



Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas - IE
Departamento de Estatística - EST

Avaliação de desempenho dos principais modelos para previsão de séries temporais

William Edward Rappel de Amorim

Orientador: Prof. **Dr. José Augusto Fiorucci**

Brasília - DF, 2021

William Edward Rappel de Amorim

Avaliação de desempenho dos principais modelos para previsão de séries temporais

Relatório apresentado ao Departamento de Estatística, Instituto de Exatas, Universidade de Brasília, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Orientador: Prof. **Dr. José Augusto Fiorucci**

Brasília - DF, 2021

Resumo

Realizar previsões precisas de séries temporais de forma automática é extremamente útil em diversos contextos, tanto para organizações públicas como privadas. Neste trabalho, o conjunto de 1.428 séries mensais da competição M3 (Makridakis e Hibon, 2000) foi utilizado para avaliar o desempenho das previsões pontuais e intervalares dos principais modelos para previsão de séries temporais, incluindo modelos de alisamento exponencial, ARIMA, Theta, DOTM e com sazonalidade múltipla. Cada modelo foi utilizado com 2 abordagens: aplicado diretamente na série original ou após realizar um procedimento de tratamento da sazonalidade a partir da decomposição clássica multiplicativa. O desempenho dos modelos foi avaliado por: contexto da série, horizonte de previsão e presença de sazonalidade. Além disso, os modelos também foram aplicados utilizando a abordagem de *bagging* descrita em Bergmeir, Hyndman e Benítez (2016). Em geral, os modelos DOTM e ETS foram os mais precisos para previsões, respectivamente, pontuais e intervalares. Ao aplicar a estratégia de *bagging*, houve um incremento considerável na acurácia das previsões pontuais de quase todos os modelos. Por outro lado, as previsões intervalares, de maneira geral, não apresentaram melhora com a adição da estratégia de *bagging*.

Palavras-chave: previsão, séries temporais, frequência mensal, decomposição clássica multiplicativa, decomposição STL, alisamento exponencial, ARIMA, Theta, DOTM, *bagging*, *bootstrap*.

Abstract

Performing accurate automatic time series forecasts is extremely useful in several situations for both public and private organizations. In this study, the collection of 1,428 monthly time series from the M3 competition (Makridakis and Hibon, 2000) was used to evaluate the performance of point and interval forecasts obtained with n of the most popular forecasting models, including exponential smoothing, ARIMA, Theta, DOTM and multiple seasonality models. Each model was implemented using 2 approaches: applied directly to the original series and after performing a seasonality treatment procedure using classical multiplicative decomposition. The performance of each model was evaluated by: series context, forecast horizon and presence of seasonality. In addition, the selected models were also applied using the bagging approach described in Bergmeir, Hyndman and Benítez (2016). In general, DOTM and ETS models were the most accurate for point and interval forecasts, respectively. When applied, the bagging strategy was able to increase the accuracy of point forecasts for nearly all models. On the other hand, the interval forecasts, as a general rule, did not improve while using bagging.

Keywords: forecasting, time series, monthly frequency, classical multiplicative decomposition, STL decomposition, exponential smoothing, ARIMA, Theta, DOTM, bagging, bootstrap.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Comparação das previsões pontuais dos métodos simples.	8
Figura 2 – Comparação das previsões pontuais dos métodos de alisamento exponencial.	12
Figura 3 – ETS: métodos. FONTE: Extraído de Hyndman et al. (2008).	15
Figura 4 – ETS: erros aditivos. FONTE: Extraído de Hyndman et al. (2008).	15
Figura 5 – ETS: erros multiplicativos. FONTE: Extraído de Hyndman et al. (2008).	16
Figura 6 – Comparação das previsões pontuais de Holt-Winters aditivo, multiplicativo e ETS.	16
Figura 7 – A coleção $\{B_1, \dots, B_N\}$ utilizando MBB. FONTE: Extraído de Lahiri (2013).	29
Figura 8 – N2539 - Depósitos à vista de grandes bancos comerciais, em estados e subdivisões.	33
Figura 9 – Melhor previsão pontual para a série N2539.	35
Figura 10 – Melhores previsões intervalares para a série N2539.	37
Figura 11 – N2560 - Crédito parcelado ao consumidor em aberto, para empresas de gasolina.	37
Figura 12 – Melhor previsão pontual para a série N2560.	39
Figura 13 – Melhores previsões intervalares para a série N2560.	41

Lista de tabelas

Tabela 1 – Distribuição das séries mensais da competição M3.	4
Tabela 2 – Métricas de avaliação pontual para a série N2539.	34
Tabela 3 – Métricas de avaliação intervalar para a série N2539.	36
Tabela 4 – Métricas de avaliação pontual para a série N2560.	38
Tabela 5 – Métricas de avaliação intervalar para a série N2560.	40
Tabela 6 – Métricas das previsões pontuais.	42
Tabela 7 – Métricas das previsões pontuais por contexto.	44
Tabela 8 – Melhores métodos para previsões pontuais por métrica e contexto.	44
Tabela 9 – Métricas das previsões pontuais em relação à presença de sazonalidade. . . .	45
Tabela 10 – Melhores métodos para previsões pontuais por métrica, contexto e sazonalidade.	46
Tabela 11 – Métricas das previsões pontuais por horizonte de previsão.	47
Tabela 12 – Melhores métodos para previsões pontuais por métrica, contexto e horizonte.	47
Tabela 13 – Métricas das previsões intervalares.	48
Tabela 14 – Métricas das previsões intervalares por contexto.	50
Tabela 15 – Melhores modelos para previsões intervalares por métrica e contexto.	50
Tabela 16 – Métricas das previsões intervalares em relação à presença de sazonalidade. .	51
Tabela 17 – Melhores modelos para previsões intervalares por métrica, contexto e sazonalidade.	52
Tabela 18 – Métricas das previsões intervalares por horizonte de previsão.	52
Tabela 19 – Melhores modelos para previsões intervalares por métrica, contexto e horizonte.	53
Tabela 20 – Métricas das previsões pontuais utilizando <i>bagging</i>	54
Tabela 21 – Percentual de melhoria das previsões pontuais utilizando <i>bagging</i>	55
Tabela 22 – Métricas das previsões intervalares utilizando <i>bagging</i>	56
Tabela 23 – Percentual de melhoria das previsões intervalares utilizando <i>bagging</i>	57

Sumário

1	Introdução e Justificativa	1
2	Metodologia	3
2.1	Conjunto de dados	3
2.2	Notação	4
2.3	Decomposição	5
2.3.1	Decomposição clássica multiplicativa	5
2.3.2	Decomposição STL	5
2.4	Tratamento da sazonalidade	6
2.5	Modelos estatísticos para previsão	6
2.5.1	Modelos simples	7
2.5.1.1	Média	7
2.5.1.2	<i>Naive</i>	7
2.5.1.3	<i>Naive</i> sazonal	7
2.5.1.4	<i>Drift</i>	8
2.5.2	Modelos de alisamento exponencial	8
2.5.2.1	SES	8
2.5.2.2	Holt de tendência linear	9
2.5.2.3	SES com <i>drift</i>	10
2.5.2.4	Holt de tendência linear amortizada	11
2.5.2.5	Combinado	12
2.5.2.6	Holt-Winters aditivo	12
2.5.2.7	Holt-Winters multiplicativo	13
2.5.2.8	ETS	14
2.5.2.9	Estimação de modelos ETS	17
2.5.2.10	Seleção de modelos	17
2.5.3	Modelos ARIMA	18
2.5.3.1	ARMA	18
2.5.3.2	ARIMA	18
2.5.3.3	SARIMA	19
2.5.3.4	Estimação de modelos ARIMA	20
2.5.4	Modelos Theta	21
2.5.4.1	Theta original	21
2.5.4.2	DOTM	22
2.5.5	Modelos avançados	23
2.5.5.1	STL + ETS	23
2.5.5.2	BATS	23
2.5.5.3	TBATS	24

2.6	Métricas de avaliação	25
2.6.1	Previsão pontual	25
2.6.1.1	MAPE	25
2.6.1.2	sMAPE	26
2.6.1.3	MASE	26
2.6.2	Previsão intervalar	27
2.6.2.1	MSIS	27
2.6.2.2	SPL	27
2.6.2.3	ACD	27
2.7	<i>Bootstrap</i>	28
2.7.1	Paramétrico	28
2.7.2	Não paramétrico	28
2.7.3	MBB	28
2.7.4	<i>Bagging</i>	29
2.7.4.1	Previsões pontuais	30
2.7.4.2	Previsões intervalares	30
2.8	Implementação computacional	31
3	Resultados	33
3.1	Análise individual	33
3.1.1	N2539	33
3.1.1.1	Previsões pontuais	34
3.1.1.2	Previsões intervalares	35
3.1.2	N2560	37
3.1.2.1	Previsões pontuais	38
3.1.2.2	Previsões intervalares	40
3.2	Geral	41
3.2.1	Previsões pontuais	42
3.2.1.1	Contexto	43
3.2.1.2	Sazonalidade	45
3.2.1.3	Horizonte de previsão	46
3.2.2	Previsões intervalares	48
3.2.2.1	Contexto	49
3.2.2.2	Sazonalidade	51
3.2.2.3	Horizonte de previsão	52
3.3	<i>Bagging</i>	53
3.3.1	Previsões pontuais	54
3.3.2	Previsões intervalares	56
4	Discussão e Conclusão	59
	Referências	62

1 Introdução e Justificativa

Séries temporais estão presentes no cotidiano de grande parte da população, mesmo que a maior parte delas não perceba. Desde a cotação diária dos preços das ações até a taxa mensal de desemprego do Brasil, diversos contextos possuem, em sua essência, valores provenientes de séries temporais. Em quase todos esses contextos, realizar previsões sobre os valores futuros dessas séries é algo que interessa à maioria das organizações. Realizar essas previsões de forma precisa e sistemática pode trazer incontáveis benefícios, tanto para organizações públicas como privadas (Makridakis e Hibon, 2000). Algumas empresas podem se interessar pela previsão das vendas para o próximo ano, com o objetivo de realizar um bom planejamento financeiro. Organizações públicas podem considerar útil obter previsões precisas da taxa de desemprego para os próximos trimestres, entre outros. As possibilidades são muitas e os benefícios que boas previsões podem trazer, em diferentes contextos, são em ainda maior quantidade.

Com esse intuito, ao longo dos anos surgiram diversos métodos que possibilitam realizar previsões de valores futuros de séries temporais (Hyndman et al., 2008; Morettin e Tolo, 2006). Alguns desses métodos são bastante simples, já outros são provenientes de complexos modelos estatísticos. O estudo desses modelos em geral focou, de forma exagerada, em melhorar a qualidade do ajuste em relação aos dados históricos, o que não implica necessariamente em um aumento na acurácia das previsões (Makridakis e Hibon, 2000; Makridakis, Spiliotis e Assimakopoulos, 2020). Por isso, é necessário estudar especificamente a capacidade preditiva de cada método ou modelo.

Além de entender quais modelos possuem uma maior capacidade preditiva geral, é de extrema importância separar as séries temporais em relação ao contexto do qual são provenientes (financeiro, demográfico, entre outros) e em relação à frequência com que são observadas (diária, mensal, entre outras), pois um modelo pode ser preciso para determinado contexto ou frequência, porém ser extremamente impreciso para outro. Com isso, uma organização pode não estar interessada em saber qual o melhor modelo de previsão em geral, para todos os contextos, mas sim em saber qual modelo ela deve utilizar para a sua série de interesse, dado o contexto em que se encontra e a frequência com que é observada. Além disso, previsões intervalares costumam ser mais úteis do que previsões pontuais, pois atrelam uma medida de incerteza às previsões (Makridakis, Spiliotis e Assimakopoulos, 2020). Portanto, é importante entender quais modelos apresentam bom desempenho para cada tipo de previsão: pontual e intervalar.

Neste trabalho, será realizado um estudo comparativo do desempenho dos principais modelos para previsão de séries temporais, utilizando a avaliação de diferentes métricas de acurácia, a partir do desempenho empírico observado de cada modelo na previsão de séries temporais com valores reais não utilizados na estimação dos modelos. O estudo será voltado para as séries mensais (1 observação a cada mês), por serem as mais comuns. Dessa forma, não será possível obter conclusões em relação às outras frequências.

2 Metodologia

2.1 Conjunto de dados

O conjunto de dados utilizado é proveniente da competição M3 (Makridakis e Hibon, 2000), que contém 3.003 séries temporais. Para cada série temporal, o conjunto de dados apresenta as informações descritas abaixo.

- Tipo (*type*): contexto em que a série está inserida (Demográfico, Financeiro, Industrial, Macro, Micro ou Outro);
- Período (*period*): frequência com que a série é observada (Mensal, Trimestral, Anual ou Outra);
- Descrição (*description*): uma breve apresentação do que a série representa;
- Código (*sn*): código de identificação da série no banco de dados;
- Valores de treino (x): valores utilizados para ajustar os modelos de previsão;
- Valores de teste (xx): valores utilizados para avaliar a capacidade preditiva dos modelos (não utilizados durante o processo de estimação);
- Horizonte de previsão (h): horizonte máximo utilizado para as previsões, equivalente ao número de valores de teste da série;
- Amostra (n): tamanho da amostra de treino.

Dentre todas as séries contidas no conjunto de dados, apenas as que possuem frequência mensal de observação serão utilizadas, o que equivale a 1.428 séries. A Tabela 1 apresenta a distribuição das séries mensais em relação ao contexto em que estão inseridas. Para todas elas, o horizonte de previsão máximo é de 18 meses, valor que foi determinado ao considerar o tipo de decisão para o qual a frequência mensal é mais provável de auxiliar em uma organização (Makridakis, Spiliotis e Assimakopoulos, 2020). As 2 séries temporais mensais escolhidas para estudar, descrever e prever o comportamento de forma individual são:

- N2539 - M1138 - *Large commercial banks, demand deposits, States & subdivisions*;
- N2560 - M1159 - *Consumer installment credit outstanding, gasoline companies*.

Tabela 1 – Distribuição das séries mensais da competição M3.

Contexto	Número de séries
Demográfico	111
Financeiro	145
Industrial	334
Macro	312
Micro	474
Outro	52
Total	1.428

2.2 Notação

Nas seções a seguir, serão descritas fórmulas com notação específica para séries temporais. As principais notações são:

- h : horizonte de previsão;
- n : tamanho da amostra;
- y_t : valor observado no tempo t ;
- $\hat{y}_{n+h|n}$: valor previsto no tempo $n + h$, conhecidos os valores da série até o tempo n ;
- a : nível de significância (neste trabalho, $a = 0,05$);
- $z_{a/2}$: quantil da distribuição Normal padrão que acumula probabilidade de $(1 - a/2)\%$;
- y_t^* : valor observado para a série sazonalmente ajustada no tempo t ;
- S_j^* : índice sazonal no período j do ciclo sazonal;
- m : período sazonal (neste trabalho, como todas as séries são mensais, $m = 12$);
- ℓ_t : componente de nível no tempo t ;
- b_t : componente de crescimento no tempo t ;
- s_t : componente de sazonalidade no tempo t ;
- ε_t : componente de erro no tempo t ;
- $y_{t|t-1}$: variável aleatória y_t condicionada em toda a informação prévia, no caso, $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1$;
- $\mu_{t+h|t} = E_t[y_{t+h}] = E[y_{t+h}|y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1]$: esperança de y_{t+h} condicionada aos valores conhecidos da série até o tempo t , ou seja, é a previsão h -passos à frente de t ;
- $\sigma_{t+h|t}^2 = Var_t[y_{t+h}] = Var[y_{t+h}|y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1]$: variância de y_{t+h} condicionada aos valores conhecidos da série até o tempo t , ou seja, é o erro quadrático da previsão h -passos à frente de t ;

- $f(y_t|y_{t-1}) = f_{t-1}(y_t) = f(y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1)$: função densidade de probabilidade de $y_t|y_{t-1}$;
- mod: função matemática que retorna o resto da divisão. Por exemplo, $5 \bmod 2 = 1$.

