

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA
REALIMENTAÇÃO COM ESTADOS
DEFASADOS ÉSTENDIDOS PARA
CONTROLE DE CAOS EM UM PÊNULO
NÃO-LINEAR**

Por,

Arthur Rodrigues Queiroz

Brasília, 7 de junho de 2021

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA REALIMENTAÇÃO COM ESTADOS DEFASADOS ÉSTENDIDOS PARA CONTROLE DE CAOS EM UM PÊNULO NÃO-LINEAR

Por,

Arthur Rodrigues Queiroz

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Aline Souza de Paula _____

Marcela Rodrigues Machado _____

Marcus Vinicius Girão de Moraes _____

Brasília 7 de junho de 2021

Resumo

O controle de caos se baseia em utilizar pequenas perturbações no sistema dinâmico para estabilizar uma das trajetórias imersas no comportamento caótico. Essas trajetórias são denominadas órbitas periódicas instáveis (OPIs) do sistema. Esse trabalho tem como objetivo em explorar as ferramentas de análise de sistemas não-lineares e aplicar a metodologia de controle de caos. São abordados os conceitos para análise dos pontos de equilíbrio, espaço de fase, seção de Poincaré, identificação das OPIs e é apresentado o método de controle de caos por Realimentação com Estados Defasados Estendidos (ETDF). O pêndulo não-linear estudado consiste basicamente em um disco metálico com massa concentrada excêntrica, onde essa massa é excitada por um conjunto de fios com molas ligados por meio de uma polia ao motor de rotação. É apresentada a modelagem matemática do sistema. É realizada a simulação numérica da dinâmica sem controle do pêndulo não-linear e é feita a validação do código comparando-o com referências na literatura com boa concordância. É realizada a análise da dinâmica do pêndulo sem o controle onde são identificadas as órbitas periódicas instáveis em que serão aplicadas o controle. É identificadas os expoentes de Lyapunov para as OPIs selecionadas. Os expoentes de Lyapunov máximos apresentam uma região maior de valores negativos quando utilizando 2 parâmetros da matriz \mathbf{K} em relação a um único ganho. É apresentado valores de expoentes Lyapunov máximos menores para 2 parâmetros da matriz \mathbf{K} em relação a um único ganho. É realizado o controle para pêndulo com um e dois parâmetro de ganho na matriz \mathbf{K} . É discutido os resultados comparativos para diversas OPIs.

Palavras-chaves: Sistemas mecânicos. Dinâmica não-linear. Controle de caos.

Abstract

Chaos control is based on using small disturbances in the dynamic system to stabilize one of the trajectories immersed in chaotic behavior. These trajectories are called unstable periodic orbits (UPOs) of the system. This work aims to explore the tools of analysis of non-linear systems and to apply the methodology of control of chaos. Concepts for the analysis of equilibrium points, phase space, Poincaré section, identification of OPIs are addressed and the chaos control method by Extended State lagged feedback (ETDF) is presented. The studied nonlinear pendulum basically consists of a metallic disk with eccentrically concentrated mass, where this mass is excited by a set of wires with springs connected by means of a pulley to the rotation motor. The mathematical modeling of the system is presented. The numerical simulation of the dynamics is performed without control of the non-linear pendulum and the code is validated by comparing it with references in the literature with good agreement. The analysis of the pendulum dynamics is performed without the control, where the unstable periodic orbits in which the control will be applied are identified. Lyapunov exponents for the selected OPIs are identified. The maximum Lyapunov exponents present a larger region of negative values when using 2 parameters of the matrix \mathbf{K} in relation to a single gain. Lower maximum Lyapunov exponent values are presented for 2 parameters of the \mathbf{K} matrix in relation to a single gain. The pendulum control is performed with one and two gain parameters in the matrix \mathbf{K} . Comparative results for several UPOs are discussed.

Key-words: Mechanical Systems. Nonlinear Dynamics. Chaos Control.

Lista de Figuras

Figura 1 – Espaço de fase:	7
Figura 2 – Construção da seção de Poincaré.	8
Figura 3 – Seção de Poincaré:	8
Figura 4 – Expoente de Lyapunov.	11
Figura 5 – Calculo do expoente de Lyapunov.	12
Figura 6 – Métodos de controle de caos.	13
Figura 7 – Pêndulo não-linear e acessórios	18
Figura 8 – Representação pêndulo não-linear	19
Figura 9 – Suavização da função de atrito.	20
Figura 10 – Atuador (PAULA, 2005).	21
Figura 11 – Diagramas de Bifurcação.	23
Figura 12 – Resposta periódica para $\omega = 3.59$ rad/s.	23
Figura 13 – Resposta periódica para $\omega = 5.10$ rad/s.	24
Figura 14 – Resposta caótica para $\omega = 5.61$ rad/s.	24
Figura 15 – Seção de Poincaré de fase de forçamento 0 rad e $\omega = 5.61$ rad/s.	25
Figura 16 – Seção de Poincaré de fase de forçamento π rad e $\omega = 5.61$ rad/s.	25
Figura 17 – OPIs no atrator estranho.	26
Figura 18 – OPI de período 1 identificadas.	26
Figura 19 – OPI de período 2 identificadas.	26
Figura 20 – OPI de período 3 identificadas.	27
Figura 21 – OPI de período 5 identificadas.	27
Figura 22 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI para vários parâmetros do controlador.	28
Figura 23 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI de período 1 para \mathbf{K} matriz.	30
Figura 24 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI de período 2 para \mathbf{K} matriz.	31
Figura 25 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI de período 3 para \mathbf{K} matriz.	32
Figura 26 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI de período 5 para \mathbf{K} matriz.	33
Figura 27 – Controle da OPI de período 1 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador.	35

Figura 28 – Controle da OPI de período 1 com parâmetro K escalar, com limite de 20 mm no atuador.	36
Figura 29 – Controle da OPI de período 1 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador.	36
Figura 30 – Controle da OPI de período 1 com parâmetro \mathbf{K} , com limite de 20 mm no atuador.	36
Figura 31 – Controle da OPI de período 2 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador.	37
Figura 32 – Controle da OPI de período 2 com parâmetro K escalar, com limite de 20 mm no atuador.	37
Figura 33 – Controle da OPI de período 2 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador.	37
Figura 34 – Controle da OPI de período 2 com parâmetro \mathbf{K} matriz, com limite de 20 mm no atuador.	38
Figura 35 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador.	38
Figura 36 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro K escalar, com limite de 20 mm no atuador.	39
Figura 37 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador.	39
Figura 38 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro \mathbf{K} matriz, com limite de 20 mm no atuador.	39
Figura 39 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador, , com a ação de controle iniciada em condições próximas a OPI de interesse.	40
Figura 40 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador, com a ação de controle iniciada em condições próximas a OPI de interesse.	40
Figura 41 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador.	41
Figura 42 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro K escalar, com limite de 20 mm no atuador.	41
Figura 43 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador.	41
Figura 44 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro \mathbf{K} matriz, com limite de 20 mm no atuador.	42
Figura 45 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador, para expoente de Lyapunov ligeiramente positivo.	42
Figura 46 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador, para expoente de Lyapunov ligeiramente positivo.	42

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Comportamento na vizinhança do ponto de equilíbrio presentes no pêndulo não-linear.	6
Tabela 2 – Expoentes de Lyapunov selecionados para K escalar.	29
Tabela 3 – Expoentes de Lyapunov selecionados para K matriz.	34

Lista de abreviaturas e siglas

DDE	Equação diferencial com defasagem temporal (<i>Delayed Differential Equation</i>)
ETDF	Realimentação com estados defasados estendidos (<i>Extended Time-Delayed Feedback</i>)
OGY	Ott-Grebogy-York
OPI	Órbita periódica instável
SC	Semicontínuo
TDF	Realimentação com estados defasados (<i>Time-Delayed Feedback</i>)

Lista de símbolos

a	Distância da guia do fio ao motor elétrico
b	Comprimento da haste do motor elétrico
d	Diâmetro da polia motora do disco metálico
D	Dobro da distância da massa concentrada ao eixo do sensor de rotação
A	Matriz Jacobiana
$B(t)$	Função definidora do controle do sistema
$f(x)$	Função que define a dinâmica de um sistema
F_1	Tração do fio ligado a haste do motor
F_2	Tração do fio ligado ao suporte
g	Aceleração da gravidade
I	Momento de inércia do conjunto disco e massa
$\text{Im}(\lambda)$	Parte imaginária de λ
k	Constante elástica de mola
m	Valor da massa concentrada
sgn	Função sinal
N	Número total de pontos da seção de Poincaré
r_1	Tolerância dos pontos em uma OPI
r_2	Tolerância entre OPIs
R	Parâmetro de controle relacionado a defasagem
$R^{n \times n}$	Espaço n-dimensional
R^n	Espaço n-dimensional

$\text{Re}(\lambda)$	Parte real de λ
S_τ	Somatório dos termos de defasagem no tempo do controle
t	Tempo
T	Período
K	Elemento K_{22} da matriz de ganho
\mathbf{K}	Matriz ganho do controle
x	Posição angular
\dot{x}	Velocidade angular
\bar{x}	Ponto de equilíbrio
ζ	Constante de amortecimento viscoso
η	Pequena variação de posição
θ_{forc}	Fase do forçamento
λ	Autovalor
μ	Coefficiente de atrito seco
ξ_i	i -ésima órbita periódica instável
τ	Defasagem de tempo do controle
$\phi(t)$	Solução do sistema
ω	Velocidade angular
$\bar{\omega}$	Frequência de forçamento
$\text{tr}(A)$	Função traço de A

Sumário

	1 INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	2
1.2	Objetivos	2
1.3	Organização do texto	3
	2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
2.1	Análise dos Pontos de Equilíbrio	4
2.2	Espaço de Fase	6
2.3	Seção de Poincaré	7
2.4	Diagrama de Bifurcação	9
2.5	Identificação das Órbitas Periódicas Instáveis - OPIs	10
2.6	Expoente de Lyapunov	11
2.7	Controle de Caos	12
2.7.1	Método de Realimentação com Estados Defasados Estendidos (ETDF)	14
2.7.2	Determinação dos ganhos a partir do expoente Lyapunov	15
	3 SISTEMA ESTUDADO	17
3.1	Apresentação do Pêndulo Caótico	17
3.1.1	Modelagem matemática sem controle	17
3.1.2	Modelagem matemática com controle	20
3.2	Análise dinâmica sem controle	22
3.2.1	Diagrama de Bifurcação	22
3.2.2	Comportamento Periódico	23
3.2.3	Comportamento Caótico	24
3.2.4	Identificação de OPIs	25
3.3	Expoente de Lyapunov das OPIs selecionadas	27
3.4	Resultados do Controle	34
	4 CONCLUSÃO	43

REFERÊNCIAS 45

1 INTRODUÇÃO

Os fenômenos naturais estão repletos de não-linearidades, de forma que o comportamento linear é raro na natureza. Uma das possibilidades de comportamento não-linear é o comportamento caótico. Neste tipo de resposta, pequenas perturbações possuem grandes efeitos no sistema.

Ao longo do tempo, o termo caos já apresentou diversos significados. A visão da ciência, atualmente, o termo caos é utilizado para designar um tipo de resposta de apresentada em sistemas determinísticos que tem como característica grande sensibilidade as condições iniciais (PAULA, 2010). Tal resposta é comumente confundida com estocástico. O comportamento estocástico obedece a uma função de probabilidade não-determinística enquanto comportamento caótico é regido por uma equação determinística. Dessa forma, o comportamento caótico é muitas vezes confundido com o aleatório, sendo imprevisível, mas ainda governado por equações determinísticas (KING; STEWART, 1991).

Uma das principais características de sistemas não-lineares com respostas caóticas é a sua forte dependência das condições iniciais. Essa característica faz que qualquer pequena variação faça o sistema caminhar para um estado completamente diferente, fazendo que sempre haja incerteza na determinação do futuro do sistema, independente do conhecimento preciso das condições iniciais.

A regime caótico é muito rico, trazendo uma grande possibilidade de respostas para o sistema. O sistema, em seu comportamento imprevisível, percorre infinitas órbitas periódicas instáveis (OPIs). Tais órbitas expõem uma ordem escondida dentro do caos.

Esta sensibilidade do sistema caótico combinada com sua riqueza de respostas imersas em órbitas periódicas instáveis faz com que o sistema possua grande flexibilidade uma vez que o comportamento pode se controlado em diferentes OPIs com pequenas perturbações (DITTO; SPANO; LINDNER, 1995).

Apesar de ter sido estudado por diversos cientistas anteriormente, a dinâmica caótica ganhou maior interesse de pesquisadores após 1963, com Lorenz e seus estudos sobre imprevisibilidade de modelos meteorológicos (LORENZ, 1963). Posteriormente, foi verificado comportamento caótico em diversos sistemas dinâmicos simples desenvolvendo a pesquisa de teoria do caos em diversas áreas do conhecimento, dentre elas, sistemas mecânicos, medicina, química, ecologia, astronomia, comunicação.

O caos muitas vezes é desejado. A exploração de regiões por robôs autônomos é mais eficaz quando se utiliza de caos ao invés de modelos aleatórios (NAKAMURA; SEKIGUCHI, 2001). A mistura de fluidos tem maior eficácia quando caótica.

O controle do caos se faz útil quando o caos não é desejado, como, por exemplo, no controle de arritmias cardíacas (GARFINKEL et al., 1992), sistemas de geração de energia baseado no aproveitamento da energia vibracional (BARBOSA et al., 2015), para evitar falhas de sistemas de corte de sistemas mecânicos (LITAK, 2002), aumentar o conforto em veículos em terrenos irregulares (LITAK et al., 2008). Na navegação espacial com o uso de controle, a riqueza de trajetórias no sistema caótico possibilita baixo gasto de combustível (CHEN; YU, 2003).

A resposta caótica por vezes não é desejável, tendo sido evitada por anos pela engenharia por poder acarretar falhas estruturais, gerar ruídos, turbulência entre outros. Nas últimas décadas, o estudo do caos ganhou grande interesse da comunidade acadêmica.

1.1 Motivação

Diversos sistemas mecânicos estão sujeitos a não-linearidades que não podem ser desprezadas. O comportamento caótico é uma das possibilidades de respostas de sistemas não-lineares e é composto por infinitas órbitas periódicas instáveis (OPIs).

A possibilidade de estabilizar essas órbitas confere ao sistema uma riqueza de trajetórias. Além disso, tendo em vista que as OPIs estão imersas na dinâmica do sistema, é possível estabilizá-las com pouca energia, tornando o comportamento caótico desejável em algumas situações.

O pêndulo não-linear experimental foi estudado diversos autores, dentre eles (BLACKBURN; BAKER, 1998), (FRANCA; SAVI, 2001), (DESERIO, 2003), (PINTO; SAVI, 2003), (PAULA, 2005), (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006), (PAULA; SAVI, 2009), (PAULA; SAVI, 2011), explorando sua parte experimental, numérica, análise dinâmica e o controle em si.

1.2 Objetivos

Este trabalho visa investigar a influência de ganhos do controlador com dois parâmetros na matriz \mathbf{K} do método da realimentação com estados defasados estendidos na estabilização de OPIs de um pêndulo não-linear.

1.3 Organização do texto

Este trabalho é dividido em 4 capítulos. Inicialmente, neste primeiro capítulo, apresenta-se a introdução ao trabalho, suas motivações, objetivos e organização. O segundo capítulo faz a conceituação teórica do trabalho, abordando as ferramentas da análise não linear e apresentado a metodologia de controle estudada neste trabalho.

O terceiro capítulo trata da apresentação de pêndulo não-linear estudado neste trabalho, sua modelagem matemática, simulação numérica do trabalho e sua validação comparando-as com outros trabalhos. Em seguida é realizada, com uso das ferramentas apresentadas no segundo capítulo, a análise da dinâmica do pêndulo não-linear. Ainda no terceiro capítulo é realizada a investigação dos ganhos do controlador e o resultado do controle para as OPIs selecionadas.

Por fim, no quarto capítulo é apresentada as conclusões do trabalho e proposições para um trabalho futuro.

2 Fundamentação Teórica

Este capítulo se destina a apresentar a fundamentação teórica que tange sistemas com respostas caóticas assim como as ferramentas de análise dinâmica de sistemas não-lineares.

O estudo da dinâmica de sistemas não-lineares pode ser dividido em duas abordagens. A primeira é a abordagem qualitativa que visa compreender o comportamento global do sistema assim como sua evolução dinâmica. A segunda é a abordagem quantitativa que explora a evolução temporal do sistema (SAVI, 2006).

A análise qualitativa utiliza técnicas geométricas com base em topologia e tem como principais conceitos o espaço de fase, a seção de Poincaré e o diagrama de bifurcação. Tais conceitos também são necessários no que tange a abordagem quantitativa já que fornecem compreensão global do comportamento sistema.

A análise quantitativa aborda a determinação de parâmetros invariantes dinâmicos assim como a determinação de pontos de estabilidade.

Para a análise qualitativa do sistema dinâmico os conceitos fundamentais são: espaço de fase, seção de Poincaré e digrama de bifurcação. Conjuntamente são importantes para a abordagem quantitativa posto que fornecem uma compreensão global do sistema.

Este capítulo também aborda o método dos pontos próximos recorrentes (AUERBACH et al., 1987), utilizado para identificar as órbitas periódicas instáveis (OPI's) imersas no atrator do sistema.

Finalmente o capítulo aborda um método contínuo de controle de caos, o método de realimentação de estados defasados estendidos (ETDF).

2.1 Análise dos Pontos de Equilíbrio

Ponto de equilíbrio ou ponto fixo é definido como o ponto em que o sistema permanece estacionário com a evolução do tempo. Logo, sua solução não varia com o tempo, ou seja, sua velocidade e aceleração são nulas. De outra forma: para $x \in R^n$ de um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$, o ponto de equilíbrio $\bar{x} \in R^n$ satisfaz $f(\bar{x}) = 0$.

A estabilidade é verificada avaliando as vizinhanças de um ponto de equilíbrio,

sendo seu estudo é fundamental para se compreender as diferentes possibilidades de movimento da vizinhança de cada ponto de equilíbrio. O comportamento nessa vizinhança é avaliado a partir da linearização do sistema em torno do ponto avaliado. Para tal, vamos considerar que $\phi(t)$ é uma solução. Assim, para avaliar as proximidades deve-se fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$x = \phi(t) + \eta \quad (2.1)$$

com $x, \eta \in \mathbb{R}^n$ e η sendo uma pequena variação.

Utilizando a Série de Taylor para escrever $f(x)$, tem-se:

$$f(x) = f(\phi(t) + \eta) = f(\phi(t)) + Df(\phi(t))|_{\eta=0} \eta + \dots \quad (2.2)$$

em que Df é a matriz Jacobiana do sistema. Substituindo a parte linear da Equação (2.2) na equação do movimento $\dot{x} = \dot{\phi}(t) + \dot{\eta}$ então:

$$\dot{x} = \dot{\phi}(t) + \dot{\eta} = f(\phi(t)) + Df(\phi(t))|_{\eta=0} \eta \quad (2.3)$$

Mas $\phi(t)$ é uma solução do sistema, com isso:

$$\dot{\eta} = Df(\phi(t))|_{\eta=0} \eta \quad (2.4)$$

Faz-se agora $\bar{x} = \phi(t)$ com $\bar{x} \in$ a solução do ponto de equilíbrio que não depende do tempo e $A = Df(\phi(t))|_{\eta=0}$ a matriz Jacobiana, assim temos o problema linearizado mostrado por (SAVI, 2006):

$$\dot{\eta} = A \eta \quad (2.5)$$

Os autovalores da matriz Jacobiana do sistema caracterizam a dinâmica do sistema, considerando o caso do pêndulo não-linear estudado vamos explorar um sistema dinâmico de duas dimensões eles, com isso, os autovalores são dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [\text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}] \quad (2.6)$$

em que $\Delta = [\text{tr}(A)]^2 - 4 \det(A)$ e tr é a função traço da matriz.

