ortogonais aos operadores inercial e de rigidez. Dessa forma, para autofunções normalizadas, a ortogonalidade é verificada:

$$\int_D \mathbf{m}(W_s)W_r dD = \delta_{r,s} \tag{2.54}$$

$$\int_D \mathbf{L}(W_s)W_r dD = \Lambda_s \delta_{r,s} \tag{2.55}$$

2.2.2 Condições de contorno de apoio simples

Para obter a solução do problema de valor de contorno na placa fina, duas condições de contorno são necessárias referentes a cada eixo. A diferença com relação às condições de contorno dessa placa com a da viga de *Bernoulli-Euler* está relacionada aos momentos torsores presentes. A solução para simplificação do problema se encontra no princípio de *Saint-Vernant*, tal que possibilita identificar as diferentes condições de contorno [19].

A condição de contorno que envolve a restrição nas quatro extremidades de uma placa é de apoio simples. Ela é expressa, nas coordenadas físicas, da seguinte forma [17]:

$$w|_{x=0,a} = 0; \quad w_{,xx}|_{x=0,a} = 0; \quad w|_{y=0,b} = 0; \quad w_{,yy}|_{y=0,b} = 0. \tag{2.56}$$

As constantes a e b correspondem aos comprimentos da placa. A equação no tempo possui uma solução harmônica, em que a parte da equação no espaço define um problema de autofunções que estabelece os modos e frequências naturais de vibração. Dessa forma, as mesmas condições são expressas na forma de autofunção do problema da seguinte forma:

$$W|_{x=0,a} = 0; \quad W_{,xx}|_{x=0,a} = 0; \quad W|_{y=0,b} = 0; \quad W_{,yy}|_{y=0,b} = 0. \tag{2.57}$$

Tomando como base as condições de contorno definidas, é proposta uma solução para uma placa simplesmente apoiada dada por [17]:

$$W(x, y) = A_1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y), \tag{2.58}$$

tal que, pelas condições de contorno do problema, é possível analisar que $W(x, y) = 0$ quando nas quatro extremidades. Por inferência física do problema, A_1 é não nulo e propõe que $\sin(\alpha x)$ e $\sin(\beta y)$ sejam nulas, no entanto a relação das constantes α e β sejam:

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad \text{e} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 2, 3, ..., \infty. \tag{2.59}$$

2.2.3 Frequências naturais

A placa, como um sistema contínuo, possui infinitos graus de liberdade, tal que a frequência natural é obtida para cada um dos infinitos modos de vibrar da estrutura. Elas podem ser obtidas substituindo a relação (2.37) na equação (2.24), tal que

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = \frac{\omega^2_{(m,n)} \rho h}{D}, \tag{2.60}$$

$$\omega_{(m,n)} = (\alpha^2 + \beta^2)\sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \tag{2.61}$$

Dessa forma, a frequência natural associada à cada modo pode ser descrita por:

$$\omega_{(m,n)} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \tag{2.62}$$

onde o par m n é comumente utilizado para identificar a respectiva forma modal.

2.2.4 Normalização pela massa

A solução do problema de autofunções fornece, por conseguinte, um conjunto de frequências naturais associadas a cada modo de vibrar, que por sua vez se relaciona com a autofunção [19]. O valor de A_1, amplitude da característica espacial, é uma solução, assim como qualquer múltiplo desse valor também. Para obter a convenção, é realizada a normalização pela massa:

$$\int_{Dy} \int_{Dx} \rho h W_{m,n}^2(x,y) dy dx = 1. \tag{2.63}$$

Ao substituir a autofunção (2.58) na equação (2.65),

$$\rho h A_1^2 \int_{Dy} \int_{Dx} \sin^2(\alpha x) \sin^2(\beta y) dy dx = 1. \tag{2.64}$$

Rearranjando a equação (2.64),

$$\rho h A_1^2 \int_0^b \sin^2(\beta y) \left(\int_0^a \sin^2(\alpha x) dx \right) dy = 1. \tag{2.65}$$

A integral dupla pode ser encontrada por meio da identidade trigonométrica e método de substituição para ambas as direções do domínio:

$$\int_0^a \sin^2(\alpha x) dx = \frac{1}{2} a - \frac{1}{4\alpha} \sin(2\alpha a), \tag{2.66}$$

$$\int_0^b \sin^2(\beta x) dx = \frac{1}{2} b - \frac{1}{4\beta} \sin(2\beta b). \tag{2.67}$$

Substituindo as relações (2.66) e (2.67) em (2.64) e rearranjando a equação, obtém-se

$$A_1 = \left\{ \frac{8\alpha\beta}{\rho h} \cdot \frac{1}{[2\alpha a - \sin(2\alpha a)]\,[2\beta b - \sin(2\beta b)]} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.68}$$

Utilizando as constantes (2.59), a equação (2.68) pode ser simplificada para

$$A_1 = \sqrt{\frac{8}{ab}} \tag{2.69}$$

Substituindo na solução geral, tem-se que a autofunção normalizada da placa de *Kirchhoff* na condição simplesmente apoiada é dada por:

$$W(x,y) = \sqrt{\frac{8}{ab}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \tag{2.70}$$

2.3 Vibração forçada em uma placa fina

Como apresentado na seção sobre a formulação newtoniana, a equação de governo da placa excitação é dada pela equação:

$$\rho h w_{,tt} + D\nabla^4 w = p(x, y, t), \tag{2.71}$$

onde ρh corresponde ao operador inercial e $D\nabla^4$ o operador de rigidez.

Para a obtenção da solução analítica de sistemas contínuos, é realizado o processo de mudança de variáveis para as coordenadas normais com o intuito de desacoplamento do sistema em infinitas soluções de um grau de liberdade. O processo ocorre, primeiramente pela substituição da solução separável $w(x, y, t) = \sum_{(m,n)=(1,1)}^{N} W_{(m,n)}(x, y) y_{(m,n)}(t)$ na equação de governo (2.71)

$$\sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{N} D\nabla^4 W_{m,n} y_{m,n} + \rho h \sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{N} W_{m,n} \ddot{y} = p(x, y, t). \tag{2.72}$$

Por meio da pré-multiplicação pela função modal e integração no domínio, chega-se a uma estrutura analítica análoga à normalização pela massa e à propriedade de ortogonalidade das autofunções, tal que pelas simplificações, pode-se chegar à equação do movimento nas coordenadas normais

$$\ddot{y}_{m,n} + \omega_{m,n}^2 y_{m,n} = q_{m,n}, \tag{2.73}$$

onde o forçamento nas coordenadas normais é dado por

$$q_{m,n}(t) = \int_0^b \int_0^a W_{m,n}(x, y) p(x, y, t) dx dy. \tag{2.74}$$

Ao assumir a solução separável $y_{m,n} = Y_{m,n} e^{i\omega t}$ e o forçamento pontual $p(x, y, t) = F\delta(x - x_e)\delta(y - y_e)e^{i\omega t}$, onde $\delta(x - x_e)$ e $\delta(y - y_e)$ são funções generalizadas do tipo delta de Dirac, substitui-se na equação (2.73), tem-se:

$$\omega_{m,n}^2 Y_{m,n} e^{i\omega t} - \omega^2 Y_{m,n} e^{i\omega t} = F W_{m,n}(x_e, y_e) e^{i\omega t}, \tag{2.75}$$

$$Y_{m,n} = \frac{Q_{m,n}}{(\omega_{m,n}^2 - \omega^2)}, \tag{2.76}$$

tal que $Q_{m,n} = F W_{m,n}(x_e, y_e)$. Dessa forma, voltando para a solução proposta $y_{m,n} = Y_{m,n} e^{i\omega t}$ e analisando nas coordenadas físicas por meio da solução separável, tem-se:

$$w(x, y, t) = \sum_{(m,n)=(1,1)}^{N} W_{(m,n)}(x, y) y_{(m,n)}(t) \tag{2.77}$$

$$w(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{N} W_{m,n}(x_r,y_r)\frac{1}{(\omega_{m,n}^2-\omega^2)}FW_{m,n}(x_e,y_e)e^{i\omega t}. \tag{2.78}$$

A receptância é definida como o deslocamento dado um forçamento unitário e é dada como a somatória de todos os termos modais, ao operar o número de modos como infinito por meio do limite. No caso em estudo, a autofunção de entrada e de saída possuem as mesmas soluções, tal que,

$$\alpha(\omega) = \frac{W(x,y)}{F_e} = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{W_{m,n}(x_e,y_e)W_{m,n}(x_r,y_r)}{\omega_{m,n}^2-\omega^2} \tag{2.79}$$

Para o caso de uma placa com amortecimento, utiliza-se um fator de perda η através de uma hipótese de amortecimento histerético, como uma parcela complexa em cada frequência natural $\omega_{m,n}$, associada a atenuação, ou seja

$$\alpha(\omega) = \frac{W(x,y)}{F_e} = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{W_{m,n}(x_e,y_e)W_{m,n}(x_r,y_r)}{\omega_{m,n}^2(1+i\eta_{m,n})-\omega^2} \tag{2.80}$$

Dessa maneira, é possível associar um fator de amortecimento $\eta_{m,n}$ a cada modo de vibrar. Tipicamente, é razoável assumir que todos os modos tenham o mesmo fator de amortecimento, ou seja $\eta_{m,n} = \eta$.

2.4 Resposta forçada em uma placa localmente ressonante

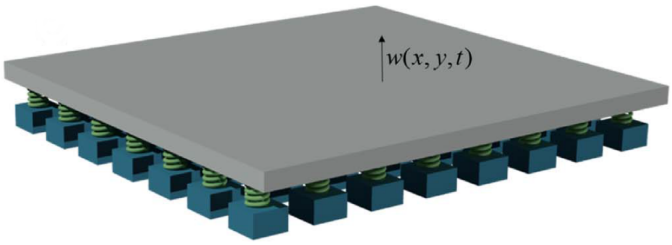


Figura 2.4: Metaestrutura localmente ressonante, placa em vibração transversal.

Fonte:[4]

O metamaterial em estudo consiste no posicionamento de infinitos ressonadores em uma placa de fina, finita, sob a condição de contorno de apoio simples nas quatro extremidades. A Figura (2.4) representa de forma simbólica o posicionamento de ressonadores com massa e rigidez próprio, em que a equação de movimento relaciona as duas propriedades que dependa da frequência natural do ressonador e da razão de massa entre a estrutura de base, placa, e os ressonadores.

A abordagem analítica sob ótica modal foi apresentada no trabalho [5] e nesse trabalho será utilizada o equacionamento para estrutura bidimensional, sendo realizada devidas manipulações e o incremento do fator de amortecimento nos ressonadores para avaliar a resposta em frequência da Receptância.

Para o caso da placa sem ressonadores, os modos, equação 2.70, e frequências naturais, equação 2.62, foram obtidas de forma analítica. Entretanto, para o caso da metaestrutura, uma solução analítica fechada não está disponível. Para tanto, será utilizada uma aproximação por método de modos assumidos, de tal maneira que os modos e frequências naturais da estrutura primária serão utilizados como uma base para se aproximar a resposta da estrutura com ressonadores. Tal abordagem também foi utilizada no trabalho de Gardonio e Casagrande [20] para resolver o problema de uma placa acoplada com um ressonador piezoelétrico do *shunt*. Dessa forma, assume-se

$$W_{pr} = W(x,y) = \sqrt{\frac{8}{ab}} sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \tag{2.81}$$

$$\omega_{pr(m,n)} = \omega_{(m,n)} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \tag{2.82}$$

Considera-se uma estrutura bidimensional contínua com S ressonadores pontualmente conectados e periodicamente posicionados nas posições (x_p, y_p), tal que a equação do movimento de uma placa nessa situação pode ser expressa por, [5],

$$\rho h w_{,tt} + D\nabla^4 w - \sum_{p=1}^{S} k_p u_p \delta(x - x_p)\delta(y - y_p) = q(x,y,t). \tag{2.83}$$

Para cada ressonador, a equação do movimento é dada por

$$m_p u_p(t) + k_p u_p(t) + m_p \ddot{w}(x_p, y_p, t) = 0, \tag{2.84}$$

Assumindo-se N modos de vibrar, a mudança de variáveis das coordenadas físicas para as coordenadas normais é dada por $w(x,y,t) = \sum_{(m,n)=(1,1)}^{N} W_{(m,n)}(x,y) y_{(m,n)}(t)$. Substituindo na equação (2.83), obtém-se

$$\sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{N} D\nabla^4 W_{m,n} y_{m,n} + \rho h \sum_{\substack{m=1\\n=1}}^{N} W_{m,n} \ddot{y} - \sum_{p=1}^{S} k_p u_p \delta(x - x_p)\delta(y - y_p) = p(x,y,t) \tag{2.85}$$

Por meio das condições de ortogonalidade, chega-se à equação diferencial nas coordenadas normais:

$$\ddot{y}_{m,n} + \omega_{m,n}^2 y_{m,n} - \sum_{p=1}^{S} k_p u_p W_{m,n} = q_{m,n}, \tag{2.86}$$

onde forçamento nas coordenadas normais é dado por:

$$q_{m,n}(t) = \int_0^b \int_0^a W_{m,n}(x,y)p(x,y,t)dxdy. \tag{2.87}$$

Ao assumir soluções separáveis, $y_{m,n} = Y_{m,n}e^{i\omega t}$, $u_p(t) = U_p e^{i\omega t}$ e $p(x,y,t) = F\delta(x-x_e)\delta(y-y_e)e^{i\omega t}$, e substituindo na equação (2.86), tem-se:

$$(\omega_{m,n}^2 - \omega^2)Y_{m,n} - \sum_{p=1}^{S} k_p U_p W_{m,n} = Q_{m,n}, \tag{2.88}$$

tal que $Q_{m,n} = FW_{m,n}(x_e, y_e)$.

Ao substituir as soluções separáveis para a equação do movimeno dos ressonadores (2.84), encontra-se:

$$-\omega^2 m_p U_p + k_p U_p - \omega^2 m_p \sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{N} W_{k,l}Y_{k,l} = 0 \tag{2.89}$$

$$U_p = \frac{\omega^2 m_p}{k_p - \omega^2 m_p} \sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{N} W_{k,l}Y_{k,l} \tag{2.90}$$

Substituindo (2.90) em (2.88), tem-se:

$$(\omega_{m,n}^2 - \omega^2)Y_{m,n} - \sum_{p=1}^{S} k_p W_{m,n} \frac{\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{N} W_{k,l}Y_{k,l} = Q_{m,n}. \tag{2.91}$$

Sabe-se que a frequência natural do ressonador é dado por $\omega_p^2 = \frac{k_p}{m_p}$ e a sua massa pode ser dado por $m_p = \epsilon\rho h\Delta l_x \Delta l_y$ em que a razão de massa seja constante, dessa forma

$$(\omega_{m,n}^2 - \omega^2)Y_{m,n} - \sum_{p=1}^{S} \epsilon\rho h\Delta l_x \Delta l_y \omega_p^2 W_{m,n} \frac{\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{N} W_{k,l}Y_{k,l} = Q_{m,n}. \tag{2.92}$$

Rearranjando os termos

$$(\omega_{m,n}^2 - \omega^2)Y_{m,n} - \epsilon\omega^2 \sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{N} \sum_{p=1}^{S} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \rho h W_{m,n} W_{k,l} \Delta l_x \Delta l_y Y_{k,l} = Q_{m,n}. \tag{2.93}$$

Nesse ponto, faz-se uma consideração importante para a situação em que todos os ressonadores são equivalentes, desse modo, a parcela correspondentes às frequências naturais de cada dispositivo sai da somatória, o que possibilita um rearranjo para simplificação pela proposição seguinte.

$$(\omega_{m,n}^2 - \omega^2)Y_{m,n} - \epsilon\omega^2 \sum_{\substack{k=1\\l=1}}^{N} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega^2} \left(\sum_{p=1}^{S} \rho h W_{m,n} W_{k,l} \Delta l_x \Delta l_y \right) Y_{k,l} = Q_{m,n}. \tag{2.94}$$

Essa etapa consiste numa forma de homogeneização onde existe um importante conceito de aproximação de uma soma de Riemann, tal que se assume a existência de ressonadores o suficiente para realizar a aproximação integral,

$$\lim_{S\to\infty}\sum_{p=1}^{S}\rho h W_{m,n}W_{k,l}\Delta l_x\Delta l_y \approx \int_0^b\int_0^a \rho h W_{m,n}W_{k,l}dxdy = \delta_{m,n,k,l}. \tag{2.95}$$

Logo, a equação (2.94) é simplificada para

$$(\omega_{m,n}^2-\omega^2)Y_{m,n}-\epsilon\omega^2\frac{\omega_p^2}{\omega_p^2-\omega^2}Y_{m,n}=Q_{m,n} \tag{2.96}$$

Ao isolar $Y_{m,n}$, a constante relativa à amplitude da solução em coordenadas normais,

$$Y_{m,n}=\frac{Q_{m,n}}{(\omega_{m,n}^2-\omega^2)-\epsilon\frac{\omega^2\omega_p^2}{\omega_p^2-\omega^2}}, \tag{2.97}$$

ao realizar a mudança de coordenadas para as físicas, encontra-se a razão entre o deslocamento e o carregamento correspondente à receptância,

$$\frac{W(x,y)}{F_e}=\sum_{m,n}^{N}\frac{W_{(m,n)}(xe,ye)W_{(m,n)}(xr,yr)}{\omega_{(m,n)}^2-\omega^2\left(1+\epsilon\frac{\omega_p^2}{\omega_p^2-\omega^2}\right)}. \tag{2.98}$$

Para que essa solução leve em conta o amortecimento estrutural presente na placa fina, basta adicionar o modelo de amortecimento estrutural apresentado na seção anterior, dado por $\eta_{m,n}=\eta$. Além disso, é possível incluir um fator de amortecimento para os ressonadores a partir de um modelo de amortecimento estrutural histerético, independente do amortecimento da estrutura base, dado por η_p, em que se assume seja igual para todos, de modo que

$$\frac{W(x,y)}{F_e}=\sum_{m,n=1}^{N}\frac{W_{(m,n)}(x_e,y_e)W_{(m,n)}(x_r,y_r)}{\omega_{(m,n)}^2(1-i\eta)-\omega^2\left(1+\epsilon\frac{\omega_p^2}{\omega_p^2(1-i\eta_p)-\omega^2}\right)} \tag{2.99}$$

é a expressão aproximada para a receptação na placa localmente ressonante em (x_r,y_r) dada uma força harmônica pontual em (x_e,y_e). Note que o número de modos N necessário para aproximar a solução é, em geral, muito superior ao número de termos necessários para aproximar a solução da placa fina.