2.3 Decomposição

A decomposição de uma série temporal é um método que busca dividir a série em componentes, de forma a facilitar a modelagem. Para isso, a série é decomposta em tendência, sazonalidade e ruído.

2.3.1 Decomposição clássica multiplicativa

A decomposição clássica multiplicativa realiza a decomposição de forma que a interação entre as componentes é multiplicativa, ou seja,

$$y_t = T_t \times S_t \times E_t, \quad (2.1)$$

em que T_t é a componente de tendência, S_t é a componente de sazonalidade e E_t é o ruído.

A componente de tendência é extraída por meio de uma suavização por média móvel simétrica. Em seguida, a série com tendência ajustada é obtida pela divisão entre a série original e a componente de tendência (y_t/T_t).

A partir da série com tendência ajustada, a componente de sazonalidade é extraída pela média por período do ciclo sazonal. Para uma série mensal, é calculada a média por mês da série com tendência ajustada. Com isso, são obtidos os índices sazonais (S_j^* , com j identificando o período do ciclo sazonal, ou seja, o mês respectivo).

Por último, para obter a componente de ruído, basta dividir a série com tendência ajustada pela componente de sazonalidade ($y_t/(T_t \times S_t)$).

2.3.2 Decomposição STL

Este método está descrito em detalhes em Cleveland et al. (1990). A abreviação STL é derivada de *Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess*, sendo que Loess é um método que permite a estimação de relações não-lineares, proposto por Cleveland (1979). A decomposição STL é um método versátil e robusto para decomposição de séries temporais, de forma que a interação entre as componentes é aditiva, ou seja,

$$y_t = T_t + S_t + E_t,$$

em que T_t é a componente de tendência, S_t é a componente de sazonalidade e E_t é o ruído. Para séries estritamente positivas, caso seja de interesse que a relação entre as componentes seja dada de forma multiplicativa (como na Equação 2.1), basta aplicar a decomposição STL ao logaritmo da série original, ou seja, substituir y_t por $\log y_t$ e depois realizar a transformação inversa das componentes obtidas.

Neste método, a tendência e a sazonalidade são obtidas via Loess, o que as tornam dinâmicas, ou seja, podem variar ao longo do tempo, dando mais flexibilidade do que seria possível na decomposição clássica. Além disso, ela possibilita utilizar a estimação robusta, o que a torna insensível a valores extremos.

Séries de alta frequência costumam possuir múltiplos padrões sazonais (por exemplo, uma série intradiária pode apresentar um ciclo sazonal diário e outro semanal). Neste contexto, a decomposição clássica não é capaz de extrair as duas componentes sazonais. Ao utilizar a função `mstl` do pacote `forecast` do *software* R, a decomposição STL pode ser aplicada múltiplas vezes, o que possibilita a identificação e extração de múltiplas sazonalidades.

2.4 Tratamento da sazonalidade

Os modelos utilizados para previsão serão aplicados a partir de diferentes estratégias. Na primeira, eles serão ajustados diretamente na série original, sem existir qualquer tratamento prévio dos dados. No segundo cenário, será realizado um procedimento para extrair a sazonalidade, em seguida os modelos serão aplicados na série sazonalmente ajustada e, por último, será realizado um processo de resazonalização das previsões, para que elas estejam adequadas ao padrão sazonal da série, caso exista. O procedimento realizado no segundo caso está descrito em detalhes a seguir:

1. A série é testada para saber se existe um comportamento sazonal estatisticamente significativo. Se o teste concluir que não há sazonalidade, as previsões são calculadas utilizando a série original, como já foi descrito. Caso contrário, segue-se para o passo 2.
2. É realizada uma decomposição clássica multiplicativa (vide Seção 2.3.1) com os valores observados da série.
3. Obtém-se a série sazonalmente ajustada, por meio da divisão de cada valor observado por seu respectivo índice sazonal ($y_t^* = y_t/S_j^*$).
4. O modelo de previsão é aplicado na série sazonalmente ajustada (y_t^*), o que resulta em previsões que não consideram o padrão sazonal.
5. Em seguida, as previsões são multiplicadas por seus índices sazonais (S_j^*). Com isso, são obtidas previsões que consideram a sazonalidade. O procedimento é o mesmo para previsões pontuais e intervalares.

2.5 Modelos estatísticos para previsão

Conforme descrito em Hyndman et al. (2008), um método de previsão é um algoritmo utilizado para obter uma previsão pontual para algum tempo futuro. Já um modelo estatístico estrutura um processo estocástico gerador de dados, utilizado para obter uma distribuição de

probabilidade para algum tempo futuro. A partir desse modelo, pode-se utilizar a distribuição de probabilidade estimada para obter previsões pontuais e intervalares. Esta seção apresenta descrições detalhadas de cada método e modelo estatístico utilizado neste trabalho.

2.5.1 Modelos simples

Este conjunto de modelos para previsão é formado por métodos bastante simples e amplamente difundidos como *benchmarks* para comparação das previsões obtidas por modelos mais complexos. Todos os modelos desta seção estão descritos em detalhes em Hyndman e Athanasopoulos (2018).

2.5.1.1 Média

Neste método, a previsão pontual para todos os valores futuros é a média da amostra de treino. Ou seja, para $h = 1, 2, 3, \dots$, tem-se

$$\hat{y}_{n+h|n} = \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$\bar{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2(1 + 1/n)}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

2.5.1.2 Naive

Para este método, o último valor observado na amostra de treino será utilizado como previsão pontual para qualquer tempo futuro. Ou seja, para $h = 1, 2, 3, \dots$, tem-se

$$\hat{y}_{n+h|n} = y_n.$$

Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$y_n \pm z_{a/2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \times h}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

2.5.1.3 Naive sazonal

Este método é baseado na repetição do último ciclo sazonal observado. Isto é, as previsões para todos os próximos meses de janeiro são iguais ao último valor observado em janeiro, as previsões para todos os próximos meses de fevereiro são iguais ao último valor observado em fevereiro, e assim por diante. Com isso, as previsões pontuais desse método são

$$\hat{y}_{n+h|n} = y_{n+h-m(k+1)}, \quad h = 1, 2, 3, \dots,$$

em que k é a parte inteira de $(h - 1)/m$. Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$y_{n+h-m(k+1)} \pm z_{a/2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2(k + 1)}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

2.5.1.4 Drift

Este método é uma extensão do *naive* e adiciona uma tendência às previsões. Essa tendência é uma taxa fixa chamada de *drift* e equivale à variação média observada na amostra de treino. Ou seja, para $h = 1, 2, 3, \dots$, tem-se

$$\hat{y}_{n+h|n} = y_n + \frac{h}{n-1} \sum_{t=2}^n (y_t - y_{t-1}) = y_n + h \left(\frac{y_n - y_1}{n-1} \right).$$

Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$y_n + h \left(\frac{y_n - y_1}{n-1} \right) \pm z_{a/2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 (1 + h/n)h}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

A Figura 1 abaixo ilustra o comportamento das previsões pontuais para a série temporal *ausbeer*, que possui frequência trimestral e está disponível no pacote *fpp2* do *software* R. Os métodos simples foram utilizados para obter previsões até 12 passos à frente.

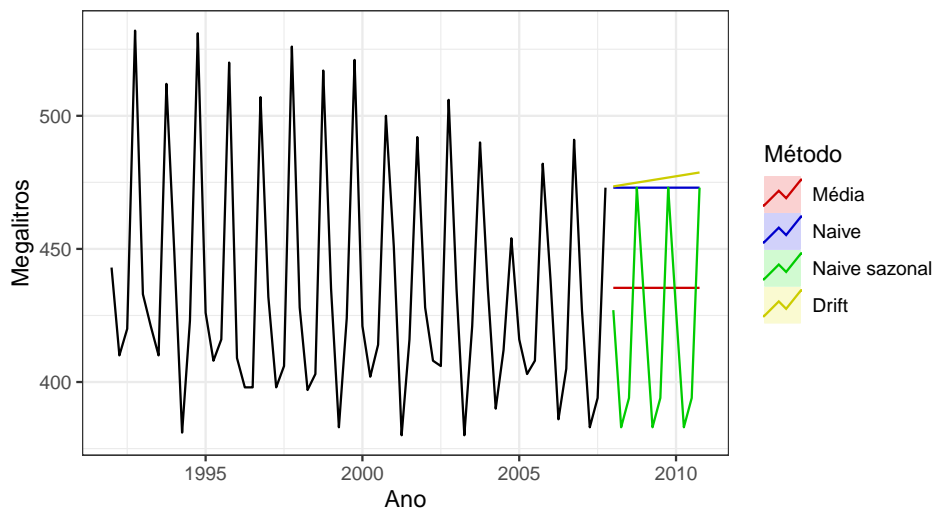


Figura 1 – Comparação das previsões pontuais dos métodos simples.

2.5.2 Modelos de alisamento exponencial

Esta é uma classe de modelos está descrita com detalhes em Hyndman et al. (2008).

2.5.2.1 SES

O alisamento exponencial simples (SES) é o método mais simples desta classe, em que a previsão de y_{t+1} é igual a uma média ponderada de todos os valores observados até o tempo t . Para $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^3 y_{t-3} + \dots$$

Quanto maior o valor de α , mais peso é atribuído às observações mais recentes. Além disso, a previsão pode ser reescrita como

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t) = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_t.$$

As previsões para tempos futuros são constantes, ou seja,

$$\hat{y}_{t+h|t} = \hat{y}_{t+1}, \quad h = 2, 3, \dots$$

Isso resulta em previsões sem tendência e sem sazonalidade. O método SES é dado por

$$\begin{aligned} \text{Previsão : } \quad & \hat{y}_t = \ell_{t-1}, \\ \text{Nível : } \quad & \ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}. \end{aligned}$$

Assumindo erros aditivos, obtém-se o modelo estocástico do método SES

$$\begin{aligned} y_t &= \ell_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}. \end{aligned}$$

Ao reescrever como um modelo de espaço de estado linear, tem-se

$$\begin{aligned} y_t &= \ell_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \ell_{t-1} + \alpha \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Ele resulta nas seguintes previsões pontuais

$$\hat{y}_{n+h|n} = E_n[y_{n+h}] = \ell_n, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$\ell_n \pm z_{a/2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 [1 + \alpha^2(h - 1)]}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Para inicializar o modelo, é necessário conhecer os valores de α e ℓ_0 , que são estimados por máxima verossimilhança (vide Seção 2.5.2.9).

2.5.2.2 Holt de tendência linear

Este método é similar ao SES, porém com a adição de uma componente de crescimento, que assim como a de nível, também é ajustada por alisamento exponencial. Portanto, para $0 < \alpha, \beta^* < 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Previsão : } \quad & \hat{y}_t = \ell_{t-1} + b_{t-1}, \\ \text{Nível : } \quad & \ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}), \\ \text{Crescimento : } \quad & b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}. \end{aligned}$$

Quanto maior o valor de β^* , mais dinâmica a componente de crescimento, ou seja, ela pode mudar de valor mais rapidamente. Assumindo erros aditivos, obtém-se o modelo estocástico do método de Holt

$$\begin{aligned}y_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}.\end{aligned}$$

Ao reescrever como um modelo de espaço de estado linear, tem-se

$$\begin{aligned}y_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t, \\ b_t &= b_{t-1} + \beta \varepsilon_t,\end{aligned}$$

em que $\beta = \alpha \beta^*$.

Ele resulta nas seguintes previsões pontuais

$$\hat{y}_{n+h|n} = E_n[y_{n+h}] = \ell_n + h b_n, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$\ell_n + h b_n \pm z_{a/2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \left[1 + \sum_{i=1}^{h-1} (\alpha + i\beta)^2 \right]}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Para inicializar o modelo, é necessário conhecer os valores de α , β^* , ℓ_0 e b_0 , que são estimados por máxima verossimilhança (vide Seção 2.5.2.9).

2.5.2.3 SES com *drift*

É um caso especial do método de Holt, para $\beta^* = 0$. A componente de crescimento é constante, já que $b_t = b_0$ para todo $t = 1, 2, 3, \dots$. A taxa de crescimento fixa é chamada de *drift* e denotada por b_0 . Logo, para $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$\begin{aligned}\text{Previsão : } \quad \hat{y}_t &= \ell_{t-1} + b_0, \\ \text{Nível : } \quad \ell_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_0).\end{aligned}$$

Assumindo erros aditivos, obtém-se o modelo estocástico do método SES com *drift*

$$\begin{aligned}y_t &= \ell_{t-1} + b_0 + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_0).\end{aligned}$$

Ao reescrever como um modelo de espaço de estado linear, tem-se

$$\begin{aligned}y_t &= \ell_{t-1} + b_0 + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \ell_{t-1} + b_0 + \alpha \varepsilon_t.\end{aligned}$$

Ele resulta nas seguintes previsões pontuais

$$\hat{y}_{n+h|n} = E_n[y_{n+h}] = \ell_n + h b_0, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$\ell_n + h b_0 \pm z_{a/2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 [1 + \alpha^2 (h - 1)]}, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Para inicializar o modelo, é necessário conhecer os valores de α , ℓ_0 e b_0 , que são estimados por máxima verossimilhança (vide Seção 2.5.2.9).

2.5.2.4 Holt de tendência linear amortizada

Este método é uma modificação do método Holt original. À medida que o horizonte de previsão aumenta, a tendência é amortizada. Logo, para $0 < \alpha, \beta^*, \phi < 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Previsão :} \quad \hat{y}_t &= \ell_{t-1} + \phi b_{t-1}, \\ \text{Nível :} \quad \ell_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1}), \\ \text{Crescimento :} \quad b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*) \phi b_{t-1}. \end{aligned}$$

Para $\phi = 0$, as previsões são iguais às do SES. Para $\phi = 1$, as previsões são as mesmas do método Holt original. Para $0 < \phi < 1$, as previsões têm tendência amortizada, ou seja, estão entre as previsões do SES e as do Holt. Assumindo erros aditivos, obtém-se o modelo estocástico do método de Holt com tendência linear amortizada

$$\begin{aligned} y_t &= \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1}), \\ b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*) \phi b_{t-1}. \end{aligned}$$

Ao reescrever como um modelo de espaço de estado linear, tem-se

$$\begin{aligned} y_t &= \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t, \\ b_t &= \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t, \end{aligned}$$

em que $\beta = \alpha \beta^*$.