A partir de suas partes real e imaginária:

$$\lambda_n = \text{Re}(\lambda_n) + \text{Im}(\lambda_n) \quad (2.7)$$

para $n = 1, 2$. A parte real do autovalor indica a característica de estabilidade do sistema, onde, quando positiva indica instabilidade e quando negativa indica estabilidade. A combinação das partes reais e imaginárias permite, então identificar as possibilidades para o ponto fixo. Para o caso do pêndulo não-linear, pode ser do ponto tipo espiral estável ou ponto tipo sela instável. Com isso, o ponto será tipo sela instável se algum autovalor de A possuir uma parte real positiva e parte imaginária nula e será do tipo espiral estável se todos as partes reais dos autovalores forem negativas e partes imaginárias de sinais opostos.

Comportamento	Parte real de λ	Parte imaginária de λ
Ponto Tipo Sela - Instável	$\text{Re}(\lambda_i) > 0$ para $i = 1, 2$	$\text{Im}(\lambda_i) = 0$ para $i = 1, 2$
Ponto Tipo Espiral - Estável	$\text{Re}(\lambda_i) < 0$ para $i = 1, 2$	$\text{Im}(\lambda_1) > 0$ $\text{Im}(\lambda_2) < 0$

Tabela 1 – Comportamento na vizinhança do ponto de equilíbrio presentes no pêndulo não-linear.

2.2 Espaço de Fase

O espaço de fase ou espaço de estados de um sistema dinâmico é definido como o espaço vetorial formado pelas variáveis dependentes do sistema. O conhecimento de todas as variáveis do sistema em um dado instante de tempo define um espaço de estado, assim, a evolução dos espaços de estado do sistema durante o tempo define uma trajetória (SAVI, 2006). Cada conjunto de pontos contido no espaço de estados define uma trajetória.

Um sistema é dito periódico se sua solução se repete após um dado intervalo de tempo T , em que T é o período. O comportamento periódico irá se repetir para qualquer kT onde k é um número inteiro. O comportamento periódico tem como característica que os mesmos pontos do espaço de fase sejam visitados sucessivas vezes, fazendo uma curva fechada. O comportamento caótico, porém, faz com que as órbitas não se fechem. A Figura 1a e Figura 1b tratam de trajetórias periódicas de períodos 1 e 2 respectivamente enquanto a Figura 1c trata de uma trajetória caótica. As três trajetórias foram geradas numericamente.

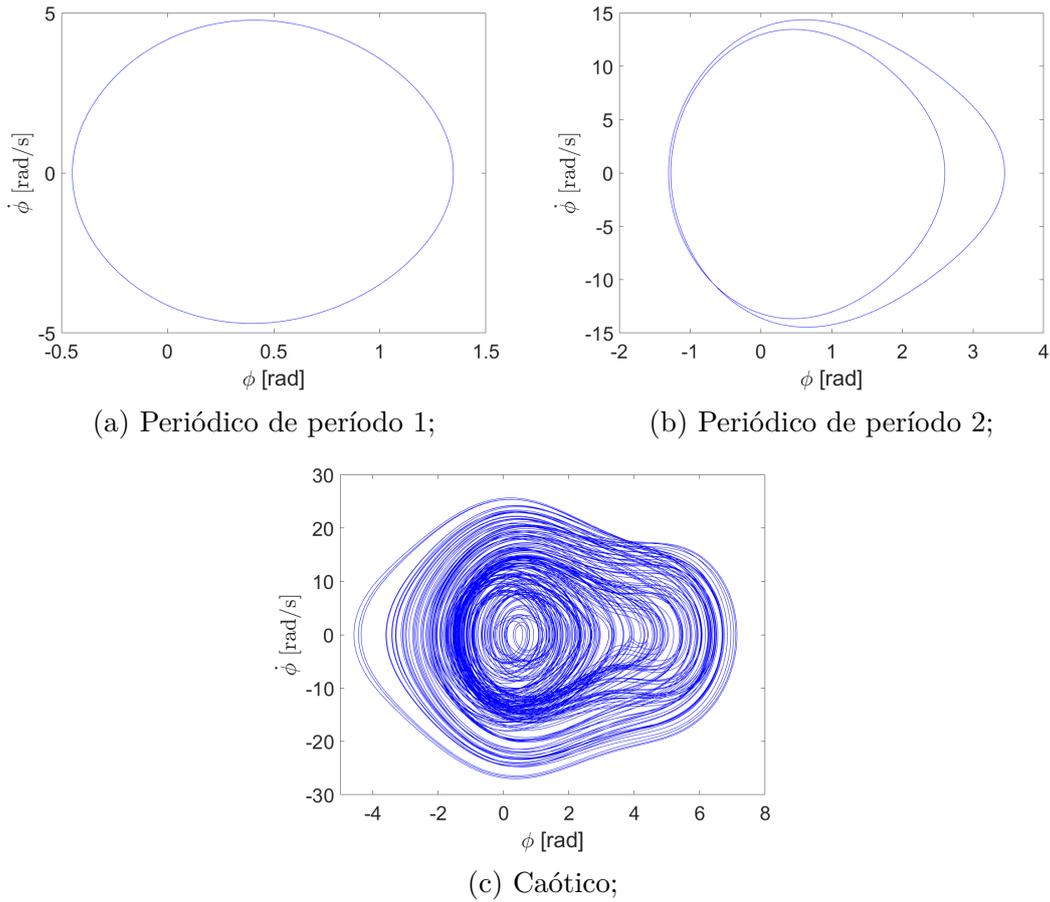


Figura 1 – Espaço de fase:

2.3 Seção de Poincaré

O mapa de Poincaré é um sub-estado do espaço de fase que permite a análise de um sistema dinâmico contínuo no tempo (fluxo) em um sistema discreto (mapa), reduzindo a dimensão do sistema. A transformação tem como objetivo capturar um conjunto de posições no espaço de fase em uma determinada fase do forçamento. Para sua construção, deve ser interceptar a trajetória com um hiperplano. O plano é escolhido arbitrariamente no espaço de fase e deve ser perpendicular a trajetória. Assim, o conjunto dos pontos do sistema é chamado de mapa de Poincaré e o hiperplano escolhido é denominado de seção de Poincaré (OTANI; JONES, 1997). A Figura 2 representa a construção da seção em diferentes fases de forçamento. Dessa forma, se reduz a dimensão do sistema, excluindo-se o tempo, já que a amostra da trajetória é feita em um intervalo discreto de tempo.

Não existe uma metodologia geral para construção da seção de Poincaré, porém usualmente, para casos com forçamento periódico, se relaciona a seção a uma determinada fase do forçamento. Sendo assim o período da amostra é dado por $T = 2\pi/\omega$, onde ω é a frequência de excitação.

A seção de Poincaré possibilita a identificação do comportamento do sistema no

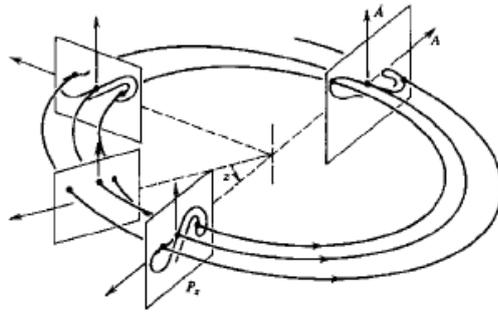
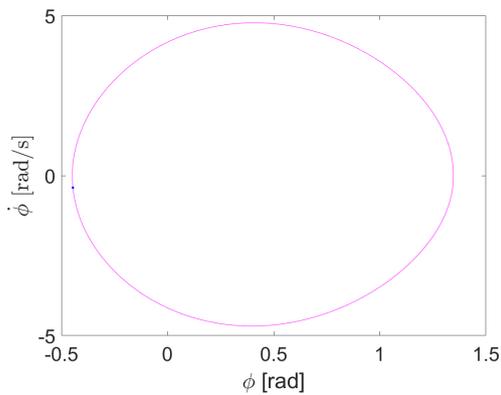


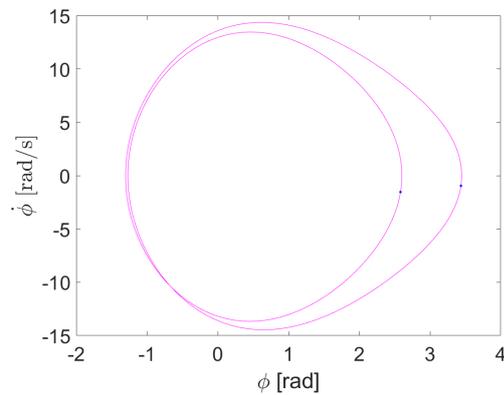
Figura 2 – Construção da seção de Poincaré (MOON, 1992).

espaço de fase, permitindo uma classificação formal da dinâmica do sistema.

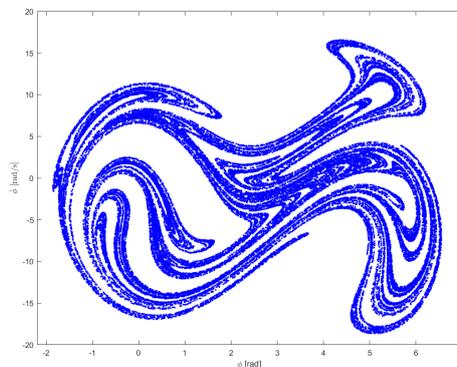
Em sistemas em regime periódicos com órbitas de frequência múltipla da frequência de forçamento a seção apresentará o mesmo número de pontos da órbita. A Figuras 3a e 3b obtidas numericamente. Em regime quasi-periódicos o sistema apresenta uma curva fechada. Finalmente, em regime caóticos, a seção de Poincaré apresenta um conjunto infinito de pontos, geralmente com geometria fractal distribuída em lamelas, com regiões vazias e regiões densas. Caso o sistema seja caótico apresentará um atrator caótico enquanto caso apresente caos transiente apresentara sela caótica.



(a) Periódico de período 1;
Seção de Poincaré: ·
Órbita: —



(b) Periódico de período 2;
Seção de Poincaré: ·
Órbita: —



(c) Caótico;

Figura 3 – Seção de Poincaré:

Atrator é um conjunto invariante topológico do sistema o qual as órbitas do sistema tendem a convergir para.

Em sistemas em regimes caóticos não-dissipativos uma nuvem de pontos tende a preencher o espaço. Entretanto, nos sistemas em regimes caóticos dissipativos, são caracterizados pela transformação ferradura, característica do conjunto de Cantor. Os atratores podem ser ditos caóticos ou estranhos podendo ser simultaneamente os dois ou apenas um deles.

O atrator estranho é uma característica geométrica do sistema, onde, representa região preferencial do espaço de fase que atrai os estados do sistema e possui estrutura fractal do tipo conjunto de Cantor (SAVI, 2006). O atrator caótico, no entanto, é uma característica física, em que é visualizado pelo mapa de Poincaré como uma coleção de pontos dispostos de maneira organizada. O atrator caótico é ergódico, o que significa que cada ponto desse conjunto é visitado durante a evolução do sistema (PEREIRA-PINTO; FERREIRA; SAVI, 2004).

A sela caótica no caos, ao contrário do atrator, apresenta característica repulsiva e está presente no caso de caos transiente. Ela também apresenta um número finito de pontos na seção de Poincaré. As selas caóticas também possuem natureza fractal, assim como o atrator estranho.

2.4 Diagrama de Bifurcação

Uma bifurcação está relacionada com a mudança qualitativa da resposta do sistema como consequência da variação de um de seus parâmetros. O fenômeno do caos depende que o sistema possua bifurcações, uma vez que as bifurcações estabelecem uma rota entre o comportamento regular e o caótico.

Pode se diferenciar as bifurcações em bifurcações locais e bifurcações globais. As bifurcações locais tratam de uma região limitada do espaço de fase e abordam, por exemplo, duplicações de períodos. As bifurcações globais, no entanto, não são locais e caracterizam uma mudança qualitativa brusca no comportamento do sistema, como a mudança de comportamentos periódicos para caóticos.

O diagrama de bifurcação é utilizado para se analisar o comportamento global do sistema a variação de um de seus parâmetros, permitindo avaliar onde e como ocorrem as mudanças na resposta do sistema. Não existe uma única forma de se traçar o diagrama de bifurcação. Para esse trabalho foi adotado o método da força bruta (PARKER; CHUA, 2012). Esse método consiste em simular diferentes valores do parâmetro a ser avaliado, variando-o de forma quasi-estática, enquanto se analisa alguma resposta na seção de Poincaré. Para este trabalho, o parâmetro a ser avaliado escolhido foi a frequência de forçamento, assim o diagrama feito para este trabalho é de posição angular versus

frequência de forçamento.

2.5 Identificação das Órbitas Periódicas Instáveis - OPIs

A fase inicial do controle de sistemas em regime caótico, em geral, é a aprendizagem que consiste na identificação de órbitas periódicas instáveis (OPIs) e na determinação de parâmetros do controlador. A segunda fase consiste no controle em si e será abordado na próxima seção.

Sistemas em regime caóticos tem como característica uma infinidade de órbitas periódicas instáveis combinada com grande sensibilidade as condições iniciais e sua característica ergódica. A existência desses infinitos padrões periódicos faz com que sistemas caóticos possuam grande flexibilidade (ECKMANN; RUELLE, 1985). O caráter ergódico do sistema indica que todos os pontos próximos o suficiente ao atrator são visitados pelas trajetórias caóticas em algum momento de sua evolução (AUERBACH et al., 1987).

As OPIs são padrões periódicos dentro de um atrator do sistema que fazem parte do conjunto de invariantes topológicas do sistema e, assim, não sofrem alteração topológica com a mudança de coordenadas (GUNARATNE; LINSAY; VINSON, 1989). Outros invariantes topológicos do sistema podem ser determinados a partir das OPIs como o expoente de Lyapunov e a dimensão fractal do sistema (AUERBACH et al., 1987).

A identificação das OPIs pode ser feita pela análise temporal ou pela equação explícita da equação do movimento (XU et al., 2002). Existem diversos algoritmos para sua determinação dependendo de características específicas de cada série. Para identificação das OPIs, utiliza-se, neste trabalho, método dos pontos recorrentes próximos (*close-return method*) (AUERBACH et al., 1987).

O método dos pontos recorrentes é implementado sobre uma seção de Poincaré, de tal forma que é feita uma varredura de toda série temporal buscando pares de pontos que satisfaçam a condição:

$$|\xi_i - \xi_{i+k}|_{i=1}^{(N-k)} \leq r_1 \quad (2.8)$$

onde N é o número total de pontos da seção de Poincaré, r_1 é a tolerância à qual se distingue os pontos recorrentes, k é o período máximo da órbita que se quer encontrar. Dessa forma, armazena-se os pontos $\{\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+k-1}\}$ que satisfazem a condição e pertencem a órbita k -periódica na seção de Poincaré de controle. Uma determinada órbita pode ser visitada mais de uma vez durante a busca, isso torna necessário a verificação de órbitas idênticas dentro de uma tolerância r_2 . Também se faz necessária a verificação de órbitas idênticas com uma permutação de seus pontos. No caso de órbitas equivalentes, para um mesmo período, é feita a aproximação da órbita real pela média aritmética (SAVI, 2006).

2.6 Expoente de Lyapunov

Sistemas em regime caótico são extremamente sensíveis as condições iniciais. Desta forma, qualquer diferença em um certo estado, mesmo que muito pequena, gera um comportamento distinto após um período de tempo, fazendo com que não se possa prever o estado futuro do sistema.

Os expoentes de Lyapunov são um invariante geométrico do sistema e é amplamente empregado para se caracterizar o caos. Diferentemente das ferramentas apresentadas anteriormente, o expoente de Lyapunov é uma medida quantitativa do sistema podendo, assim, o caracterizar formalmente. A sensibilidade às condições iniciais e a estabilidade de uma OPI são avaliadas pelo expoente.

Para avaliar os expoentes de Lyapunov, considera-se uma trajetória de referência $\Phi(x_1, t)$ e define-se uma hipersfera de vizinhança de diâmetro d_0 no instante inicial t_0 . Na vizinhança, é definida uma segunda trajetória $\Phi(x_2, t)$ em que x_2 está contido na hipersfera definida anteriormente. O conjunto de expoentes de Lyapunov que gera a dimensão da hipersfera está associado com a dimensão do sistema dinâmico. Com sua evolução temporal avaliar-se a divergência ou a convergência da segunda trajetória em relação a primeira. A Figura 4 representa geometricamente a evolução no tempo em que ocorre a deformação da hipersfera em um hiperelipsoide.

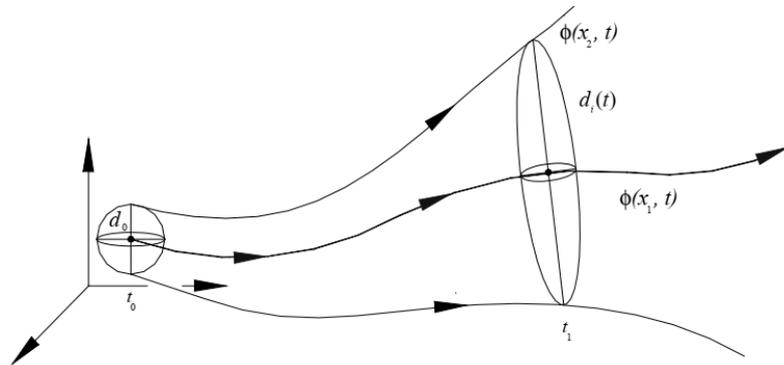


Figura 4 – Expoente de Lyapunov (SAVI, 2006).

Assim, o diâmetro da hipersfera pode ser expresso por:

$$d(t) = d_0 b^{\lambda t} \quad (2.9)$$

onde b é uma base de referência para o logaritmo. Com isso, define-se o expoente de Lyapunov como:

$$\lambda = \frac{1}{t} \log_b \left(\frac{d(t)}{d_0} \right) \quad (2.10)$$

Dessa forma, o sinal do expoente de Lyapunov define a divergência caso positivo e a convergência caso negativo. A estabilidade de uma órbita é associada com o sinal

negativo do expoente enquanto a instabilidade com o sinal positivo. Vale notar que cada grau de liberdade do sistema é associado a um expoente diferente. Sendo assim um sistema que possua ao menos um expoente positivo está associado a uma divergência local que caracteriza a sensibilidade as condições iniciais típicas do caos. Portanto, para sistema não-autônomo basta avaliar o maior expoente de Lyapunov para a análise da estabilidade de uma OPI (PYRAGAS, 1995).

Durante a avaliação de uma trajetória de referência, caso esta seja caótica, ela divergirá da trajetória avaliada. Porém, o expoente de Lyapunov só pode ser calculado nas vizinhanças da trajetória de referência onde a linearização é válida. Para definir o expoente de Lyapunov pela extensão do sistema dinâmico e monitorar as trajetórias vizinhas, (WOLF et al., 1985) propõe uma avaliação da média do crescimento exponencial em vários pontos da trajetória. Para tal, toda vez que a distância $d(t)$ torna-se muito grande, é definido um novo $d_0(t)$ em que reavalia-se a divergência como ilustra a Figura 5. A distância d_0 é definida como a norma euclidiana entres os pontos da vizinhança Q_0 e do sistema P_0 . Então é avaliado a evolução desses 2 pontos até um tempo t_1 , então definido dois novos pontos P_1 e Q'_1 , e uma nova distância tangencial $d(t_1)$. Ou seja, cada vez que o expoente se afasta da trajetória de referência toma-se um valor do expoente e se inicia uma nova avaliação na vizinhança do sistema.

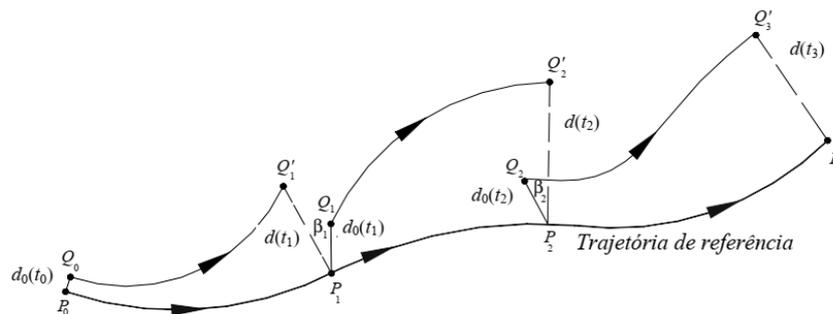


Figura 5 – Cálculo do expoente de Lyapunov (SAVI, 2006).