Capítulo 3

Resultados numéricos e discussão

3.1 Análise da Placa de Kirchhoff

Ao desenvolver a análise modal da placa fina, utilizando a equação do movimento obtida por meio da formulação Newtoniana abordada na seção 2.1, foi possível chegar nas soluções analíticas para as frequências e os modos naturais, levando em consideração a condição de contorno de apoio simples nas quatro extremidades.

Ao longo do desenvolvimento teórico, foi abordada a solução analítica da resposta em frequência em receptância na placa sob uma excitação pontual. Utilizando as abordagens de vibrações livre e forçada, foi realizada a implementação numérica das soluções utilizando o software *MATLAB*. Será investigado o comportamento da placa para diferentes posições de entrada, para condições de amortecimento estrutural, tanto avaliando as amplitudes das respostas em frequências assim como as receptâncias ao longo da placa.

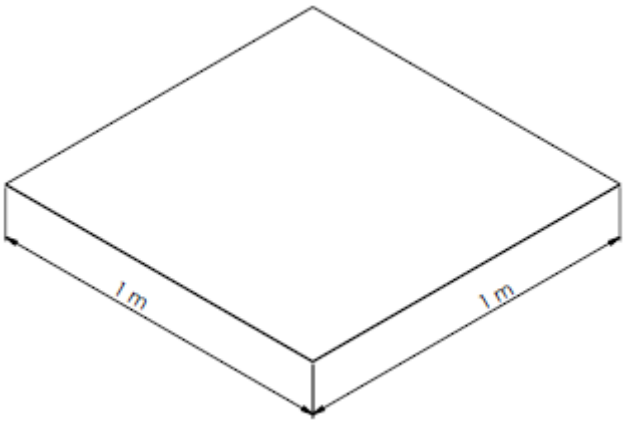


Figura 3.1: Placa de fina em estudo.

3.1.1 Frequências e modos naturais

Ao longo do desenvolvimento teórico do trabalho, foi considerada uma placa fina sob a condição de apoio simples nas extremidades como pode ser representada pela Figura (3.1). Para o estudo da placa de Kirchhoff, foi considerada uma estrutura quadrada de aço AISI 1020 com as dimensões e propriedades apresentadas na Tabela (3.1).

Comprimento	$1.0m$
Largura	$1.0m$
Espessura	$0.003m$
Coeficiente de Poisson	0.29
Massa específica	$7870kg/m^3$
Módulo de elasticidade	$186 \cdot 10^9 Pa$

Tabela 3.1: Caracterísicas da placa.

Disponível em <http://www.matweb.com/search/datasheet.aspx?MatGUID=10b74ebc27344380ab16b1b69f1cffbb, Acesso em ago. 2020.>

As frequências naturais da placa para condição de contorno de apoio simples pode presentada por na seção por meio da equação (2.62), em que foi implementada numericamente para obtenção das frequências.

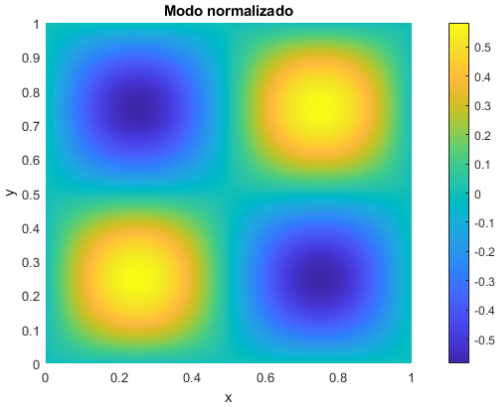
Na Tabela (3.2) podem ser observadas as frequências naturais para os modos $m = 3$ e $n = 2$, $m = 5$ e $n = 5$, $m = 10$ e $n = 10$, dentre as 100 primeiras frequências naturais, obtidas por meio da implementação do código em Apêndice (I.1), utilizando as características e propriedades da placa, Tabela (3.1) na implementação numérica.

Modo (m,n)	**Frequência natural (rad/s)**
2,2	348.47
5,5	2177.95
7,7	4268.79
10,10	8711.81

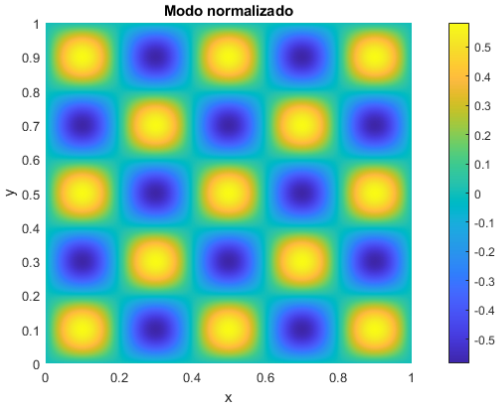
Tabela 3.2: Frequências naturais.

Os modos naturais normalizados associados à cada uma das frequências naturais foram obtidas pela expressão 2.70 na seção 2.2.4.

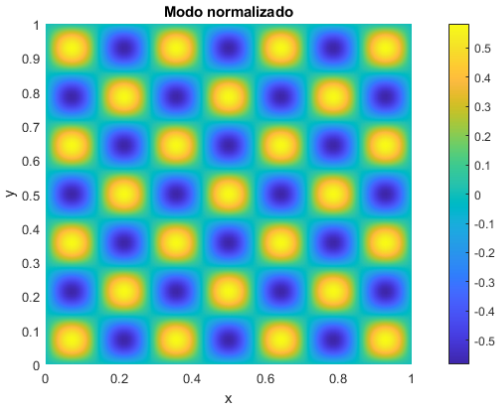
A implementação da solução analítica (2.70) foi realizada utilizando as características da placa, Tabela (3.1) no código em Apêndice I.2, e avaliando a solução ao longo da estrutura sob passo de 0.01 m nas duas direções espaciais ortogonais. Os modos observados são $m = 2$ e $n = 2$, $m = 5$ e $n = 5$, $m = 7$ e $n = 7$, $m = 10$ e $n = 10$, Figura (3.2), os quais correspondem aos modos associados às frequências de interesse na comparação com a resposta da placa com forçamento harmônico pontual.



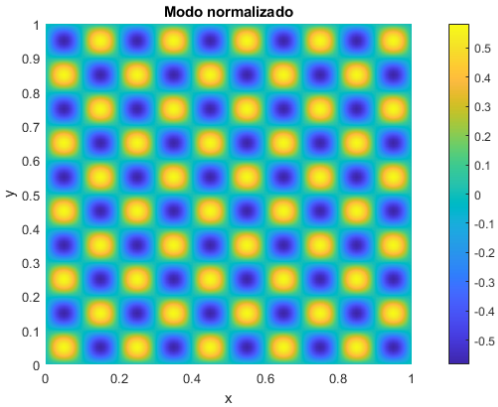
(a) Modo normalizado m=2, n=2.



(b) Modo normalizado m=5, n=5.



(c) Modo normalizado m=7, n=7.



(d) Modo normalizado m=10, n=10.

Figura 3.2: Modos Normalizados nas frequências naturais de análise, Tabela (3.2).

3.1.2 Resposta em frequência da Receptância

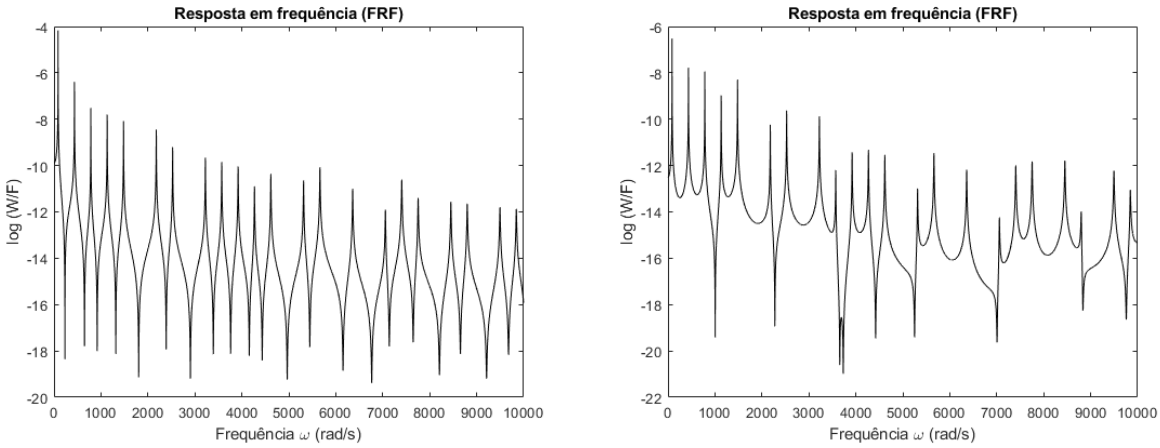
A solução analítica da Receptância, equação (2.79), apresentada na seção 2.3, foi implementada no código, Apêndice I.3, para obter a resposta em frequência na posição central da placa para três posições de entrada.

Visto que o problema consiste em uma placa com apoio simples nas quatro extremidades e possui uma geometria quadrada, pode-se entender a presença de quatro quadrantes simétricos, dessa forma selecionou-se posições estratégicas, Tabela (3.3), para a avaliar o comportamento da estrutura, sendo as posições no contorno, próxima à extremidade e central da placa, sob a condição de forçamento pontual.

x (m)	**y (m)**
0	0
0.1	0.1
0.5	0.5

Tabela 3.3: Posição de entrada do forçamento.

Para avaliação da resposta em frequência, considerou-se o intervalo de frequências de excitação de 0 rad/s a 10.000 rad/s com o intuito de analisar até o modo $m = 10$ e $n = 10$, o que corresponde ao parâmetro do presente estudo.



(a) $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$

(b) $x_e = 0.1m$, $y_e = 0.1m$

Figura 3.3: Amplitude da resposta em frequência da receptância resposta no centro da placa para diferentes posições de entrada, Tabela (3.3).

É possível observar, pelas Figuras 3.3(a) e 3.3(b), os picos de ressonância nas frequências de excitação equivalente às frequências naturais, associados aos respectivos modos. Para as respostas em questão, não foi considerado amortecimento, dessa forma o sistema sem amortecimento possui a frequência de ressonância equivalente à frequência natural, o que justifica ambas as situações apresentadas. É importante pontuar que os picos tendem ao infinito, e que o fato de aparecerem na forma finita se justifica pela discretização do vetor de frequências e pela função log do *MATLAB*.

O caso avaliado mostra a resposta na posição central da placa para excitação nos pontos apresentados na Tabela (3.3). É observado que, no intervalo avaliado de frequências, existem mais modos do que os picos aparentes no gráfico, mais especificamente, o número de frequências naturais da placa corresponde à quantidade de termos da diagonal da matriz modal somada a todos os termos da parte triangular da mesma, visto que, para a placa quadrada em estudo, os modos são simétricos, m e n, nas duas direções cartesianas.

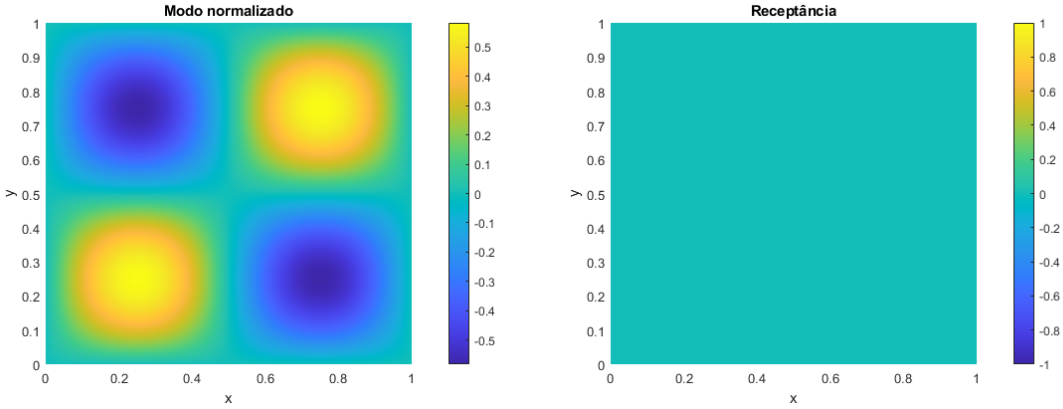
A explicação para a divergência entre os números dos picos e o número de frequências naturais está nas posições de entrada e de resposta, visto que eventualmente são nós modais, os quais alguns modos não são excitados.

3.1.3 Resposta da placa para diferentes posições de entrada

Uma vez obtidos os gráficos de amplitude da receptância, Figura (3.3), considera-se as posições de entrada para forçamento pontual, Tabela (3.3). A avaliação das características da resposta na placa será realizada ao comparar com os modos normalizados para vibração livre, implementado por meio do código, Apêndice (I.3). Dessa forma, será observada a influência das posições de entrada quando excitadas nas frequências de excitação definidas anteriormente, Tabela (3.2).

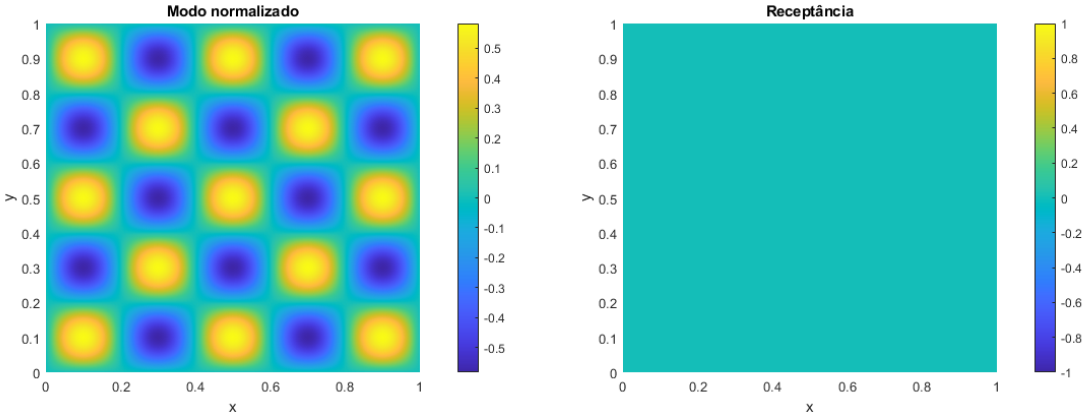
3.1.3.1 Posição de entrada no contorno ($x_e = 0$, $y_e = 0$)

As placas foram excitadas na frequência de ressonância, que no caso é equivalente às frequências naturais associados aos modos normalizados, na posição de condição de contorno $x_e = 0$ e $y_e = 0$. Nessa etapa, é esperado que a placa não apresente uma resposta diferente de zero, visto que foi abordado no desenvolvimento teórico (2.56), Capítulo 2, seção 2.2, que o deslocamento é nulo como condição do problema.



(a) Modo $m = 2$, $n = 2$ (b) $x_e = 0.0m$, $y_e = 0.0m$

Figura 3.4: Comparação do modo (2,2) para excitação pontual na posição de contorno.



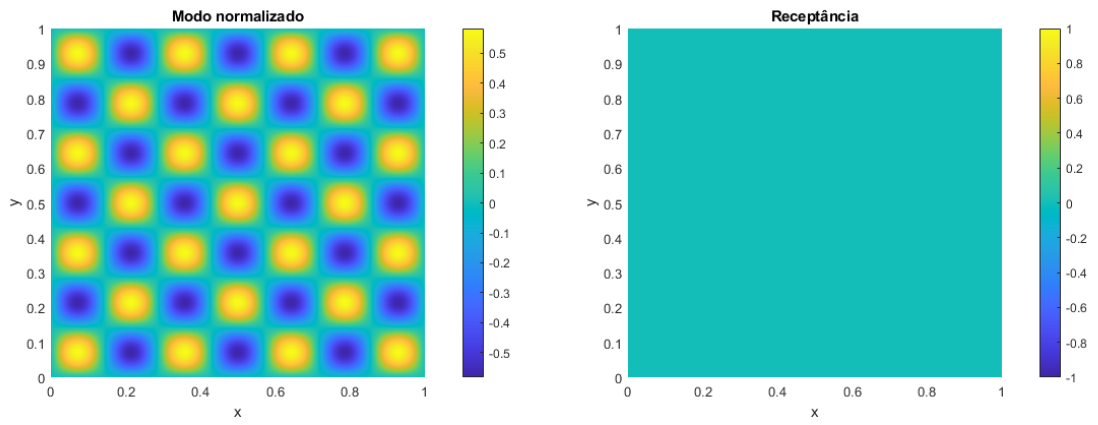
(a) Modo $m = 5$, $n = 5$ (b) $x_e = 0.0m$, $y_e = 0.0m$

Figura 3.5: Comparação do modo (5,5) para excitação pontual na posição de contorno.

Pelas Figuras (3.4),(3.5),(3.6) e (3.7), é possível perceber que apesar de excitar para as frequências de ressonância, as respostas foram nulas para a posição de entrada sendo o próprio ponto de deslocamento nulo (condição de contorno), o que implica na não excitação da placa como esperado.