Ele resulta nas seguintes previsões pontuais

$$\hat{y}_{n+h|n} = E_n[y_{n+h}] = \ell_n + (\phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots + \phi^h) b_n, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$\ell_n + (\phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots + \phi^h) b_n \pm z_{a/2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \sigma_{n+h|n}^2}, \quad h = 1, 2, 3, \dots,$$

com

$$\sigma_{n+h|n}^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left\{ 1 + \alpha^2(h-1) + \frac{\beta\phi h}{(1-\phi)^2} [2\phi(1-\phi) + \beta\phi] - \frac{\beta\phi(1-\phi^h)}{(1-\phi)^2(1-\phi^2)} [2\alpha(1-\phi^2) + \beta\phi(1+2\phi-\phi^h)] \right\}.$$

Para inicializar o modelo, é necessário conhecer os valores de α , β^* , ϕ , ℓ_0 e b_0 , que são estimados por máxima verossimilhança (vide Seção 2.5.2.9).

2.5.2.5 Combinado

Neste método, tanto as previsões pontuais como as intervalares são dadas por médias aritméticas das previsões de SES, Holt e Holt com tendência amortizada.

A Figura 2 abaixo ilustra o comportamento das previsões pontuais, até 15 passos à frente, dos 5 métodos de alisamento exponencial apresentados até aqui (SES, Holt, SES com *drift*, Holt com tendência amortizada e combinado), para a série temporal `ausair`, que possui frequência anual e está disponível no pacote `fpp2` do *software* R.

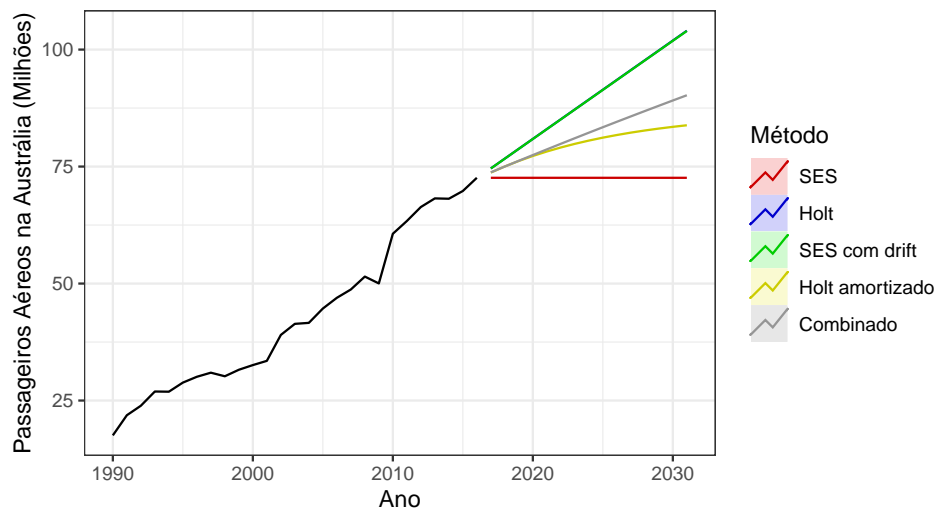


Figura 2 – Comparação das previsões pontuais dos métodos de alisamento exponencial.

2.5.2.6 Holt-Winters aditivo

É uma extensão do método Holt original para permitir previsões de séries com sazonalidade. Com esse intuito, é adicionada uma componente de sazonalidade de forma aditiva. Assim como as componentes de nível e crescimento, ela também é obtida por alisamento exponencial. Portanto, para o método de Holt-Winters aditivo, com $0 < \alpha, \beta^*, \gamma < 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Previsão : } \quad \hat{y}_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}, \\ \text{Nível : } \quad \ell_t &= \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}), \\ \text{Crescimento : } \quad b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}, \\ \text{Sazonalidade : } \quad s_t &= \gamma(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}. \end{aligned}$$

Assumindo erros aditivos, obtém-se o modelo estocástico do método de Holt-Winters aditivo

$$\begin{aligned}y_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}, \\ s_t &= \gamma(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}.\end{aligned}$$

Ao reescrever como um modelo de espaço de estado linear, tem-se

$$\begin{aligned}y_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t, \\ b_t &= b_{t-1} + \beta \varepsilon_t, \\ s_t &= s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t,\end{aligned}$$

em que $\beta = \alpha \beta^*$.

Ele resulta nas seguintes previsões pontuais

$$\hat{y}_{n+h|n} = E_n[y_{n+h}] = \ell_n + h b_n + s_{n+h_m^+ - m}, \quad h = 1, 2, 3, \dots,$$

com $h_m^+ = [(h - 1) \bmod m] + 1$.

Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$\ell_n + h b_n + s_{n+h_m^+ - m} \pm z_{a/2} \sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left[1 + \sum_{i=1}^{h-1} (\alpha + i\beta)^2 + (k-1)\gamma^2 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \gamma(\alpha + j\beta) \right]}, \quad h = 1, 2, 3, \dots,$$

em que k é o menor inteiro positivo tal que $n - km + h \leq n$.

Para inicializar o modelo, é necessário conhecer os valores de α , β^* , γ , ℓ_0 , b_0 , s_0 , s_{-1}, \dots , s_{-m+1} , que são estimados por máxima verossimilhança (vide Seção 2.5.2.9).

2.5.2.7 Holt-Winters multiplicativo

Este método é similar ao descrito anteriormente, porém a componente de sazonalidade atua de forma multiplicativa, ao invés de aditiva. Portanto, para o método de Holt-Winters multiplicativo, com $0 < \alpha, \beta^*, \gamma < 1$, tem-se

$$\begin{aligned}\text{Previsão :} \quad \hat{y}_t &= (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}, \\ \text{Nível :} \quad \ell_t &= \alpha y_t / s_{t-m} + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}), \\ \text{Crescimento :} \quad b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}, \\ \text{Sazonalidade :} \quad s_t &= \gamma y_t / (\ell_{t-1} + b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}.\end{aligned}$$

Este método só pode ser utilizado para séries estritamente positivas. Assumindo erros aditivos, obtém-se o modelo estocástico do método de Holt-Winters multiplicativo

$$\begin{aligned}y_t &= (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \alpha y_t/s_{t-m} + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}, \\ s_t &= \gamma y_t/(\ell_{t-1} + b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}.\end{aligned}$$

Ao reescrever como um modelo de espaço de estado (neste caso, não linear), tem-se

$$\begin{aligned}y_t &= (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t, \\ \ell_t &= \ell_{t-1} + b_{t-1} + \frac{\alpha}{s_{t-m}} \varepsilon_t, \\ b_t &= b_{t-1} + \frac{\beta}{s_{t-m}} \varepsilon_t, \\ s_t &= s_{t-m} + \frac{\gamma}{\ell_{t-1} + b_{t-1}} \varepsilon_t,\end{aligned}$$

em que $\beta = \alpha \beta^*$.

Ele resulta nas seguintes previsões pontuais

$$\hat{y}_{n+h|n} = E_n[y_{n+h}] = (\ell_n + h b_n)s_{n+h_m^+ - m}, \quad h = 1, 2, 3, \dots,$$

com $h_m^+ = [(h - 1) \bmod m] + 1$.

Já em relação às previsões intervalares, não é possível utilizar uma fórmula analítica explícita, pois não existe fórmula fechada para o erro quadrático da previsão ($\sigma_{n+h|n}^2$). Por isso, esses intervalos são obtidos utilizando *bootstrap* paramétrico, técnica descrita na Seção 2.7.1.

Para inicializar o modelo, é necessário conhecer os valores de α , β^* , γ , ℓ_0 , b_0 , s_0 , s_{-1}, \dots , s_{-m+1} , que são estimados por máxima verossimilhança (vide Seção 2.5.2.9).

2.5.2.8 ETS

ETS é uma classe geral que descreve os modelos de alisamento exponencial em função dos tipos de suas componentes de erro, tendência e sazonalidade. Para cada componente, existem as possibilidades a seguir:

- Erro: aditivo (A), multiplicativo (M);
- Tendência: nenhuma (N), aditiva (A), aditiva amortizada (Ad), multiplicativa (M), multiplicativa amortizada (Md);
- Sazonalidade: nenhuma (N), aditiva (A), multiplicativa (M).

A Figura 3 apresenta uma tabela com os métodos resultantes das combinações de tendência (*Trend*) e sazonalidade (*Seasonal*), tabela que está disponível em Hyndman et al. (2008).

Trend	Seasonal		
	N	A	M
N	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t$	$\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + s_{t-m+h_m^+}$	$\ell_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/\ell_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t s_{t-m+h_m^+}$
A	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + hb_t$	$\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + hb_t + s_{t-m+h_m^+}$	$\ell_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/(\ell_{t-1} + b_{t-1})) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = (\ell_t + hb_t)s_{t-m+h_m^+}$
A _d	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + \phi_h b_t$	$\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1} - \phi b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t + \phi_h b_t + s_{t-m+h_m^+}$	$\ell_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = (\ell_t + \phi_h b_t)s_{t-m+h_m^+}$
M	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}b_{t-1}$ $b_t = \beta^*(\ell_t/\ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^h$	$\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1}b_{t-1}$ $b_t = \beta^*(\ell_t/\ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1}b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^h + s_{t-m+h_m^+}$	$\ell_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1}b_{t-1}$ $b_t = \beta^*(\ell_t/\ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t/(\ell_{t-1}b_{t-1})) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^h s_{t-m+h_m^+}$
M _d	$\ell_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\ell_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta^*(\ell_t/\ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}^\phi$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^{\phi_h}$	$\ell_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta^*(\ell_t/\ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}^\phi$ $s_t = \gamma(y_t - \ell_{t-1}b_{t-1}^\phi) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^{\phi_h} + s_{t-m+h_m^+}$	$\ell_t = \alpha(y_t/s_{t-m}) + (1 - \alpha)\ell_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta^*(\ell_t/\ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}^\phi$ $s_t = \gamma(y_t/(\ell_{t-1}b_{t-1}^\phi)) + (1 - \gamma)s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = \ell_t b_t^{\phi_h} s_{t-m+h_m^+}$

In each case, ℓ_t denotes the series level at time t , b_t denotes the slope at time t , s_t denotes the seasonal component of the series at time t , and m denotes the number of seasons in a year; α, β^*, γ and ϕ are constants, $\phi_h = \phi + \phi^2 + \dots + \phi^h$ and $h_m^+ = [(h - 1) \bmod m] + 1$.

Figura 3 – ETS: métodos.

FONTE: Extraído de Hyndman et al. (2008).

Para cada combinação de tendência e sazonalidade, as previsões pontuais são iguais para erros aditivos ou multiplicativos, porém as previsões intervalares são diferentes. As Figuras 4 e 5 apresentam tabelas (Hyndman et al., 2008) com os modelos estocásticos resultantes para erros, respectivamente, aditivos e multiplicativos.

Trend	Seasonal		
	N	A	M
N	$\mu_t = \ell_{t-1}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1} + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1} s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / \ell_{t-1}$
A	$\mu_t = \ell_{t-1} + b_{t-1}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$\mu_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (\ell_{t-1} + b_{t-1})$
A _d	$\mu_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$\mu_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$
M	$\mu_t = \ell_{t-1} b_{t-1}$ $\ell_t = \ell_{t-1} b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / \ell_{t-1}$	$\mu_t = \ell_{t-1} b_{t-1} + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / \ell_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1} b_{t-1} s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / (s_{t-m} \ell_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (\ell_{t-1} b_{t-1})$
M _d	$\mu_t = \ell_{t-1} b_{t-1}^\phi$ $\ell_t = \ell_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta \varepsilon_t / \ell_{t-1}$	$\mu_t = \ell_{t-1} b_{t-1}^\phi + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta \varepsilon_t / \ell_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1} b_{t-1}^\phi s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta \varepsilon_t / (s_{t-m} \ell_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (\ell_{t-1} b_{t-1}^\phi)$

Figura 4 – ETS: erros aditivos.

FONTE: Extraído de Hyndman et al. (2008).

Trend	Seasonal		
	N	A	M
N	$\mu_t = \ell_{t-1}$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$	$\mu_t = \ell_{t-1} + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1}s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
A	$\mu_t = \ell_{t-1} + b_{t-1}$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$\mu_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
Ad	$\mu_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1}$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$\mu_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
M	$\mu_t = \ell_{t-1}b_{t-1}$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}(1 + \beta\varepsilon_t)$	$\mu_t = \ell_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t / \ell_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1}b_{t-1}s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}(1 + \beta\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
M _d	$\mu_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^\phi(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^\phi(1 + \beta\varepsilon_t)$	$\mu_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^\phi + \alpha(\ell_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta(\ell_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})\varepsilon_t / \ell_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})\varepsilon_t$	$\mu_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^\phi s_{t-m}$ $\ell_t = \ell_{t-1}b_{t-1}^\phi(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^\phi(1 + \beta\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$

Figura 5 – ETS: erros multiplicativos.

FONTE: Extraído de Hyndman et al. (2008).

A descrição do modelo é dada por ETS(\cdot , \cdot , \cdot), em que a primeira componente equivale ao tipo de erro, a segunda ao tipo de tendência e a terceira ao tipo de sazonalidade. O modelo SES equivale ao ETS(A, N, N), Holt ao ETS(A, A, N), Holt com tendência amortizada ao ETS(A, Ad, N), Holt-Winters aditivo ao ETS(A, A, A) e Holt-Winters multiplicativo ao ETS(A, A, M).

A Figura 6 demonstra o comportamento das previsões pontuais, até 12 passos à frente, dos métodos de Holt-Winters aditivo, multiplicativo e do modelo ETS (aplicado com o método da Seção 2.5.2.10), para a série temporal *austourists*, que possui frequência trimestral e está disponível no pacote *fpp2* do *software* R.

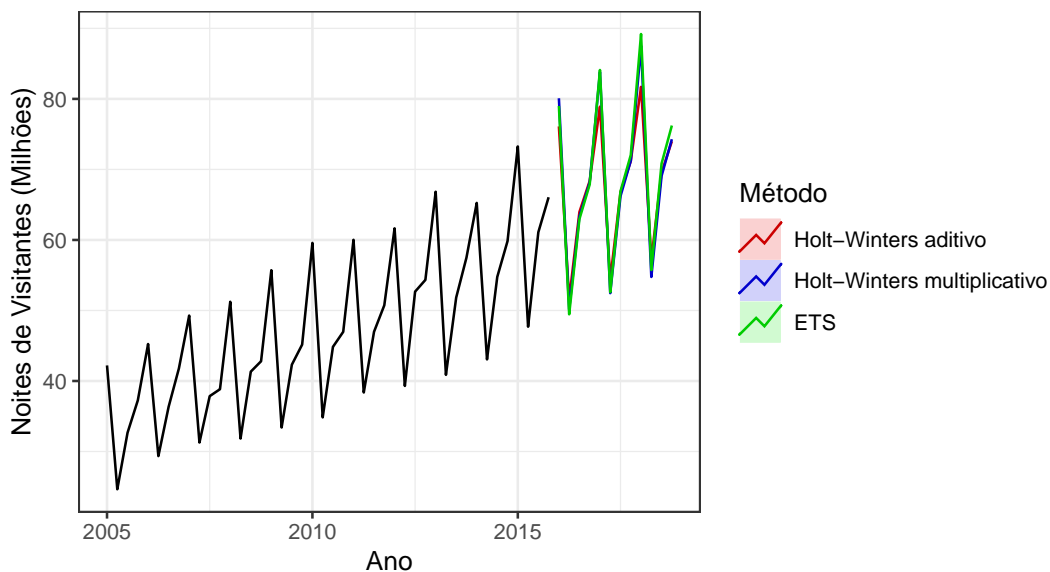


Figura 6 – Comparação das previsões pontuais de Holt-Winters aditivo, multiplicativo e ETS.