Assim, para esse tipo de avaliação o expoente de Lyapunov é definido como:

$$\lambda = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^n \log_b \left(\frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})} \right) \quad (2.11)$$

2.7 Controle de Caos

O controle do caos explora as características exclusivas de sistemas que apresentem respostas caóticas. Dessa forma, o controle de caos consiste em aplicar pequenas perturbações ao sistema de forma a estabilizar o sistema em uma órbita periódica instável específica. Isso permite que o sistema dinâmico transite de órbita em órbita de acordo com a necessidade conferindo-o grande flexibilidade.

Os métodos de controle podem ser classificados em contínuos ou discretos. Alguns métodos e suas classificações estão apresentados na Figura 6. O primeiro método de controle de caos ficou conhecido como método OGY, em homenagem aos autores Ott-Grebog-Yorke, proposto em (OTT; GREBOGI; YORKE, 1990), o qual se trata de um método discreto em que se aplica as perturbações em uma seção de Poincaré.

Em seguida, foram propostas diversas melhorias incluindo o método semicontínuo OGY (SC-OGY) (HÜBINGER et al., 1994), em que são inseridas seções de controle em fases intermediárias e igualmente espaçadas no ciclo de forçamento.

Os métodos multiparâmetros, proposto em (PAULA; SAVI, 2008), estende os métodos OGY e SC-OGY para que mais de um parâmetro de controle do sistema possa ser usado.

O método da Realimentação com estados defasados (*Time-Delayed Feedback* - TDF) proposto em (PYRAGAS, 1992) foi o primeiro método contínuo proposto na literatura, atuando continuamente e ininterrupta no sistema.

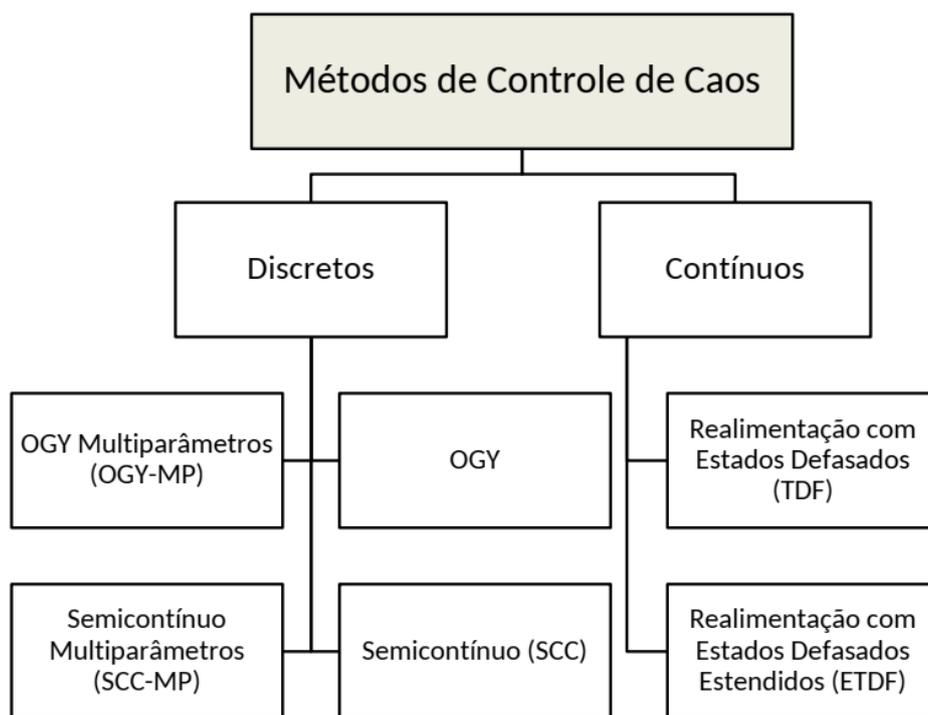


Figura 6 – Métodos de controle de caos (SAVI, 2006).

Os métodos contínuos favorecem o controle de sistemas muito que possuam expoentes de Lyapunov elevados. Os controladores contínuos também possuem menor sensibilidades a ruídos externos em relação aos discretos (SAVI, 2006).

Esse trabalho utiliza o método por realimentação com estados defasados (*Extended Time-Delayed Feedback* - ETDF) proposto em (SOCOLAR; SUKOW; GAUTHIER, 1994), que aprimora o método TDF utilizando de vários estados defasados do sistema. O ETDF aprimora o TDF no que tange a estabilizar OPIs de periodicidade elevada.

2.7.1 Método de Realimentação com Estados Defasados Estendidos (ETDF)

Os métodos contínuos se baseiam em uma atuação com realimentação defasada no estado atual e defasado do sistema.

O método ETDF é aplicado a sistemas dinâmicos modelados por sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares da forma:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + B(t) \quad (2.12)$$

onde $x(t) \in R^n$ é o vetor que contém as variáveis de estado, $f(x, t) \in R^n$ define a dinâmica do sistema e $B(t) \in R^n$ está associado com o controle.

Enquanto o TDF consideram apenas um estado defasado do sistema na lei de controle, o ETDF considera vários. Sendo assim, a lei de controle é dada por:

$$B(t) = K[(1 - R)S_\tau - x] \quad (2.13)$$

com,

$$S_\tau = \sum_{m=1}^{\infty} R^{m-1} x_{m\tau} \quad (2.14)$$

onde $K \in R^{n \times n}$ é a matriz ganho, τ é a defasagem de tempo, $0 \leq R < 1$ é um parâmetro do controlador, $x = x(t)$ e $x_{m\tau} = x(t - m\tau)$.

Quando a trajetória do sistema se encontra sobre a OPI, a Equação (2.13) se anula para qualquer R pois $x(t - m\tau) = x(t)$ para todo m se $\tau = T_i$, onde T_i é a periodicidade da i -ésima OPI.

A escolha dos parâmetros R e K adequados faz com que a estabilização do sistema em uma OPI específica seja alcançada. Tais valores são determinados durante a fase de aprendizagem do sistema. Vale ressaltar que para $R = 0$ a equação recai na lei de controle do método TDF, onde somente é considerado um único estado defasado do sistema.

O sistema dinâmico com o controlador é governado por equações diferenciais com defasagem temporal (*Delayed Differential Equation* - DDE). Diferentemente das EDOs que tem sua solução dependendo do estado atual do sistema, a solução das DDEs tem dependências anteriores.

O termo S_τ apresenta resposta para $(t - m\tau) < 0$ uma vez que as DDEs contêm derivadas que dependem de tempos anteriores. Neste trabalho, inicia-se a ação de controle quanto todos os estados defasados são conhecidos. Dessa forma, para o valor adotado $m = 3$, o controle é iniciado quando $t > 3\tau$.

A etapa de aprendizagem nos métodos contínuos constitui a identificação da OPI que se quer estabilizar e determinação do parâmetro K e, caso seja por ETDF o parâmetro R . Com os parâmetros definidos, é iniciada a fase de controle, onde, seus parâmetros são utilizados para definir as perturbações necessárias.

O método de controle ETDF se dá de maneira contínua no sistema (KITTEL; PYRAGAS; RICHTER, 1994). Esse controle atua modificando levemente o expoente de Lyapunov na OPI de interesse, tornando-a estável. Para tal, os parâmetros de controle devem ser escolhidos de tal forma que todos os expoentes de Lyapunov se tornem negativos (KITTEL; PARISI; PYRAGAS, 1995).

Porém, em um sistema não-autônomo, é suficiente determinar o maior expoente de Lyapunov para estabilizar a OPI (PYRAGAS, 1995). Dessa forma, para um valor constante de R , pode-se determinar um intervalo de valores para K . Ou seja, para alcançar a estabilização de uma determinada OPI deve-se definir os parâmetros do controlador de forma que o maior expoente de Lyapunov seja menor que zero, $\lambda(K, R) < 0$. Também é proposto adotar ganhos associados a valores mínimos de $\lambda(K, R)$ de tal forma que se tenha uma convergência maior em órbitas próximas tornando-o menos suscetível a ruídos.

Para o método ETDF com 3 estados defasados no tempo, tem-se a seguinte DDE:

$$\dot{x} = f(x, t) + B(t, x, x_\tau, x_{2\tau}, x_{3\tau}) \quad (2.15)$$

Portanto, para o cálculo de $x = x(t)$ em um tempo maior que t , a função $x(t)$ deve ser conhecida no intervalo $(t - 3\tau, t)$. A Equação (2.15) possui um sistema de dimensão infinita e conseqüentemente com infinitos expoentes de Lyapunov. Numericamente só é possível determinar uma quantidade finita de expoentes, porém basta determinar o maior expoente para se verificar a estabilidade (VICENTE et al., 2005).

2.7.2 Determinação dos ganhos a partir do expoente Lyapunov

Para realização do cálculo do expoente de Lyapunov, aproxima-se a evolução contínua do sistema de dimensão infinita por número finito de elementos os quais, os valores mudam em passos discretos no tempo (PAULA, 2010). Com isso, a função $x_i(t)$, com $i = 1, \dots, n$, no intervalo $(t - 3\tau, t)$ pode ser aproximada por N amostras de espaçamento $\Delta t = 3\tau/(N - 1)$. Com isso, o sistema passa de n variáveis de estado para $n(N + 1)$ variáveis. Utiliza-se um vetor z para representar essas variáveis de estado, em que $z_{n+1}, \dots, z_{n(N+1)}$ estão relacionadas aos estados defasados no tempo de $x(t)$ na forma:

$$(z_1, z_2, \dots, z_{N+1}) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_1(t - \Delta t), \dots, x_1(t - N\Delta t), \dots, \dots, x_n(t - \Delta t), \dots, x_n(t - N\Delta t)) \quad (2.16)$$

Neste trabalho, utiliza-se a aproximação apresentada em (SPROTT, 2007), onde se substitui a DDE por um conjunto de EDOs. Portanto, o sistema contínuo de dimensão infinita é representado por um sistema de $n(N + 1)$ EDOs de dimensão finita, permitindo

sua resolução por qualquer método indicado para EDOs não-lineares. Assim:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{z}_j = Q_j(z_1, z_2, \dots, z_n) + B_j(t, z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n(N+1)}) & \text{para } 1 \leq j \leq n \\ \dot{z}_{n+1+(j-1)N} = N(z_j - z_{n+2+(j-1)N})/2\tau & \text{para } 1 \leq j \leq n \\ \dot{z}_{n+i+(j-1)N} = N(z_{n+i+(j-1)N-1} - z_{n+i+(j-1)N+1})/2\tau & \text{para } 2 \leq i \leq (N-1) \\ & \text{e } 1 \leq j \leq n \\ \dot{z}_{n+jN} = N(z_{n+jN-1} - z_{n+jN})/\tau & \text{para } 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (2.17)$$

onde $N = 3\tau/\Delta t + 1$. O cálculo do expoente de Lyapunov pode ser realizado a partir dessas equações pelo algoritmo de (WOLF et al., 1985). Também é possível calcular o expoente de uma OPI de interesse, integrando o sistema ao longo de sua órbita. Com isso pode-se escolher os parâmetros de controle adotados para estabilizar a OPI.

Com isso, incluindo as equações do movimento em (2.17) e suas linearizações, se obtém um conjunto de $(N+2)^2 + (N+2)$ EDOs que permitem a implementação do algoritmo de (WOLF et al., 1985), que avalia a série temporal da OPI. O sistema pode ser reduzido para apenas $N+2$ variáveis para se calcular apenas o maior expoente de Lyapunov com uma modificação no algoritmo. Ainda assim, devida a grande quantidade de EDOs a serem resolvidas a fase de aprendizagem tem um custo computacional elevado.

O algoritmo verifica o maior expoente de Lyapunov para parâmetros específicos do controlador. Para avaliar a capacidade de estabilização de uma OPI deve-se calcular o expoente para diversos parâmetros do controlador. Dessa forma, a escolha de parâmetros do controlador relacionados com valores negativos de expoente pode, por hipótese, estabilizar a órbita escolhida. Ademais, o valor mínimo do expoente propicia maior taxa de convergência das órbitas próximas e torna o método mais robusto a ruídos (PYRAGAS, 1995).

3 Sistema Estudado

Este capítulo aborda o pêndulo não-linear estudado neste trabalho. Este sistema foi estudado anteriormente por (BLACKBURN; BAKER, 1998), (FRANCA; SAVI, 2001), (PINTO; SAVI, 2003), (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006), (PAULA, 2010). O trabalho de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006) foi usado como validação das simulações numéricas utilizadas neste trabalho.

Inicialmente faz-se a apresentação do pêndulo não-linear e é feita a sua modelagem matemática. Em seguida, é mostrado os resultados das simulações e comparando-os com o artigo de referência para validação do código. Subsequentemente é feita a identificação das órbitas periódicas instáveis. É calculado o expoente de Lyapunov para cada OPI identificada. Finalmente é apresentado o resultado do controle e os resultados são analisados.

3.1 Apresentação do Pêndulo Caótico

Considerando o pêndulo mecânico mostrado na Figura 7. O aparato consiste de um disco metálico (1) com uma massa concentrada excentricamente (3). O disco é fixado ao eixo de um sensor de rotação, (4) e um dispositivo magnético (2) que permite ajustar a dissipação de energia do sistema, atuando como amortecimento. Os fios com molas (8) atuam como elemento elástico do sistema fornecendo rigidez torcional. Uma das extremidades do fio está conectado a um motor elétrico (6) que fornece energia ao sistema, excitando o pêndulo por meio de uma polia ligada ao eixo do sensor de rotação. A alimentação do motor se dá por uma fonte de potência (5) que regula a frequência de rotação pela variação da tensão elétrica de saída.

3.1.1 Modelagem matemática sem controle

Para a modelagem matemática considera-se a representação simplificada apresentada na Figura 8, na qual estão representadas as forças atuantes no eixo do disco e aspectos dimensionais do aparato, utilizados para descrever a dinâmica do sistema.

Inicialmente, considera-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo de rotação

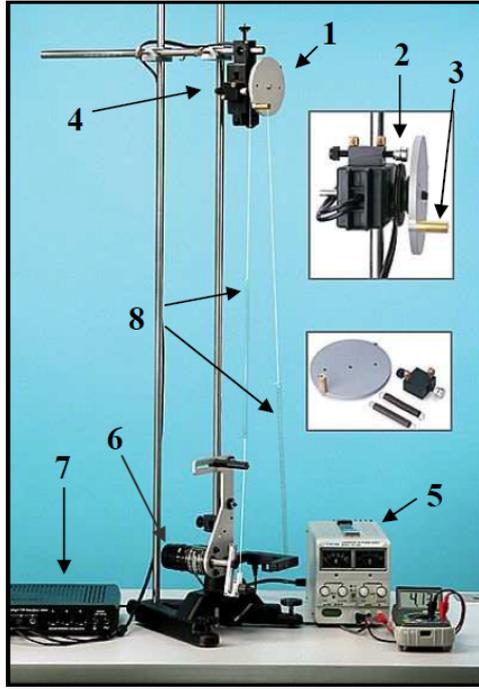


Figura 7 – Pêndulo não-linear e acessórios: (1) Disco metálico, (2) Dispositivo de amortecimento, (3) Massa excêntrica, (4) Sensor de rotação, (5) Fonte de energia, (6) motor elétrico, (7) Dispositivo de aquisição de dados e (8) Molas e fios (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006).

do disco. Nesta modelagem, se considera a posição angular, ϕ , é nula no ponto mais baixo de sua trajetória e admite-se positivo para rotação no sentido anti-horário. Assume-se, ainda que, a fase de forçamento, θ_{forc} , é nula quando a haste está no ponto mais alto de sua trajetória, também admitido positivo no sentido anti-horário.

Pelo diagrama de corpo livre, apresentado em (b) da Figura 8 e pelas configurações geométricas de (c) da mesma figura, temos as forças externas atuantes são dadas pelo peso excêntrico, pelas trações exercidas pelos conjuntos fio mola F_1 e F_2 e pelas forças dissipativas viscosa linear e atrito seco. Dessa forma:

$$F_1 = k \left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\bar{\omega}t)} - (a - b) - \frac{d}{2}\phi \right) \quad (3.1)$$

$$F_2 = \frac{kd}{2}\phi \quad (3.2)$$

onde a é distância do eixo motor elétrico a guia do fio, b é o comprimento da haste do motor elétrico, d é o diâmetro da polia motora do disco metálico, k é a constante de rigidez da mola e $\bar{\omega}$ é a frequência de rotação do motor elétrico de forçamento.

Assim, o somatório de momentos gerados pelas trações, peso e elementos dissipativos viscosos e seco, tem-se:

$$\sum \text{Torques} = \frac{F_1 + F_2}{2}d - \mu \text{sgn}(\phi) - \zeta \dot{\phi} - \frac{mg \sin(\phi)}{2}D = I\ddot{\phi} \quad (3.3)$$

onde m é o valor da massa concentrada, ζ representa a constante de amortecimento viscoso, μ representa a constante de atrito seco, sgn é a função sinal, D é dobro da distância

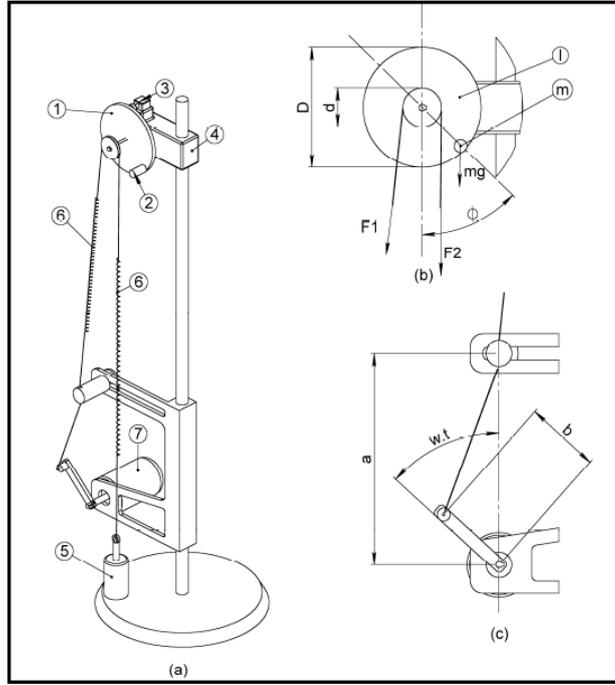


Figura 8 – Representação pêndulo não-linear: (a) Modelo físico: 1-Disco metálico, 2-Massa excêntrica, 3-Dispositivo de amortecimento, 4-Sensor de rotação, 5-Conjunto fio-mola e 6-Motor elétrico; (b) Disco metálico: geometria e forças atuantes; e (c) Sistema de excitação: geometria (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006).

da massa concentrada ao eixo do sensor de rotação, g é a aceleração da gravidade e I é o momento de inércia do conjunto disco e massa.

Substituindo as Equações (3.1) e (3.2) em (3.3) pode-se escrever a equação do movimento:

$$\ddot{\phi} + \frac{\zeta}{I}\dot{\phi} + \frac{kd^2}{2I}\phi + \frac{\mu \operatorname{sgn}(\dot{\phi})}{I} + \frac{mgD \sin(\phi)}{2I} = \frac{kd}{2I} \left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\bar{\omega}t)} - (a - b) \right) \quad (3.4)$$

O termo que representa o atrito seco apresentado nas equações (3.3) e (3.4) apresenta uma descontinuidade na equação. A descontinuidade vem do fato que o atrito apresenta mesmo módulo, mas com sinal positivo ou negativo a depender do sentido da velocidade. Essa característica de mudança de sinal é instantânea, logo, acarreta uma função descontínua não-suave que pode gerar erros numéricos que tendem a se propagar, gerando uma resposta distante da real. Para evitar o problemas pode-se suavizá-lo pela seguinte função, proposta por (LEINE, 2000):

$$\mu \operatorname{sgn}(\dot{\phi}) = \frac{2}{\pi} \mu \arctan(q \cdot \dot{\phi}) \quad (3.5)$$

onde q assume um valor alto com $q = 10^6$. A Figura 9 mostra a função sinal e o modelo suavizado em comparação.