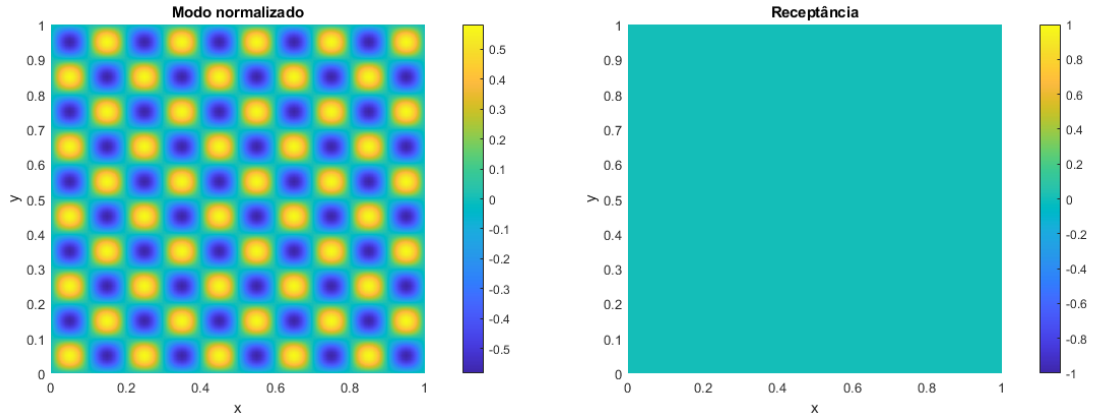
3.1.3.2 Posição de entrada próximo ao contorno ($x_e = 0.1$, $y_e = 0.1$)

De forma equivalente com o forçamento anterior, as placas foram excitadas na frequência de ressonância, Tabela (3.2), na posição próxima ao contorno do terceiro quadrante $x_e = 0.1$ m e



(a) Modo $m = 7$, $n = 7$ (b) $x_e = 0.0m$, $y_e = 0.0m$

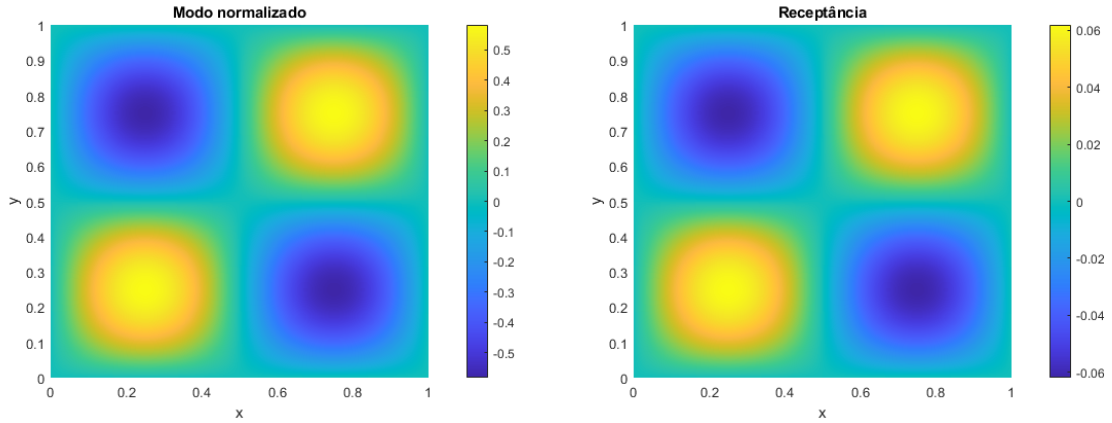
Figura 3.6: Comparação do modo (7,7) para excitação pontual na posição de contorno.



(a) Modo $m = 10$, $n = 10$ (b) $x_e = 0.0m$, $y_e = 0.0m$

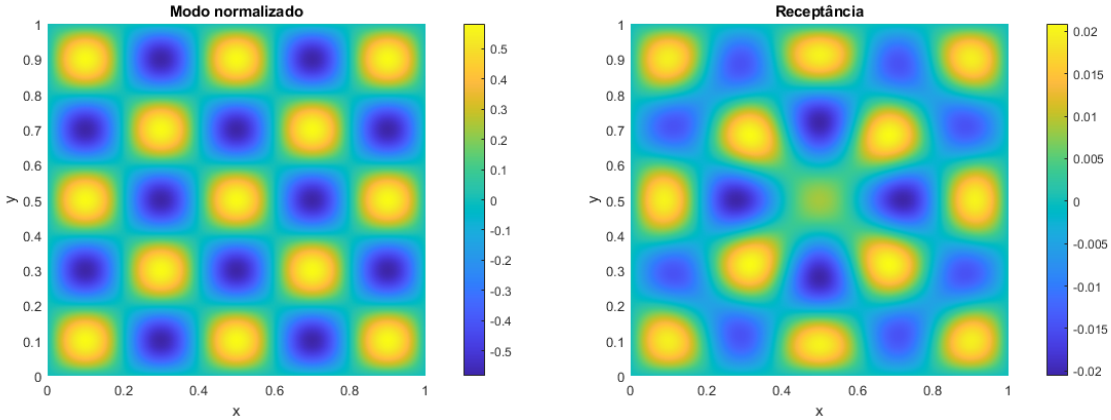
Figura 3.7: Comparação do modo (10,10) para excitação pontual na posição de contorno.

$y_e = 0.1$ m.



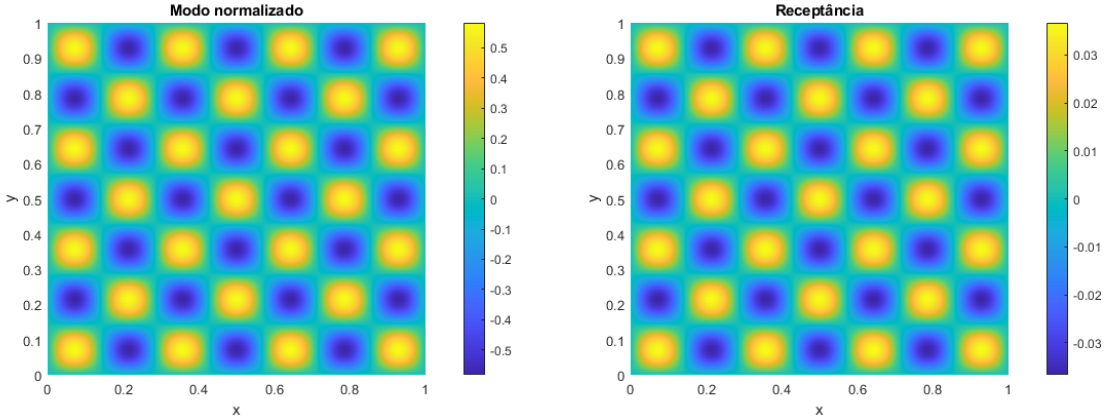
(a) Modo $m = 2$, $n = 2$ (b) $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m

Figura 3.8: Comparação do modo (2,2) para excitação pontual $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m.



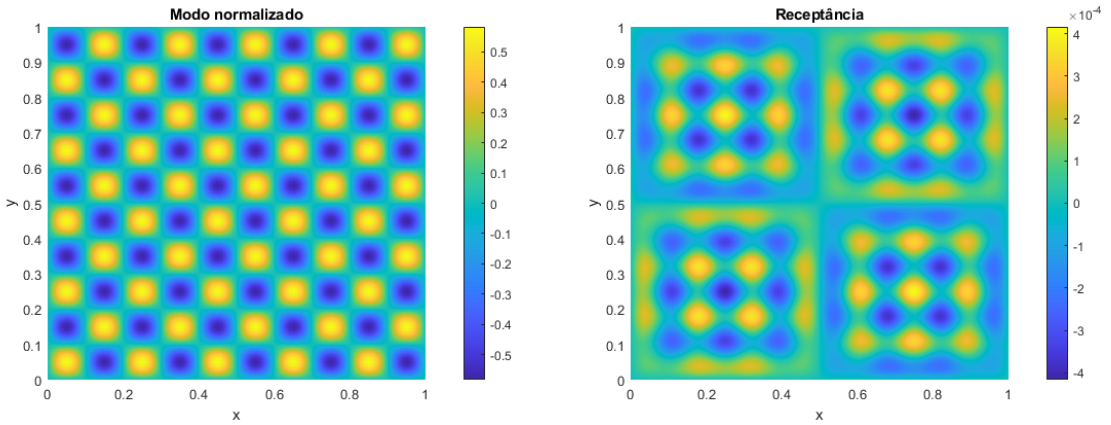
(a) Modo $m = 5$, $n = 5$ (b) $x_e = 0.1m$, $y_e = 0.1m$

Figura 3.9: Comparação do modo (5,5) para excitação pontual $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m.



(a) Modo $m = 7$, $n = 7$ (b) $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m

Figura 3.10: Comparação do modo (7,7) para excitação pontual $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m.



(a) Modo $m = 10$, $n = 10$ (b) $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m

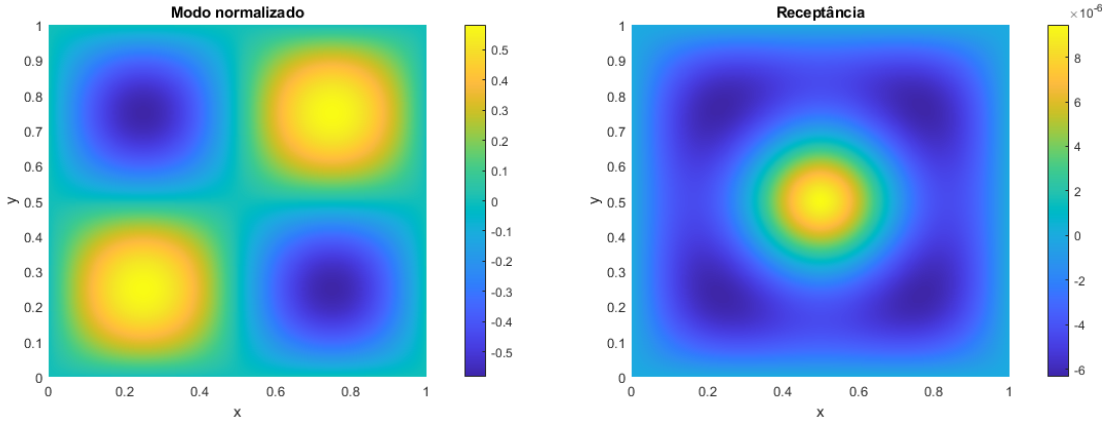
Figura 3.11: Comparação do modo (10,10) para excitação pontual $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m.

Para a frequências de excitação de 349 rad/s e de 4278 rad/s, a característica geométrica da receptância ao longo da placa, Figura (3.8(b)) e (3.8(a)), se manteve praticamente equivalente ao modo, Figura (3.10(a)) e (3.10(b)), visto que a frequência de entrada é próxima da de ressonância. É possível observar que para o modo comparado.

Já nos casos de excitação com a frequência 2178 rad/s e 8712 rad/s, na posição $x_e = 0.1$ m, $y_e = 0.1$ m, as respostas apresentadas, Figuras (3.9(b)) e (3.11(b)),sofrem uma variação nas cristas e nos vales da placa. Apesar de ainda mostrar uma similaridade com as respectivas formas modais,Figuras (3.9(a)) e (3.11(a)), a posição de entrada influencia no comportamento da placa.

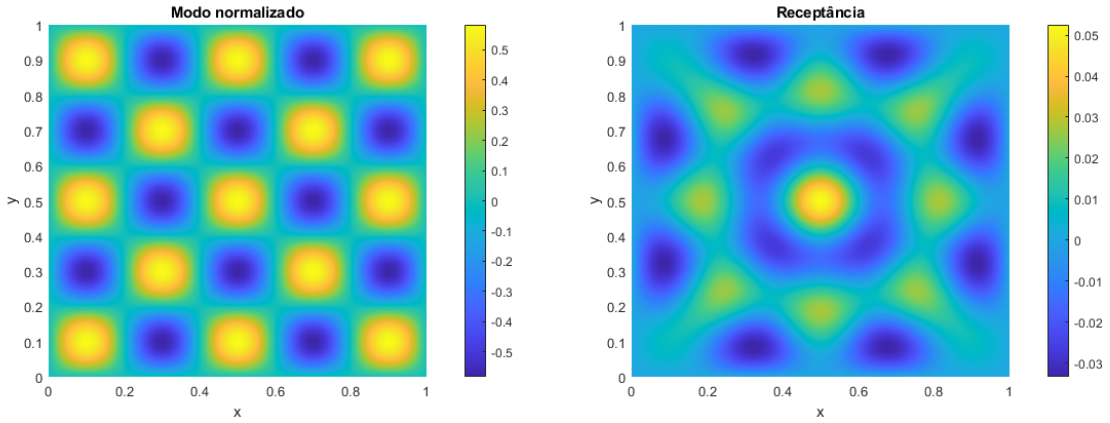
3.1.3.3 Posição de entrada no centro da placa ($x_e = 0.5$, $y_e = 0.5$)

A placa foi excitada na frequência de ressonância, tabela (3.2), na posição central da estrutura $x_e = 0.5$ m e $y_e = 0.5$ m assim como no caso anterior.



(a) Modo $m = 2$, $n = 2$ (b) $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$

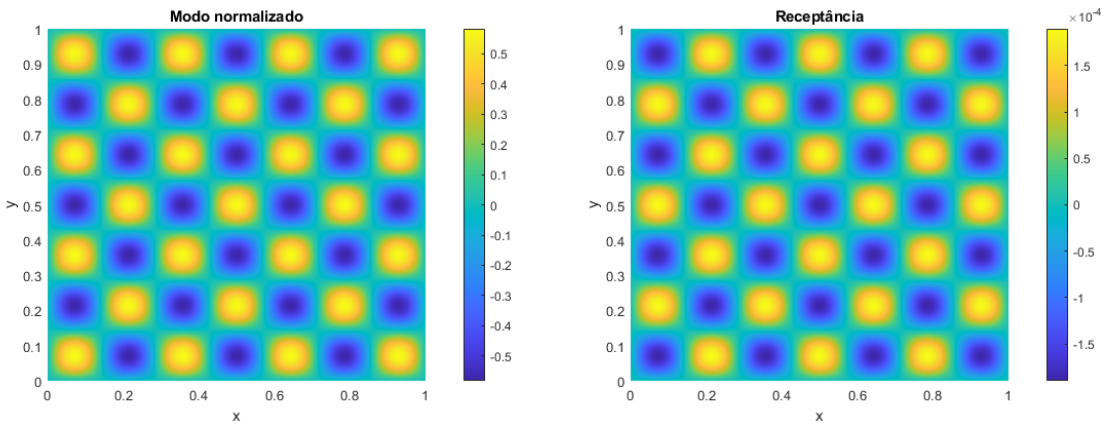
Figura 3.12: Comparação do modo (2,2) para excitação pontual $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$.



(a) Modo $m = 5$, $n = 5$ (b) $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$

Figura 3.13: Comparação do modo (5,5) para excitação pontual $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$.

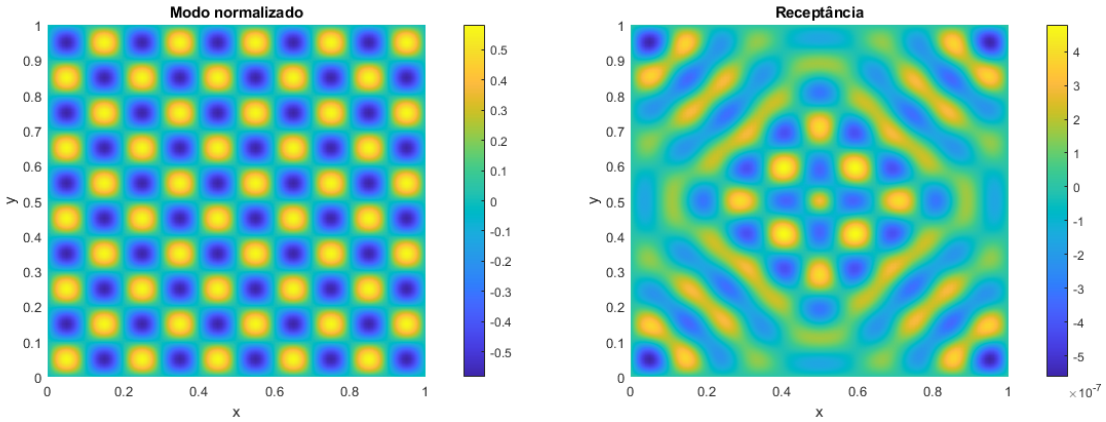
Nos casos em que o forçamento foi colocado no centro, é possível perceber uma diferença subs-



(a) Modo $m = 7$, $n = 7$

(b) $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$

Figura 3.14: Comparação do modo (7,7) para excitação pontual $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$.



(a) Modo $m = 10$, $n = 10$

(b) $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$

Figura 3.15: Comparação do modo (10,10) para excitação pontual $x_e = 0.5m$, $y_e = 0.5m$.

tancial com relação aos respectivos modos de vibrar, exceto no caso em que a excitação foi na frequência 4269 rad/s, Figura (3.15). Para as respostas nas frequências 349 rad/s, 2178 rad/s e 8712 rad/s mostram uma perturbação simétrica de foma radial, que apesar de variação na característica física, trazem semelhanças com o modo de vibrar associado a cada uma das frequências de ressonância.

3.1.4 Influência do fator de amortecimento na Receptância

A solução analítica da receptância com a presença do amortecimento estrutural pode ser expressa pela equação (2.79), assim como apresentada na seção 2.4, em que o parâmetro de análise será o fator de perda η, para avaliação da influência do mesmo no comportamento da placa em estudo. Para observar a influência do amortecimento, selecionou-se a posição ($x_e = x_r = 0.1$, $y_e = y_r = 0.1$) para forçamento de entrada e de resposta. A implementação levou em consideração os seguintes fatores de amortecimento.

Fator de amortecimento (η)
0
0.001
0.01
0.1

Tabela 3.4: Amortecimento estrutural na placa

Ao levar em consideração as características da placa, Tabela (3.1), plotou-se o gráfico da resposta em frequência da receptância, assim como pode ser observado na figura (3.16).