2.5.2.9 Estimação de modelos ETS

A estimação para todos os modelos de alisamento exponencial segue o mesmo procedimento, pois eles podem ser colocados no formato de modelo de espaço de estados. Tem-se um vetor de estados $\mathbf{x}_t = (\ell_t, b_t, s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-m+1})'$ e as equações de espaço de estado da forma

$$\begin{aligned} y_t &= w(\mathbf{x}_{t-1}) + r(\mathbf{x}_{t-1})\varepsilon_t, \\ \mathbf{x}_t &= f(\mathbf{x}_{t-1}) + g(\mathbf{x}_{t-1})\varepsilon_t, \end{aligned}$$

em que ε_t é um processo i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e $\mu_t = w(\mathbf{x}_{t-1})$.

Para erros aditivos, tem-se $r(\mathbf{x}_{t-1}) = 1$, logo $y_t = \mu_t + \varepsilon_t$. Já para erros multiplicativos, tem-se $r(\mathbf{x}_{t-1}) = \mu_t$, logo $y_t = \mu_t(1 + \varepsilon_t)$. Assim, para o modelo com erros multiplicativos, $\varepsilon_t = (y_t - \mu_t)/\mu_t$ é o erro relativo.

Dessa forma, têm-se os parâmetros de alisamento $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \gamma, \phi)'$ e os de inicialização dos estados $\mathbf{x}_0 = (\ell_0, b_0, s_0, s_{-1}, \dots, s_{-m+1})'$. Para utilizar os modelos para previsão, é preciso conhecer $\boldsymbol{\theta}$ e \mathbf{x}_0 . Como eles são desconhecidos, é necessário estimá-los, o que é feito pelo método da máxima verossimilhança. A função de verossimilhança é escrita como

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0) = p(y_1) \prod_{t=2}^n p(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1),$$

em que $p(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1)$ é a densidade da distribuição $\mathcal{N}(\mu_t, r(\mathbf{x}_{t-1})^2 \sigma_\varepsilon^2)$. Ord, Koehler e Snyder (1997) mostrou que

$$\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0) = n \log \left(\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \right) + 2 \sum_{t=1}^n \log |r(\mathbf{x}_{t-1})| = -2 \log[\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_0)],$$

ao eliminar os termos constantes. Os parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ e os estados iniciais \mathbf{x}_0 são estimados de forma a minimizar \mathcal{L}^* .

2.5.2.10 Seleção de modelos

Hyndman et al. (2002) apresenta a seguinte metodologia automática para selecionar o melhor modelo:

1. Ajustar todos os modelos da classe ETS que forem apropriados.
2. Selecionar o melhor baseado no AICc (dado pela Equação 2.2).
3. Calcular previsões pontuais com o melhor modelo.
4. Obter previsões intervalares com o melhor modelo usando fórmulas analíticas ou *bootstrap*.

O critério de informação de Akaike corrigido (AICc) é dado por

$$\text{AICc} = \mathcal{L}^*(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{x}}_0) + 2q \frac{n}{n - q - 1}, \quad (2.2)$$

em que q é o número de parâmetros em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ mais o número de estados livres em $\hat{\mathbf{x}}_0$, e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\mathbf{x}}_0$ denotam as estimativas de $\boldsymbol{\theta}$ e \mathbf{x}_0 .

2.5.3 Modelos ARIMA

Esta classe de modelos está descrita em detalhes em Morettin e Toloi (2006).

2.5.3.1 ARMA

Um processo autoregressivo média móvel ARMA(p, q) é definido como

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

em que $\alpha = (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)\mu$ é o intercepto e $\mu = E[y_t]$ é a média incondicional da série. Tem-se que $\alpha, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ são constantes.

As previsões pontuais para esse modelo são

$$\hat{y}_{n+h|n} = E_n[y_{n+h}] = \alpha + \phi_1 y_{n+h-1}^* + \cdots + \phi_p y_{n+h-p}^* + \theta_1 \varepsilon_{n+h-1}^* + \cdots + \theta_q \varepsilon_{n+h-q}^*,$$

em que

$$y_j^* = \begin{cases} y_j, & j \leq n \\ \hat{y}_{j|n}, & j > n \end{cases}$$

e

$$\varepsilon_j^* = \begin{cases} \varepsilon_j, & j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$$

De forma recursiva, as previsões pontuais do modelo ARMA podem ser calculadas com as equações acima para qualquer tempo futuro $h = 1, 2, 3, \dots$.

Ao assumir que os erros são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, a previsão intervalar para h -passos à frente com confiança de $(1 - a)\%$ é dada por

$$\hat{y}_{n+h|n} \pm z_{a/2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 \left[1 + \sum_{i=1}^{h-1} \psi_i^2 \right]}, \quad h = 1, 2, 3, \dots,$$

em que os coeficientes ψ_i são dados por

$$\psi_i = \theta_i + \sum_{j=1}^i \phi_j \psi_{i-j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

com $\psi_0 = 1$, $\phi_j = 0$ para $j > p$ e $\theta_i = 0$ para $i > q$.

2.5.3.2 ARIMA

Como o modelo ARMA só pode ser aplicado para séries estacionárias, quando a série é não estacionária e não sazonal, busca-se torná-la estacionária por meio das diferenças simples. Então, na série estacionária, pode-se utilizar o modelo ARMA, pois o modelo ARIMA(p, d, q) é o modelo ARMA(p, q) aplicado na d -ésima diferença da série. O modelo ARIMA(p, d, q) pode ser escrito como

$$\Phi_p(B)(1 - B)^d y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t.$$

Portanto, para construir previsões pontuais de modelos ARIMA, basta tomar o número de diferenças simples necessárias para tornar a série original estacionária (d) e, em seguida, aplicar o procedimento descrito na Seção 2.5.3.1. Por último, após obter previsões pontuais para a série estacionária, basta tomar a transformação inversa da que foi realizada na série original e, com isso, são obtidas previsões pontuais para a série original.

Já as previsões intervalares são da forma

$$\hat{y}_{n+h|n} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma_{n+h|n}^2}, \quad h = 1, 2, 3, \dots,$$

sendo que, conforme Brockwell e Davis (1996), tem-se o seguinte resultado

$$\sigma_{n+h|n}^2 = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \sigma_\varepsilon^2,$$

em que $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{h-1}$ são os primeiros $h - 1$ coeficientes do polinômio de médias móveis de ordem infinita, dado por

$$\Psi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i = \frac{\Theta_q(B)}{\Phi_p(B)(1-B)^d}.$$

2.5.3.3 SARIMA

Quando a série é não estacionária e sazonal, é preciso utilizar diferenças simples e sazonais para torná-la estacionária e não sazonal. Em seguida, na série estacionária não sazonal, pode-se utilizar o modelo ARMA. Os números de diferenças simples e sazonais necessárias são denotados por, respectivamente, d e D . O modelo SARIMA(p, d, q)x(P, D, Q) $_m$ pode ser escrito como

$$\Phi_P(B^m)\Phi_p(B)(1-B^m)^D(1-B)^d y_t = \Theta_Q(B^m)\Theta_q(B)\varepsilon_t.$$

Portanto, para construir previsões pontuais de modelos SARIMA, basta tomar d diferenças simples para tornar a série estacionária, tomar D diferenças sazonais para tornar a série não sazonal e, em seguida, aplicar o procedimento descrito na Seção 2.5.3.1. Por último, após obter previsões pontuais para a série estacionária não sazonal, basta tomar as transformações inversas das que foram realizadas na série original e, com isso, são obtidas previsões pontuais para a série original.

Já as previsões intervalares são da forma

$$\hat{y}_{n+h|n} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma_{n+h|n}^2}, \quad h = 1, 2, 3, \dots,$$

sendo que, conforme Brockwell e Davis (1996), tem-se o seguinte resultado

$$\sigma_{n+h|n}^2 = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \sigma_\varepsilon^2,$$

em que $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{h-1}$ são os primeiros $h - 1$ coeficientes do polinômio de médias móveis de ordem infinita, dado por

$$\Psi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i = \frac{\Theta_Q(B^m)\Theta_q(B)}{\Phi_P(B^m)\Phi_p(B)(1-B^m)^D(1-B)^d}.$$

2.5.3.4 Estimação de modelos ARIMA

Para os 3 modelos anteriores, o procedimento de estimação é semelhante. A única diferença é que, no primeiro caso (ARMA), a estimação é feita diretamente na série original, pois já é estacionária. Nos outros dois casos (ARIMA e SARIMA), primeiro deve-se tornar a série estacionária por meio das diferenças (simples e sazonais) e, em seguida, realizar a estimação na série estacionária. Para os modelos ARIMA(p, d, q), a série torna-se estacionária após tomar d diferenças simples. Para o SARIMA(p, d, q)x(P, D, Q) $_m$, ela torna-se estacionária após tomar d diferenças simples e D diferenças sazonais. Portanto, tem-se

- ARMA(p, q): estimação utiliza a série original ($w_t = y_t$);
- ARIMA(p, d, q): estimação utiliza a série após diferenças simples ($w_t = (1 - B)^d y_t$);
- SARIMA(p, d, q)x(P, D, Q) $_m$: estimação utiliza a série após diferenças simples e sazonais ($w_t = (1 - B^m)^D (1 - B)^d y_t$).

Ao considerar que as primeiras k observações são necessárias para inicializar o modelo, a função de verossimilhança condicional é definida como

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) = f(w_{k+1}, \dots, w_n | w_1, \dots, w_k) = \prod_{t=k+1}^n f_{t-1}(w_t),$$

em que $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor com todos os parâmetros do modelo.

Nos 3 casos anteriores, w_t é um processo ARMA(p, q), ou seja,

$$w_t = \alpha + \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

em que ε_t é um processo i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\alpha = (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)\mu$ é o intercepto e $\mu = E[w_t]$ é a média incondicional da série. Tem-se que

$$\begin{aligned} \mu_{t|t-1} &= E_{t-1}[w_t] = \alpha + \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \\ \sigma_{t|t-1}^2 &= \text{Var}_{t-1}[w_t] = \text{Var}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Logo, $w_{t|t-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{t|t-1}, \sigma_\varepsilon^2)$. Por conseguinte,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2) = \prod_{t=k+1}^n f_{t-1}(w_t) = \prod_{t=k+1}^n (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(w_t - \mu_{t|t-1})^2\right\}.$$

Portanto, o logaritmo da função verossimilhança condicional é

$$\ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2) \propto -\frac{n-k-1}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=k+1}^n (w_t - \mu_{t|t-1})^2.$$

Então, o estimador de máxima verossimilhança para σ_ε^2 é

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=k+1}^n (w_t - \mu_{t|t-1})^2}{n - k - 1}.$$

Assim, substituindo σ_ε^2 por $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ em $\ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2)$, tem-se

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) \propto -\frac{n-k-1}{2} \log \left[\sum_{t=k+1}^n (w_t - \mu_{t|t-1})^2 \right].$$

O vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ é estimado de forma a maximizar $\ell(\boldsymbol{\beta})$, ou seja, minimizar $\sum_{t=k+1}^n (w_t - \mu_{t|t-1})^2$. Dessa forma, sob a hipótese de normalidade, o estimador de máxima verossimilhança para $\boldsymbol{\beta}$ corresponde ao estimador de mínimos quadrados.

2.5.4 Modelos Theta

O método Theta original foi inicialmente proposto por Assimakopoulos e Nikolopoulos (2000) e apresentou uma ótima performance preditiva na competição M3 (Makridakis e Hibon, 2000). Esta classe está descrita em detalhes em Fiorucci et al. (2016b).

2.5.4.1 Theta original

Primeiro, define-se o operador de diferença ∇ , dado por

$$\nabla a_t = a_t - a_{t-1}.$$

A linha theta é definida em Assimakopoulos e Nikolopoulos (2000) como a solução de

$$\nabla^2 h_t(\theta) = \theta \nabla^2 y_t^*, \quad t = 3, \dots, n.$$

Originalmente, foi proposto que os valores iniciais h_1 e h_2 fossem obtidos ao minimizar $\sum_{t=1}^n [y_t^* - h_t(\theta)]^2$. Hyndman e Billah obteve uma solução analítica para calcular $h(\theta)$, dada por

$$h_t(\theta) = \theta y_t^* + (1 - \theta)(A_n + B_n t), \quad t = 1, \dots, n,$$

em que

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t^* - \frac{n+1}{2} B_n, \quad (2.3a)$$

$$B_n = \frac{6}{n^2 - 1} \left(\frac{2}{n} \sum_{t=1}^n t y_t^* - \frac{1+n}{n} \sum_{t=1}^n y_t^* \right). \quad (2.3b)$$

Depois, ao extrapolar $\mathbf{h}(0)$ pelo modelo de regressão linear, extrapolar $\mathbf{h}(2)$ pelo modelo SES e tomar a média dessas duas extrapolações, são obtidas as previsões do método Theta.

O procedimento proposto por Assimakopoulos e Nikolopoulos está descrito em detalhes a seguir:

1. A série é testada para saber se existe um comportamento sazonal estatisticamente significativo. O teste considera a série como sazonal se $|r_m| > z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1+2 \sum_{i=1}^{m-1} r_i^2}{n}}$, em que r_k denota

a função de autocorrelação com *lag k*. Originalmente, Assimakopoulos e Nikolopoulos propuseram nível de confiança de 90% para este teste. Se o teste concluir que não há sazonalidade, a série sazonalmente ajustada é igual à série original e segue-se ao passo 4. Caso contrário, segue-se para o passo 2.

2. É realizada uma decomposição clássica multiplicativa (vide Seção 2.3.1) com os valores observados da série.
3. Obtém-se a série sazonalmente ajustada, por meio da divisão de cada valor observado por seu respectivo índice sazonal ($y_t^* = y_t/S_j^*$).
4. A série sazonalmente ajustada é decomposta em $\mathbf{h}(0)$ e $\mathbf{h}(2)$.
5. É realizada uma extrapolação de $\mathbf{h}(0)$ e $\mathbf{h}(2)$ por, respectivamente, um modelo de regressão linear e um modelo SES.
6. As duas extrapolações são combinadas pela média, obtendo a previsão final.
7. Caso o passo 1 tenha identificado a série como sazonal, as previsões são resazonalizadas, isto é, são multiplicadas por seus índices sazonais (S_j^*). Com isso, são obtidas previsões que consideram a sazonalidade.

Como esse procedimento é um método e não um modelo, ele será utilizado apenas para obter previsões pontuais.