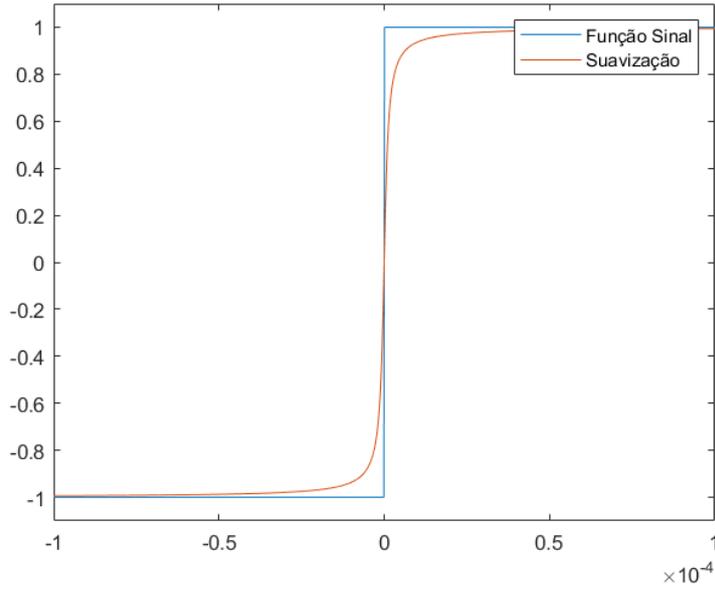


Figura 9 – Suavização da função de atrito.

Substituindo a Equação (3.5) em (3.6) e reescrevendo a equação do movimento na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em função das variáveis de estado $(x_1, x_2) = (\phi, \dot{\phi})$, temos:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{kd^2}{2I} & -\frac{\zeta}{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{kd}{2I}\Delta(t) - \frac{mgD}{2I}\sin(x_1) - \frac{2\mu}{I\pi}\arctan(q x_2) \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

onde $\Delta(t) = (\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\bar{\omega}t)} - (a - b))$.

3.1.2 Modelagem matemática com controle

O controle de caos em um pêndulo não-linear é feito ao se realizar pequenas perturbações no sistema. Essas perturbações são realizadas através de atuadores que são acoplados no pêndulo de modo a variar levemente os parâmetros do sistema.

A atuação do primeiro parâmetro de controle, Δl , do conjunto fio-molas em que é realizado o forçamento. A atuação do atuador no pêndulo não-linear está ilustrada na Figura 10.

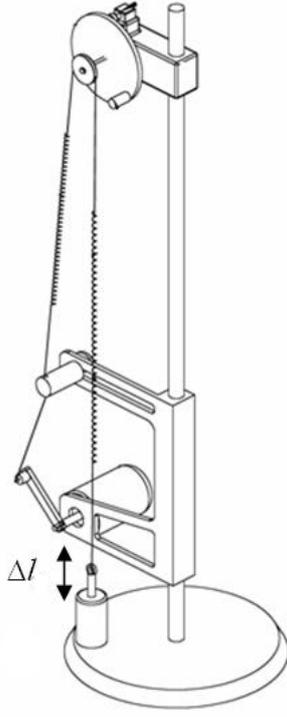


Figura 10 – Atuador (PAULA, 2005).

Com tais atuadores para parâmetros de controle se reescreve a Equação (3.6) como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{kd^2}{2I} & -\frac{\zeta}{I} \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ \frac{kd}{2I}(\Delta(t) - \Delta l) - \frac{mgD}{2I} \sin(x_1) - \frac{2\mu}{I\pi} \arctan(qx_2) \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $\Delta(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\bar{\omega}t)} - (a - b)$.

A ação de controle na Equação (3.7) é dado pelo termo $-(kd/2I)\Delta l B(t)$ que é equivalente ao termo $B(t)$ da ação de controle da Equação (2.12). Vale notar que a ação de controle proposta não permite a adoção do termo $B_1(t)$. Igualando a ação do controle com termo $B(t)$ apresentado em 2.13 em sua forma matricial temos:

$$\begin{cases} 0 \\ -\frac{kd}{2I}\Delta l \end{cases} = \begin{cases} B_1(t) \\ B_2(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} (1 - R)S_{\tau_1} - x_1 \\ (1 - R)S_{\tau_2} - x_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Em uma primeira análise, considera-se apenas a informação da velocidade atual e defasadas do pêndulo na ação do controle. Desta forma, matriz \mathbf{K} de ganhos do sistema recai em um escalar pode ser apresentada da forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Dessa forma, podemos escrever o valor de Δl como:

$$-\frac{kd}{2I}\Delta l = K[(1 - R)S_{\tau_2} - x_2] \quad (3.10)$$

Os trabalhos da literatura consideram apenas a influência do parâmetro k_{22} , sendo assim, em uma segunda análise, considera-se também a influência dos deslocamentos atual e defasados na ação de controle. Desta forma, avalia-se a influência conjunta dos ganhos k_{21} e k_{22} . Dessa forma o termo k_{21} se torna não nulo, logo a matriz \mathbf{K} fica da forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Logo:

$$-\frac{kd}{2I}\Delta l = K_{21}[(1-R)S_{1\tau} - x_1] + K_{22}[(1-R)S_{2\tau} - x_2] \quad (3.12)$$

onde $S_{i\tau} = x_i(t - \tau) + Rx_i(t - \tau) + R^2x_i(t - \tau)$ com $i = 1, 2$.

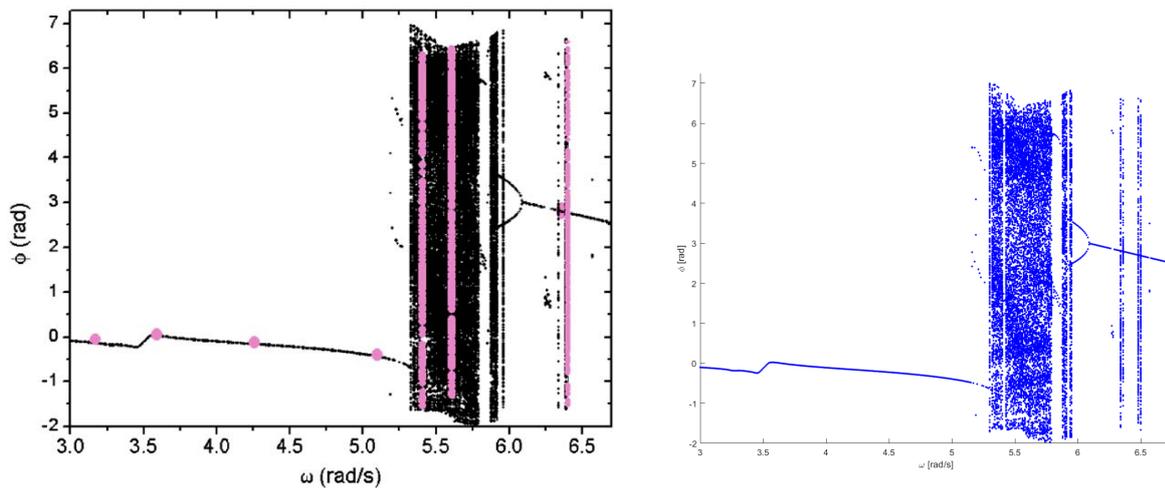
3.2 Análise dinâmica sem controle

Nesta seção são apresentados os resultados da simulação computacional do pêndulo sem controle realizada neste trabalho e é validada comparando-a com o trabalho (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006).

Todas as etapas de análise dinâmica foram realizadas com simulação numérica do modelo matemático proposto. Para tal considera-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem, adotado em todo trabalho. A simulação utilizou tempo de integração de 50 mil ciclos, onde foi descartado o transiente inicial de 2000 ciclos de forçamento. Cada ciclo de integração possui discretização de 120 unidades. O passo de integração é dado por $h = 2\pi/(120 \bar{\omega})$, com $\bar{\omega}$ sendo a frequência de forçamento. As condições iniciais foram consideradas nulas.

3.2.1 Diagrama de Bifurcação

O pêndulo não-linear sujeito a um forçamento periódico pode ter diversas respostas diferentes qualitativamente. Com objetivo de se realizar uma análise global dos tipos de resposta que o sistema pode apresentar, constrói-se o diagrama de bifurcação. O diagrama de bifurcação construído neste trabalho apresenta a posição angular para cada valor de forçamento variando de 3,0 rad/s a 7,0 rad/s com passo de 0,01 rad/s. As condições iniciais são nulas para cada frequência de forçamento e é desconsiderado os 2000 primeiros períodos. O procedimento foi realizado numericamente está apresentado na Figura 11b e está dentro da validade quando comparado com a Figura 11a de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006).

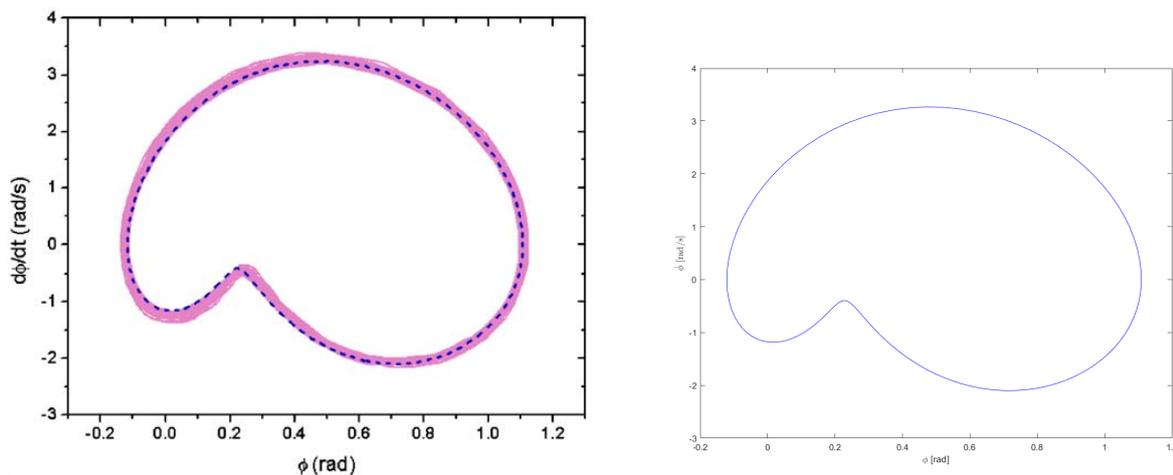


(a) Diagrama de Bifurcação de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006). (b) Diagrama de Bifurcação deste trabalho.

Figura 11 – Diagramas de Bifurcação.

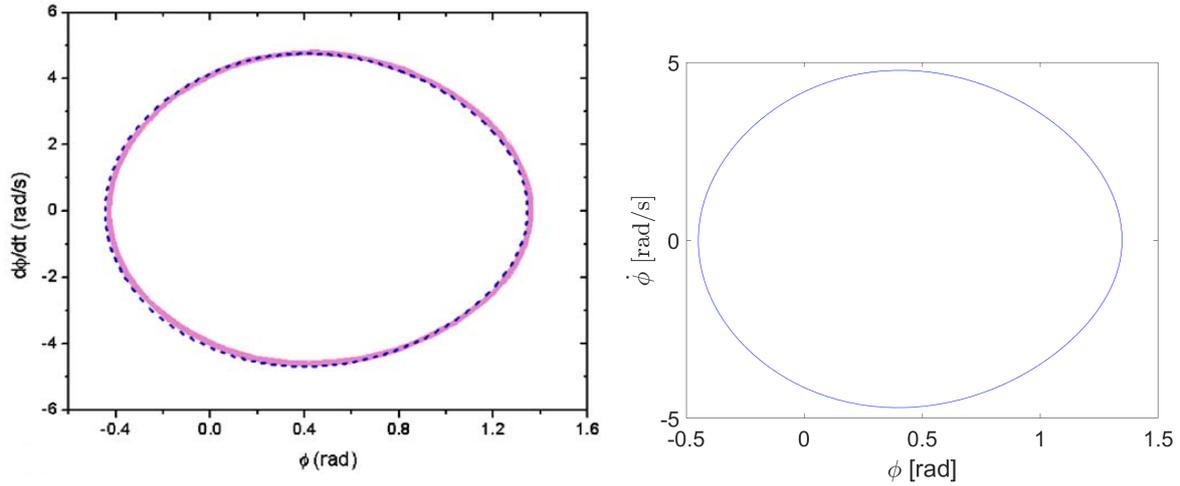
3.2.2 Comportamento Periódico

Analisando o diagrama de bifurcação na Figura 11 pode-se notar duas regiões distintas bem definidas, uma região periódica e uma região caótica. Inicialmente, considera-se a região periódica do sistema para $3.00 \leq \omega \leq 5.32$ rad/s. Nesta região são verificadas as frequências de forçamento de $\omega = 3.59$ rad/s e $\omega = 5.10$ rad/s. As respostas de tais frequências foram obtidas numericamente estão apresentadas nas figuras 12b e 13b e podem ser comparadas com as figuras 12a e 13a encontradas em (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006). Pode se verificar concordância entre o resultado numérico obtido e o artigo de referência.



(a) Resposta periódica de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006). (b) Resposta periódica deste trabalho.

Figura 12 – Resposta periódica para $\omega = 3.59$ rad/s.

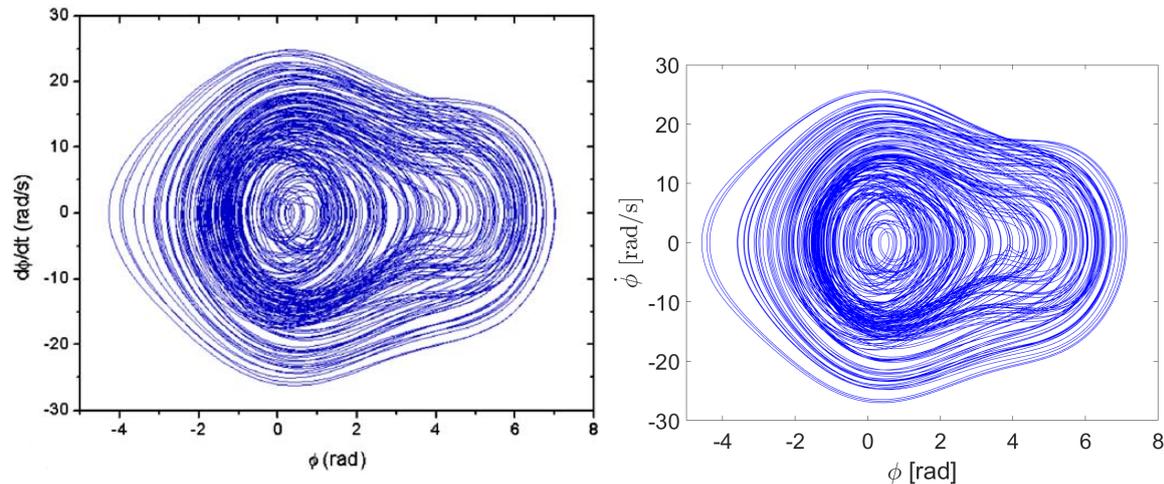


(a) Resposta periódica de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006). (b) Resposta periódica deste trabalho.

Figura 13 – Resposta periódica para $\omega = 5.10$ rad/s.

3.2.3 Comportamento Caótico

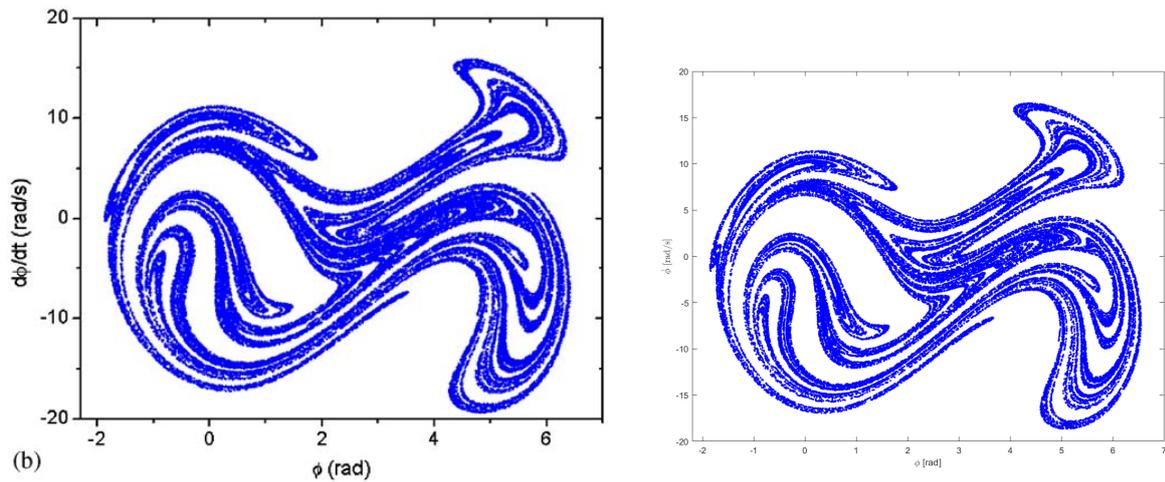
Para análise do comportamento caótico escolheu-se a frequência de de forçamento $\omega = 5.61$ rad/s, que se encontra dentro da região caótica do identificada pelo diagrama de bifurcação. A Figura 14b apresenta a resposta numérica obtida e a Figura 14a mostra a resposta de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006).



(a) Resposta experimental caótica de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006). (b) Resposta numérica caótica deste trabalho.

Figura 14 – Resposta caótica para $\omega = 5.61$ rad/s.

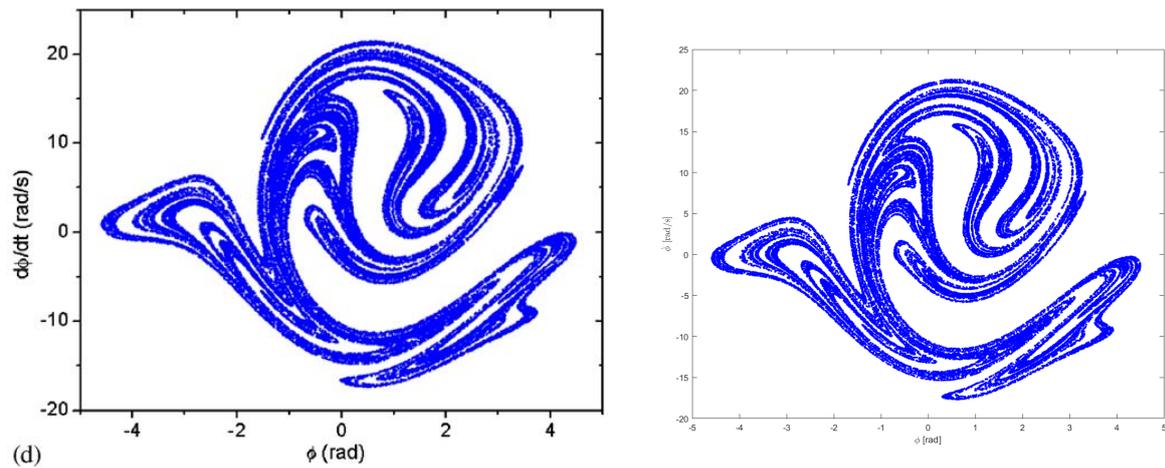
Para a análise da dinâmica para resposta caótica com $\omega = 5.61$ rad/s, as figuras 15 e 16 apresentam 2 seções de Poincaré obtidas numericamente neste trabalho comparadas com as do trabalho (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006), sendo essas consideradas para diferentes posições do plano de forçamento. Os planos considerados são defasados de π rad e correspondem às fases de forçamento de 0 rad e π rad. Com isso, pode-se verificar boa concordância entre os resultados do artigo e os obtidos neste trabalho.