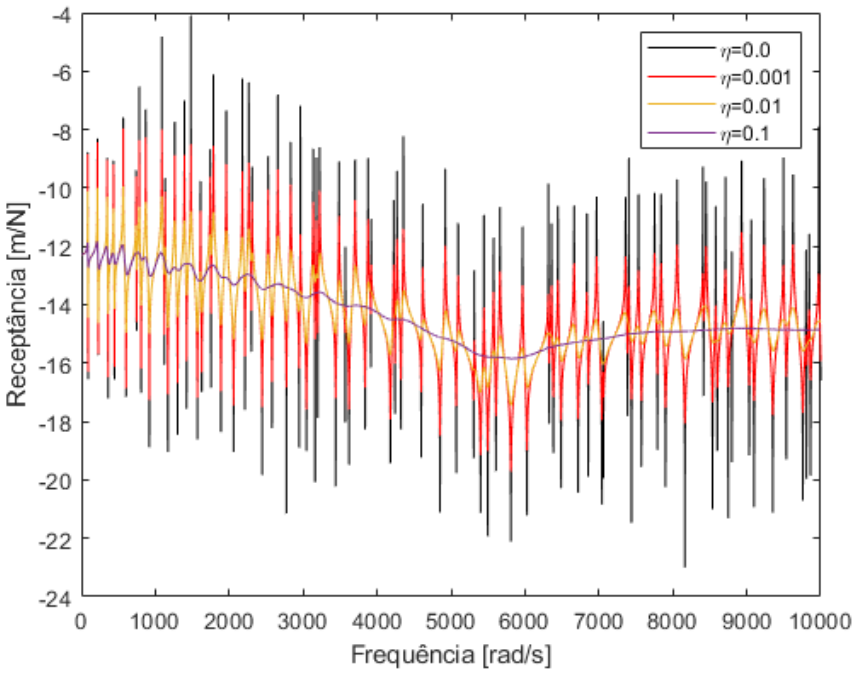


Figura 3.16: Amplitude de FRF da receptância da placa com amortecimento estrutural (3.4).

O gráfico (3.16) representa a Amplitude de resposta em frequência da Receptância na escala logarítmica. É possível observar a redução da amplitude máxima nos picos de ressonância com o aumento do fator de amortecimento estrutural aplicado na placa. A teoria da sobreposição modal pode ser aplicada para justificar a dificuldade de distinguir os picos de ressonância a medida que a frequência observada e o amortecimento aumenta. O fator de sobreposição modal, razão entre

a banda de meia potência $\Delta(\omega)$ e a distância média entre as frequências naturais $\delta(\omega)$, dita a transição de baixas para altas frequências. Nesse âmbito, verifica-se que não somente o aumento da frequência, mas o aumento do fator de perda contribuem de forma significativa para que o sistema transite do regime de baixa para alta ordem.

3.1.4.1 Receptância da placa para excitação na frequência 349 rad/s.

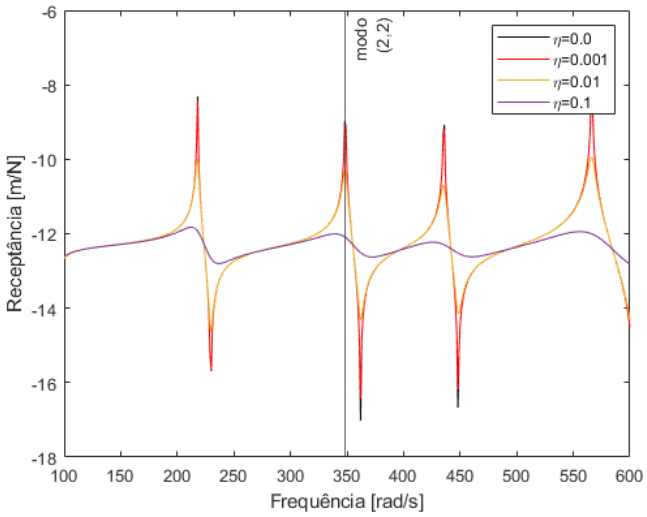
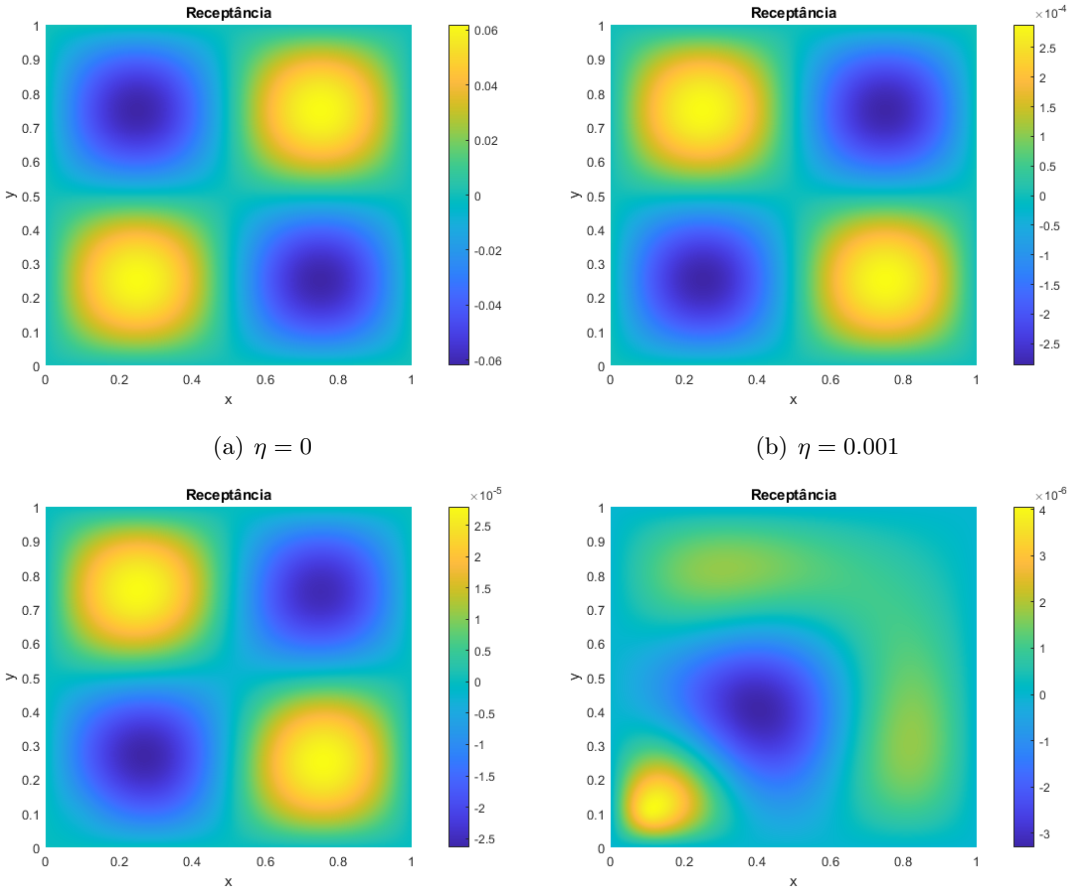


Figura 3.17: $\omega = 349$ rad/s.

Ao avaliar o pico do modo excitado, $m = 2$ e $n = 2$, na frequência de entrada de 349 rad/s e o comportamento da curva ao redor da mesma, Figura (3.17), é possível observar a redução da amplitude máxima de resposta em cada um dos valores de amortecimento estrutural. É válido pontuar que essa influência é substancialmente maior para $\eta = 0.1$, o que é percebido de forma global em todo o intervalo de frequências avaliadas, Figura (3.16). Neste último caso, a resposta estrutural se aproximada daquela de uma placa infinita.

De forma a aprofundar no entendimento da influência do amortecimento, em torno da frequência, associado ao modo $m = 2$ e $n = 2$, a resposta ao longo da placa foi gerada, Apêndice (I.4), como pode ser observada na figura (3.18). As receptâncias na estrutura são avaliadas, na frequência de entrada $\omega = 349$ rad/s, para diferentes fatores de amortecimento estrutural. Nos casos sem amortecimento, $\eta = 0.001$ e $\eta = 0.01$, as respostas são similares a ponto de não ser perceptível a diferença na característica física, a não ser a mudança de fase e da amplitude máxima de resposta, essa que diminui de forma inversamente proporcional ao aumento do fator de perda. Já na resposta para o fator de $\eta = 0.1$, a resposta se torna completamente diferente, evidenciando a influência significativa do amortecimento. Essa observação pode ser validada ao correlacionar com a FRF, figura (3.17), em que somente o caso de $\eta = 0.1$ apresentou a uma redução na amplitude de resposta, suficientemente grande a ponto de destoar dos outros picos, devido ao aumento do fator de sobreposição modal para a frequência de excitação associada ao modo $m = 2$ e $n = 2$.

É possível perceber no gráfico (3.17), na curva de amortecimento $\eta = 0.1$, que o pico não ocorre



(a) $\eta = 0$

(b) $\eta = 0.001$

(c) $\eta = 0.01$

(d) $\eta = 0.1$

Figura 3.18: Receptância para $\omega = 349 rad/s$.

na mesma frequência de ressonância comparado ao caso não amortecido, o que é um comportamento esperado para sistemas amortecidos, onde a frequência de ressonância passa a não ser a frequência natural do sistema. Dessa forma, quando maior o amortecimento, mais destoadas as frequências de ressonância serão com relação à frequência natural. É de suma importância expor que a a resposta diferente do modo está associado ao amortecimento em si e não à questão de estar sendo excitado fora da frequência natural, pois apesar de mais destoada a frequência de ressonância, ainda continua muito próxima.

3.1.4.2 Receptância da placa para excitação na frequência 2178 rad/s.

No comportamento da resposta ao redor do modo excitado, $m = 5$ e $n = 5$, Figura (3.19), é possível observar uma diferença substancial na amplitude de cada uma das respostas nos picos de ressonância. Desde amortecimentos menores $\eta = 0.001$, já é percebida a atenuação, tal que no fator $\eta = 0.01$ já é avaliado o descolamento do pico, comportamento não observado nas frequências menores, Figura (3.17), com o mesmo valor de amortecimento. Na influência do fator de perda $\eta = 0.01$, os picos de ressonância não podem ser observados, de tal forma que o fator de sobreposição modal, para essa ordem de grandeza de amortecimento, na frequência avaliada, é grande.

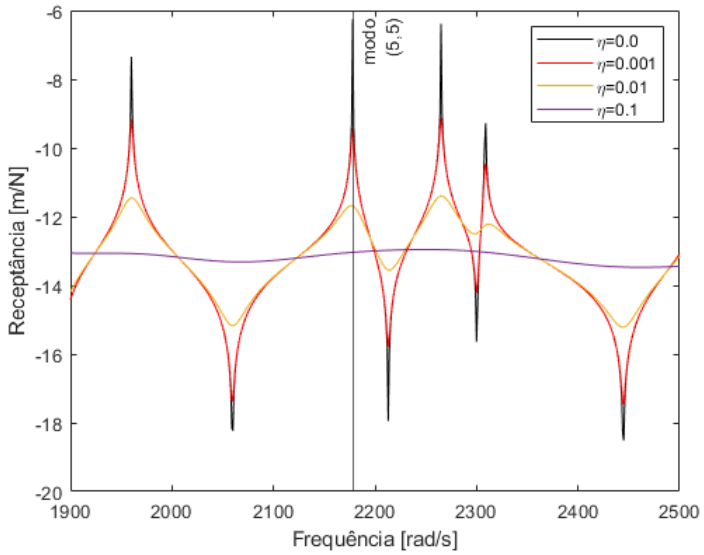
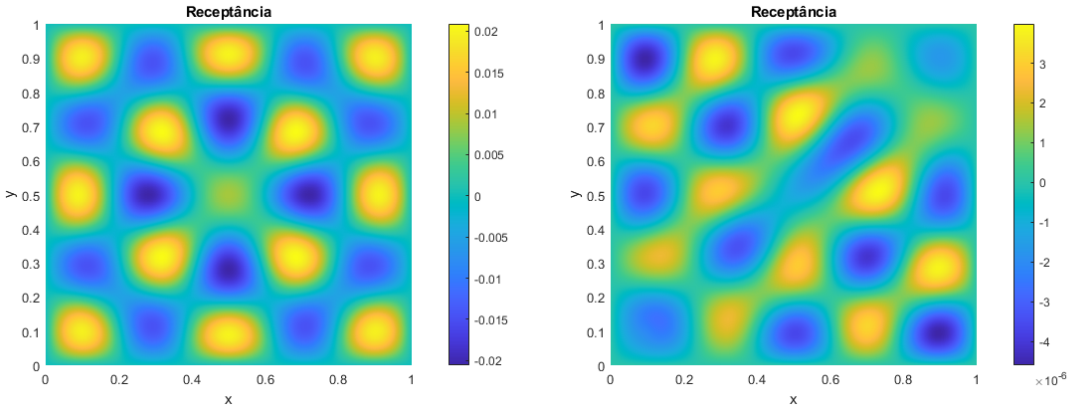
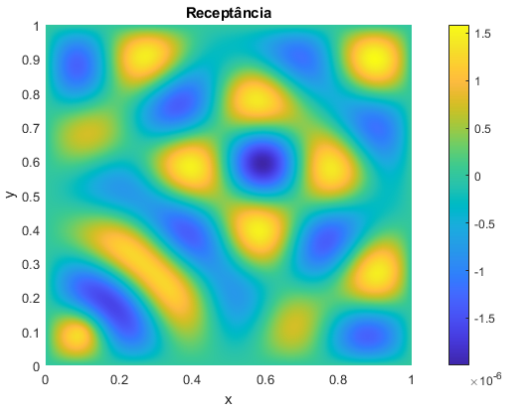


Figura 3.19: $\omega = 2178$ rad/s.

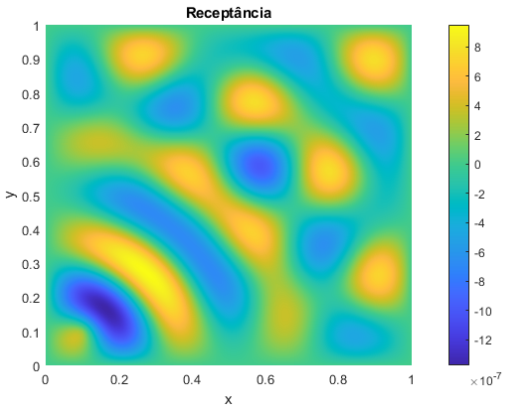


(a) $\eta = 0$

(b) $\eta = 0.001$



(c) $\eta = 0.01$



(d) $\eta = 0.1$

Figura 3.20: Receptância para $\omega = 2178 rad/s$.

Da mesma forma que na avaliação anterior, foram geradas as receptâncias ao longo da placa para a frequência de excitação $\omega = 2178$ rad/s, Figura (3.20). O comportamento da estrutura é observada, na frequência de entrada, para fatores de amortecimento estrutural. No caso de amortecimento $\eta = 0.001$, Figura (3.20(b)), diferente da situação da excitação na frequência $\omega = 349$ rad/s, é percebida a diferença na característica espacial, em que ocorre a deformação das vales e das cristas, comparando com a resposta sem amortecimento (3.20(a)), mostrando a perturbação da resposta. Apesar da variação na característica espacial, a resposta para $\eta = 0.001$ ainda possui grandes semelhanças com a resposta para $\eta = 0$.

Para as receptâncias sob amortecimentos de $\eta = 0.01$, Figura 3.20(c) e $\eta = 0.1$, Figura 3.20(d), é possível avaliar uma semelhança geométrica na resposta entre os dois fatores de perda, o que implica na influência do amortecimento.

De forma a comparar a resposta geométrica da placa, para frequências de excitação $\omega = 2178$ rad/s, com a da placa sob excitação de $\omega = 349 rad/s$, foi visto que os fatores de perda $\eta = 0.001$ e $\eta = 0.01$ não influenciaram na característica física da placa para a menor frequência, que em contrapartida, influenciaram na frequência de $\omega = 2178$ rad/s. Dessa forma, é possível supor que a influência do amortecimento estrutural está associada ao o aumento da frequência de excitação, tal que a sensibilidade da resposta na estrutura se torna mais suscetível a medida que transita para altas frequências, as quais estão diretamente associadas ao fator de sobreposição modal e não ao valor absoluto da frequência de excitação.

3.1.4.3 Receptância da placa para excitação na frequência $\omega = 4269$ rad/s.

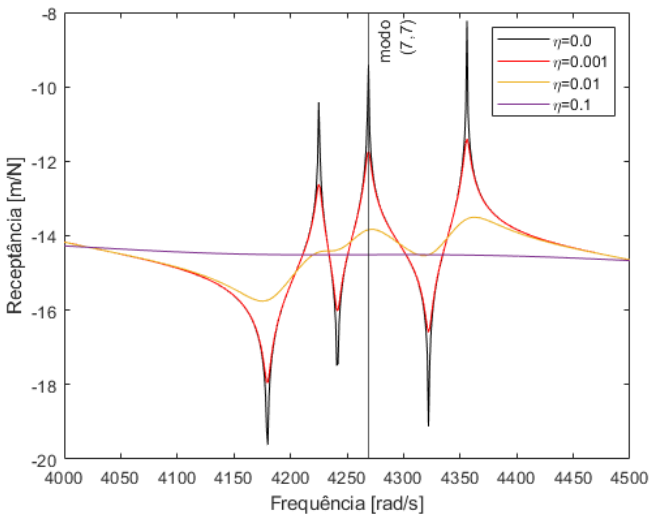
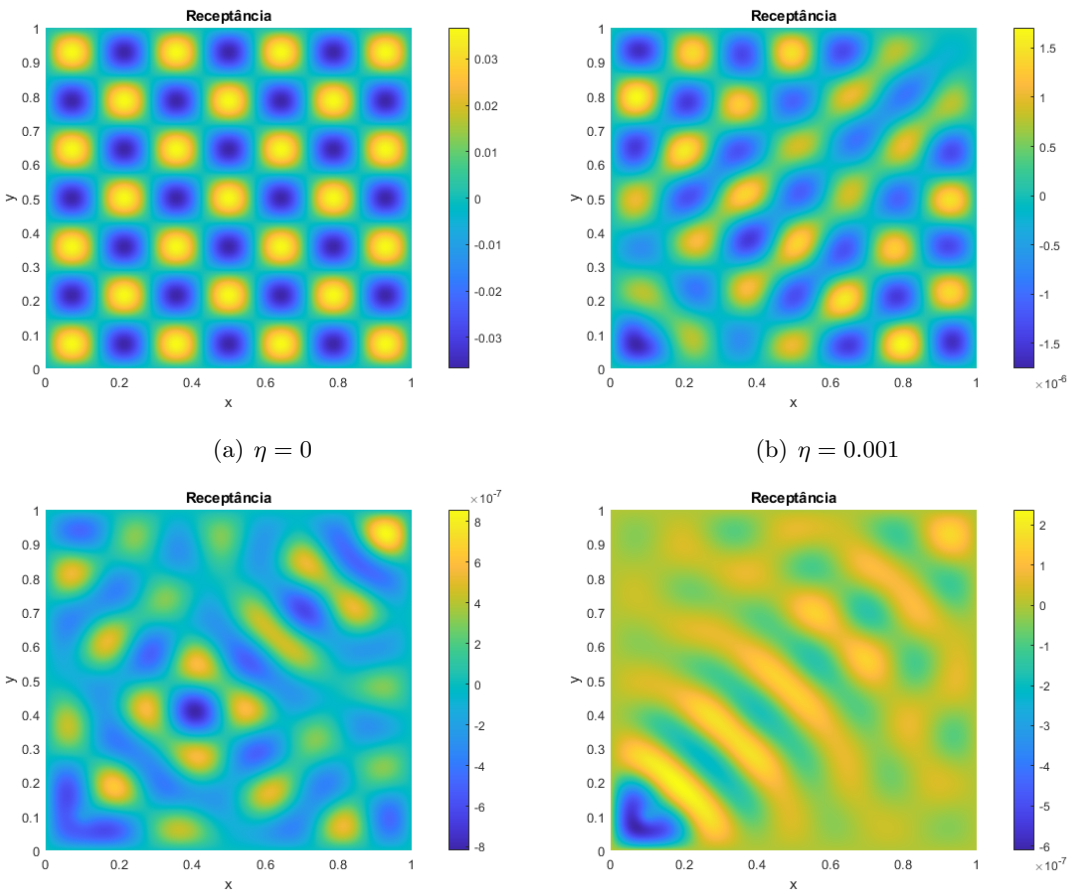


Figura 3.21: $\omega = 4278 rad/s$.