2.5.4.2 DOTM

DOTM equivale a modelo Theta dinâmico otimizado (*dynamic optimised Theta model*). No método Theta original, A_n e B_n são fixos, isto é, constantes para todo t . No DOTM, eles são funções dinâmicas, sendo atualizados apenas com a informação prévia, ou seja, para passar de t para $t + 1$, A_t e B_t são calculados apenas considerando y_1^*, \dots, y_t^* . Ao invés dos 2 valores de Theta serem fixos, o primeiro será mantido em 0 e o segundo será otimizado para $\theta \geq 1$. Logo,

$$\hat{y}_{t+1|t}^* = \ell_t + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \left\{ (1 - \alpha)^t A_t + \left[\frac{1 - (1 - \alpha)^{t+1}}{\alpha} \right] B_t \right\}. \quad (2.4)$$

Assumindo erros aditivos e reescrevendo as Equações 2.3 e 2.4, tem-se

$$y_t^* = \mu_t + \varepsilon_t, \quad (2.5a)$$

$$\mu_t = \ell_{t-1} + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \left\{ (1 - \alpha)^{t-1} A_{t-1} + \left[\frac{1 - (1 - \alpha)^t}{\alpha} \right] B_{t-1} \right\}, \quad (2.5b)$$

$$\ell_t = \alpha y_t^* + (1 - \alpha)\ell_{t-1}, \quad (2.5c)$$

$$A_t = \bar{y}_t^* - \frac{t+1}{2} B_t, \quad (2.5d)$$

$$B_t = \frac{1}{t+1} \left[(t-2)B_{t-1} + \frac{6}{t}(y_t^* - \bar{y}_{t-1}^*) \right], \quad (2.5e)$$

$$\bar{y}_t^* = \frac{1}{t} [(t-1)\bar{y}_{t-1}^* + y_t^*], \quad (2.5f)$$

para $t = 1, \dots, n$. A partir das Equações 2.5, tem-se um modelo de espaço de estados com parâmetros $\ell_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$ e $\theta \in [1, \infty)$. Assume-se $A_0 = B_0 = B_1 = \bar{y}_0^* = 0$ para inicializar os estados.

Para horizonte de previsão de 1-passo à frente, as previsões do DOTM são

$$\hat{y}_{n+1|n}^* = E[y_{n+1}^* | y_1^*, \dots, y_n^*] = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \left\{ (1 - \alpha)^n A_n + \left[\frac{1 - (1 - \alpha)^{n+1}}{\alpha} \right] B_n \right\}.$$

Para horizontes mais longos, as previsões pontuais do modelo DOTM são calculadas de forma recursiva, utilizando o conjunto de Equações 2.5 e substituindo qualquer valor não observado por seu respectivo valor esperado. É importante observar que, assim como o método Theta original, o DOTM gera previsões para a série sazonalmente ajustada. Para que elas considerem o padrão sazonal é necessário realizar o processo de resazonalização descrito anteriormente. Como $Var_n[y_{n+h}^*]$ é difícil de ser escrita analiticamente, previsões intervalares são obtidas usando *bootstrap*.

2.5.5 Modelos avançados

Conjunto de modelos capazes de realizar previsões de séries com múltiplos ciclos sazonais.

2.5.5.1 STL + ETS

Este procedimento se inicia ao aplicar, múltiplas vezes, a decomposição STL (vide Seção 2.3.2), por meio da função `mstl` do pacote `forecast`. Com isso, são extraídas todas as componentes sazonais da série. Assim, é obtida a série sazonalmente ajustada, na qual é aplicado o modelo ETS (vide Seção 2.5.2.8). Dessa forma, são obtidas previsões pontuais e intervalares para a série sazonalmente ajustada. Em seguida, para que o método considere a sazonalidade em suas previsões, as componentes sazonais extraídas pela decomposição STL são extrapoladas utilizando o método *naive* sazonal. Por último, combinam-se as previsões das diferentes componentes de forma aditiva, ou seja, a previsão da série sazonalmente ajustada é somada com as previsões de cada ciclo sazonal que foi extraído pela decomposição STL.

2.5.5.2 BATS

Este modelo foi proposto por Livera, Hyndman e Snyder (2011). Ele corresponde a uma abreviação, dada por

- B: transformação de Box-Cox para heterogeneidade;
- A: modelo ARMA para os erros;
- T: tendência via alisamento exponencial;
- S: sazonalidade múltipla via alisamento exponencial.

Para uma série com T padrões sazonais, $0 < \alpha, \phi, \gamma_1, \dots, \gamma_T < 1$ e $0 < \beta < \alpha$, o modelo estocástico BATS é descrito pelas seguintes equações

$$y_t^{(\omega)} = \begin{cases} (y_t^\omega - 1)/\omega, & \text{se } \omega \neq 0, \\ \log y_t, & \text{se } \omega = 0, \end{cases} \quad (\text{Transformação de Box-Cox})$$

$$y_t^{(\omega)} = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \sum_{i=1}^T s_{t-m_i}^{(i)} + d_t, \quad (\text{Alisamento exponencial})$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha d_t,$$

$$b_t = (1 - \phi)b + \phi b_{t-1} + \beta d_t,$$

$$s_t^{(i)} = s_{t-m_i}^{(i)} + \gamma_i d_t,$$

$$d_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i d_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (\text{ARMA})$$

em que m_1, \dots, m_T são os tamanhos dos ciclos sazonais, ℓ_t é o nível local no período t , b é a tendência de longo prazo, b_t é a tendência de curto prazo no período t , $s_t^{(i)}$ é a i -ésima componente sazonal no período t , d_t é um processo ARMA(p, q) e ε_t são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Além disso, ω é o parâmetro da transformação de Box-Cox, α é o parâmetro de alisamento da componente de nível, ϕ é o parâmetro de amortização da tendência, β é o parâmetro de alisamento da componente de crescimento e $\gamma_1, \dots, \gamma_T$ são os parâmetros de alisamento sazonal.

O modelo é denotado por BATS($\omega, \phi, p, q, m_1, m_2, \dots, m_T$). Para inicializar o modelo, é necessário conhecer os valores de $\omega, \alpha, \beta, \phi, \{\gamma_1, \dots, \gamma_T\}, \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}, \{\theta_1, \dots, \theta_q\}, \ell_0, b_0, b, \{s_0^{(1)}, s_{-1}^{(1)}, \dots, s_{-m_1+1}^{(1)}\}, \{s_0^{(2)}, s_{-1}^{(2)}, \dots, s_{-m_2+1}^{(2)}\}, \dots, \{s_0^{(T)}, s_{-1}^{(T)}, \dots, s_{-m_T+1}^{(T)}\}$, que são estimados por máxima verossimilhança.

2.5.5.3 TBATS

Este modelo também foi proposto por Livera, Hyndman e Snyder (2011). Ele também corresponde a uma abreviação, dada por

- T: termos trigonométricos para sazonalidade;
- B: transformação de Box-Cox para heterogeneidade;
- A: modelo ARMA para os erros;
- T: tendência via alisamento exponencial;
- S: sazonalidade múltipla ou para períodos não inteiros.

Para uma série com T padrões sazonais, $0 < \alpha, \phi, \gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_1^{(T)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots,$

$\gamma_2^{(T)} < 1$ e $0 < \beta < \alpha$, o modelo estocástico TBATS é descrito pelas seguintes equações

$$y_t^{(\omega)} = \begin{cases} (y_t^\omega - 1)/\omega, & \text{se } \omega \neq 0, \\ \log y_t, & \text{se } \omega = 0, \end{cases} \quad (\text{Transformação de Box-Cox})$$

$$y_t^{(\omega)} = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \sum_{i=1}^T s_{t-1}^{(i)} + d_t, \quad (\text{Alisamento exponencial})$$

$$\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha d_t,$$

$$b_t = (1 - \phi)b + \phi b_{t-1} + \beta d_t,$$

$$s_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{k_i} s_{j,t}^{(i)}, \quad (\text{Sazonalidade por termos trigonométricos})$$

$$s_{j,t}^{(i)} = s_{j,t-1}^{(i)} \cos \lambda_j^{(i)} + s_{j,t-1}^{*(i)} \sin \lambda_j^{(i)} + \gamma_1^{(i)} d_t,$$

$$s_{j,t}^{*(i)} = -s_{j,t-1}^{(i)} \sin \lambda_j^{(i)} + s_{j,t-1}^{*(i)} \cos \lambda_j^{(i)} + \gamma_2^{(i)} d_t,$$

$$d_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i d_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (\text{ARMA})$$

em que $\gamma_1^{(i)}$ e $\gamma_2^{(i)}$ são parâmetros de alisamento e $\lambda_j^{(i)} = 2\pi j/m_i$. O nível estocástico da i -ésima componente de sazonalidade é denotado por $s_{j,t}^{(i)}$ e o crescimento estocástico no nível da i -ésima componente sazonal é denotado por $s_{j,t}^{*(i)}$. O número de funções harmônicas requeridas para a i -ésima componente sazonal é denotado por k_i . O restante dos parâmetros é definido de forma idêntica ao que foi realizado para o modelo BATS.

O modelo é apresentado como $\text{TBATS}(\omega, \phi, p, q, \{m_1, k_1\}, \{m_2, k_2\}, \dots, \{m_T, k_T\})$. Para inicializar o modelo, é necessário conhecer os valores de $\omega, \alpha, \beta, \phi, \{\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_1^{(T)}\}, \{\gamma_2^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots, \gamma_2^{(T)}\}, \{k_1, \dots, k_T\}, \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}, \{\theta_1, \dots, \theta_q\}, \ell_0, b_0, b, \{s_{1,0}^{(1)}, s_{2,0}^{(1)}, \dots, s_{k_1,0}^{(1)}\}, \{s_{1,0}^{(2)}, s_{2,0}^{(2)}, \dots, s_{k_2,0}^{(2)}\}, \dots, \{s_{1,0}^{(T)}, s_{2,0}^{(T)}, \dots, s_{k_T,0}^{(T)}\}$, que são estimados por máxima verossimilhança.

2.6 Métricas de avaliação

Após calcular as previsões, elas são comparadas com os valores da série temporal que não foram utilizados na estimação dos modelos (valores de teste) por meio de métricas.

2.6.1 Previsão pontual

Para avaliar a precisão das previsões pontuais dos métodos serão utilizadas 3 métricas. As métricas estão descritas em detalhes em Hyndman et al. (2008).

2.6.1.1 MAPE

O MAPE (*mean absolute percentage error*) avalia a distância percentual absoluta média entre os valores previstos e os valores de teste. O MAPE é dado por

$$\text{MAPE} = \frac{100}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} \left| \frac{y_t - \hat{y}_{t|n}}{y_t} \right|.$$

Um ponto positivo desta métrica é que ela é independente de escala, ou seja, ao transformar a unidade de medida da série, o valor do MAPE se mantém constante. Porém, tem a desvantagem de não ser simétrico, isto é, $\text{MAPE}(y, \hat{y}) \neq \text{MAPE}(\hat{y}, y)$.

2.6.1.2 sMAPE

O sMAPE (*symmetric mean absolute percentage error*) é uma modificação do MAPE. Ele também é independente de escala, mas é simétrico e está limitada ao intervalo de -200% a 200%, enquanto o MAPE não possui limites. O sMAPE é dado por

$$\text{sMAPE} = \frac{200}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} \frac{|y_t - \hat{y}_{t|n}|}{y_t + \hat{y}_{t|n}}.$$

O sMAPE ainda apresenta 3 problemas. O primeiro é que, como ele pode assumir valores negativos, não é uma medida de erros percentuais absolutos. O segundo problema é que, se y_t é 0, então provavelmente $\hat{y}_{t|n}$ será próximo de 0, ou seja, a métrica ainda envolverá uma divisão por uma quantidade próxima de 0. Por último, o sMAPE favorece erros positivos ($y > \hat{y}$) em relação a erros negativos ($y < \hat{y}$).

2.6.1.3 MASE

O MASE (*mean absolute scaled error*) foi construído com o propósito de solucionar os problemas das outras 2 métricas, possibilitar a comparação de métodos de previsão em uma mesma série, e também comparar a acurácia de previsão entre séries, pois é livre de escala. O objetivo era que se tornasse uma métrica geral. O MASE é dado por

$$\text{MASE} = \frac{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} |y_t - \hat{y}_{t|n}|}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |y_t - y_{t-1}|}.$$

O denominador acima é dado pelo erro médio absoluto do método *naive* na amostra de treino. Porém, a versão utilizada neste projeto é a da competição M4, que substitui o *naive* pelo *naive* sazonal no denominador. Com essa modificação, Makridakis, Spiliotis e Assimakopoulos (2020) descreve o MASE como

$$\text{MASE} = \frac{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} |y_t - \hat{y}_{t|n}|}{\frac{1}{n-m} \sum_{t=m+1}^n |y_t - y_{t-m}|}. \quad (2.6)$$

O MASE será maior que 1 caso as previsões sejam piores que o erro médio absoluto de previsão do método *naive* sazonal na amostra de treino, e será menor que 1 caso as previsões sejam melhores.

2.6.2 Previsão intervalar

Para avaliar a precisão das previsões intervalares dos modelos serão utilizadas 3 métricas. As previsões intervalares consideradas são de 95% de confiança, logo a é igual a 0,05.

2.6.2.1 MSIS

O MSIS (*mean scaled interval score*) foi a métrica utilizada na competição M4. Conforme Makridakis, Spiliotis e Assimakopoulos (2020), ele é dado por

$$\text{MSIS} = \frac{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} (U_t - L_t) + \frac{2}{a} (L_t - y_t) \mathbb{1}_{(y_t < L_t)} + \frac{2}{a} (y_t - U_t) \mathbb{1}_{(y_t > U_t)}}{\frac{1}{n-m} \sum_{t=m+1}^n |y_t - y_{t-m}|},$$

em que L_t e U_t são os limites inferior e superior das previsões e $\mathbb{1}$ é a função indicadora.

O MSIS penaliza pontos em que o valor observado está fora do intervalo previsto. Além disso, ele penaliza previsões intervalares com maior amplitude em relação às com menor amplitude. Por último, com o intuito de tornar a métrica independente de escala, é realizada a divisão pelo erro médio absoluto de previsão do método *naive* sazonal na amostra de treino, de forma similar ao realizado na Equação 2.6.

2.6.2.2 SPL

O SPL (*scaled pinball loss*) foi a métrica utilizada na competição M5. Esta métrica é calculada para cada limite da previsão e é dada por

$$\text{SPL}(u) = \frac{\frac{1}{h} \sum_{t=n+1}^{n+h} u(y_t - Q_t(u)) \mathbb{1}_{(Q_t(u) \leq y_t)} + (1-u)(Q_t(u) - y_t) \mathbb{1}_{(Q_t(u) > y_t)}}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |y_t - y_{t-1}|},$$

em que $Q_t(u)$ é o limite da previsão intervalar para o quantil u e $\mathbb{1}$ é a função indicadora. Como previsão intervalares serão de 95% de confiança, o SPL deve ser calculado para $u = 0,025$ com os limites inferiores das previsões e para $u = 0,975$ com os limites superiores. Em seguida, para obter o valor final, basta calcular a média entre esses 2 valores.

2.6.2.3 ACD

A ACD (*absolute coverage difference*) é dada pela diferença absoluta entre a cobertura média das previsões e a probabilidade de cobertura de interesse. Por exemplo, se as previsões intervalares de 95% de confiança de algum modelo contiverem 93% dos valores futuros observados, então a ACD é $|0,93 - 0,95| = 0,02$. A descrição matemática da métrica é dada por

$$\text{ACD} = \left| (1-a) - \sum_{t=n+1}^{n+h} \frac{\mathbb{1}_{(L_t \leq y_t \leq U_t)}}{h} \right|,$$

em que L_t e U_t são os limites inferior e superior das previsões e $\mathbb{1}$ é a função indicadora.

2.7 Bootstrap

Para calcular as previsões intervalares em situações em que o erro quadrático da previsão ($\sigma_{n+h|n}^2$) não pode ser obtido analiticamente ou que a suposição de normalidade não é razoável, utiliza-se a técnica denominada *bootstrap*. Além disso, ela pode ser utilizada durante o procedimento denominado *bagging*.