(a) Seção numérica de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006).

(b) Seção deste trabalho.

Figura 15 – Seção de Poincaré de fase de forçamento 0 rad e $\omega = 5.61$ rad/s.



(a) Seção numérica de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006).

(b) Seção deste trabalho.

Figura 16 – Seção de Poincaré de fase de forçamento π rad e $\omega = 5.61$ rad/s.

3.2.4 Identificação de OPIs

A primeira fase de aprendizado do sistema consiste em identificar as OPIs que devem ser estabilizadas. O atrator do sistema possui uma infinidade de OPIs. As OPIs foram encontradas utilizando o método dos pontos recorrentes com tolerância de $r_1 = 0.01$. Foram selecionadas órbitas de período 1, 2, 3 e 5 e comparadas com artigos de referência.

Estão apresentadas as órbitas de período 1, 2 de (PAULA; SAVI, 2009) nas Figuras 18a e 19a, de período 3 de (PAULA; SAVI, 2011) na Figura 20a e de período 5 de (PAULA; SAVI; PEREIRA-PINTO, 2006) na Figura 21a e as órbitas equivalentes selecionadas neste trabalho estão a seguir em 18b, 19b, 20b e 21b.

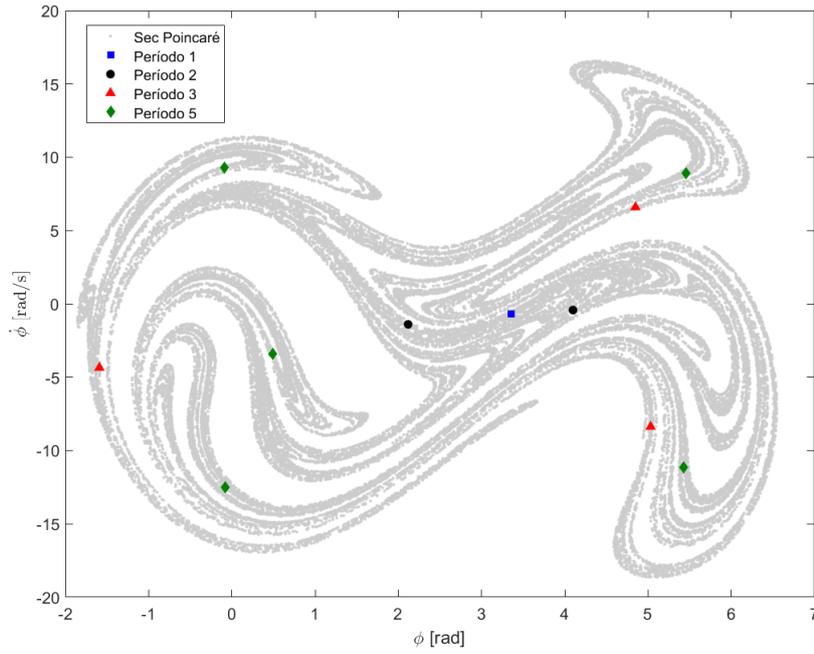
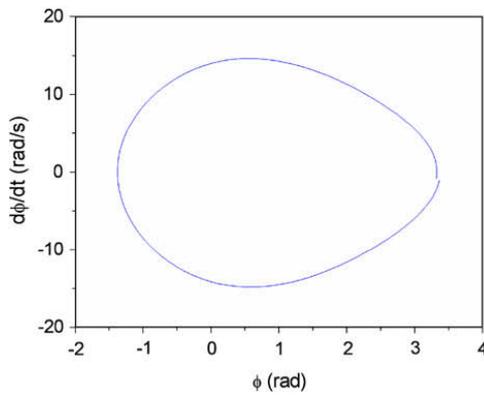
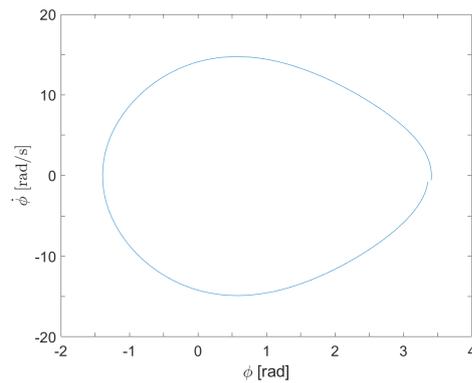


Figura 17 – OPIs no atrator estranho.

■: período 1, ●: período 2, ▲: período 3, ◆: período 5;

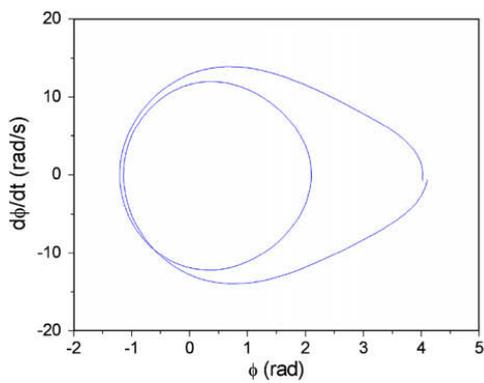


(a) (PAULA; SAVI, 2009)

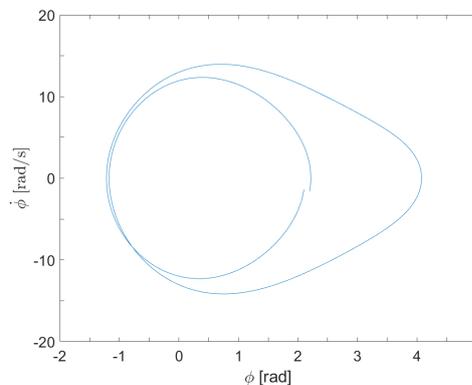


(b) OPI identificada nesse trabalho.

Figura 18 – OPI de período 1 identificadas.



(a) (PAULA; SAVI, 2009)



(b) OPI identificada nesse trabalho.

Figura 19 – OPI de período 2 identificadas.

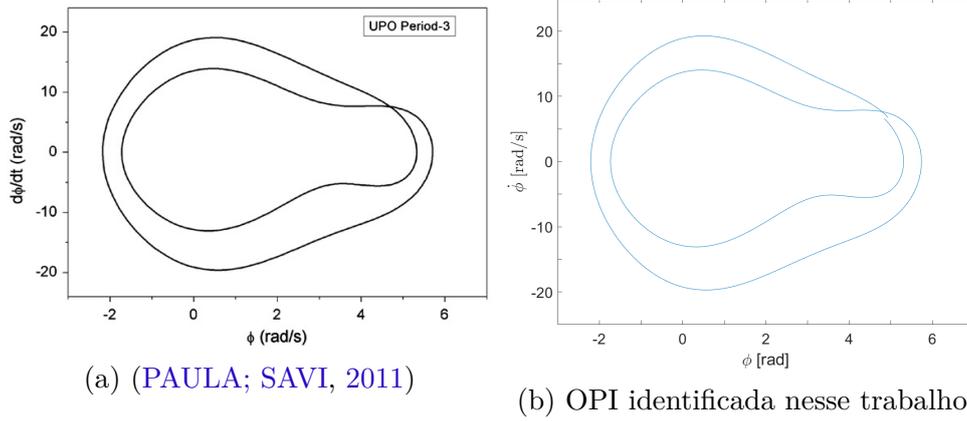


Figura 20 – OPI de período 3 identificadas.

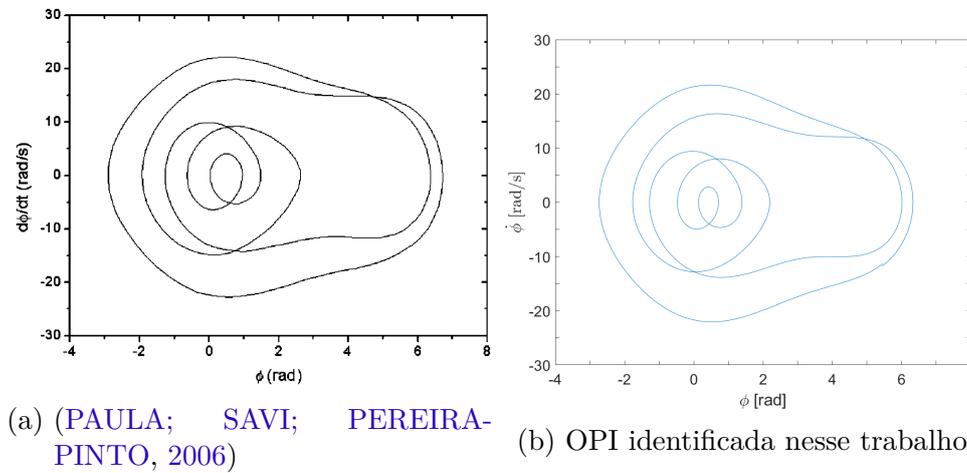


Figura 21 – OPI de período 5 identificadas.

3.3 Expoente de Lyapunov das OPIs selecionadas

Na segunda fase do aprendizado é feita a determinação dos ganhos a partir do expoente de Lyapunov. Esta é a fase do controle mais cara computacionalmente.

Para verificar a capacidade de estabilização de uma OPI pelo método ETDF foi realizada simulação numérica do pêndulo não-linear onde foram variados os parâmetros de controle. Foram avaliados os valores dos expoentes de Lyapunov máximos das 4 OPIs selecionadas. A avaliação foi feita para valores de $R = 0$ até $R = 1$ com intervalo de 0,2. Os valores de K foram variados de 0 a 4 com intervalo de 0,05.

A seguir são apresentados expoentes de Lyapunov das OPIs de período 1, 2, 3 e 5 relativas as Figuras 18b, 19b, 20b, 21b respectivamente.

As OPIs de periodicidade maiores costumam ter a estabilização mais difícil, necessitando da valores maiores de R para atingir expoentes de Lyapunov negativos (PAULA; SAVI, 2009). A OPI de período-1 pode ser estabilizada com quaisquer valores de R , en-

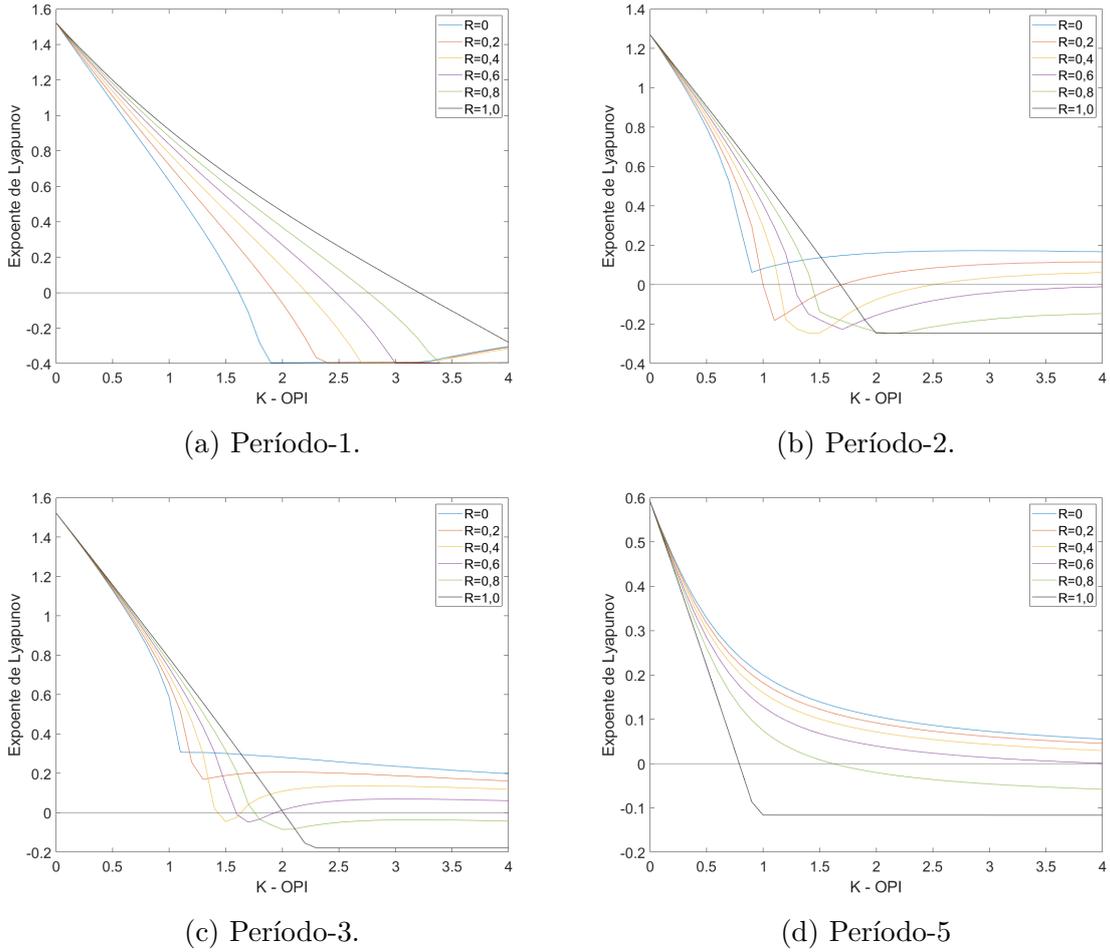


Figura 22 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI para vários parâmetros do controlador.

quanto as OPIs de período 2, 3 e 5 tem a estabilização somente possível para alguns valores de R . Assim, os valores dos expoentes de Lyapunov estão coerentes.

Para a escolha dos ganhos R e K , prioriza-se valores que resultem no menor expoente de Lyapunov. O valor mínimo do expoente propicia maior taxa de convergência das órbitas próximas e valores de ganhos (PYRAGAS, 1995). Também prioriza-se uma valores menores de que tem uma ação de controle menor e por consequência menor amplitude máxima no controle.

Para a OPI de período 1, apresentada na Figura 22a, todos os valores do parâmetro R satisfazem a condição de controle. Assim, adota-se $R = 0$ e $K = 1.9$. A OPI de período 2, Figura 22b, não pode ser satisfeita mais para todos os valores de R , assim foi escolhido $R = 0.2$ e $K = 1.05$. Na Figura 22c, é apresentado para a OPI de período 3 e foi selecionado $R = 0.4$ e $K = 1.55$. Finalmente para a OPI de período 5, o expoente é apresentado na Figura 22d e o seu valor escolhido $R = 1.0$ e $K = 0.95$.

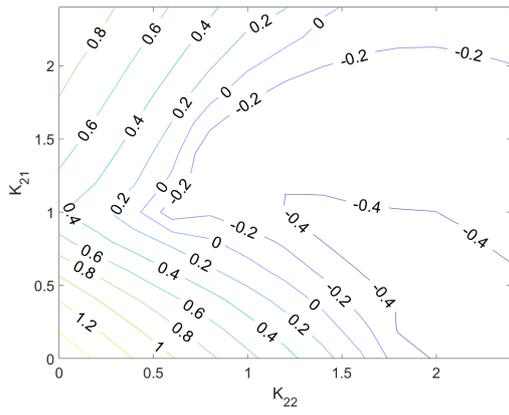
Dessa forma, os parâmetros de controle R e K escolhidos para cada uma das OPIs está apresentado na Tabela 2. Pode-se notar que expoentes de Lyapunov negativos são mais difíceis de serem encontrados com o aumento da periodicidade das OPIs.

Período da OPI	R	K	Expoente de Lyapunov
1	0.0	1.9	-0.42
2	0.2	1.05	-0.15
3	0.4	1.55	-0.05
5	1.0	1.1	-0.12

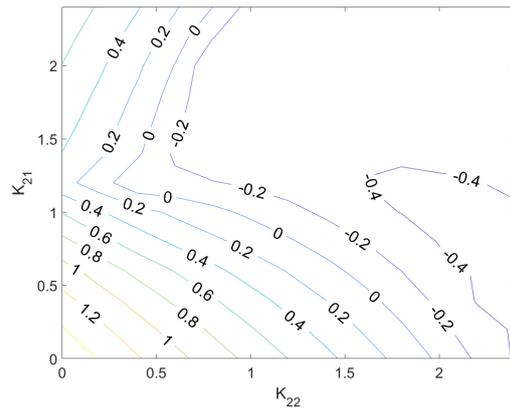
Tabela 2 – Expoentes de Lyapunov selecionados para K escalar.

Para o \mathbf{K} matricial foi executado o mesmo procedimento para avaliação dos expoentes de Lyapunov. A avaliação considerou valores de $R = 0$ a $R = 1$ com passo de 0,2. Os parâmetros K_{21} e K_{22} foram variados de 0 a 2,5 com intervalo de 0,1.

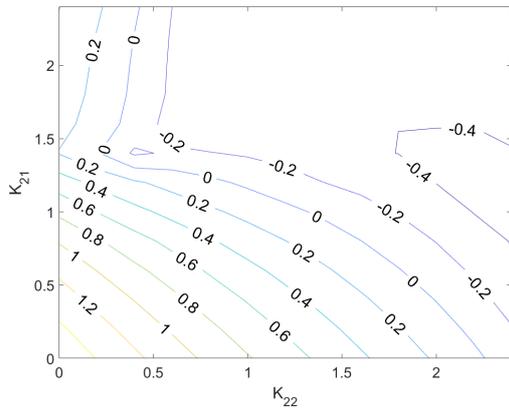
Como os gráficos que avaliam R , K_{21} e K_{22} possuem 3 dimensões, esses apresentados os resultados para cada R em curvas de nível nas Figuras 23, 24, 25, 26 para as OPIs de período 1, 2, 3 e 5 respectivamente.



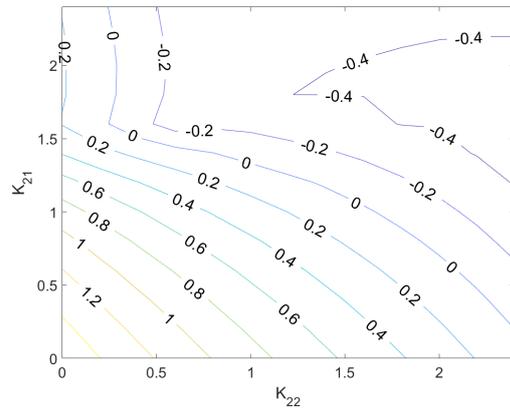
(a) $R = 0.0$



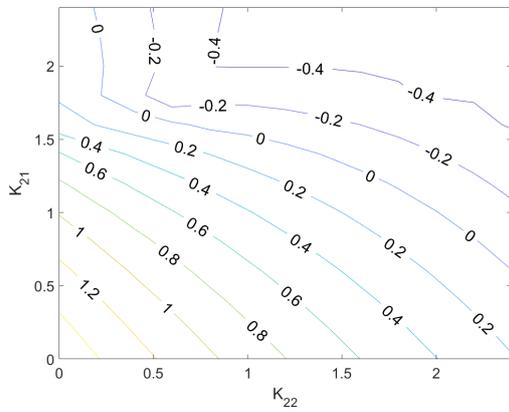
(b) $R = 0.2$



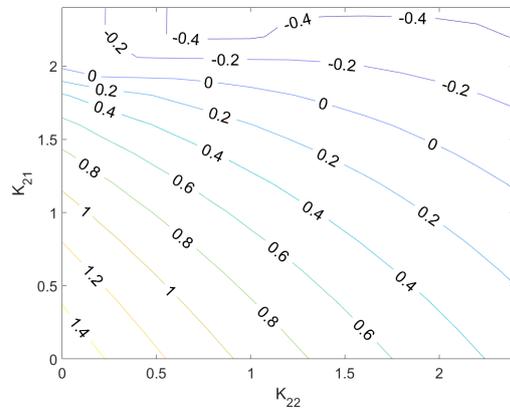
(c) $R = 0.4$



(d) $R = 0.6$

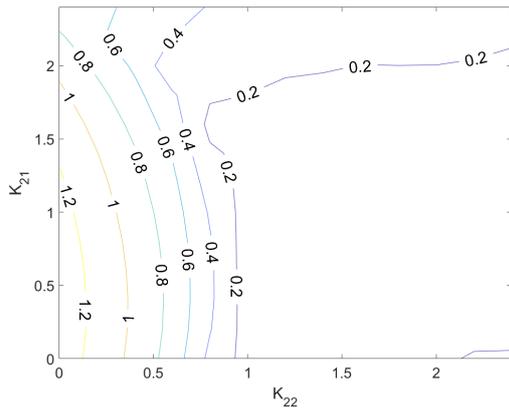


(e) $R = 0.8$

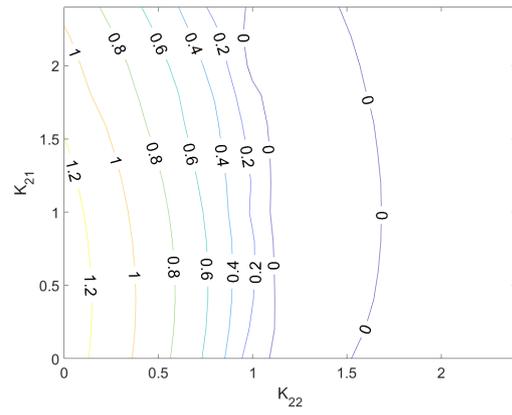


(f) $R = 1.0$

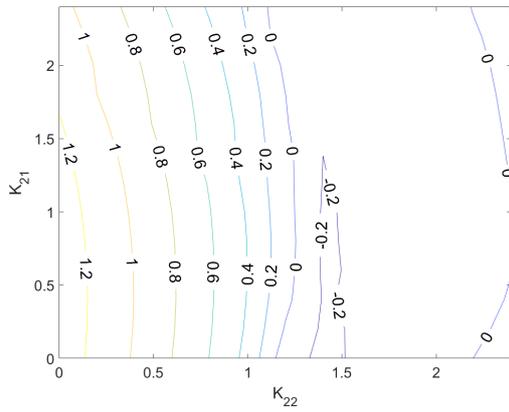
Figura 23 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI de período 1 para \mathbf{K} matriz.