As amplitudes da resposta em frequência da receptância para as frequências ao redor do modo excitado, $m = 7$ e $n = 7$, Figura (3.21) apresentam atenuação nos picos a medida que o fator de amortecimento da placa aumenta, como já foi avaliado nas análises anteriores. Uma observação importante a ser colocada é a resposta para o amortecimento de $\eta = 0.01$, em que é possível



(a) $\eta = 0$

(b) $\eta = 0.001$

(c) $\eta = 0.01$

(d) $\eta = 0.1$

Figura 3.22: Receptância para $\omega = 4278 rad/s$.

perceber o aumento da sobreposição modal, tal que na frequência $\omega = 4250$ rad/s, a curva não acompanha a anti ressonância presente em amortecimento menor ou sem amortecimento. Ao utilizar a mesma teoria da relação entre a banda de meia potência e a distância entre os picos de ressonância, a resposta para fator $\eta = 0.1$ tende a não apresentar mais picos ou praticamente nenhum pico definido.

Para a avaliação da resposta na estrutura, foram geradas as receptâncias ao longo da placa para a frequência de excitação $\omega = 4278$ rad/s, Figura (3.22). Da mesma maneira que nas situações anteriores, as respostas observadas mostram a influência do amortecimento de forma mais acentuada, tal que a amplitude da resposta reduz com o aumento do fator de perda e a característica geométrica se destoa a medida que o amortecimento aumenta. Para $\eta = 0.001$, Figura 3.22(b), é possível perceber uma certa semelhança com a resposta sem amortecimento, apesar de já sofrer variações geométricas. Para os amortecimentos $\eta = 0.01$, Figura 3.22(c), e $\eta = 0.1$, Figura(3.22(d)) praticamente não é possível perceber a semelhança com o caso sem amortecimento. Como já avaliada a questão da alteração da frequência de ressonância com o aumento do amortecimento. De forma a comparar a resposta geométrica da placa, para frequências de excitação $\omega = 4278$ rad/s, com as da placa sob excitação de $\omega = 349$ rad/s e $\omega = 2178$ rad/s, é possível sustentar a hipótese de que a influência do amortecimento estrutural está associada ao o aumento da frequência de

excitação, tal que a sensibilidade da frequência de ressonância se torna mais suscetível a medida que altas frequências são alcançadas pelo aumento do fator de amortecimento estrutural.

3.1.4.4 Receptância da placa para excitação do modo $m = 10$ e $n = 10$

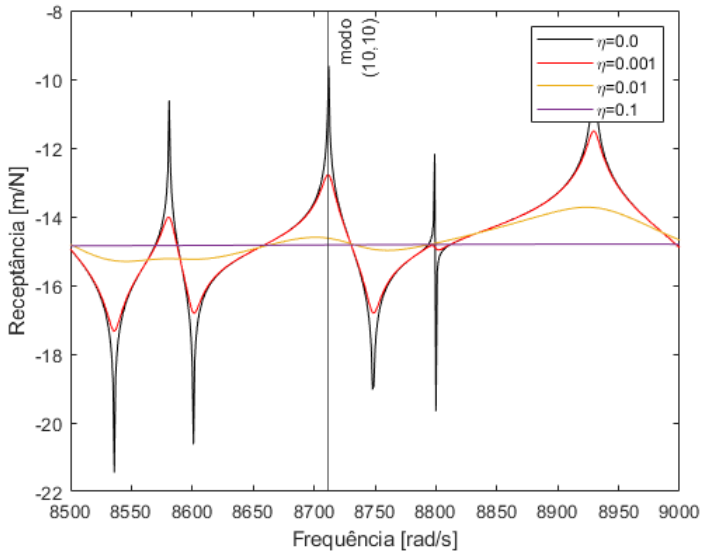
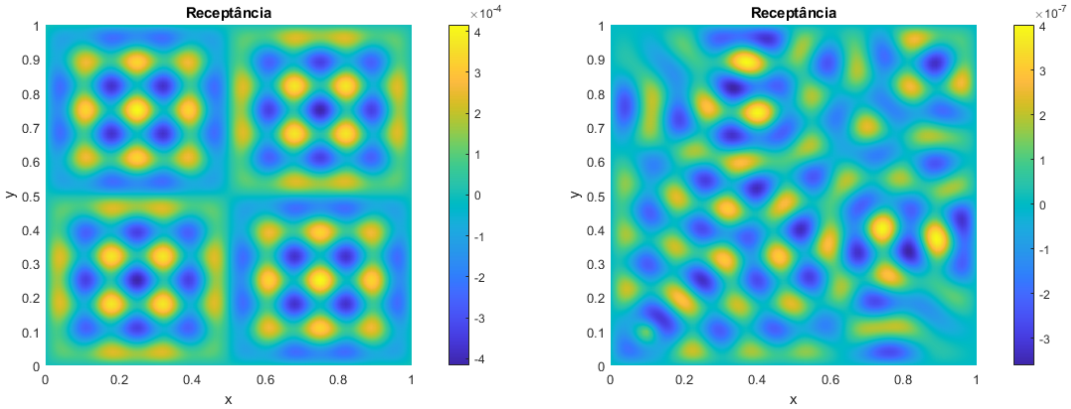


Figura 3.23: $\omega = 8712 rad/s$.

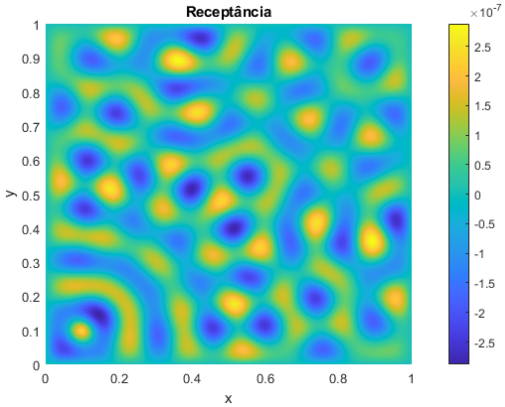
A última das frequências avaliadas consiste na frequência natural $\omega = 8712$, associada ao modo $m = 2$ e $n = 2$, tal que o gráfico da amplitude de resposta em frequência foi gerado em torno da frequência de análise, Figura (3.23) para os fatores de amortecimento em estudo, Tabela (3.4). Foi avaliado previamente que o efeito do amortecimento torna-se mais significativo de forma proporcional à frequência de excitação. Assim com as avaliações anteriores, o menor fator de perda implementado $\eta = 0.001$ apresenta o descolamento do pico, por conseguinte o deslocamento da frequência de ressonância de forma visível, e os amortecimentos maiores de $\eta = 0.01$ e $\eta = 0.1$ não possibilita a distinção dos modos devido à sobreposição modal.

Para a investigação da resposta na estrutura, foi gerada um conjunto de receptâncias avaliadas em cada ponto da placa para a excitação pontual na posição $x_e = 0.1$ m e $y_e = 0.1$ m com a frequência de $\omega = 8712$ rad/s. Ao comparar a resposta para o fator $\eta = 0.001$ com o caso sem amortecimento, é possível avaliar a redução da amplitude máxima de resposta. A alteração significativa da característica espacial consiste em um comportamento não observado para as avaliações feitas com esse amortecimento nas frequências $\omega = 349 rad/s$, $\omega = 2178$ rad/s e $\omega = 4278$ rad/s. Nas respostas avaliadas para maiores fatores de perda $\eta = 0.01$ e $\eta = 0.1$, praticamente não é possível perceber a semelhança com o caso sem amortecimento. No entanto, as três situações com amortecimento possuem semelhanças espaciais, sendo mais sutil no caso $\eta = 0.1$, figura (3.24(d)).

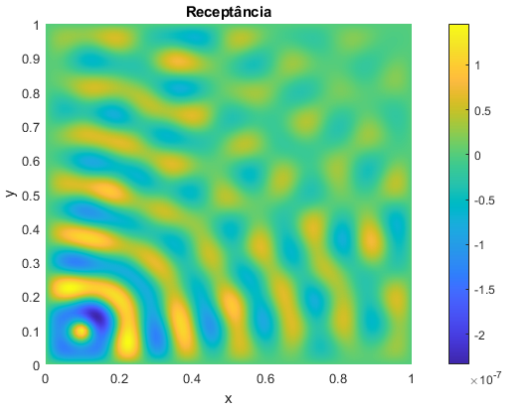


(a) $\eta = 0$

(b) $\eta = 0.001$



(c) $\eta = 0.01$



(d) $\eta = 0.1$

Figura 3.24: Receptância para $\omega = 8712 rad/s$.

3.2 Análise da Placa com Ressonadores

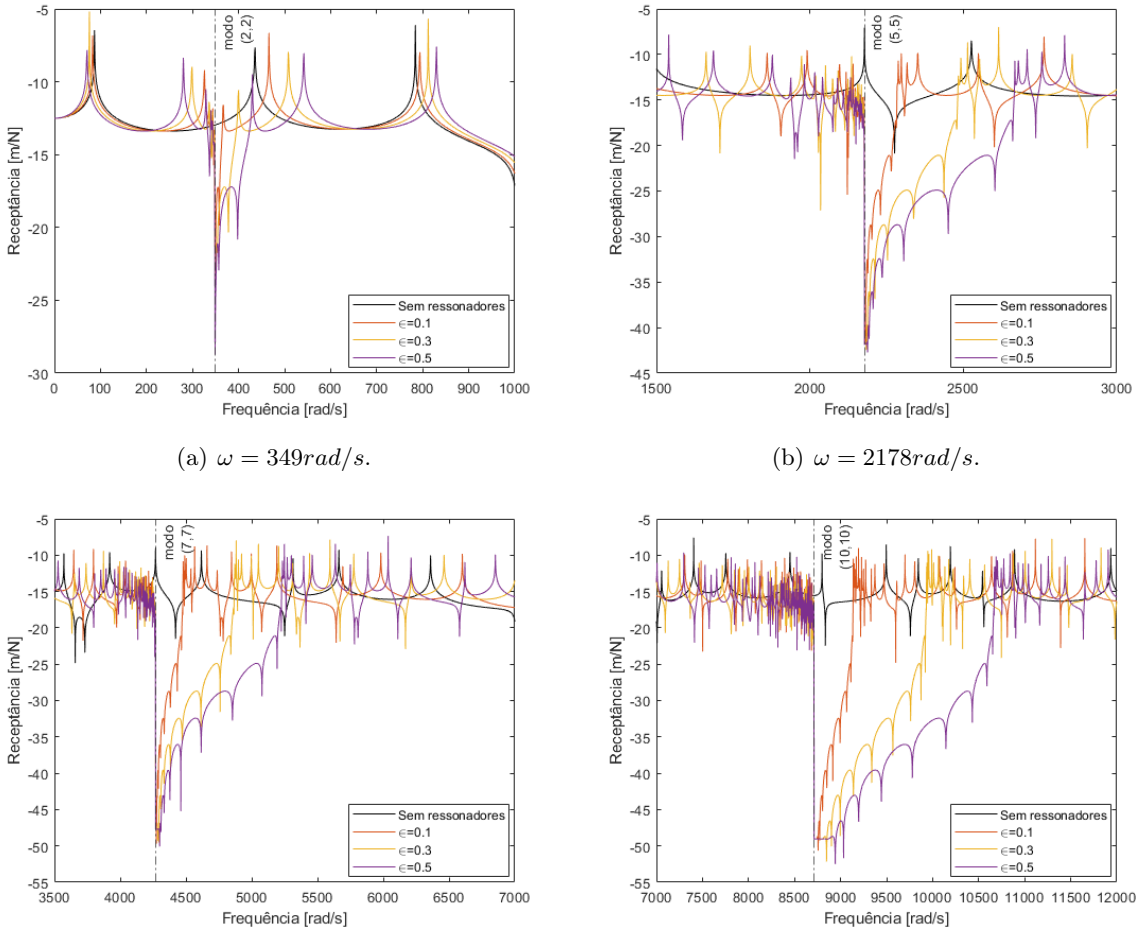
Nessa seção serão observados a influência, na metaestrutura, dos parâmetros como razão de massa do ressonador e o amortecimetno estrutural presente tanto na estrutura de base assim como nos ressonadores. A implementação das soluções analíticas foram realizados no *MATLAB* assim como realizado na seção anterior de placa fina.

3.2.1 Influência da razão de massa na Receptância

Com o intuito de se investigar a influência da razão entre a massa dos ressonadores e a massa da estrutura, foi implementada a solução analítica da Receptância, equação (2.98), Caítulo 2, seção 2.4, tal que a amplitude de resposta em frequência foi obtida na posição $x_r = 0.5$ e $y_r = 0.5$, sendo a posição de entrada $x_r = 0.1$ e $y_r = 0.1$. A escolha da posição central para obtenção da resposta se deve ao fato de o centro coincidir com nós modais de vários modos, o que torna as respostas geradas menos densas para melhor observação.

Para análise, foram gerados os gráficos de resposta em frequência, Figura (3.25), levando em consideração os casos sem ressonadores e razões de massa $\epsilon = 0.1$, $\epsilon = 0.3$ e $\epsilon = 0.5$. Os intervalos

de frequências observados são as de excitação ao redor das frequências naturais dos ressonadores, de tal modo que as mesmas sejam próximas da frequência natural da placa para modos $m = 2$ e $n = 2$, $m = 5$ e $n = 5$, $m = 7$ e $n = 7$, $m = 10$ e $n = 10$.



(a) $\omega = 349 rad/s$.

(b) $\omega = 2178 rad/s$.

(c) $\omega = 4269 rad/s$.

(d) $\omega = 8712 rad/s$.

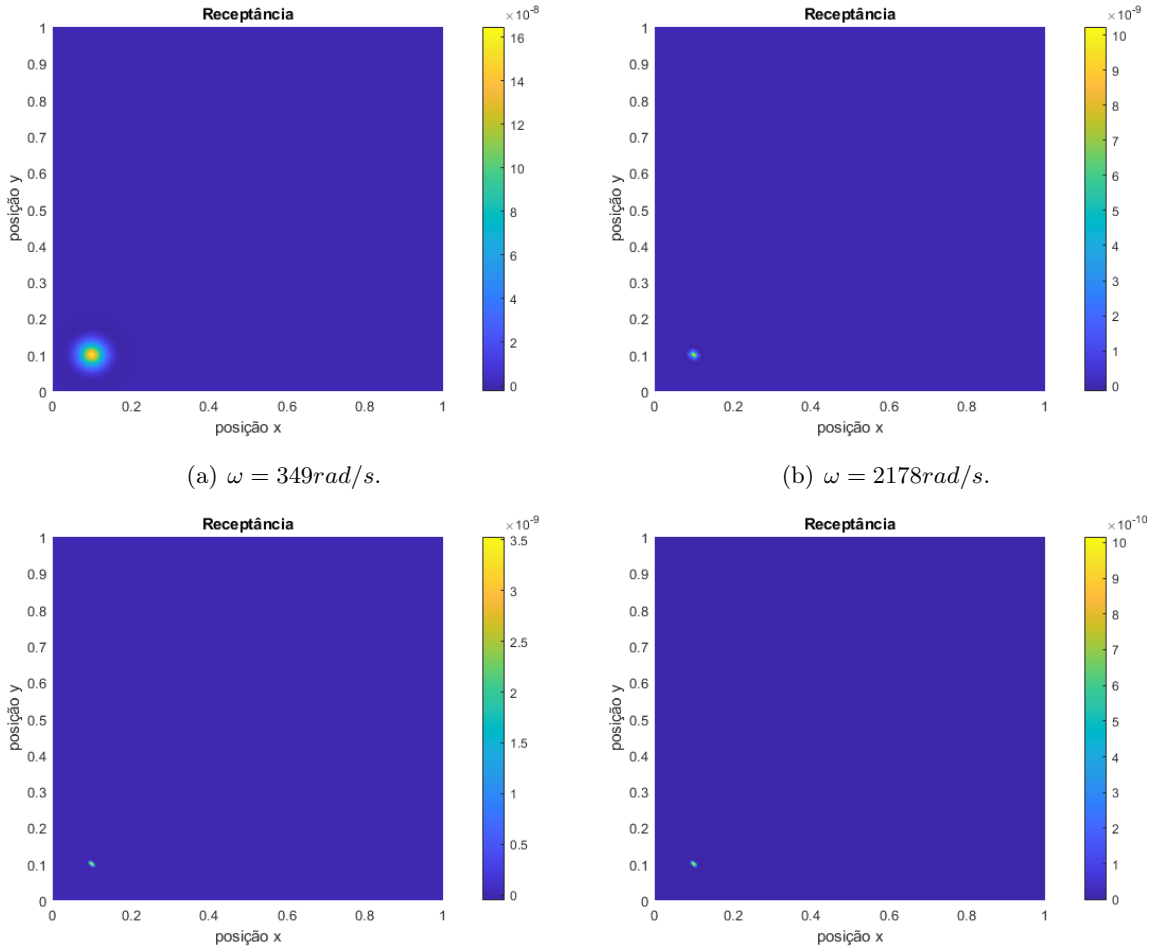
Figura 3.25: Amplitude de FRF Receptância com ressonadores.