2.7.1 Paramétrico

Considerando que os erros ε_t são i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, diversos caminhos futuros para as observações são gerados. Portanto, a partir do modelo ajustado, são geradas observações $\{y_t^{(i)}\}$, para $t = n + 1, \dots, n + h$. Cada ε_t é obtido pela geração de números aleatórios utilizando a distribuição Normal. O processo é repetido para $i = 1, \dots, M$, em que M é um inteiro grande (por exemplo, 10.000). Com isso, tem-se

$$\begin{array}{cccc} y_{n+1}^{(1)}, & y_{n+2}^{(1)}, & \dots, & y_{n+h}^{(1)} \\ y_{n+1}^{(2)}, & y_{n+2}^{(2)}, & \dots, & y_{n+h}^{(2)} \\ \vdots, & \vdots, & \dots, & \vdots \\ y_{n+1}^{(M)}, & y_{n+2}^{(M)}, & \dots, & y_{n+h}^{(M)}. \end{array}$$

Características da distribuição predita de y_{n+h} podem ser estimadas dos valores simulados em um horizonte de previsão específico: $\mathbf{y}_{n+h} = \{y_{n+h}^{(1)}, \dots, y_{n+h}^{(M)}\}$. Previsões intervalares para y_{n+h} são obtidas a partir dos quantis empíricos de $y_{n+h}^{(1)}, \dots, y_{n+h}^{(M)}$. Um intervalo de predição com confiança de $(1 - a)\%$ para a previsão h -passos à frente pode ser obtido pelos quantis $a/2$ e $1 - a/2$ de \mathbf{y}_{n+h} .

2.7.2 Não paramétrico

Quando não for razoável assumir que os erros seguem uma distribuição Normal, deve-se utilizar o *bootstrap* não paramétrico, que apenas assume que os erros são independentes. O processo é muito similar ao descrito na Seção 2.7.1, porém, ao invés de se obter ε_t pela geração de números aleatórios utilizando a distribuição Normal, os erros já conhecidos (ou seja, os resíduos) são utilizados como população para um processo de reamostragem, isto é, a simulação é feita a partir da distribuição empírica dos resíduos. Desta forma, assume-se que o comportamento dos erros futuros será similar ao comportamento dos erros observados (resíduos).

2.7.3 MBB

Este método está descrito em detalhes em Lahiri (2013). MBB é uma abreviação de *Moving Block Bootstrap*. O MBB é um método de *bootstrap* que permite realizar o processo de reamostragem sem considerar a independência dos resíduos e, por isso, é muito útil para aplicação em séries temporais, já que possibilita o uso do *bootstrap* para dados dependentes. O

único pré-requisito é que a série seja estacionária. Enquanto o *bootstrap* tradicional reamostra cada observação individualmente, o MBB reamostra blocos de observações consecutivas, o que permite a manutenção da estrutura de dependência dos dados originais em cada bloco.

Primeiro, define-se o comprimento ℓ dos blocos que serão reamostrados. Neste estudo, como todas as séries são mensais, ℓ será igual a 24, ou seja, 2 ciclos sazonais completos. Seja $B_i = (X_i, \dots, X_{i+\ell-1})$ o bloco de comprimento ℓ começando em X_i , $1 \leq i \leq N$ e $N = n - \ell + 1$. Definida a quantidade requerida de blocos, eles são selecionados de forma aleatória da coleção $\{B_1, \dots, B_N\}$. Seja B_1^*, \dots, B_k^* uma amostra aleatória simples com reposição retirada dessa coleção. Os elementos de B_i^* serão denotados por $(X_{(i-1)\ell+1}^*, \dots, X_{i\ell}^*)$, $i = 1, \dots, k$. Segue que $X_1^*, \dots, X_{k\ell}^*$ é uma amostra MBB de tamanho $k\ell$. A Figura 7, disponível em Lahiri (2013), ilustra este procedimento.

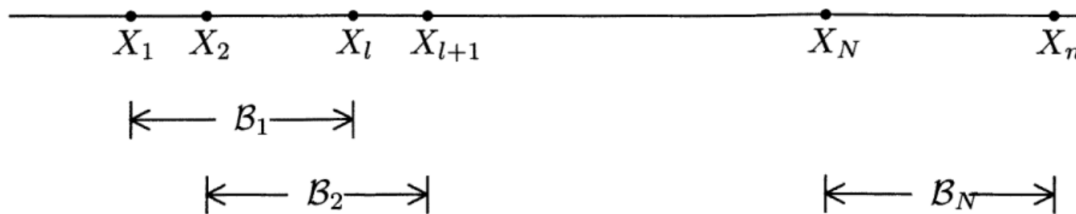


Figura 7 – A coleção $\{B_1, \dots, B_N\}$ utilizando MBB.
FONTE: Extraído de Lahiri (2013).

Deseja-se obter uma amostra MBB com mesmo tamanho da amostra original. Para isso, se g denota o menor inteiro tal que $g\ell \geq n$, basta amostrar $k = g$ blocos para gerar as amostras MBB e manter apenas os primeiros n valores.

2.7.4 Bagging

O procedimento de *bootstrap aggregation* (também chamado de *bagging*) utilizado será o descrito em Bergmeir, Hyndman e Benítez (2016). Este procedimento se inicia com a realização de uma transformação Box-Cox (Box e Cox, 1964) nos dados, que é uma transformação utilizada para estabilizar a variância de uma série temporal. Esta transformação é definida como

$$w_t = \begin{cases} (y_t^\omega - 1)/\omega, & \text{se } \omega \neq 0, \\ \log y_t, & \text{se } \omega = 0, \end{cases}$$

em que y_t é a série original e w_t é a série após aplicar a transformação. Para selecionar ω , será utilizado o mesmo procedimento descrito em Bergmeir, Hyndman e Benítez (2016): primeiro, ω será restrito ao intervalo $[0, 1]$ e, em seguida, o método de Guerrero (1993) será utilizado para escolher o melhor valor.

Em seguida, utilizando a série transformada (w_t), é aplicada uma decomposição STL, descrita na Seção 2.3.2. A partir dessa decomposição, a série transformada é dividida em 3 componentes: tendência (T_t), sazonalidade (S_t) e ruído (E_t). Depois disso, a componente de ruído é reamostrada utilizando o MBB, descrito na Seção 2.7.3. Serão retiradas 100 amostras MBB dos resíduos da decomposição STL. Com isso, ao invés de uma única série de resíduos (E_t), serão 100 séries: $\{E_t^{(1)}, \dots, E_t^{(100)}\}$. Ao somar cada uma dessas séries de resíduos com as componentes de tendência e sazonalidade da decomposição STL, são obtidas 100 amostras *bootstrap* da série transformada: $\{w_t^{(1)}, \dots, w_t^{(100)}\}$. Para obter as amostras *bootstrap* da série original, basta inverter a transformação Box-Cox realizada. Todo esse processo pode ser realizado por meio da função `bld.mbb.bootstrap` do pacote `forecast`.

Com isso, é obtido um conjunto de 100 amostras *bootstrap* da série original: $\mathbf{y}_t = \{y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(100)}\}$. Para realizar as previsões, cada modelo descrito na Seção 2.5 será aplicado a cada uma das amostras *bootstrap* da série original, obtendo assim, para cada horizonte, uma coleção de previsões. Para modelos em que não existe um processo automático de seleção, como os modelos SES e Holt, este procedimento trata tanto a incerteza dos dados como a incerteza na estimação dos parâmetros. Já para modelos em que ocorre uma seleção do melhor modelo, como no ETS ou ARIMA, além dessas incertezas, ele trata também a incerteza na seleção do modelo.

Para um dado modelo, após utilizá-lo para obter previsões de cada amostra *bootstrap* para um dado horizonte de previsão h , são obtidas 3 coleções de previsões. A primeira coleção contém as previsões pontuais e será denotada por $\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n} = \{\hat{y}_{n+h|n}^{(1)}, \dots, \hat{y}_{n+h|n}^{(100)}\}$. A segunda e a terceira contêm os limites, respectivamente, inferiores e superiores das previsões intervalares com confiança de $(1 - a)\%$ e serão denotadas por, respectivamente, $\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n,a/2} = \{\hat{y}_{n+h|n,a/2}^{(1)}, \dots, \hat{y}_{n+h|n,a/2}^{(100)}\}$ e $\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n,1-a/2} = \{\hat{y}_{n+h|n,1-a/2}^{(1)}, \dots, \hat{y}_{n+h|n,1-a/2}^{(100)}\}$.

2.7.4.1 Previsões pontuais

Serão consideradas 2 abordagens. A primeira irá utilizar a média da coleção de previsões pontuais ($\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n}$) como a previsão pontual final para h -passos à frente ($\hat{y}_{n+h|n}$). Já a segunda utilizará a mediana ao invés da média.

2.7.4.2 Previsões intervalares

Para as previsões intervalares, serão consideradas 4 estratégias:

1. A primeira irá utilizar como limites inferior e superior da previsão, os valores mínimo e máximo encontrados na coleção de previsões pontuais $\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n}$. Dessa forma, o intervalo de predição para a previsão h -passos à frente será $[\min(\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n}), \max(\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n})]$.
2. A segunda utilizará os quantis da coleção $\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n}$. A previsão intervalar com confiança de $(1 - a)\%$ para h -passos à frente será obtido pelos quantis $a/2$ e $1 - a/2$ de $\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n}$.
3. Na terceira abordagem, os limites inferior e superior das previsões serão dados pela média de, respectivamente, $\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n,a/2}$ e $\hat{\mathbf{y}}_{n+h|n,1-a/2}$.

4. A última estratégia é semelhante à terceira, porém utilizará a mediana ao invés da média.

2.8 Implementação computacional

Todos os cálculos serão realizados por meio do *software* estatístico de código aberto fornecido por R Core Team (2020), versão 3.6.3. O acesso ao conjunto de dados utilizado será feito pelo pacote `Mcomp`, versão 2.8. A maioria dos modelos estão disponíveis no pacote `forecast` (Hyndman et al., 2017), versão 8.11. Já os modelos Theta estão disponíveis no pacote `forecTheta` (Fiorucci et al., 2016a), versão 2.2. O computador utilizado estava equipado com um processador Intel i7-7500U com 16 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 10.

3 Resultados

Nesta seção, serão apresentados os resultados encontrados ao aplicar os modelos descritos na Seção 2.5 para realizar previsões das séries mensais presentes no conjunto de dados da competição M3 (Makridakis e Hibon, 2000).

3.1 Análise individual

Nesta seção, será realizado um procedimento de descrição, análise e previsão de duas séries temporais escolhidas de forma arbitrária dentre as 1.428 séries mensais do conjunto de dados.

3.1.1 N2539

A primeira série escolhida é a de código N2539 (M1138), que descreve os depósitos à vista de grandes bancos comerciais, em estados e subdivisões (traduzido do inglês *large commercial banks, demand deposits, States and subdivisions*). Ela é uma série do tipo financeira, com frequência mensal, 116 observações de treino e 18 valores para teste. A Figura 8 ilustra o comportamento das observações de treino desta série.

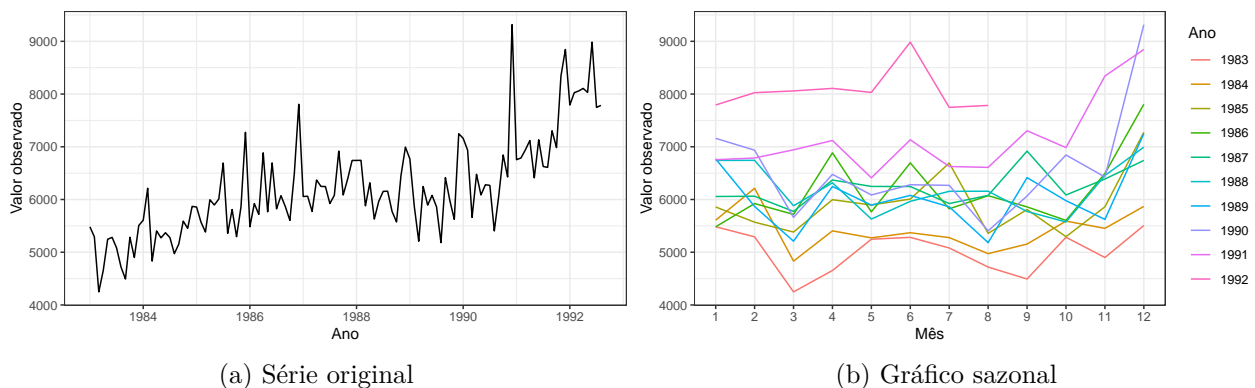


Figura 8 – N2539 - Depósitos à vista de grandes bancos comerciais, em estados e subdivisões.

Ao observar a Figura 8a, que demonstra o comportamento histórico da série, pode-se perceber uma tendência de crescimento, desde o início da série até o ano de 1987. A partir desse ano, o nível da série se manteve aproximadamente constante até o ano de 1990, em que novamente ocorreu um aumento, mais expressivo do que o anterior. Este aumento perdurou até o último valor de treinamento observado. Além disso, esse gráfico indica a presença de um comportamento sazonal. Já a Figura 8b deixa ainda mais evidente o padrão de comportamento sazonal dessa série. Vários anos tiveram um comportamento muito semelhante ao longo dos

meses, sendo que, em todos os anos, houve um aumento considerável no nível da série no mês de dezembro, mais uma indicação da existência de sazonalidade.

3.1.1.1 Previsões pontuais

Nesta seção, serão aplicados os métodos descritos na Seção 2.5 para construir previsões pontuais para a série N2539, que serão comparadas com os valores de teste, por meio das métricas descritas na Seção 2.6.1. A Tabela 2 apresenta os resultados encontrados. Os métodos estão ordenados, dentro de cada tipo de dado, pela métrica MASE, de forma crescente. O melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito.

Tabela 2 – Métricas de avaliação pontual para a série N2539.

Dados	Método	MAPE (%)	sMAPE (%)	MASE
Série original	ARIMA	4,467	4,471	0,711
	Holt amortizado	5,384	5,374	0,854
	ETS	5,426	5,319	0,871
	STL + ETS	5,926	5,740	0,940
	Holt-Winters aditivo	6,047	5,869	0,953
	Combinado	7,124	7,536	1,177
	Holt-Winters multiplicativo	7,352	7,052	1,179
	DOTM	7,618	8,000	1,218
	Theta	7,650	8,034	1,223
	TBATS	8,565	8,086	1,368
	SES com <i>drift</i>	8,614	9,188	1,419
	Holt	8,766	9,354	1,443
	BATS	10,454	9,769	1,675
	SES	11,986	12,946	1,954
	<i>Drift</i>	12,383	13,384	2,014
	<i>Naive</i> sazonal	12,788	13,799	2,036
	<i>Naive</i>	14,453	15,772	2,343
	Média	31,663	37,783	5,052
	Série sazonalmente ajustada	Combinado	3,615	3,659
<i>Drift</i>		4,020	4,167	0,642
Holt amortizado		5,163	5,074	0,826
ARIMA		5,512	5,396	0,881
SES com <i>drift</i>		5,532	5,763	0,883
<i>Naive</i>		6,547	6,853	1,050
STL + ETS		6,618	6,377	1,065
ETS		6,948	6,698	1,110
Holt		6,948	6,698	1,110
Holt-Winters multiplicativo		7,141	6,849	1,142
Holt-Winters aditivo		7,287	7,006	1,165
Theta		7,650	8,034	1,223
DOTM		8,189	8,620	1,309
BATS		8,569	8,138	1,370
SES		8,682	9,160	1,387
TBATS		8,862	8,395	1,417
<i>Naive</i> sazonal		12,788	13,799	2,036
Média		31,200	37,036	4,944

Por meio da Tabela 2, pode-se concluir que os desempenhos dos métodos Holt-Winters aditivo, ETS, ARIMA, DOTM, STL + ETS e TBATS pioram ao adotar a estratégia de realizar um tratamento prévio da sazonalidade. Já os métodos *naive* sazonal e Theta apresentam desempenho idêntico nas duas estratégias. Os demais métodos melhoram o desempenho, nas três métricas, ao utilizar essa estratégia.