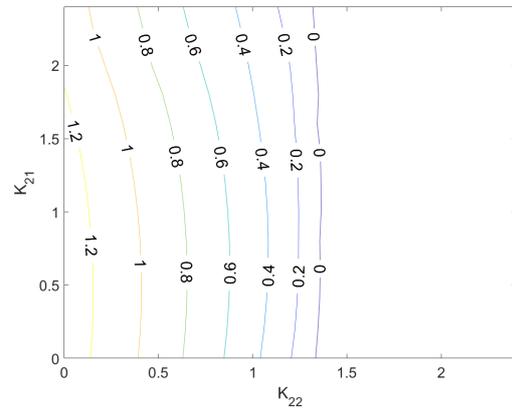
(a) $R = 0.0$



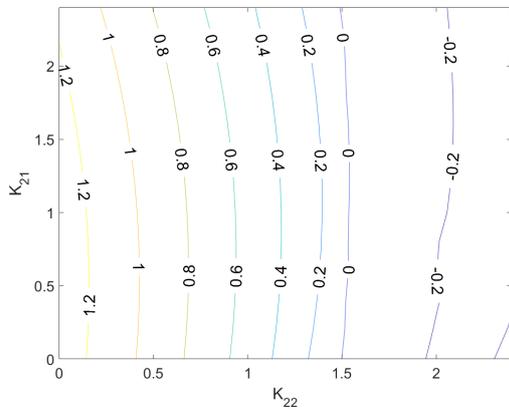
(b) $R = 0.2$



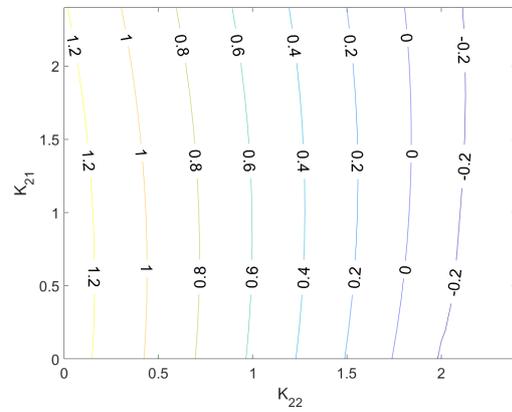
(c) $R = 0.4$



(d) $R = 0.6$

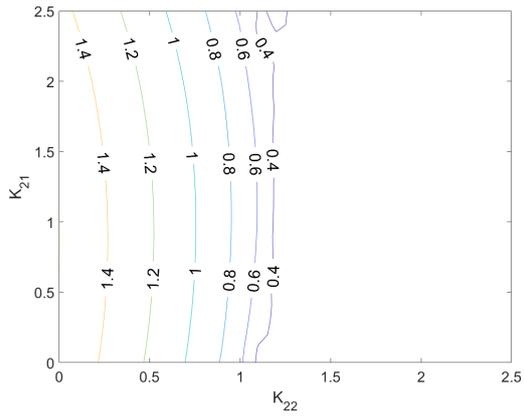


(e) $R = 0.8$

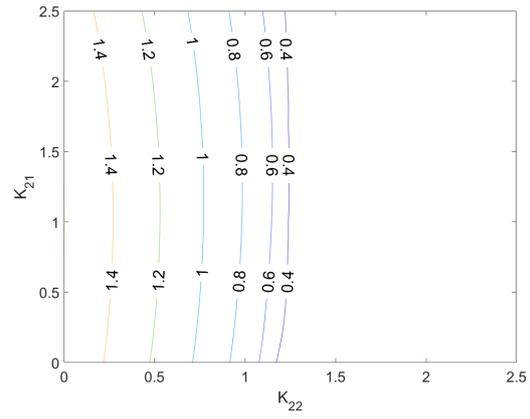


(f) $R = 1.0$

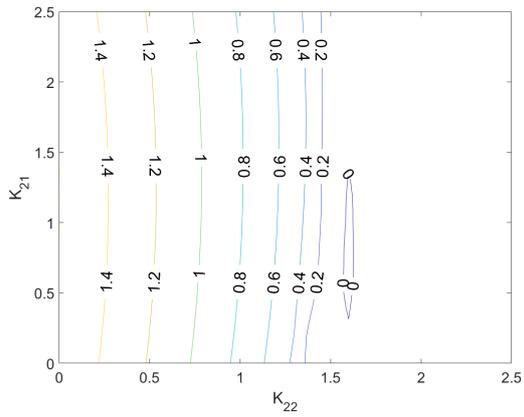
Figura 24 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI de período 2 para \mathbf{K} matriz.



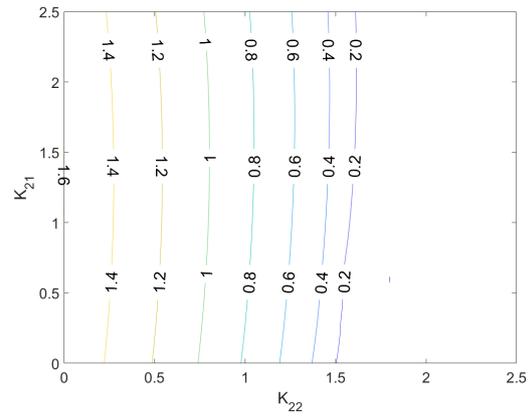
(a) $R = 0.0$



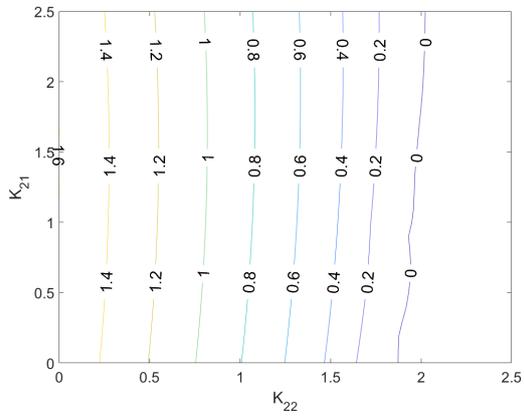
(b) $R = 0.2$



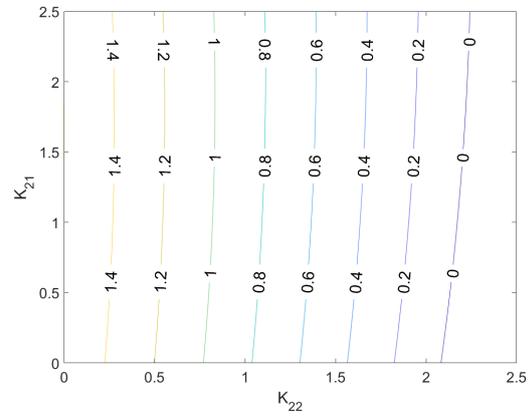
(c) $R = 0.4$



(d) $R = 0.6$



(e) $R = 0.8$



(f) $R = 1.0$

Figura 25 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI de período 3 para \mathbf{K} matriz.

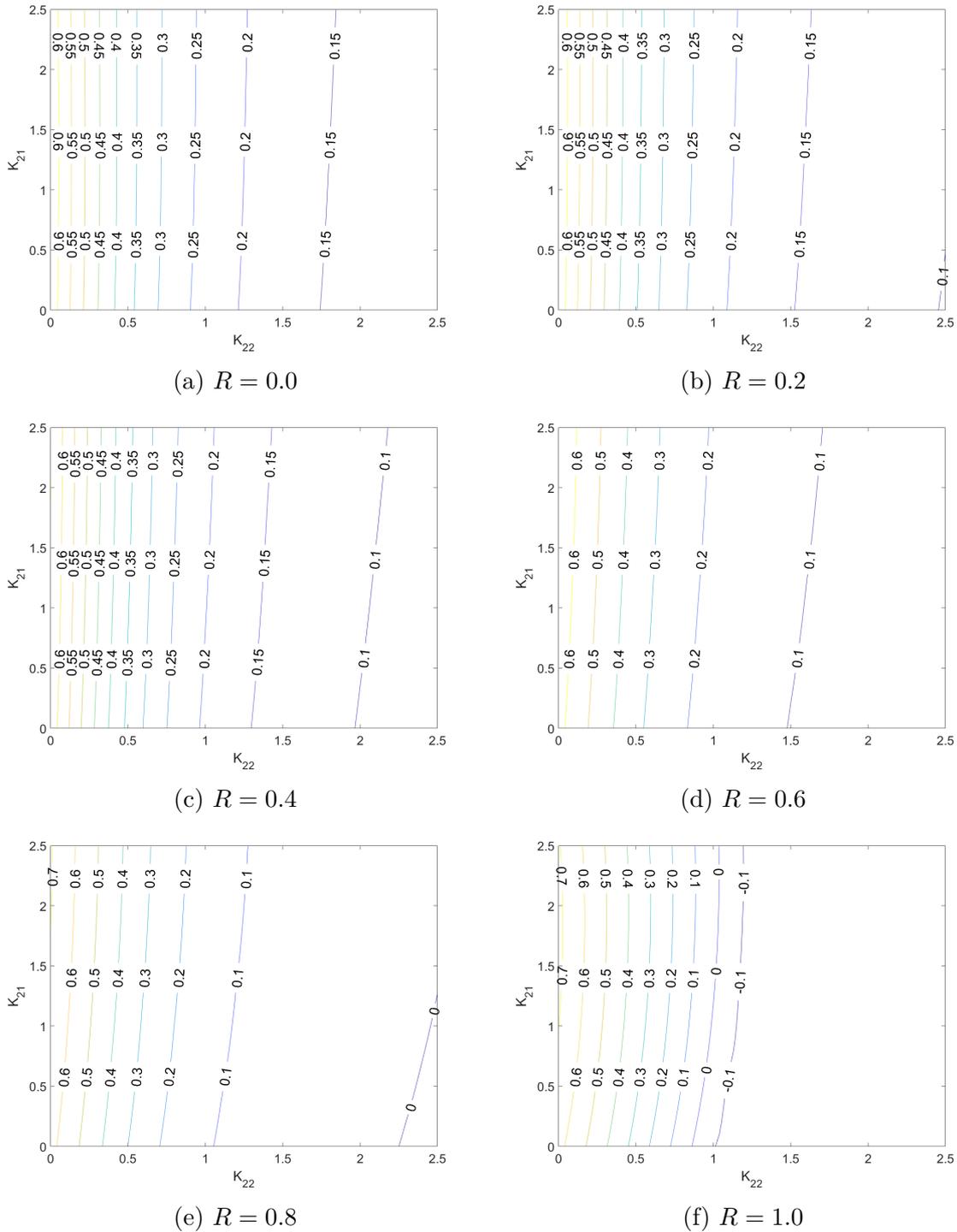


Figura 26 – Expoente de Lyapunov máximo de OPI de período 5 para \mathbf{K} matriz.

Na seleção dos valores dos ganhos K_{21} e K_{22} é buscado valores de expoente Lyapunov máximos menores que em relação aos considerando apenas K_{22} .

Os expoentes de Lyapunov apresentados na Figura 23, da OPI de período 1, teve uma grande influência do parâmetro K_{21} resultando em valores menores do que quando comparado ao uso de K_{22} somente. Os valores do expoente de Lyapunov máximos considerando os dois parâmetros K_{21} e K_{22} tiveram magnitude próximas ao caso de K escalar. Para valores de R maiores as curvas apresentam o comportamento de uma maior re-

gião de expoentes negativos. As regiões negativas do expoente de Lyapunov ocorrem em valores de K_{21} e K_{22} maiores com o aumento dos valores de R maneira semelhante ao comportamento que foi observado quando analisado somente K_{22} .

A OPI de período 2, Figura 24, não mostrou regiões de expoente negativo quando considerados K_{21} e K_{22} para $R = 0$. Para $R = 0.2$, ouve pouca influência do parâmetro K_{21} no que tange a área de expoente negativo. Diferentemente da OPI de período 1, na região onde encontrou-se valores negativos, $R = 0.4$, obteve-se expoentes menores para essa OPI quando se utiliza 2 parâmetros na matriz \mathbf{K} em relação a quando se avalia somente o K_{22} .

A OPI de período 3, Figura 25, não apresentou valores negativos do expoente para $R = 0$ e $R = 0.2$ de maneira semelhante a quando foi avaliado somente K_{22} . Não ouve grande influência no tamanho da região de valores de expoentes de Lyapunov quando avaliado 2 parâmetros de \mathbf{K} . Os valores de expoente são ligeiramente menores quando é considerado dois parâmetros de \mathbf{K} .

A OPI de período 5, Figura 26, teve um comportamento bastante semelhante com a OPI de período 3. Para \mathbf{K} não houve um aumento significativo na região de expoentes negativos, mas são encontrados valores menores para o expoente quando comparados a avaliação de apenas um parâmetro de controle em relação a K escalar.

Dessa forma, para \mathbf{K} matriz foram selecionados R , K_{21} e K_{22} da forma apresentada na Tabela 3.

Período da OPI	R	K_{21}	K_{22}	Expoente de Lyapunov
1	0	1.2	0.8	-0.41
2	0.2	1.1	1.1	-0.18
3	0.4	1.6	0.7	-0.04
5	1.0	0.4	1.2	-0.12

Tabela 3 – Expoentes de Lyapunov selecionados para K matriz.

3.4 Resultados do Controle

Nesta sessão são apresentados os resultados do controle.

Para a simulação do sistema com controle foi adotado um tempo de integração de 100 ciclos de forçamento. As equações são resolvidas usando o método de Runge-Kuta de quarta ordem com discretização de 120 unidades por ciclo. As condições iniciais do sistema são nulas.

Para comparar os procedimentos de controle são estabelecidos os seguintes critérios. Inicialmente é avaliado se a OPI é estabilizada. Como segundo critério é avaliado o tempo necessário para estabilizar a OPI. Como terceiro critério é avaliado o valor máximo da atuação realizada.

Para cada OPI avaliada são apresentados: espaço de fase comparativo da OPI estabilizada depois de 50 ciclos com a OPI de referência apresentada na seção anterior, a resposta temporal do pêndulo e o sinal de controle no tempo.

É apresentado, para cada OPI, o controle utilizando K sem limitação do atuador e com limitação de 20 mm. Os mesmos gráficos são apresentados em seguida para \mathbf{K} .

A estabilização para OPI de período 1 sem limitação do atuador para apenas o parâmetro K_{22} e para K_{21} e K_{22} , apresentada nas Figuras 27 e 29 respectivamente, ocorreu em um tempo menor para o parâmetro K em relação a estabilização com este parâmetro em sua forma matricial. Porém, sem a limitação do atuador a estabilização com \mathbf{K} apresentou valor máximo de atuação de $\Delta l = 67.5$ mm enquanto para o atuador K apresentou $\Delta l = 129.4$ mm. É possível que a estabilização a partir da OPI de período 1 com \mathbf{K} tenha um gasto energético menor devido ao menor deslocamento do atuador. A estimativa da energia gasta não foi avaliada nesse trabalho. Para sua análise é necessária a utilização de um modelo matemático que relacione a ação do atuador com a energia gasta por este.

Tendo em vista os valores de atuação muito elevados, não sendo viáveis fisicamente, limitou-se uma atuação máxima de $\Delta l = 20.00$ mm. A Figuras 28 apresenta o resultado para K enquanto a Figura 30 apresenta para \mathbf{K} , os tempos até a estabilização foram bastante próximos.

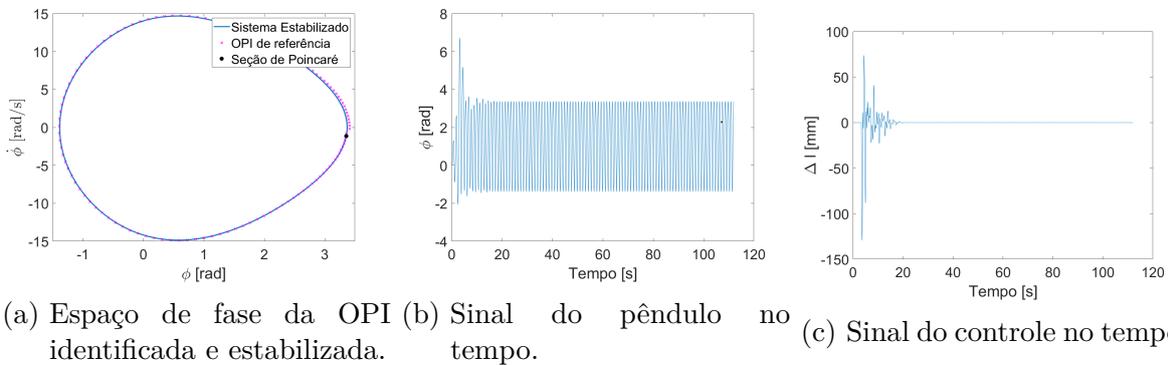


Figura 27 – Controle da OPI de período 1 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador.

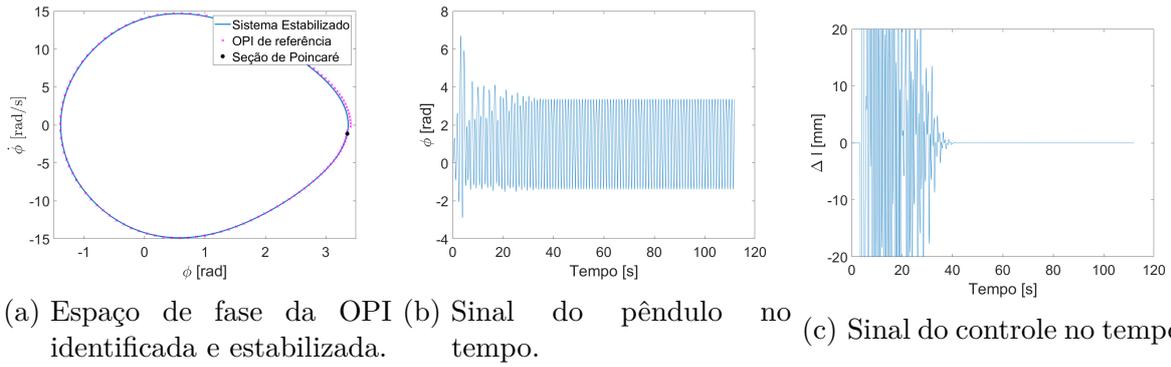


Figura 28 – Controle da OPI de período 1 com parâmetro K escalar, com limite de 20 mm no atuador.