Para o primeiro intervalo de frequências avaliado, figura (3.25(a)), não é possível perceber o pico de ressonância para o modo $m = 2$ e $n = 2$ no caso sem ressonador. Isso ocorre devido à coincidência do ponto de resposta com o nó desse modo excitado para a frequência de 349 rad/s. Apesar disso, é observada a abertura do bang gap exatamente na frequência de sintonização do ressonador,$\omega_p = 349$, sem depender significativamente da massa adicionada nos ressonadores. Observando o *bandgap*, para a menor razão de massa $\epsilon = 0.1$, o mesmo é menor que o caso $\epsilon = 0.3$ que por sua vez é menor comparada ao percentual de 50%. De forma análoga, a queda no pico de ressonânci pelos ressonadores é proporcional à razão de massa, visto que mantendo as características da placa, ela está associada à adição de massa na estrutura. Uma observação importante está no deslocamento dos picos de ressonância fora do bandgap e o surgimento de picos na região próxima à banda de parada.

Na figura (3.25(b)), as frequências de análise são superiores, ao redor da frequência natural 2178 rad/s da placa associado ao modo $m = 5$ e $n = 5$. Esse modo aparece no gráfico como pico

de ressonância por não apresentar nó no ponto de resposta. Nessa ordem de análise, é observado um aumento significativo do band gap, comparado às frequência menores, figura (3.25(a)). Em outros intervalos de frequências superiores, como apresentados nas figuras (3.28(c)) (3.28(d)), as amplitudes de resposta em frequência apresentam o mesmo comportamento, a influência da razão de massa é diretamente proporcional ao aumento do valor absoluto de frequência natural do ressonador.

As receptâncias ao longo da placa foram geradas, Figura (3.26) para analisar o comportamento da placa ao ser submetido um forçamento pontual na posição $x_e = 0.1m$ e$y_e = 0.1m$, sendo as frequências de entrada próximas das respectivas frequências naturais dos ressonadores.



(a) $\omega = 349rad/s$.

(b) $\omega = 2178rad/s$.

(c) $\omega = 4269rad/s$.

(d) $\omega = 8712rad/s$.

Figura 3.26: Receptância da placa com ressonadores, razão de massa $\epsilon = 0.1$.

Ao observar resposta para frequência de entrada de $\omega = 349rad/s$, Figura (3.26(a)), não é possível avaliar notar nenhuma propagação ao longo da placa, distante do ponto de excitação. Esse comportamento se repete nas excitações $\omega = 2178rad/s$,(3.26(b)), $\omega = 4269rad/s$,(3.26(c)), $\omega = 8712rad/s$,(3.26(d)), porém com maiores atenuações na posição de entrada e com menor raio de perturbação em torno da posição de entrada.

Para justificar esse efeito do espaço de perturbação ao redor do ponto de entrada nas imagens,

pode-se utilizar a abordagem de propagação da onda. A solução de deslocamento, assumido para o chegar curva de dispersão, consiste numa relação de amplitude, com as frequências temporais e espaciais expressa por:

$$w(x, y, t) = Ae^{i(+k_x x + k_y y - \omega t)}, \tag{3.1}$$

onde k_x e k_y representam a frequência espacial nas duas direções da placa, também chamado de número de onda, Capítulo 1, seção 1.3. Foi apresentada a sua dependência com o comprimento de onda, que possui a relação inversamente proporcional, porém não necessariamente linear. Visto que para uma velocidade de propagação constante, o comprimento de onda λ decai com o aumento da frequência, pode-se interpretar que o número de onda possui maiores valores para baixas frequências e diminui a medida que a frequência aumenta.

A influência do número de onda para a parcela imaginária da resposta consiste no decaimento da amplitude da onda propagante, conhecido como ondas evanescentes e o efeito de campo próximo, que para baixas frequências, esse efeito é observado de forma clara na figura (3.26(a).

O aumento da banda de atenuação apresentado nos gráficos, Figura (3.25), segue a relação aproximada de proporcionalidade com a razão de massa pela equação apresentada no trabalho de [4]:

$$\omega_{rb} = \omega_p \sqrt{(1 + \in)}, \tag{3.2}$$

onde ω_{rb} é a frequência associada ao modo de borda e ω_p a frequência natural dos ressonadores.

Os resultados encontrados para os modos de borda são próximos aos obtidos analiticamente pela equação (3.2) e apresentou que para o aumento da razão de massa de 10% para 30% o aumento da banda de atenuação foi de aproximadamente 2.6 vezes maior. É importante pontuar que essa relação se mantêm apesar do aumento da frequência de análise.

Nessa análise foi obtida uma conclusão parcial sobre a influência da razão de massa no metamaterial. Abertura do *bandgap* na frequência de sintonização e o seu aumento proporcional ao aumento da razão de massa são observados. A área da banda de atenuação e o tamanho da anti-ressonância também apresentaram essa proporcionalidade.

Após observar a resposta estrutural das placas com ressonadores projetados para as respectivas frequências de excitação, foi implementada uma situação para avaliar a veracidade da atenuação de vibração em outras frequências fora da frequência de projeto do ressonador, Apêndice (I.7). Nesse âmbito, o gráfico (3.27) mostra um caso em que foi considerada a razão de massa fixa de $\epsilon = 0.3$. A frequência do ressonador implementado foi de $\omega = 8799.9 rad/s$ e foram inferidas frequências de $\omega = 8450 rad/s$, $\omega = 8800 rad/s$, $\omega = 9496 rad/s$ e $\omega = 9844 rad/s$.

Veja que $\omega = 8450$ rad/s corresponde a uma frequência de ressonância para o pico mais próximo antes do *bandgap*. A frequência de entrada $\omega = 8800$ rad/s é a excitação na frequência de sintonização do ressonador e $\omega = 9496$ rad/s e $\omega = 9844$ rad/s são as frequências de ressonância de dois dos picos explicitados no gráfico (3.27) que estão dentro do *bandgap* para esse caso específico. Dessa forma, foram geradas as respostas de receptâncias ao longo da placa, Figura (3.28), para as quatro frequências de excitação e observar a influência do ressonador na estrutura.

Para a excitação na frequência fora do *bandgap*, Figura (3.28(a)), é notória que a estrutura apre-

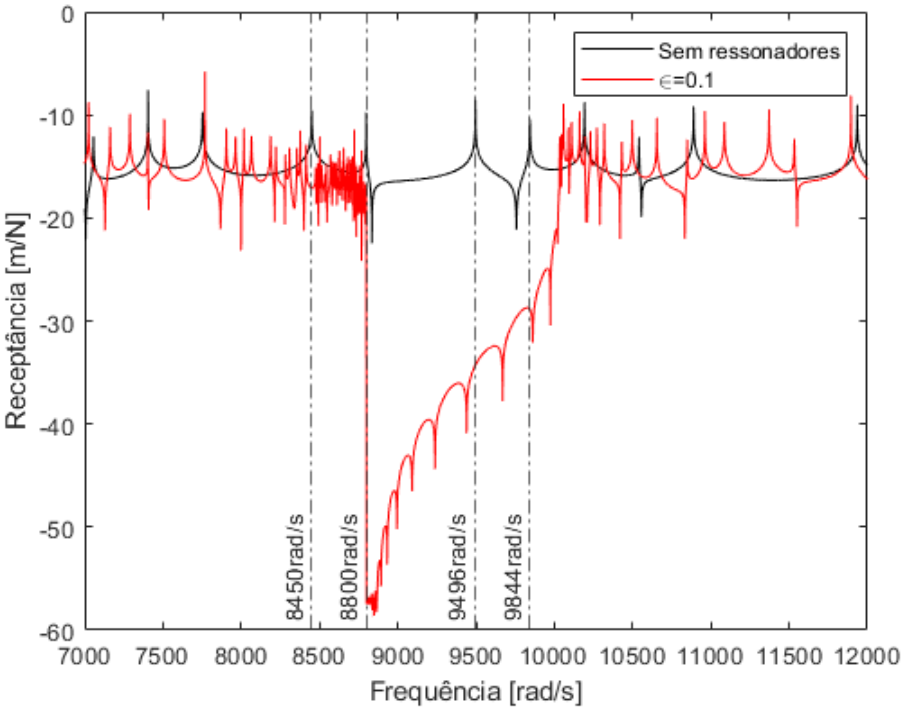


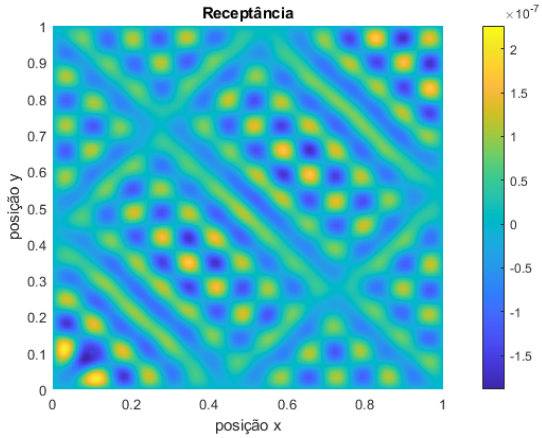
Figura 3.27: Amplitude de resposta em frequência da receptância para razão de massa de ressonadores $\epsilon = 0.3$.

senra respostas não nulas em outros pontos da placa. Na frequência de projeto, Figura (3.28(b)), a onda não é propagada ao longo da estrutura, tal que a atenuação é evidente. A amplitude máxima na ordem de 10^{-9} m mostra que a atenuação para a frequência do ressonador é máxima, como esperado. Nas frequências $\omega = 9496$ rad/s e $\omega = 9844$ rad/s, também ocorre a atenuação da vibração de forma bastante eficiente, ao considerar que a resposta obteve a amplitude máxima na ordem de 10^{-7} m e somente na região de entrada percebe-se a propagação.

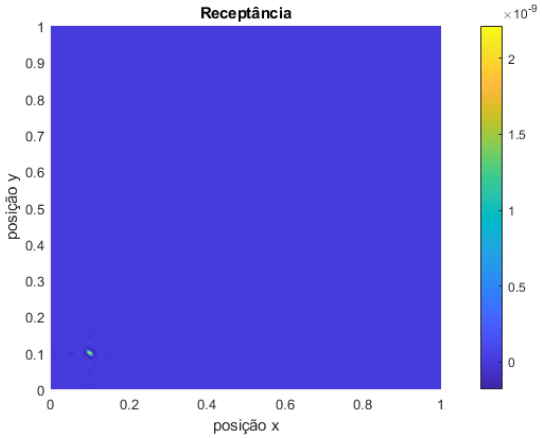
3.2.2 FRF da Receptância com presença de amortecimento proporcional

Por meio da implementação da solução analítica da placa com ressonadores na presença de amortecimento na estrutura de base (η), equação (2.99), Capítulo 2, seção 2.4, no código apresentado no Apêndice (I.8). Amplitude de resposta em frequência foi gerada para fatores de perda nulo, $\eta = 0.001$, $\eta = 0.01$, $\eta = 0.1$ e $\eta = 0.5$, nos intervalos de frequências em torno das de ressonância dos neutralizadores, Figura (3.29).

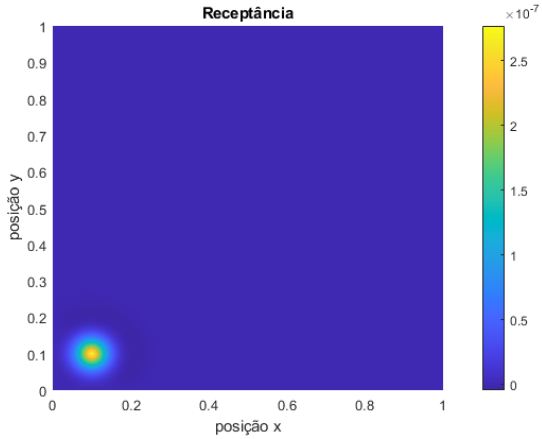
De forma comum, o comportamento da curva dentro dos *bandgaps* não aparentou variação significativa devido à influência do amortecimento na estrutura primária nos casos apresentados, Figura (3.29). A influência da abertura da banda está mais associada a frequência em que se encontra o projeto do neutralizador. Ao avaliar fora do *stopband*, o amortecimento estrutural gera uma grande variação na resposta. De forma similar ao comportamento analisado no caso de placa sem ressonadores para diferentes amortecimentos, os picos são reduzidos e o aumento do fator de



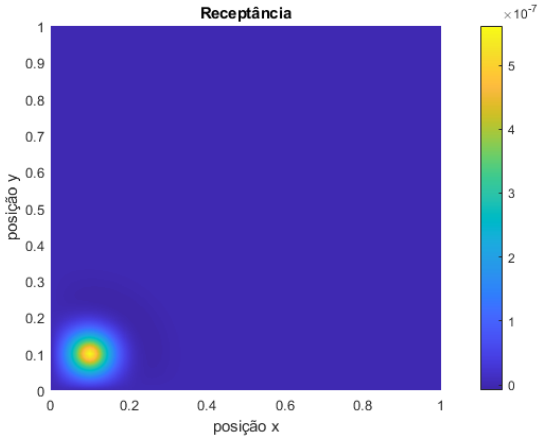
(a) $\omega = 8450 rad/srad/s$.



(b) $\omega = 8800 rad/s$.



(c) $\omega = 9496 rad/srad/s$.



(d) $\omega = 9844 rad/s$.

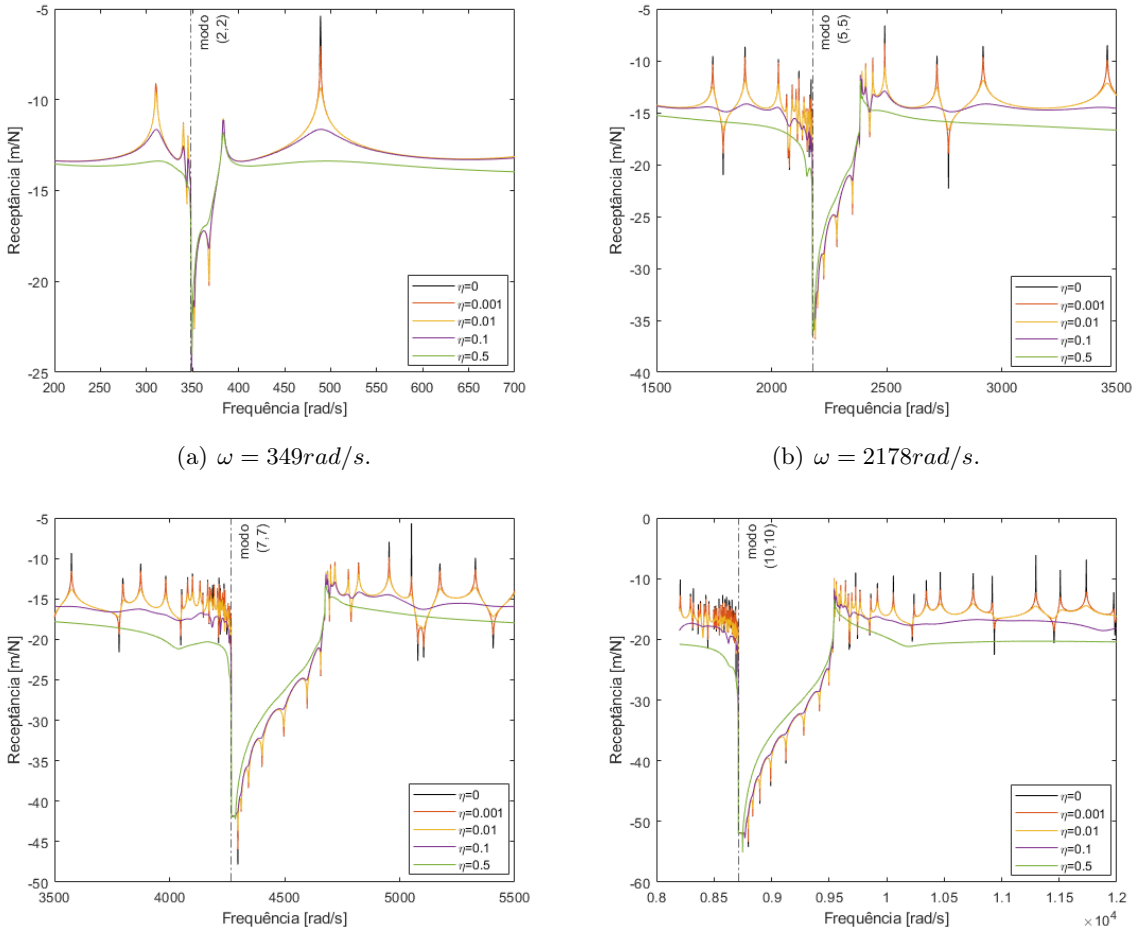
Figura 3.28: Receptâncias da placa para ressoandores com razão de massa $\epsilon = 0.3$ na posição de entrada $x_e = 0.1m$ e $y_e = 0.1m$.

sobreposição modal está proporcional à frequência observada. Com relação à região de modos de borda, é possível perceber uma densidade cada vez mais significativa antes e depois do *bandgap* a medida que a frequência de análise também aumenta.

O trabalho realizado por Belle, [16], apresentou uma curva de dispersão sob abordagem prorrogatória, tal que obteve a conclusão de que o aumento do fator de perda na estrutura primária não influencia na largura de banda da atenuação, e que a influência do amortecimento na redução da amplitude máxima de ressonância é percebida de forma mais evidente fora do *bandgap*. O presente estudo apresenta resultados semianalíticos sob abordagem modal e foram percebidos os mesmos comportamentos avaliados no trabalho do autor.

3.2.3 Metamaterial localmente ressonante com amortecimento estrutural nos ressonadores

A análise da influência do amortecimento no comportamento do metamaterial foi realizada por meio da solução analítica da receptância ao inserir fator de perda nos ressonadores. A geração



(a) $\omega = 349 rad/s$.

(b) $\omega = 2178 rad/s$.