O melhor método, dentre aqueles aplicados na série original, é o ARIMA, com MASE igual a 0,711. Ele é seguido pelo Holt amortizado, com MASE de 0,854 e, em terceiro lugar, o ETS, com MASE igual a 0,871. Já para os métodos aplicados na série sazonalmente ajustada, o melhor é o combinado, com MASE de 0,581, que também é o menor valor encontrado dentre todos os apresentados. O segundo melhor método para a série sazonalmente ajustada, e também dentre todos, é o *drift*, com MASE de 0,642. O terceiro é o Holt amortizado, com um MASE de 0,826, valor muito próximo, porém inferior ao encontrado ao aplicar esse método na série original.

A Figura 9 apresenta o comportamento dos valores de treino, das previsões pontuais do método combinado com ajuste sazonal (MASE igual a 0,581) e dos valores de teste.

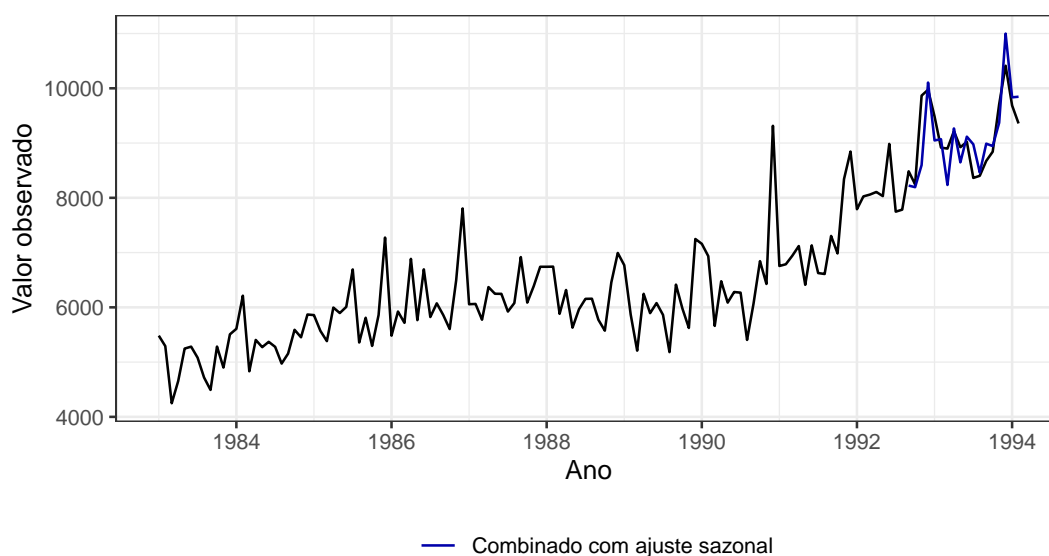


Figura 9 – Melhor previsão pontual para a série N2539.

A partir da observação da Figura 9, fica evidente que as previsões desse método estão muito próximas do comportamento observado na série, tanto em relação à tendência de crescimento, como em relação ao comportamento sazonal.

3.1.1.2 Previsões intervalares

Nesta seção, os modelos serão aplicados para construir previsões intervalares para a série N2539, que serão comparadas com os valores de teste, por meio das métricas descritas na Seção 2.6.2. A Tabela 3 apresenta os resultados encontrados. Os modelos estão ordenados, dentro de

cada tipo de dado, pela métrica MSIS, de forma crescente. Novamente, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito.

Tabela 3 – Métricas de avaliação intervalar para a série N2539.

Dados	Modelo	MSIS	SPL	ACD	Cobertura (%)
Série original	ARIMA	3,920	0,051	0,050	100,0
	STL + ETS	4,576	0,039	0,117	83,3
	Holt-Winters aditivo	4,614	0,037	0,006	94,4
	Holt amortizado	4,627	0,058	0,006	94,4
	ETS	5,670	0,062	0,050	100,0
	BATS	5,789	0,031	0,006	94,4
	Holt-Winters multiplicativo	6,309	0,059	0,050	100,0
	DOTM	6,856	0,082	0,117	83,3
	<i>Naive sazonal</i>	7,036	0,128	0,061	88,9
	Combinado	8,329	0,092	0,117	83,3
	TBATS	8,875	0,138	0,228	72,2
	SES com <i>drift</i>	10,612	0,098	0,172	77,8
	Holt	10,736	0,099	0,172	77,8
	SES	13,501	0,119	0,228	72,2
	<i>Naive</i>	14,932	0,259	0,050	100,0
	<i>Drift</i>	15,636	0,259	0,050	100,0
	Média	78,166	0,219	0,950	0,0
Série sazonalmente ajustada	Holt-Winters aditivo	4,603	0,034	0,061	88,9
	Holt amortizado	4,611	0,033	0,061	88,9
	ARIMA	4,717	0,034	0,061	88,9
	BATS	5,115	0,035	0,006	94,4
	TBATS	5,375	0,034	0,050	100,0
	STL + ETS	6,192	0,078	0,228	72,2
	ETS	6,294	0,079	0,172	77,8
	Holt	6,294	0,079	0,172	77,8
	SES com <i>drift</i>	6,322	0,070	0,061	88,9
	<i>Naive sazonal</i>	6,931	0,128	0,061	88,9
	Holt-Winters multiplicativo	7,054	0,069	0,050	100,0
	SES	7,977	0,089	0,117	83,3
	DOTM	8,632	0,084	0,117	83,3
	<i>Naive</i>	11,036	0,173	0,050	100,0
	<i>Drift</i>	11,548	0,168	0,050	100,0
	Combinado	12,324	0,186	0,172	77,8
	Média	82,920	0,210	0,950	0,0

A Tabela 3 ilustra que, pela métrica MSIS, ao adotar a estratégia de tratar previamente a sazonalidade, os modelos média, combinado, Holt-Winters multiplicativo, ETS, ARIMA, DOTM e STL + ETS pioram o desempenho; os demais modelos apresentam uma melhora ao utilizar esse procedimento.

Dentre todos os modelos, o que apresenta o menor valor de MSIS é o ARIMA utilizando a série original, com valor igual a 3,920. Já o modelo com menor SPL é o BATS, aplicado também na série original, obtendo SPL igual a 0,031. Além disso, o BATS atinge ACD igual a 0,006 (cobertura de 94,4%), menor valor encontrado dentre todos os modelos. Assim, a Figura 10 apresenta os valores de treino, as previsões intervalares dos dois melhores modelos (ARIMA e BATS aplicados na série original) e os valores de teste.

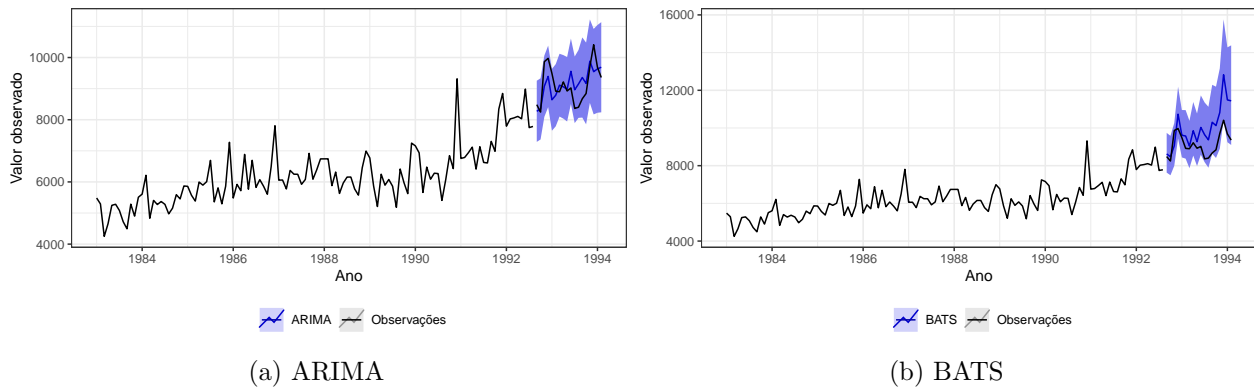


Figura 10 – Melhores previsões intervalares para a série N2539.

Por meio da Figura 10a, percebe-se que as previsões intervalares do modelo ARIMA estão próximas dos valores observados, capturando a tendência de crescimento que foi observada. A partir da Figura 10b, conclui-se que o mesmo ocorreu com as previsões utilizando o modelo BATS, com a distinção de que a amplitude dos últimos intervalos preditos é maior que a do ARIMA.

3.1.2 N2560

A segunda série possui código N2560 (M1159) e descreve o crédito parcelado ao consumidor em aberto, para empresas de gasolina (traduzido do inglês *consumer installment credit outstanding, gasoline companies*). Ela é uma série mensal, do tipo financeira, com 115 valores de treino e 18 de teste. O comportamento da amostra de treino da série N2560 está apresentado na Figura 11.

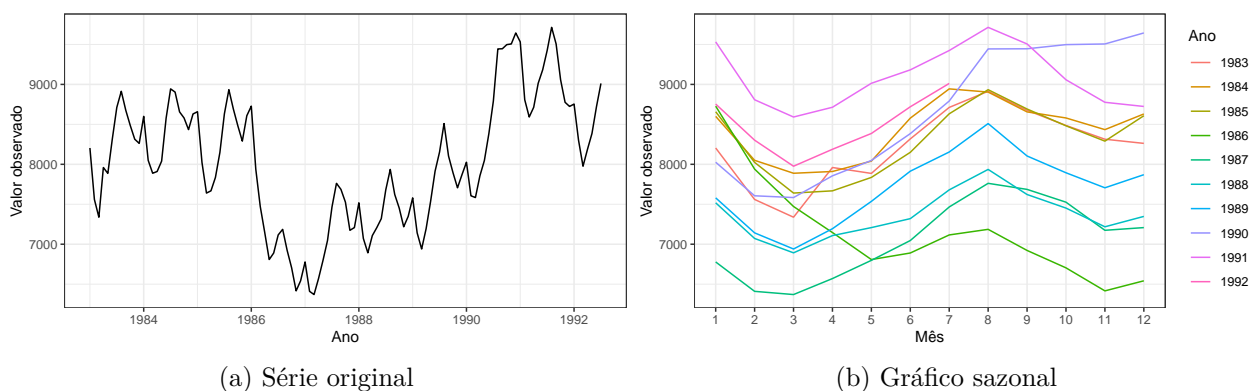


Figura 11 – N2560 - Crédito parcelado ao consumidor em aberto, para empresas de gasolina.

Em relação à tendência, a Figura 11a mostra que o nível da série se manteve aproximadamente constante até 1986. No ano de 1987, o nível da série diminuiu consideravelmente. A partir de 1988 até o último valor observado, ocorreu uma tendência de crescimento. Além disso, a Figura 11b reforça a existência de um comportamento sazonal. Em quase todos os anos, houve

uma diminuição de janeiro até março, seguida por um aumento até agosto. Depois, uma nova diminuição, dessa vez até novembro e, novamente, um aumento, até o próximo mês de janeiro.

3.1.2.1 Previsões pontuais

Nesta seção, os métodos serão utilizados para calcular previsões pontuais para a série N2560. Assim como na Tabela 2, os métodos estão ordenados, dentro de cada tipo de dado, pela métrica MASE, de forma crescente. Mais uma vez, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito.

Tabela 4 – Métricas de avaliação pontual para a série N2560.

Dados	Método	MAPE (%)	sMAPE (%)	MASE	
Série original	ARIMA	2,250	2,235	0,337	
	STL + ETS	2,380	2,391	0,360	
	Holt-Winters multiplicativo	2,473	2,426	0,367	
	TBATS	2,592	2,615	0,393	
	ETS	2,611	2,632	0,396	
	Theta	2,647	2,665	0,400	
	BATS	2,662	2,691	0,404	
	DOTM	2,751	2,780	0,417	
	Holt-Winters aditivo	3,032	3,095	0,464	
	<i>Naive</i> sazonal	3,068	3,061	0,467	
	SES	3,567	3,486	0,525	
	<i>Naive</i>	3,567	3,486	0,525	
	Holt amortizado	3,567	3,486	0,525	
	<i>Drift</i>	3,764	3,652	0,550	
	Combinado	3,794	3,678	0,554	
	SES com <i>drift</i>	4,065	3,927	0,593	
	Holt	4,902	4,703	0,716	
	Média	9,106	9,621	1,398	
	Série sazonalmente ajustada	<i>Drift</i>	2,544	2,552	0,383
		Theta	2,647	2,665	0,400
SES com <i>drift</i>		2,649	2,668	0,400	
STL + ETS		2,703	2,733	0,410	
DOTM		2,751	2,780	0,417	
SES		2,755	2,784	0,417	
<i>Naive</i>		2,755	2,784	0,417	
BATS		2,873	2,912	0,436	
TBATS		2,873	2,912	0,436	
ARIMA		2,960	3,005	0,449	
Holt amortizado		2,992	3,038	0,455	
ETS		3,024	3,072	0,460	
<i>Naive</i> sazonal		3,068	3,061	0,467	
Combinado		3,067	3,122	0,467	
Holt-Winters multiplicativo		3,157	3,066	0,470	
Holt-Winters aditivo		3,331	3,410	0,509	
Holt		3,490	3,584	0,534	
Média		8,271	8,680	1,257	

A partir da Tabela 4, observa-se que os métodos Holt-Winters aditivo e multiplicativo,

ETS, ARIMA, STL + ETS, BATS e TBATS pioram o desempenho ao tratar previamente a sazonalidade. É importante perceber que, com exceção do Holt-Winters multiplicativo e do BATS, os outros métodos citados já haviam piorado seu desempenho com esse tratamento para a série N2539. Além disso, assim como para a série N2539, os métodos *naive* sazonal e Theta têm desempenho idêntico nas duas estratégias, o que pode ser um indicativo de que o desempenho das previsões pontuais desses métodos não é afetado pelo tratamento prévio da sazonalidade, hipótese que será estudada novamente na Seção 3.2; além deles, o DOTM também apresenta performance igual nas duas estratégias. O restante dos métodos apresenta melhora do desempenho, pelas três métricas, ao ajustar a sazonalidade antes de aplicar o método para previsão.

Ao utilizar a série original, o melhor método é o ARIMA (MASE igual a 0,337), seguido pelo STL + ETS (MASE igual a 0,360) e pelo Holt-Winters multiplicativo (MASE igual a 0,367). Além disso, esses três métodos são também os melhores dentre todos os aplicados. Já para a série sazonalmente ajustada, o melhor método é o *drift*, com MASE de 0,383. Logo em seguida, empatados, estão os métodos Theta e SES com *drift*, ambos com MASE de 0,400, porém o Theta apresenta menores valores para o MAPE e sMAPE.