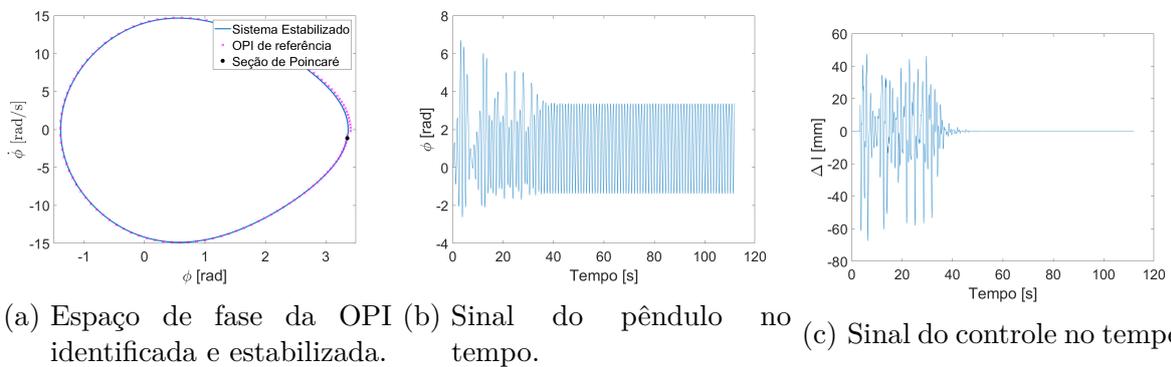


Figura 29 – Controle da OPI de período 1 com parâmetro K matriz, sem limitação do atuador.

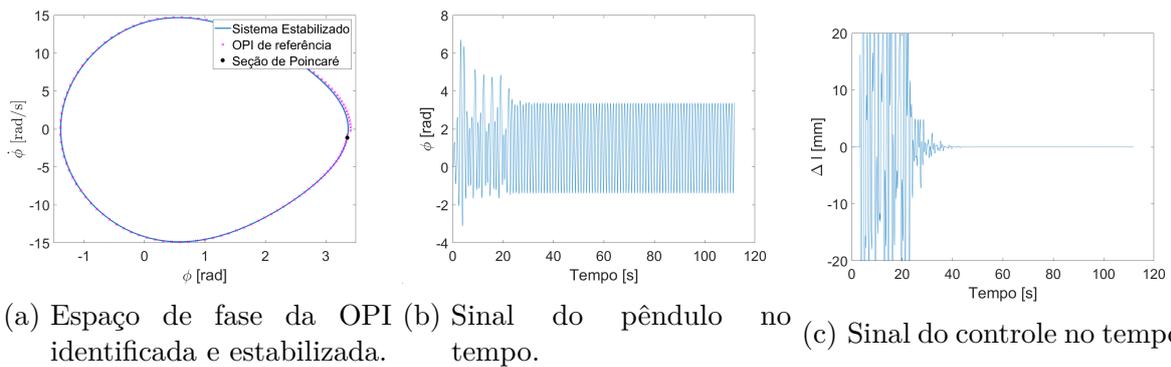


Figura 30 – Controle da OPI de período 1 com parâmetro K , com limite de 20 mm no atuador.

A estabilização da OPI de período 2 a sem a limitação do atuador para K escalar e matriz respectivamente, são apresentadas nas Figuras 31 e 33. O valor da atuação máxima foi menor para K escalar e seu tempo foi menor. Para esta OPI com limite $\Delta l = 20.00$ mm, 32 e 34, os tempos para a estabilização foram próximos.

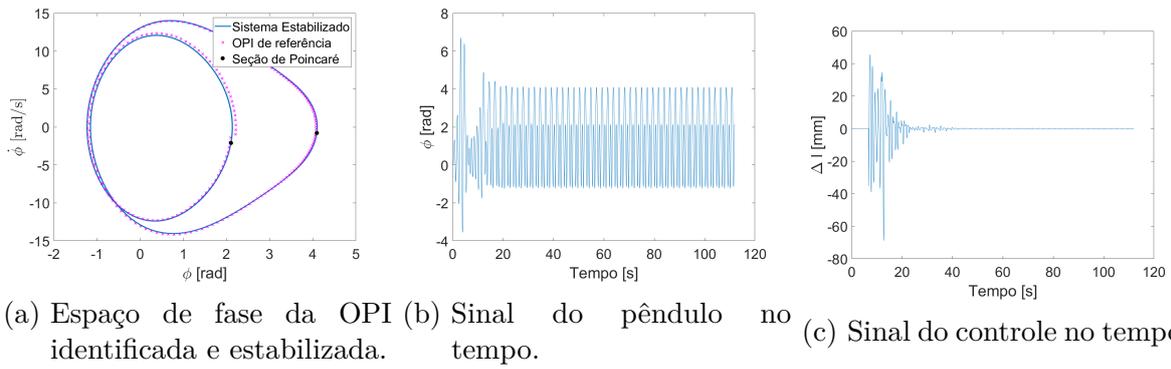


Figura 31 – Controle da OPI de período 2 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador.

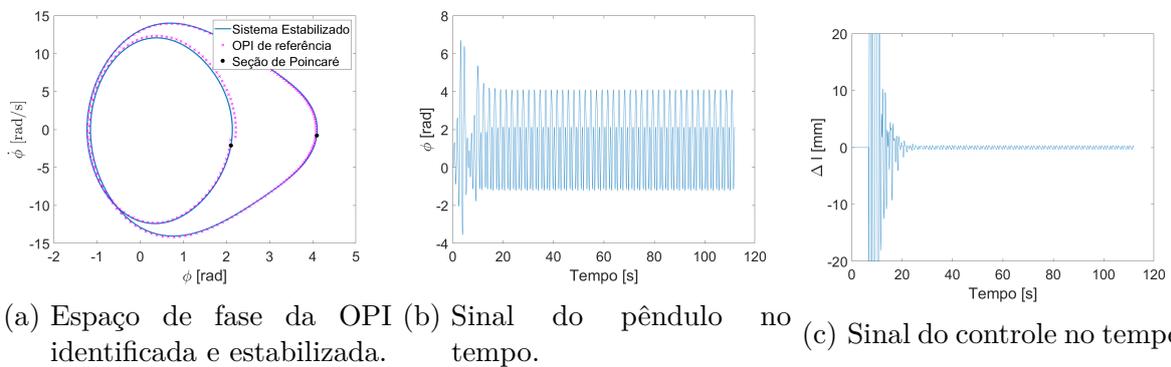


Figura 32 – Controle da OPI de período 2 com parâmetro K escalar, com limite de 20 mm no atuador.

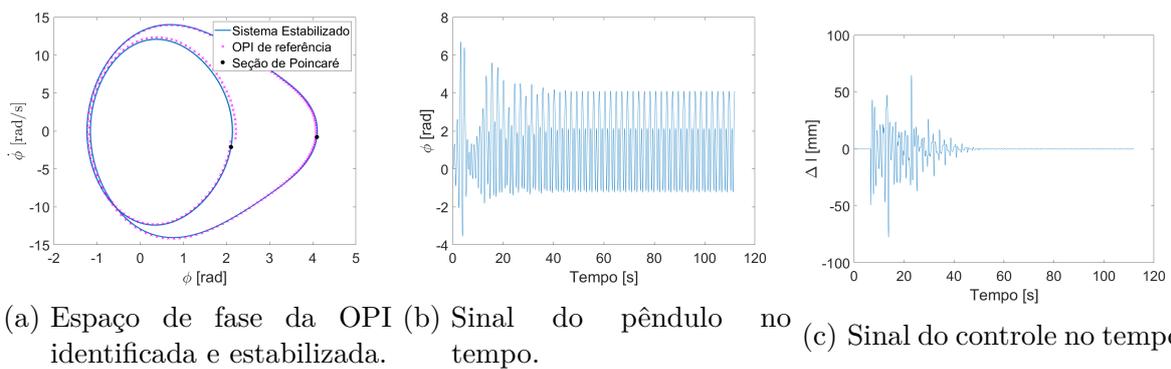


Figura 33 – Controle da OPI de período 2 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador.

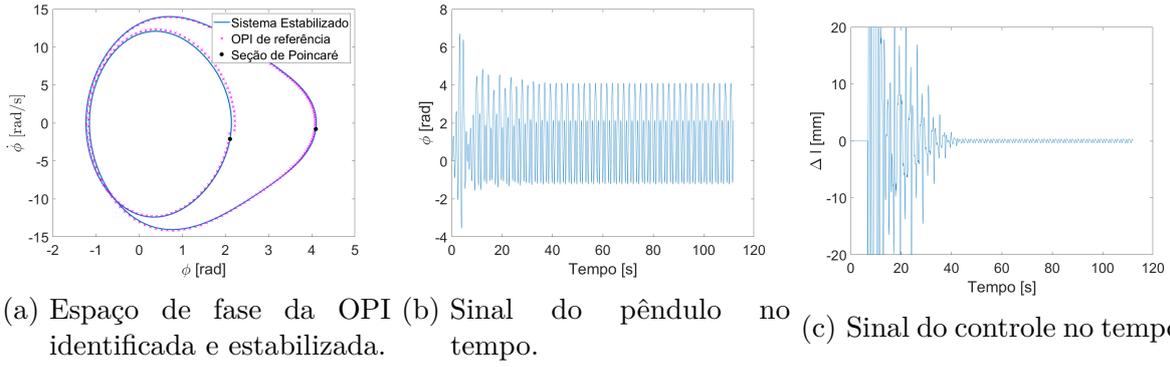


Figura 34 – Controle da OPI de período 2 com parâmetro \mathbf{K} matriz, com limite de 20 mm no atuador.

A OPI de período 3 não pode ser estabilizada pelos métodos de controle empregados nesse trabalho, Figuras 35, 36, 37 e 38. Esse resultado também foi encontrado no artigo de referência pelos diversos métodos empregados nele (PAULA; SAVI, 2011).

Em seguida, foi avaliada se a OPI desejada poderia ser estabilizada com a ação de controle iniciada apenas quando o sistema estiver próximo à da órbita desejada, considerando-se 1 ou 2 parâmetros na matriz \mathbf{K} sem limitação do atuador. Os resultados são apresentados nas Figuras 39 e 40. Da mesma forma foi estabilizada outra OPI diferente da pretendida, porém com deslocamento do atuador e tempo menor que na tentativa anterior. No caso, a OPI estabilizada possui expoente de Lyapunov mais negativo para os mesmos ganhos do controlador fazendo que o sistema convirja para esta.

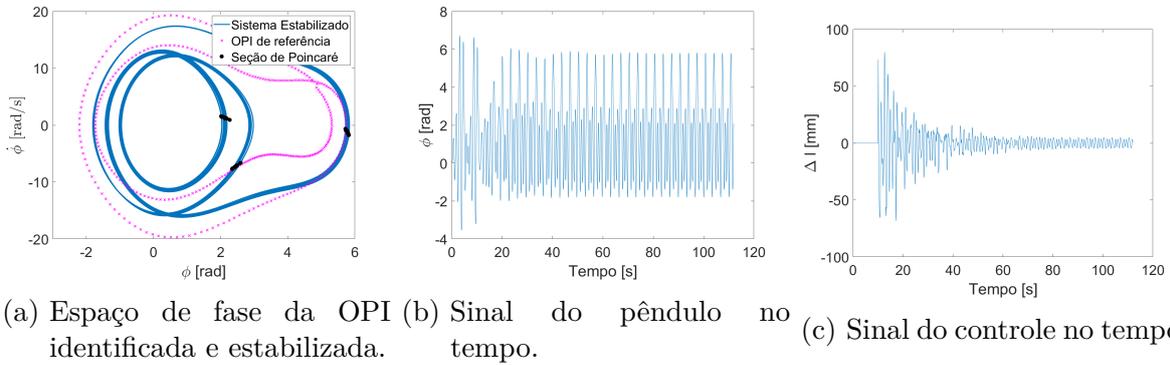


Figura 35 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador.

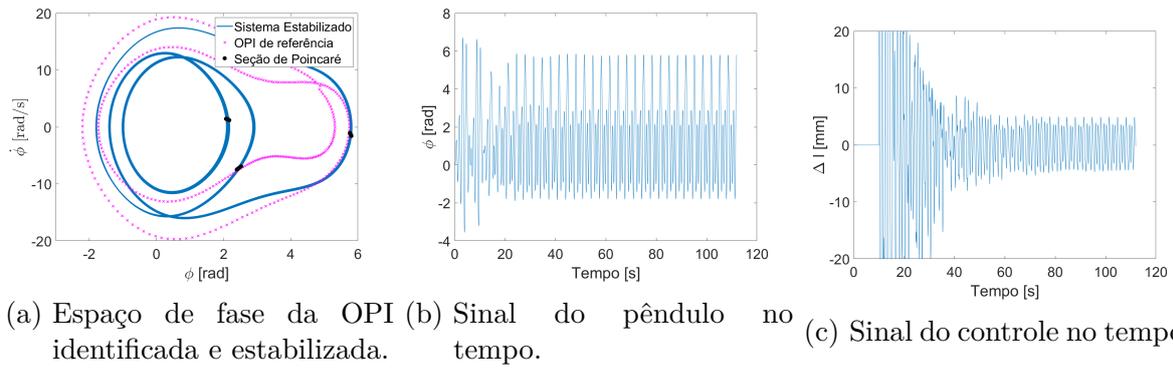


Figura 36 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro K escalar, com limite de 20 mm no atuador.

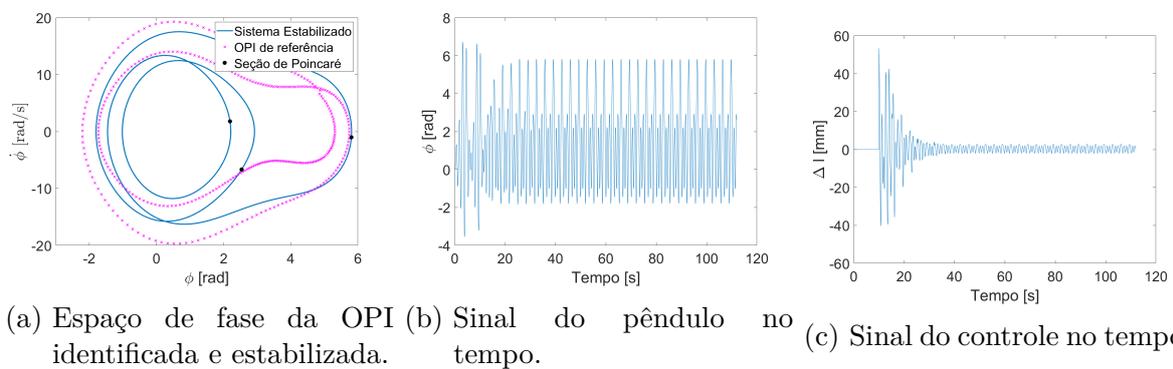


Figura 37 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro K matriz, sem limitação do atuador.

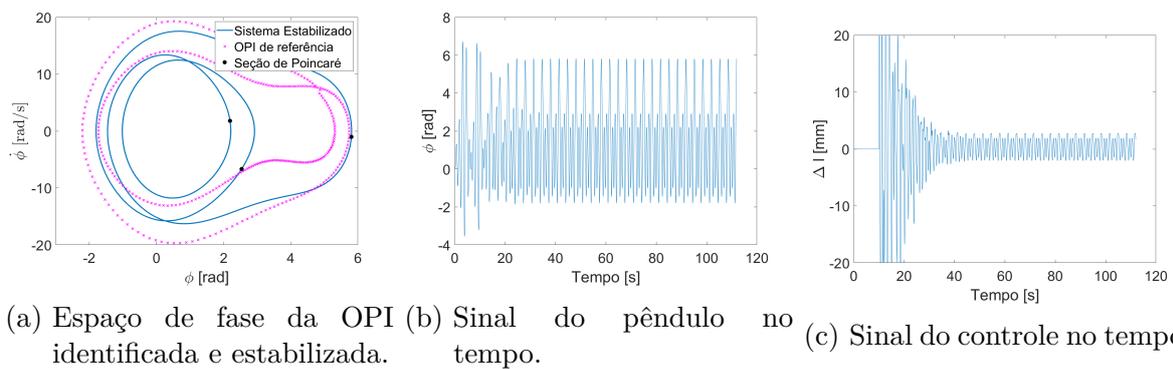


Figura 38 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro K matriz, com limite de 20 mm no atuador.

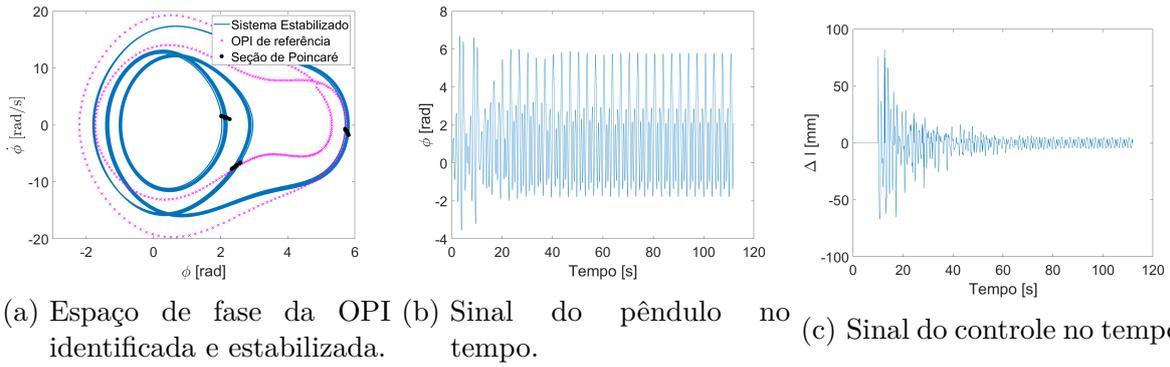


Figura 39 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador, com a ação de controle iniciada em condições próximas a OPI de interesse.

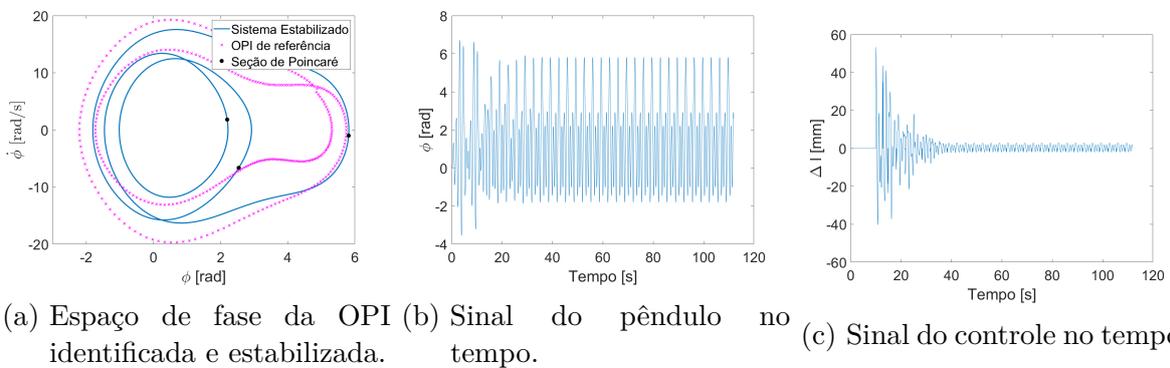


Figura 40 – Controle da OPI de período 3 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador, com a ação de controle iniciada em condições próximas a OPI de interesse.

A OPI de período 5 apresentou valores do expoente de Lyapunov negativos apenas para valores de R ou K muito elevados. Tais valores modificam radicalmente o sistema, associando a ação do controle com grandes perturbações. O resultado do controle é apresentado nas Figuras 41, 42, 43 e 44. Apesar da ação de controle conseguir suprimir o comportamento caótico quando não limitada, Figuras 41 e 43, a órbita estabilizada é diferente da desejada. Com a seleção de ganhos elevados para o controlador pode ocorrer da órbita estabilizada ter uma periodicidade submúltipla da OPI de interesse, no caso de período 1. Pode-se notar que ao contrário das atuações de estabilização de caos, onde a ação do atuador diminui ao longo do tempo, a ação aumenta tornando-se ação predominante na resposta do sistema e fugindo da finalidade de estabilização com baixo gasto energético.