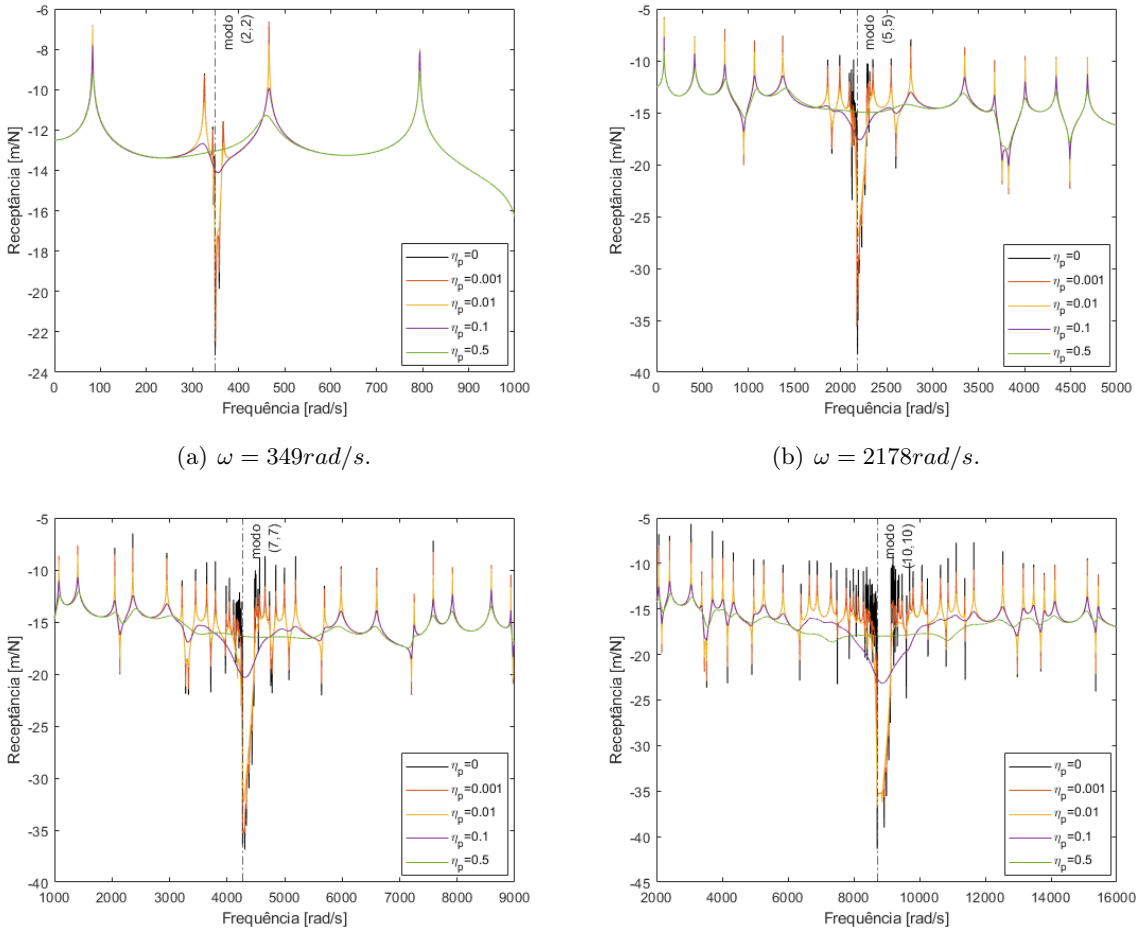
(c) $\omega = 4269 rad/s$.

(d) $\omega = 8712 rad/s$.

Figura 3.29: Amplitude de FRF Receptância da Placa com ressonadores para amortecimentos estruturais $\eta = 0$, $\eta = 0.001$, $\eta = 0.01$, $\eta = 0.1$ e $\eta = 0.5$.

das amplitudes de resposta em frequência da receptância, equação (2.99), Capítulo 2, seção 2.4, foi proveniente da implementação do código, Apêndice (I.9), para casos sem amortecimento, $\eta_p = 0.001$,$\eta_p = 0.01$,$\eta_p = 0.1$ e $\eta_p = 0.5$, nos intervalos de frequência ao redor das de projeto dos neutralizadores, Figura (3.30).

Ao avaliar a resposta em torno da frequência de 349 rad/s, frequência natural dos ressonadores, Figura (3.30(a)), é possível analisar que para os fatores de perda $\eta_p = 0.001$ e $\eta_p = 0.01$, as curvas, no *bandgap*, se aproximam de forma significativa do caso de ressonadores sem amortecimento. O pico na frequência de atenuação assim como nos modos de borda, a resposta em frequência para esses fatores de amortecimento foram bem próximas. Já para os casos $\eta_p = 0.1$ e $\eta_p = 0.5$, o impacto do amortecimento é visivelmente significativo. Para o caso $\eta_p = 0.5$, não foi possível observar a abertura da banda de parada. Um comportamento observado para o caso $\eta_p = 0.1$ é o aumento na largura de banda apesar da redução da amplitude máxima de atenuação na frequência de projeto do ressonador, também é possível observar o deslocamento da frequência de ressonância devido à presença de amortecimento. É observado também, Figura (3.30(a)), que para fatores de perda maiores, os picos ao redor do *stopband* também sofrem alteração.



(a) $\omega = 349 rad/s$.

(b) $\omega = 2178 rad/s$.

(c) $\omega = 4269 rad/s$.

(d) $\omega = 8712 rad/s$.

Figura 3.30: Amplitude de FRF Receptância da Placa Localmente ressonante com presença de amortecimentos estruturais nos ressonadores de $\eta_p = 0$, $\eta_p = 0.001$, $\eta_p = 0.01$, $\eta_p = 0.1$ e $\eta_p = 0.5$.

Para metamateriais com ressonadores sintonizados em maiores frequências naturais como nos casos 2178 rad/s, 4269 rad/s e 8712 rad/s, Figuras (3.30(b)), (3.30(c)) (3.30(d)), é possível observar comportamentos análogos ao caso de menor frequência. A largura de banda de atenuação é cresce e a magnitude da atenuação decresce a medida que o fator de perda nos neutralizadores aumenta. A respeito do comportamento da resposta fora do *bandgap*, é possível observar que quanto maior a frequência de projeto dos ressonadores, maior é a influência do amortecimento sobre a estrutura primária, o que implica na existência da influência do amortecimento dos ressonadores na placa, apesar da não consideração do fator de perda na estrutura. Para frequências longe da de projeto, todas as respostas analisadas, curvas para diferentes fatores de amortecimento η_p, convergem para o caso não amortecido em algum momento, visto que, como analisado anteriormente, esse intervalo de frequências que sofrem desse comportamento é maior para maiores frequências de projeto dos ressonadores.

Abordagem realizada por Belle et al. [16] de propagação de ondas em uma célula unitária chegou numa curva de dispersão de uma estrutura bidimensional com ressonadores, conclui no seu estudo que o amortecimento no neutralizador causa uma livre propagação de ondas flexurais antes e

depois da banda de parada e que o aumento do fator de perda amplia a zona de atenuação apesar da redução do desempenho no pico de atenuação. No presente estudo, foi percebido resultados equivalente com relação ao aumento do *bandgap* e a redução o desempenho de forma proporcional, um comportamento diferente observado está na influência do amortecimento na estrutura primária o que pode ser influência da abordagem modal com a consideração da condição de contorno.

Capítulo 4

Conclusões finais

O presente trabalho teve como objetivo investigar o comportamento dinâmico de placas finas localmente ressoantes, ou seja um metamaterial estrutural, por meio da abordagem modal.

Foi utilizado um modelo de placa fina localmente ressonante, previamente proposto na literatura. Para se obter a resposta forçada, foi utilizada uma abordagem modal e o método de modos assumidos, para aproximar a solução. Essa abordagem trouxe a possibilidade de avaliar os efeitos na resposta em frequência dos parâmetros de razão de massa e fator de perda, tanto na estrutura base quanto nos ressonadores.

A partir da investigação sobre influência da razão de massa, foi possível concluir que o seu impacto está diretamente relacionado ao aumento da largura de banda de atenuação em detrimento da variação das frequências de ressonância do metamaterial. A partir da análise dos efeitos do amortecimento na estrutura primária, conclui-se que a resposta no *bandgap* fica praticamente inalterada. Entretanto, fora dessa banda, a resposta se mostrou similar ao caso de uma placa fina, ou seja, os picos de ressonância tem uma diminuição de amplitude com o aumento do amortecimento. Já o amortecimento estrutural nos ressonadores aumenta o *bandgap* apesar da redução de desempenho na atenuação nos picos de ressonância.

A partir da investigação proposta do comportamento dinâmico de placas finas localmente ressonantes por meio da abordagem modal em estruturas finitas, foi possível propor um modelo simplificado para avaliar os parâmetros tipicamente considerados em projetos de metamateriais localmente ressonantes.

4.1 Recomendação para trabalhos Futuros

Visto que o presente trabalho foca em um metamaterial localmente ressonante com infinitos ressonadores sintonizados na mesma frequência de ressonância com uma determinada razão de massa, uma das possibilidades de trabalho consiste no modelo estendido para implementação de outros ressonadores com diferentes frequências de projeto e de razão de massa.

Outra sugestão está em trabalhos com validações experimentais utilizando os parâmetros ana-

lisados e observar experimentalmente a resposta em frequência do metamaterial localmente ressonante analisado no trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] FLECK NORMAN A.; DESHPANDE, V. S. A. M. F. Micro-architectured materials: past, present and future. *Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Proceedings of the Royal Society A, v. 466(2121), p. 2495–2516, 2010.

[2] VESELAGO, V. G. Electrodynamics of substances with simultaneously negative electrical and magnetic permeabilities. *Soviet Physics Uspekhi*, v. 10(4), p. 504–509, 1968.

[3] CHRISTENSEN J., K. M. K. O. . W. M. Vibrant times for mechanical metamaterials. *Mrs Communications*, Materials Research Society, v. 5(3), p. 453–462, 2015.

[4] SUGINO C., X. Y. L. S. R. M. . E. A. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 406, p. 104–123, 2017.

[5] SUGINO C., L. S. R. M. . E. A. On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, American Institute of Physics, v. 120(13), p. 134501, 2016.

[6] SHELBY RICHARD A.; SMITH, D. R. S. S. Experimental verification of a negative index of refraction. *Sience*, v. 292(5514), p. 77–79, 2001.

[7] LIU Z., Z. X. M. Y. Z. Y. Y. Y. Z. C. C. T. . S. P. Locally resonant sonic materials. *Sience*, v. 289(5485), p. 1734–1736, 2000.

[8] MENG H., B. N. C. Y. W. L. C. F. F. A. . . E. W. 3d rainbow phononic crystals for extended vibration attenuation bands. *Scientific Reports*, Elsevier, v. 10(1), p. 1–9, 2020.

[9] TAUB A. I., K. P. E. L. A. A. . O. J. N. The evolution of technology for materials processing over the last 50 years: The automotive example. *JOM*, v. 59(2), p. 48–57, 2007.

[10] JUNG, J. et al. Realisation of a locally resonant metamaterial on the automobile panel structure to reduce noise radiation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 122, p. 206–231, 2019.

[11] SANGIULIANO L., C. C. D. E. D. S. J. P. B.; DESMET, W. Reducing vehicle interior nvh by means of locally resonant metamaterial patches on rear shock towers. *Tech. rep., SAE*, Technical Paper, p. 10, 2019.

[12] HMEIROVITCH, L. *Fundamentals of vibrations.* [S.l.]: Waveland Press, 2010.

[13] SOUZA, M. R. et al. A bayesian approach for wavenumber identification of metamaterial beams possessing variability. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 135, p. 106437, 2020.

[14] CLAEYS, C. e. a. A lightweight vibro-acoustic metamaterial demonstrator: Numerical and experimental investigation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 70, p. 853–880, 2016.

[15] GAO YAN; BRENNAN, M. J. S. F. Control of flexural waves on a beam using distributed vibration neutralisers. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 330(12), p. 2758–2771, 2011.

[16] BELLE L., C. C. D. E. . D. W. V. On the impact of damping on the dispersion curves of a locally resonant metamaterial: Modelling and experimental validation. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 409, p. 1–23, 2017.

[17] HAGEDORN, P.; DASGUPTA, A. *Vibrations and waves in continuous mechanical systems.* [S.l.]: Wiley Online Library, 2007.

[18] FAHY, F. J.; GARDONIO, P. *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response.* [S.l.]: Elsevier, 2007.

[19] SAVI MARCELO AMORIM; DE PAULA, A. S. *Vibrações Mecânicas.* [S.l.]: LTC, 2017.

[20] GARDONIO, P.; CASAGRANDE, D. Shunted piezoelectric patch vibration absorber on two-dimensional thin structures: Tuning considerations. *Sound and vibration*, Elsevier, v. 395, p. 26–47, 2017.

ANEXOS

I. CÓDIGO

I.1 Código para obtenção das frequências naturais da Placa fina para condição de apoio simples

```
%%% Frequências naturais da Placa fina para condição
%%%de apoio simples nas extremidades
%%% Autor: André Toshiaki Nishimoto - 14/0167587
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília

clc
close all
clear all

%%Propriedades do material (Aço 1020)
    E=186*10^9; %Módulo de elasticidade (Pa)
    v=0.3;      %Coeficiente de Poisson
    pho=7870;   %Massa específica       (kg/m^3)

%%Características geométricas
    h=0.003;    %Espessura              (m)
    a=1;        %Comprimento da placa   (m)
    b=1;        %Largura da placa       (m)

%%Constantes para análise da resposta
    D=E*h^3/(12*(1-v^2));

%%Obtenção das frequências naturais associadas a cada forma modal
    z1=0;
    for m=1:1:15 %Modos m
        z1=z1+1;
        z=0;
    for n=1:1:15 %Modos n
        z=z+1;
        omega(z)=pi^2*(m^2/a^2+n^2/b^2)*sqrt(D/(pho*h));
    end
        M(z1,:)=omega; %Matriz de frequências naturais
    end
```

I.2 Código para obtenção das formas modais normalizadas

```
%%% Formas modais normalizadas
%%% Autor: André Toshiaki Nishimoto - 14/0167587
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília
clc
close all
clear all

%%Formas modais normalizadas da Placa fina

%%Propriedades do material (Aço 1020)
    E=186*10^9; %Módulo de elasticidade (Pa)
    v=0.3;      %Coeficiente de Poisson
    pho=7870;   %massa específica       (kg/m^3)
%%Características geométricas
    h=0.003;    %Espessura              (m)
    a=1;        %Comprimento da placa   (m)
    b=1;        %Largura da placa       (m)

%%Constantes para análise da resposta
    A=sqrt(8/(pho*h*a*b));%Constante de integração (Norm. massa)
    t=0;                  %Avaliação sem dependência do tempo
    phi=0;                %Ângulo de fase
    D=E*h^3/(12*(1-v^2));

%%Forma modal da placa para condição de apoio simples
    z1=0;
for m=[2 5 7 10]
    n=m;
    z1=z1+1;
omega=pi^2*(m^2/a^2+n^2/b^2)*sqrt(D/pho*h);

[x,y]= meshgrid(0:0.01:1,0:0.01:1);

w=A*sin(m*pi*x/a).*sin(n*pi*y/b);

%%Plotagem do gráfico da forma modal
figure(z1)
surf(x,y,w);
shading interp
title('Modo normalizado');
```

```
xlabel('x');
ylabel('y');
colorbar
end
```

I.3 Código para obtenção da receptâcia ao longo da placa para diferentes frequências de excitação

```
%%% Receptância da placa para diferentes frequências de excitação
%%% Autor: André Toshiaki Nishimoto - 14/0167587
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília

clc
close all
clear all

%%Propriedades do material (Aço 1020)
    E=186*10^9; %Módulo de elasticidade (Pa)
    v=0.3;      %Coeficiente de Poisson
    pho=7870;   %massa específica       (kg/m^3)
%%Características geométricas
    h=0.003;    %Espessura              (m)
    a=1;        %Comprimento da placa   (m)
    b=1;        %Largura da placa       (m)

%%Constantes para análise da resposta
    A=sqrt(8/(pho*h*a*b));%Constante de integração (Norm. massa)
    t=0;                  %Avaliação sem dependência do tempo
    phi=0;                %Ângulo de fase
    D=E*h^3/(12*(1-v^2));

%%Avaliação da receptância na placa para diferentes frequências de entrada
    xe=0.5; ye=0.5; %Posição de entrada do forçamento
    neta=0.00

%%Varredura das dimensões da placa
    z2=0;
    for Omega=[349 2177.95 4268.79 8712] %Frequência de excitação
    z2=z2+1;
    z1=0;
    for yr=0:0.01:1
```

```
        z1=z1+1;
        z=0;
    for xr=0:0.01:1
        z=z+1;

%%Avaliação da receptância para infinitos modos
    frf=0;
    for m=1:1:50
        alpha=m*pi/a;

        FRF=0;
    for n=1:1:50
        betha=n*pi/b;

        We=A*sin(alpha*xe)*sin(betha*ye);    %Autofunção na entrada

        Wr=A*sin(alpha*xr)*sin(betha*yr);    %Autofunção na resposta

        omega=pi^2*(m^2/a^2+n^2/b^2)*sqrt(D/(pho*h));

        FRF=FRF+(Wr*We)/(omega^2*(1-1i*neta)-Omega^2);
    end
        frf=frf+FRF;                          %Resposta em frequência
    end
        R(z)=real(frf);
    end
        M(z1,:)=R;                            %Resposta na placa
    end

%%Gráfico de superfície da placa fina
        x=(0:0.01:1);
        y=(0:0.01:1);
        figure(z2)
        surf(x,y,M);
        shading interp
        title('Receptância');
        xlabel('x');
        ylabel('y');
        colorbar
    end
```