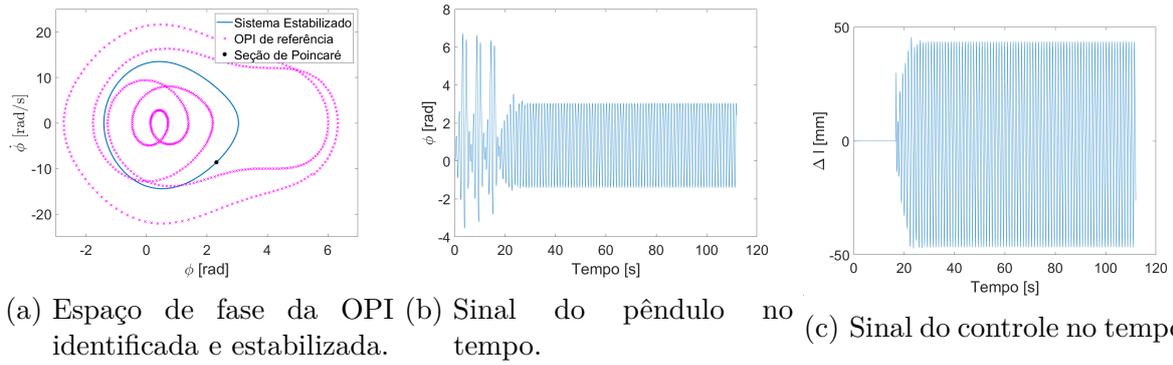


Figura 41 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador.

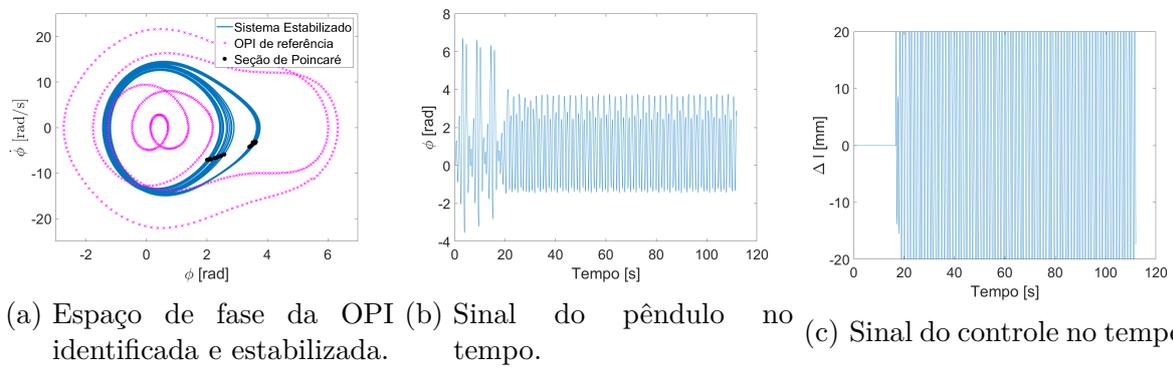


Figura 42 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro K escalar, com limite de 20 mm no atuador.

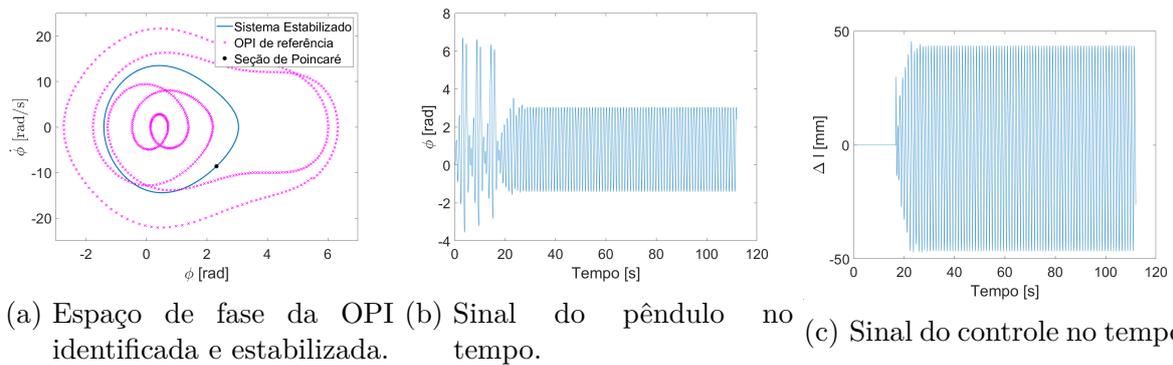


Figura 43 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador.

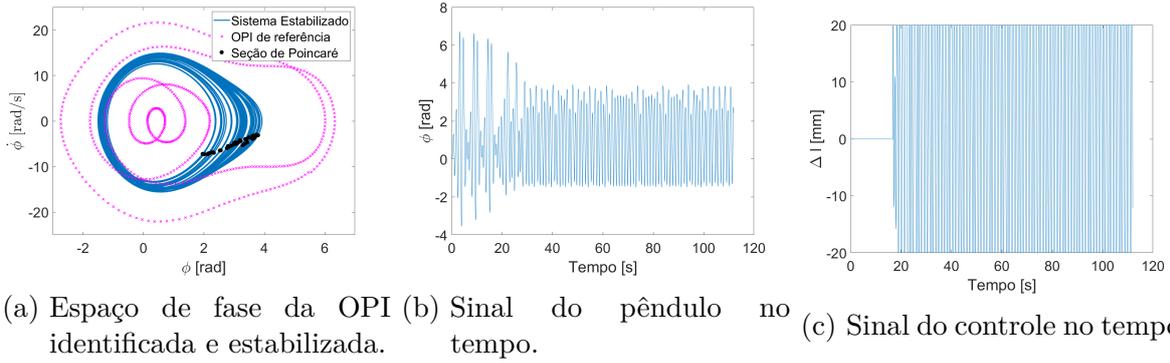


Figura 44 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro \mathbf{K} matriz, com limite de 20 mm no atuador.

Para OPI de período 5 foi avaliado o controle com $R = 0.2$ e $K = 1.1$ para K escalar, apresentado na Figura 45 e $R = 0.2$, $K_{21} = 1.1$ e $K_{22} = 1.1$ para \mathbf{K} , Figura 46. Ambas as configurações de ganhos possuem expoentes de Lyapunov ligeiramente positivos. É possível que, para tais ganhos, a estabilização seja de uma outra OPI nas proximidades da pretendida. Isso faz com que o expoente não enxerque exatamente a OPI que foi estabilizada, deixando-o ligeiramente positivo.

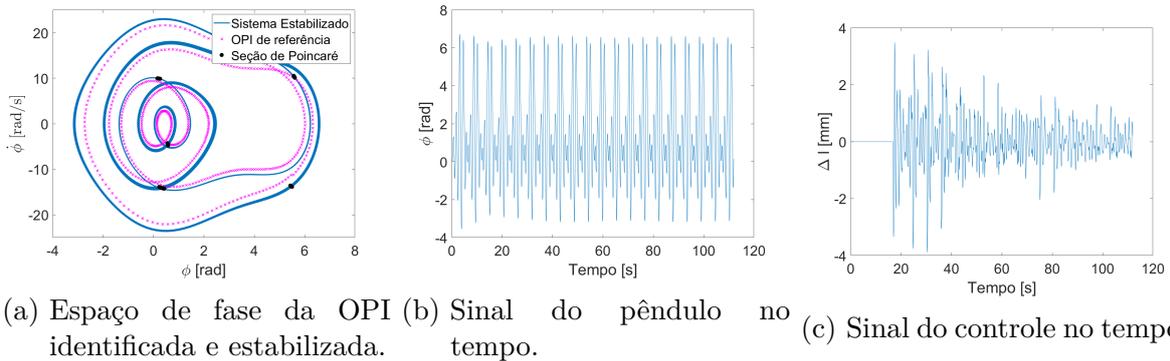


Figura 45 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro K escalar, sem limitação do atuador, para expoente de Lyapunov ligeiramente positivo.

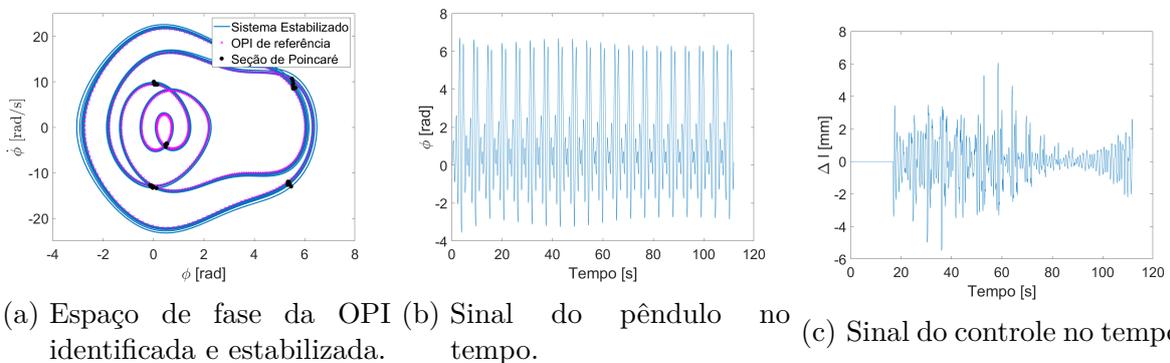


Figura 46 – Controle da OPI de período 5 com parâmetro \mathbf{K} matriz, sem limitação do atuador, para expoente de Lyapunov ligeiramente positivo.

4 Conclusão

Inicialmente, este trabalho apresenta algumas ferramentas para análise do comportamento dinâmico de sistemas não-lineares, e a metodologia de controle estudada neste trabalho. Em seguida, é apresentado o pêndulo não-linear estudado e apresentada sua modelagem matemática sem e com controle.

Posteriormente, realiza-se a simulação numérica de um pêndulo não-linear, a partir da qual realiza-se uma análise de sua dinâmica sem ação do controle. Foi verificada boa concordância entre o resultado numérico simulado e os trabalhos de referência, validando a simulação. Dentre as OPIs identificadas, selecionaram-se 4 para aplicação do controle.

Subsequentemente, é apresentada a investigação dos expoentes de Lyapunov máximos para cada uma das OPIs avaliadas para inicialmente para apenas o ganho K_{22} e subsequentemente para a ação conjunta de K_{21} e K_{22} . Finalmente é apresentado os resultados do controle onde se compara a ação de controle para um único ganho K_{22} com a ação conjunta K_{21} e K_{22} .

A busca pelos expoentes de Lyapunov com o uso dos parâmetros K_{21} e K_{22} constatou-se uma maior região de valores negativos para o expoente quando se comparada somente a avaliação com K_{22} para OPIs de período 1 e 2. Observou-se também valores máximos menores para o expoente de Lyapunov nas OPIs de período 2, 3 e 5 avaliadas quando considerados 2 parâmetros de \mathbf{K} .

A ação do controle com 2 parâmetros de \mathbf{K} resultou em uma atuação máxima significativamente menor para estabilizar a OPI de período 1 apesar de ter apresentado um tempo maior até a estabilização. Com isso, sugere-se a investigação do gasto energético da ação de controle, uma vez que com o deslocamento menor é possível que tenha se gastado menos energia apesar do maior tempo. Não se notou diferença significativa no tempo e na atuação quando o atuador era limitado a $\Delta l = 20$ mm.

A OPI de período 2 apresentou tempo de estabilização e ação do controle ligeiramente maiores em sua ação de controle com 2 parâmetros de \mathbf{K} não apresentando aparente vantagem para essa OPI quando comparadas a ação com apenas K_{22} .

A OPI de período 3 não pode ser estabilizada com a ação de K_{22} somente ou com a ação K_{21} e K_{22} combinados, sendo estabilizada outra OPI de período 3 encontrada no sistema. A estabilização também não foi possível quando aplicada a ação de controle

foi iniciada na vizinhança da OPI a ser estabilizada. É possível que a OPI estabilizada tenha valores máximos de expoente de Lyapunov menores para os ganhos selecionados fazendo, assim, com que o sistema convirja para a configuração mais estável. Propõe-se uma investigação dos expoentes de Lyapunov da OPI de Lyapunov estabilizada em conjunto com a OPI de interesse para possíveis valores de ganhos onde a OPI de interesse seja mais estável.

Para a OPI de período 5 é notada supressão do comportamento caótico, porém sem a estabilização da OPI alvo. Em valores elevados de ganhos, como no caso de $R = 1$, e o sistema recai em uma órbita diferente da desejada. Ademais, para valores elevados de R , a ação do controle se torna demasiadamente se tornando inviável para estabilização com baixo custo energético. Quando foi utilizado um valor de $R = 0.2$, mesmo para um expoente de Lyapunov ligeiramente positivo, foi possível que o sistema se mantivesse próximo da OPI de interesse. Dessa forma, o expoente é ligeiramente positivo pela trajetória não estar exatamente na OPI.

Finalmente, propõe-se em trabalhos futuros a investigação de a investigação da matriz ganhos \mathbf{K} completa com seus 4 parâmetros.

Referências

- AUERBACH, D. et al. Exploring chaotic motion through periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 58, p. 2387–2389, Jun 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.2387>>. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 10.
- BARBOSA, W. et al. Chaos control applied to piezoelectric vibration-based energy harvesting systems. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer, v. 224, n. 14-15, p. 2787–2801, 2015. Citado na página 2.
- BLACKBURN, J. A.; BAKER, G. L. A comparison of commercial chaotic pendulums. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 66, n. 9, p. 821–830, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 17.
- CHEN, G.; YU, X. *Chaos control: theory and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 292. Citado na página 2.
- DESERIO, R. Chaotic pendulum: The complete attractor. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 71, n. 3, p. 250–257, 2003. Citado na página 2.
- DITTO, W. L.; SPANO, M. L.; LINDNER, J. F. Techniques for the control of chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 86, n. 1-2, p. 198–211, 1995. Citado na página 1.
- ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. In: *The theory of chaotic attractors*. [S.l.]: Springer, 1985. p. 273–312. Citado na página 10.
- FRANCA, L. F. P.; SAVI, M. A. Distinguishing periodic and chaotic time series obtained from an experimental nonlinear pendulum. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 26, n. 3, p. 255–273, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 17.
- GARFINKEL, A. et al. Controlling cardiac chaos. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 257, n. 5074, p. 1230–1235, 1992. Citado na página 2.
- GUNARATNE, G. H.; LINSAY, P. S.; VINSON, M. J. Chaos beyond onset: A comparison of theory and experiment. *Physical Review Letters*, APS, v. 63, n. 1, p. 1, 1989. Citado na página 10.
- HÜBINGER, B. et al. Controlling chaos experimentally in systems exhibiting large effective lyapunov exponents. *Physical Review E*, APS, v. 50, n. 2, p. 932, 1994. Citado na página 13.
- KING, G.; STEWART, I. *Symmetric chaos*. [S.l.]: Academic Press New York, 1991. Citado na página 1.

- KITTEL, A.; PARISI, J.; PYRAGAS, K. Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 198, n. 5-6, p. 433–436, 1995. Citado na página 15.
- KITTEL, A.; PYRAGAS, K.; RICHTER, R. Prerecorded history of a system as an experimental tool to control chaos. *Physical Review E*, APS, v. 50, n. 1, p. 262, 1994. Citado na página 15.
- LEINE, R. I. Bifurcations in discontinuous mechanical systems of the fillippov-type. 2000. Citado na página 19.
- LITAK, G. Chaotic vibrations in a regenerative cutting process. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 13, n. 7, p. 1531–1535, 2002. Citado na página 2.
- LITAK, G. et al. Chaotic vibration of a quarter-car model excited by the road surface profile. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 13, n. 7, p. 1373–1383, 2008. Citado na página 2.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963. Citado na página 1.
- MOON, F. C. Chaotic and fractal dynamics—an introduction for applied scientists and engineers john wiley & sons. *Inc., New York*, 1992. Citado na página 8.
- NAKAMURA, Y.; SEKIGUCHI, A. The chaotic mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, IEEE, v. 17, n. 6, p. 898–904, 2001. Citado na página 2.
- OTANI, M.; JONES, A. J. Guiding chaotic orbits. *Research Report, Imperial College of Science Technology and Medicine*, v. 130, 1997. Citado na página 7.
- OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Controlling chaos. *Physical review letters*, APS, v. 64, n. 11, p. 1196, 1990. Citado na página 13.
- PARKER, T. S.; CHUA, L. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 9.
- PAULA, A. D. Caos em sistemas mecânicos: Análise experimental em um pêndulo não-linear. *Projeto de fim de curso, Universidade Federal do Rio de Janeiro*, 2005. Citado 3 vezes nas páginas iv, 2 e 21.
- PAULA, A. S. D. Controle de caos em sistemas mecânicos. *Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Tese (Doutorado)-UFRJ/COPPE*, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 1, 15 e 17.
- PAULA, A. S. d.; SAVI, M. A. A multiparameter chaos control method applied to maps. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 38, n. 4, p. 536–542, 2008. Citado na página 13.
- PAULA, A. S. D.; SAVI, M. A. Comparative analysis of chaos control methods: A mechanical system case study. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, v. 46, n. 8, p. 1076–1089, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 2, 25, 27 e 38.
- PAULA, A. S. de; SAVI, M. A. Controlling chaos in a nonlinear pendulum using an extended time-delayed feedback control method. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 42, n. 5, p. 2981–2988, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 2, 25, 26 e 27.

- PAULA, A. S. de; SAVI, M. A.; PEREIRA-PINTO, F. H. I. Chaos and transient chaos in an experimental nonlinear pendulum. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 294, n. 3, p. 585–595, 2006. Citado 9 vezes nas páginas [2](#), [17](#), [18](#), [19](#), [22](#), [23](#), [24](#), [25](#) e [27](#).
- PEREIRA-PINTO, F. H. I.; FERREIRA, A. M.; SAVI, M. A. Chaos control in a nonlinear pendulum using a semi-continuous method. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 22, n. 3, p. 653–668, 2004. Citado na página [9](#).
- PINTO, E. G.; SAVI, M. A. Nonlinear prediction of time series obtained from an experimental pendulum. *Current Topics in Acoustical Research*, v. 3, p. 151–162, 2003. Citado 2 vezes nas páginas [2](#) e [17](#).
- PYRAGAS, K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics letters A*, Elsevier, v. 170, n. 6, p. 421–428, 1992. Citado na página [13](#).
- PYRAGAS, K. Control of chaos via extended delay feedback. *Physics letters A*, Elsevier, v. 206, n. 5-6, p. 323–330, 1995. Citado 4 vezes nas páginas [12](#), [15](#), [16](#) e [28](#).
- SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. [S.l.]: Editora E-papers, 2006. Citado 8 vezes nas páginas [4](#), [5](#), [6](#), [9](#), [10](#), [11](#), [12](#) e [13](#).
- SOCOLAR, J. E.; SUKOW, D. W.; GAUTHIER, D. J. Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems. *Physical Review E*, APS, v. 50, n. 4, p. 3245, 1994. Citado na página [13](#).
- SPROTT, J. A simple chaotic delay differential equation. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 366, n. 4-5, p. 397–402, 2007. Citado na página [15](#).
- VICENTE, R. et al. Analysis and characterization of the hyperchaos generated by a semiconductor laser subject to a delayed feedback loop. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, IEEE, v. 41, n. 4, p. 541–548, 2005. Citado na página [15](#).
- WOLF, A. et al. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. Citado 2 vezes nas páginas [12](#) e [16](#).
- XU, D. et al. Estimation of periodic-like motions of chaotic evolutions using detected unstable periodic patterns. *Pattern Recognition Letters*, Elsevier, v. 23, n. 1-3, p. 245–252, 2002. Citado na página [10](#).