I.4 Código para ontenção da resposta em frequência da placa fina para diferentes fatores de amortecimento estrutural

```
%%% FRF Receptância para direferentes amortecimentos estruturais
%%% Autor: André Toshiaki Nishimoto - 14/0167587
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília
clc
close all
clear all

%%%Propriedades do material (Aço 1020)
    E=186*10^9; %Módulo de elasticidade (Pa)
    v=0.3;      %Coeficiente de Poisson
    pho=7870;   %massa específica       (kg/m^3)
%%%Características geométricas
    h=0.003;    %Espessura              (m)
    a=1;        %Comprimento da placa   (m)
    b=1;        %Largura da placa       (m)

%%%Constantes para análise da resposta
    A=sqrt(8/(pho*h*a*b));%Constante de integração (Norm. massa)
    t=0;                  %Avaliação sem dependência do tempo
    phi=0;                %Ângulo de fase
    D=E*h^3/(12*(1-v^2));

%Posições de entrada do forçamento e da resposta
    xe=0.1; ye=0.1; xr=0.1; yr=0.1;

    z1=0;
    for neta=[0 0.001 0.01 0.1];
    z1=z1+1;
    z=0;
    for Omega=1900:1:2500
        z=z+1;
        frf=0;
    for m=1:1:150
        alpha=m*pi/a;
        FRF=0;
    for n=1:1:150
        betha=n*pi/b;
        %Autofunção na entrada
        We=A*sin(alpha*xe)*sin(betha*ye);
```

```
        %Autofunção na resposta
        Wr=A*sin(alpha*xr)*sin(betha*yr);

        %Frequências naturais para cada modo
        omega=pi^2*(m^2/a^2+n^2/b^2)*sqrt(D/(pho*h));

        FRF=FRF+(Wr*We)/(omega^2*(1-1i*neta)-Omega^2);

    end
        frf=frf+FRF;
    end
        Resposta(z)=frf;
    end
        Resp(z1,:)=Resposta;
    end

    %%%Gráfico
     x=1900:1:2500;
     plot(x,log(abs(Resp(1,:))),'k',x,log(abs(Resp(2,:))),'r',
     x,log(abs(Resp(3,:))),x,log(abs(Resp(4,:))));
     xlabel('Frequência [rad/s]');
     ylabel('Receptância [m/N]');
     xline(2177.95,'-',{'modo','(5,5)'});
     legend('\eta=0.0','\eta=0.001','\eta=0.01','\eta=0.1')
```

I.5 Código de obtenção da resposta em frequência do metamaterial para diferentes razões de massa

```
%%% Resposta em frequência para diferentes razões de massa do metamaterial
%%% Autor: André Toshiaki Nishimoto - 14/0167587
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília

clc
close all
clear all

%%%Propriedades do material (Aço 1020)
    E=186*10^9; %Módulo de elasticidade (Pa)
    v=0.3;      %Coeficiente de Poisson
    pho=7870;   %massa específica       (kg/m^3)
```

```
%%Características geométricas
    h=0.003;    %Espessura              (m)
    a=1;        %Comprimento da placa   (m)
    b=1;        %Largura da placa       (m)

%%Constantes para análise da resposta
    A=sqrt(8/(pho*h*a*b));%Constante de integração (Norm. massa)
    t=0;                  %Avaliação sem dependência do tempo
    phi=0;                %Ângulo de fase
    D=E*h^3/(12*(1-v^2));

%%Posições do forçamento e da resposta
    xe=0.1; ye=0.1; xr=0.5; yr=0.5;

%%Frequência de setagem do ressonador
    omega_p=8711.81;
%%Amortecimento na estrutura primária
    neta=0;
%%Resposta em frequência para diferentes razões de massa
    neta_p=0;
    z1=0;
    for ep=[0 0.1 0.3 0.5]
    z1=z1+1;
    z=0;
    for Omega=500:1:3500
        z=z+1;
        frf=0;
    for m=1:1:50
        alpha=m*pi/a;
        FRF=0;
    for n=1:1:50
        betha=n*pi/b;
        %Autofunção na entrada
        We=A*sin(alpha*xe)*sin(betha*ye);

        %Autofunção na resposta
        Wr=A*sin(alpha*xr)*sin(betha*yr);

        %Frequências naturais para cada modo
        omega=pi^2*(m^2/a^2+n^2/b^2)*sqrt(D/(pho*h));

        FRF=FRF+(Wr*We)/(omega^2*(1-1i*neta)-Omega^2*
```

```
        (1+ep*(omega_p^2/(omega_p^2*(1-1i*neta_p)-Omega^2))));
    end
        frf=frf+FRF;
    end
        Resposta(z)=frf;
    end
        Resp(z1,:)=Resposta;
    end

    %%Gráfico Amplitude de resposta em frequência
        x=500:1:3500;
        plot(x,log((abs(Resp(1,:)))),'k',x,log(abs(Resp(2,:))),
        x,log(abs(Resp(3,:))),x,log(abs(Resp(4,:))));
        xlabel('Frequência [rad/s]');
        ylabel('Receptância [m/N]');
        xline(2177.95,'-.',{'modo','(5,5)'});
        legend('Sem ressonadores','\in=0.1','\in=0.3','\in=0.5');
```

I.6 Código para obtenção da resposta em frequência do metamaterial comparativo com a placa fina

```
%%% FRF do metamaterial para diferentes frequências de excitação com
%%frequência fixa de sintonização do ressonador
%%%fatores de perda na estrutura primária
%%% Autor: André Toshiaki Nishimoto - 14/0167587
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasíliaclc
close all
clear all

%%%Propriedades do material (Aço 1020)
    E=186*10^9; %Módulo de elasticidade (Pa)
    v=0.3;      %Coeficiente de Poisson
    pho=7870;   %massa específica       (kg/m^3)
%%%Características geométricas
    h=0.003;    %Espessura              (m)
    a=1;        %Comprimento da placa   (m)
    b=1;        %Largura da placa       (m)

%%%Constantes para análise da resposta
    A=sqrt(8/(pho*h*a*b));%Constante de integração (Norm. massa)
    t=0;                  %Avaliação sem dependência do tempo
```

```
    phi=0;                  %Ângulo de fase
    D=E*h^3/(12*(1-v^2));

%Posições do forçamento e da resposta
    xe=0.1; ye=0.1; xr=0.5; yr=0.5;
%Frequência de sintonização dos ressonadores
    omega_p=8799.9;
%Amortecimento da estrutura primária
    neta=0;
%Amorecimento nos ressonadores
    neta_p=0;
    z1=0;
%%FRF comparativo para caso da placa simples com metamaterial
    for ep=[0 0.3]
    z1=z1+1;
    z=0;
    for Omega=7000:1:12000
        z=z+1;
        frf=0;
    for m=1:1:2000
        alpha=m*pi/a;
        FRF=0;
    for n=1:1:2000
        betha=n*pi/b;
        %Autofunção na entrada
        We=A*sin(alpha*xe)*sin(betha*ye);

        %Autofunção na resposta
        Wr=A*sin(alpha*xr)*sin(betha*yr);

        %Frequências naturais para cada modo
        omega=pi^2*(m^2/a^2+n^2/b^2)*sqrt(D/(pho*h));

        FRF=FRF+(Wr*We)/(omega^2*(1-1i*neta)-Omega^2*
        (1+ep*(omega_p^2/(omega_p^2*(1-1i*neta_p)-Omega^2))));
    end
        frf=frf+FRF;
    end
        Resposta(z)=frf;
    end
        Resp(z1,:)=Resposta;
    end
```

```
    %%%Gráfico FRF receptância do metamaterial
        x=7000:1:12000;
        plot(x,log((abs(Resp(1,:)))),'k',x,log(abs(Resp(2,:))),'r');
        xlabel('Frequência [rad/s]');
        ylabel('Receptância [m/N]');
        x1=xline(8450,'-.',{'8450rad/s'});
        x1.LabelVerticalAlignment = 'bottom';
        x1.LabelHorizontalAlignment = 'left';
        x2=xline(8800,'-.',{'8800rad/s'});
        x2.LabelVerticalAlignment = 'bottom';
        x2.LabelHorizontalAlignment = 'left';
        x3=xline(9496,'-.',{'9496rad/s'});
        x3.LabelVerticalAlignment = 'bottom';
        x3.LabelHorizontalAlignment = 'left';
        x4=xline(9844,'-.',{'9844rad/s'});
        x4.LabelVerticalAlignment = 'bottom';
        x4.LabelHorizontalAlignment = 'left';
        legend('Sem ressonadores','\in=0.1');
```

I.7 Código para obtenção da receptância do metamaterial sob diferentes frequências de excitação e com a frequência de sintonização fixa dos ressonadores

```
%%% Receptância da placa para diferentes frequências de excitação com
%%frequência fixa de sintonização do ressonador
%%%fatores de perda na estrutura primária
%%% Autor: André Toshiaki Nishimoto - 14/0167587
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília
clc
close all
clear all

%%%Propriedades do material (Aço 1020)
    E=186*10^9; %Módulo de elasticidade (Pa)
    v=0.3;      %Coeficiente de Poisson
    pho=7870;   %massa específica       (kg/m^3)
%%%Características geométricas
    h=0.003;    %Espessura              (m)
    a=1;        %Comprimento da placa   (m)
```

```
    b=1;        %Largura da placa       (m)

%%%Constantes para análise da resposta
    A=sqrt(8/(pho*h*a*b));%Constante de integração (Norm. massa)
    t=0;                  %Avaliação sem dependência do tempo
    phi=0;                %Ângulo de fase
    D=E*h^3/(12*(1-v^2));

%%%Avaliação da receptância na placa para um determinado forçamento de entrada

%Posição de entrada do forçamento
    xe=0.1; ye=0.1;
    z2=0;
%Frequência de sintonização do ressoandor
    omega_p=8799.8;

%Receptância do metamaterial para diferentes frequências de entrada
    %Frequência de excitação
    for Omega=[8450 8800 9496 9844];
    z2=z2+1;
        neta=0;
    ep=0.3;

    %Varredura das dimensões da placa
    z1=0;
    for yr=0:0.01:1
        z1=z1+1;
        z=0;
    for xr=0:0.01:1
        z=z+1;

    %Avaliação da receptância para número de modos considerados
    frf=0;
    for m=1:1:150
        alpha=m*pi/a;

        FRF=0;
    for n=1:1:150
        betha=n*pi/b;

        We=A*sin(alpha*xe)*sin(betha*ye);         %Autofunção na entrada
```

```
        Wr=A*sin(alpha*xr)*sin(betha*yr);         %Autofunção na resposta

        %Frequências naturais para cada modo
        omega=pi^2*(m^2/a^2+n^2/b^2)*sqrt(D/(pho*h));

        FRF=FRF+(Wr*We)/(omega^2*(1-1i*neta)-Omega^2*
        (1+ep*(omega_p^2/(omega_p^2-Omega^2))));
    end
        frf=frf+FRF;                              %Resposta em frequência
    end
        R(z)=real(frf);
    end
        M(z1,:)=R;                                %Resposta na placa
    end

    %%%Gráfico de superfície da receptância do metamaterial para doferentes
    %%%frequência de entrada com a sintonização do ressonador em uma
    %%%frequência fixa
        x=(0:0.01:1);
        y=(0:0.01:1);
        figure(z2)
        surf(x,y,M);
        shading interp
        title('Receptância');
        xlabel('posição x');
        ylabel('posição y');
        colorbar
    end
```

I.8 Código para obtenção da resposta em frequência do metamaterial para diferentes fatores de perda na placa

```
%%% Resposta em frequência do metamaterial para diferentes
%%%fatores de perda na estrutura primária
%%% Autor: André Toshiaki Nishimoto - 14/0167587
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília
clc
close all
clear all

%%%Propriedades do material (Aço 1020)
```

```
    E=186*10^9; %Módulo de elasticidade (Pa)
    v=0.3;      %Coeficiente de Poisson
    pho=7870;   %massa específica       (kg/m^3)
%%%Características geométricas
    h=0.003;    %Espessura              (m)
    a=1;        %Comprimento da placa   (m)
    b=1;        %Largura da placa       (m)

%%%Constantes para análise da resposta
    A=sqrt(8/(pho*h*a*b));%Constante de integração (Norm. massa)
    t=0;                  %Avaliação sem dependência do tempo
    phi=0;                %Ângulo de fase.
    D=E*h^3/(12*(1-v^2));

%Posições do forçamento e da resposta
    xe=0.1; ye=0.1; xr=0.5; yr=0.5;
%Frequência de setagem dos ressonadores
    omega_p=8711.81;
%Razão de massa do metamaterial
    ep=0.2;
%Amortecimetento do ressonador
    neta_p=0;
    z1=0;

%% Respota em frequência para diferentes fatores de perta na placa
    for neta=[0 0.001 0.01 0.1 0.5]
    z1=z1+1;
    z=0;
    for Omega=8200:1:12000
        z=z+1;
        frf=0;
    for m=1:1:800
        alpha=m*pi/a;
        FRF=0;
    for n=1:1:800
        betha=n*pi/b;
        %Autofunção na entrada
        We=A*sin(alpha*xe)*sin(betha*ye);

        %Autofunção na resposta
        Wr=A*sin(alpha*xr)*sin(betha*yr);
```

```
        %Frequências naturais para cada modo
        omega=pi^2*(m^2/a^2+n^2/b^2)*sqrt(D/(pho*h));

        FRF=FRF+(Wr*We)/(omega^2*(1-1i*neta)-Omega^2*
        (1+ep*(omega_p^2/(omega_p^2*(1-1i*neta_p)-Omega^2))));
    end
        frf=frf+FRF;
    end
        Resposta(z)=frf;
    end
        Resp(z1,:)=Resposta;
    end

    %%%Gráfico da resposta em frequência do metamaterial para diferentes
    %%%fatores de perda na estrutura primária
        x=8200:1:12000;
        plot(x,log((abs(Resp(1,:)))),'k',x,log(abs(Resp(2,:))),
        x,log(abs(Resp(3,:))),x,log(abs(Resp(4,:))),x,log(abs(Resp(5,:))));
        xlabel('Frequência [rad/s]');
        ylabel('Receptância [m/N]');
        xline(8711.81,'-.',{'modo','(10,10)'});
        legend('\eta=0','\eta=0.001','\eta=0.01',
        '\eta=0.1','\eta=0.5');
```

I.9 Código para obtenção da resposta em frequência do metamaterial para diferentes fatores de perda nos ressonadores

```
%%% Resposta em frequência do metamaterial para diferentes
%%%fatores de perda nos ressonadores
%%% Autor: André Toshiaki Nishimoto - 14/0167587
%%% Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade de Brasília

clc
close all
clear all

%%%Propriedades do material (Aço 1020)
    E=186*10^9; %Módulo de elasticidade (Pa)
    v=0.3;      %Coeficiente de Poisson
    pho=7870;   %massa específica       (kg/m^3)
%%%Características geométricas
```

```
    h=0.003;    %Espessura              (m)
    a=1;        %Comprimento da placa   (m)
    b=1;        %Largura da placa       (m)

%%%Constantes para análise da resposta
    A=sqrt(8/(pho*h*a*b));%Constante de integração (Norm. massa)
    t=0;                  %Avaliação sem dependência do tempo
    phi=0;                %Ângulo de fase
    D=E*h^3/(12*(1-v^2));

%Posições do forçamento e da resposta
    xe=0.1; ye=0.1; xr=0.5; yr=0.5;
%Frequência de setagem do ressonador
    omega_p=8711.81;
%Amortecimento na estrutura primária
    neta=0;
%Razão de massa dos ressonadores
    ep=0.1;
    z1=0;

%% Respota em frequência para diferentes fatores de perta nos ressonadores
    for neta_p=[0 0.001 0.01 0.1 0.5];
    z1=z1+1;
    z=0;
    for Omega=2000:1:16000
        z=z+1;
        frf=0;
    for m=1:1:50
        alpha=m*pi/a;
        FRF=0;
    for n=1:1:50
        betha=n*pi/b;
        %Autofunção na entrada
        We=A*sin(alpha*xe)*sin(betha*ye);

        %Autofunção na resposta
        Wr=A*sin(alpha*xr)*sin(betha*yr);

        %Frequências naturais para cada modo
        omega=pi^2*(m^2/a^2+n^2/b^2)*sqrt(D/(pho*h));

        FRF=FRF+(Wr*We)/(omega^2*(1-1i*neta)-Omega^2*
```

```
    (1+ep*(omega_p^2/(omega_p^2*(1-1i*neta_p)-Omega^2))));
end
    frf=frf+FRF;
end
    Resposta(z)=frf;
end
    Resp(z1,:)=Resposta;
end

%%%Gráfico da resposta em frequência do metamaterial para diferentes
%%%fatores de perda nos ressonadores
    x=2000:1:16000;
    plot(x,log((abs(Resp(1,:)))),'k',x,log(abs(Resp(2,:))),
    x,log(abs(Resp(3,:))),x,log(abs(Resp(4,:))),x,log(abs(Resp(5,:))));
    xlabel('Frequência [rad/s]');
    ylabel('Receptância [m/N]');
    xline(8711.81,'-.',{'modo','(10,10)'});
    legend('\eta_p=0','\eta_p=0.001','\eta_p=0.01',
    '\eta_p=0.1','\eta_p=0.5');
```

I. FREQUÊNCIAS NATURAIS

I.1 100 primeiras frequências naturais da placa (rad/s)

m, n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	87.12	217.8	435.6	740.5	1132.54	1611.69	2177.95	2177.95	3571.84	4399.47
2	217.8	348.47	566.27	871.18	1263.21	1742.36	2308.63	2962.02	3702.52	4530.15
3	435.6	566.27	784.06	1088.98	1481.01	1960.16	2526.43	3179.81	3920.32	4747.94
4	740.5	871.18	1088.98	1393.89	1785.92	2265.07	2831.34	3484.73	4225.23	5052.85
5	1132.54	1263.21	1481.01	1785.92	2177.95	2657.1	3223.37	3876.76	4617.26	5444.89
6	1611.69	1742.36	1960.16	2265.07	2657.1	3136.25	3702.52	4355.91	5096.41	5924.04
7	2177.95	2308.63	2526.43	2831.34	3223.37	3702.52	4268.79	4922.18	5662.68	6490.3
8	2831.34	2962.02	3179.81	3484.73	3876.76	4355.91	4922.18	5575.56	6316.07	7143.7
9	3571.84	3702.52	3920.32	4225.23	4617.26	5096.41	5662.68	6316.07	7056.57	7884.19
10	4399.47	4530.15	4747.94	5052.85	5444.89	5924.04	6490.3	7143.7	7884.19	8711.82