A Figura 12 apresenta o comportamento dos valores de treino, das previsões pontuais do ARIMA aplicado na série original (MASE igual a 0,337) e dos valores de teste.

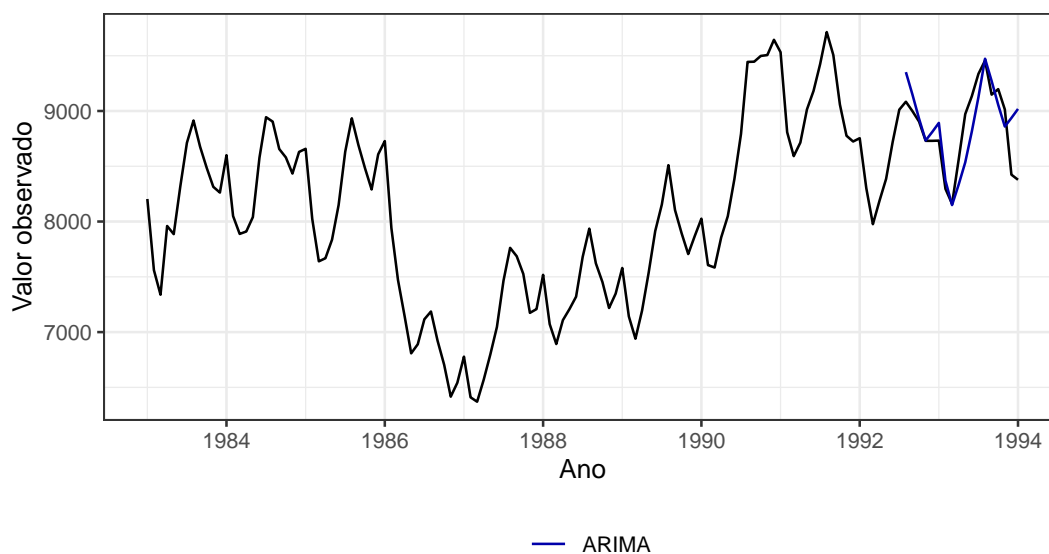


Figura 12 – Melhor previsão pontual para a série N2560.

Por meio da análise do gráfico da Figura 12, pode-se concluir que as previsões do ARIMA aproximam muito bem o comportamento futuro observado da série. Além disso, ele consegue capturar consideravelmente o comportamento sazonal da série. As previsões que estão menos próximas do comportamento observado são as últimas, o que é frequente, pois, ao aumentar o horizonte de previsão, a incerteza também aumenta.

3.1.2.2 Previsões intervalares

Nesta seção, os modelos serão utilizados para construir previsões intervalares para a série N2560, que serão comparadas com os valores de teste por meio das métricas MSIS, SPL, ACD e cobertura. A Tabela 5 apresenta os resultados encontrados. Novamente, os modelos estão ordenados de forma crescente, dentro de cada tipo de dado, pela métrica MSIS, e o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito.

Tabela 5 – Métricas de avaliação intervalar para a série N2560.

Dados	Modelo	MSIS	SPL	ACD	Cobertura (%)	
Série original	DOTM	2,767	0,092	0,050	100,0	
	TBATS	3,427	0,107	0,050	100,0	
	BATS	3,455	0,110	0,050	100,0	
	ETS	3,937	0,120	0,050	100,0	
	ARIMA	4,917	0,137	0,050	100,0	
	Holt-Winters aditivo	5,393	0,172	0,050	100,0	
	Média	5,535	0,238	0,050	100,0	
	STL + ETS	5,571	0,165	0,050	100,0	
	<i>Naive</i>	5,933	0,153	0,050	100,0	
	SES	5,959	0,154	0,050	100,0	
	<i>Naive sazonal</i>	5,969	0,168	0,050	100,0	
	Holt amortizado	6,085	0,158	0,050	100,0	
	<i>Drift</i>	6,215	0,155	0,050	100,0	
	Combinado	6,430	0,160	0,050	100,0	
	Holt	7,247	0,168	0,050	100,0	
	Holt-Winters multiplicativo	7,692	0,209	0,050	100,0	
	SES com <i>drift</i>	7,861	0,196	0,050	100,0	
	Série sazonalmente ajustada	DOTM	2,722	0,089	0,050	100,0
		<i>Naive</i>	2,941	0,094	0,050	100,0
		SES	2,954	0,095	0,050	100,0
<i>Drift</i>		3,080	0,093	0,050	100,0	
SES com <i>drift</i>		3,519	0,109	0,050	100,0	
TBATS		3,766	0,114	0,050	100,0	
BATS		3,766	0,114	0,050	100,0	
ARIMA		3,886	0,126	0,050	100,0	
Holt amortizado		4,813	0,152	0,050	100,0	
Média		5,091	0,217	0,050	100,0	
ETS		5,255	0,166	0,050	100,0	
STL + ETS		5,350	0,164	0,050	100,0	
Holt-Winters aditivo		5,474	0,178	0,050	100,0	
<i>Naive sazonal</i>		6,012	0,170	0,050	100,0	
Holt		6,838	0,220	0,050	100,0	
Combinado		6,950	0,265	0,006	94,4	
Holt-Winters multiplicativo		8,272	0,214	0,050	100,0	

Pela observação da Tabela 5, ao avaliar a métrica MSIS, o ajuste sazonal prévio da série melhora o desempenho dos seguintes modelos: média, *naive*, *drift*, SES, Holt, SES com *drift*, Holt amortizado, ARIMA, DOTM e STL + ETS. Os outros modelos apresentam uma piora no desempenho ao realizar esse procedimento.

Dentre todos os modelos, os únicos que apresentam MSIS abaixo de 3 são: DOTM (série

original e ajustada sazonalmente), *naive* com ajuste sazonal e SES também com ajuste. O modelo DOTM aplicado na série sazonalmente ajustada apresenta os menores valores tanto para o MSIS (2,722) quanto para o SPL (0,089). Por último, quase todos os modelos apresentam um ACD de 0,050 e cobertura de 100%, o que não é o ideal, pois desejava-se uma cobertura de 95%. O único que se diferencia desse valor é o combinado aplicado na série sazonalmente ajustada, com ACD de 0,006 (cobertura de 94,4%).

A Figura 13 ilustra o comportamento observado da série, tanto de treino como de teste, além das previsões intervalares do modelo DOTM aplicado na série sazonalmente ajustada.

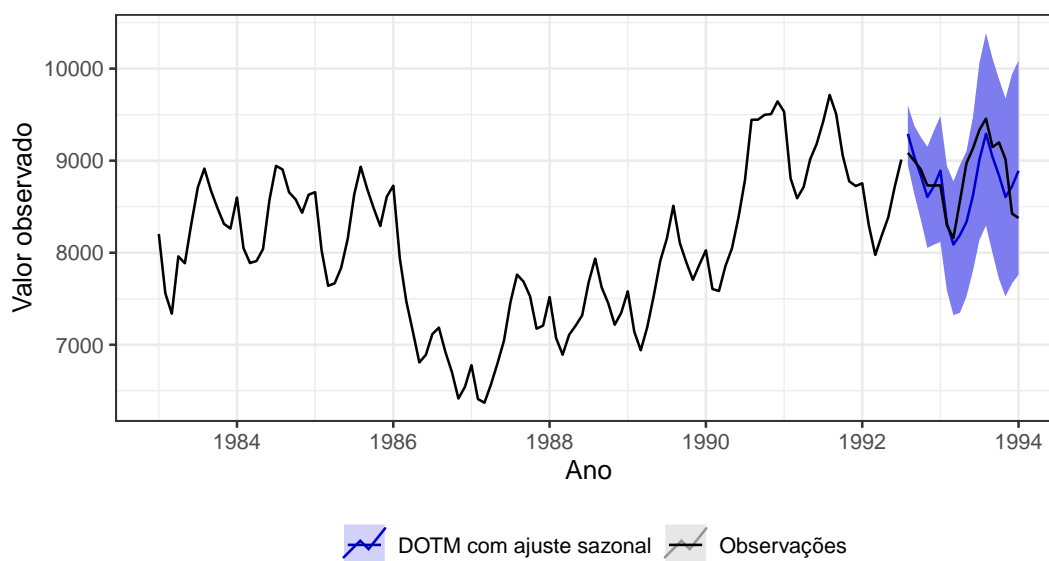


Figura 13 – Melhores previsões intervalares para a série N2560.

A partir da Figura 13, percebe-se que as previsões intervalares do modelo DOTM com ajuste se comportam de forma semelhante ao observado na série, principalmente em relação ao comportamento sazonal. Todos os valores de teste estão contidos nos intervalos preditos (cobertura de 100%). Além disso, as previsões pontuais desse modelo (linha azul) também são bastante razoáveis, pois estão próximas dos valores observados.

3.2 Geral

Nesta seção, todos os modelos descritos na Seção 2.5 serão aplicados ao conjunto completo de séries temporais mensais da competição M3 (Makridakis e Hibon, 2000), equivalente a 1.428 séries. Todos esses modelos serão aplicados tanto na série original como utilizando a estratégia de tratamento prévio da sazonalidade, descrita na Seção 2.4. Além disso, eles serão utilizados para construir previsões pontuais e intervalares, com nível de confiança de 95%.

3.2.1 Previsões pontuais

Esta seção se concentrará em analisar os resultados obtidos pelas previsões pontuais. Após calcular as previsões pontuais para todas as séries mensais utilizando os métodos da Seção 2.5, foram avaliadas as métricas descritas na Seção 2.6.1 para cada série e método. Em seguida, para cada método, calculou-se a média dos valores encontrados de cada métrica, para se obter uma medida do desempenho geral de cada método em todo o conjunto de dados.

A Tabela 6 apresenta os valores médios das métricas de cada método, o seu *ranking* relativo a cada métrica, o percentual de melhoria em relação ao método *naive* e o tempo computacional para realizar as previsões. Os métodos estão ordenados de acordo com seu *ranking* da métrica sMAPE. O melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito. É importante observar que cada método aparece duas vezes na Tabela 6: uma ao aplicá-lo na série original e outra ao aplicá-lo na série sazonalmente ajustada.

Tabela 6 – Métricas das previsões pontuais.

Método	MAPE (%)	sMAPE (%)	MASE	Ranking			% de melhoria			Tempo (min)
				MAPE (%)	sMAPE (%)	MASE	MAPE (%)	sMAPE (%)	MASE	
DOTM com ajuste	19,762	13,739	0,852	7	1	2	29,665	24,431	27,442	0,721
DOTM	19,727	13,743	0,851	6	2	1	29,789	24,408	27,495	0,614
Theta	19,341	13,831	0,862	2	3	5	31,164	23,926	26,660	1,507
Theta com ajuste	19,343	13,834	0,862	3	4	6	31,155	23,907	26,645	1,534
TBATS	21,988	13,842	0,861	19	5	4	21,744	23,865	26,741	24,275
Combinado com ajuste	22,224	13,952	0,872	22	6	10	20,903	23,261	25,733	0,198
TBATS com ajuste	19,633	13,963	0,876	5	7	12	30,122	23,200	25,456	22,025
Holt amortizado com ajuste	22,107	13,998	0,882	20	8	17	21,318	23,008	24,958	0,098
BATS	20,232	14,044	0,880	9	9	15	27,993	22,756	25,070	11,586
BATS com ajuste	18,589	14,058	0,881	1	10	16	33,840	22,679	25,024	10,497
ETS	20,698	14,139	0,865	13	11	7	26,335	22,232	26,373	7,174
ETS com ajuste	19,427	14,208	0,874	4	12	11	30,857	21,852	25,616	7,359
SES com ajuste	20,584	14,256	0,928	12	13	22	26,740	21,586	20,996	0,072
STL + ETS com ajuste	20,225	14,840	0,879	8	14	14	28,019	18,378	25,192	0,268
ARIMA	21,786	14,918	0,867	18	15	8	22,462	17,946	26,189	29,848
STL + ETS	20,511	15,097	0,877	11	16	13	26,997	16,962	25,376	0,245
ARIMA com ajuste	21,153	15,189	0,872	16	17	9	24,714	16,457	25,797	17,826
SES com <i>drift</i> com ajuste	20,358	15,235	0,853	10	18	3	27,545	16,203	27,363	0,105
Holt com ajuste	26,491	16,067	0,912	29	19	20	5,716	11,626	22,360	0,079
SES	24,395	16,219	1,091	26	20	27	13,176	10,790	7,143	0,042
Holt-Winters multiplicativo com ajuste	22,131	16,285	0,930	21	21	23	21,235	10,430	20,821	0,927
Holt-Winters aditivo com ajuste	24,634	16,290	0,895	27	22	18	12,325	10,401	23,844	0,742
Holt amortizado	27,336	16,353	1,117	30	23	28	2,706	10,052	4,891	0,082
Holt-Winters multiplicativo	21,671	16,395	0,928	17	24	21	22,869	9,822	21,008	0,895
Combinado	27,482	16,402	1,119	31	25	29	2,189	9,784	4,774	0,184
SES com <i>drift</i>	23,958	16,694	1,022	24	26	25	14,732	8,180	13,022	0,093
<i>Naive</i> com ajuste	24,382	16,764	1,038	25	27	26	13,223	7,795	11,618	0,094
<i>Naive</i> sazonal	20,926	17,234	1,146	14,5	28,5	31,5	25,521	5,209	2,441	0,071
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	20,926	17,234	1,146	14,5	28,5	31,5	25,521	5,209	2,441	0,092
Holt-Winters aditivo	22,770	17,376	0,903	23	30	19	18,960	4,426	23,095	0,733
<i>Drift</i> com ajuste	25,252	17,572	0,983	28	31	24	10,125	3,350	16,299	0,073
<i>Naive</i>	28,097	18,181	1,175	32	32	33	0,000	0,000	0,000	0,048
Holt	33,128	18,432	1,261	34	33	34	-17,905	-1,382	-7,375	0,068
<i>Drift</i>	29,260	19,068	1,140	33	34	30	-4,138	-4,882	2,959	0,053
Média com ajuste	33,798	25,961	2,179	35	35	35	-20,291	-42,794	-85,527	0,074
Média	36,200	27,124	2,267	36	36	36	-28,840	-49,192	-93,005	0,053

Por meio da Tabela 6, percebe-se que, apesar de existir certa concordância entre os resultados de cada métrica, o *ranking* relativo de performance pode variar de acordo com a métrica de acurácia utilizada. Utilizar métodos estatisticamente sofisticados não necessariamente fornecerá previsões mais precisas, porém, no cenário geral deste conjunto de dados, os métodos mais complexos apresentam resultados melhores do que os mais simples. Além disso, observa-se que os métodos mais simples (vide Seção 2.5.1) estão entre os menos precisos, tanto ao aplicá-los na série original quanto na sazonalmente ajustada. Este fato é um forte argumento contra o uso de métodos tão simples como a previsão pela média, *drift*, *naive* ou *naive* sazonal.

Em relação ao sMAPE, os métodos ETS, ARIMA, Theta, BATS e TBATS são os únicos que apresentam piora no desempenho ao tratar a sazonalidade previamente, o que pode ser consequência da maioria desses métodos já possuir uma estrutura complexa para tratamento da sazonalidade. Assim como foi observado na Seção 3.1, o método *naive* sazonal apresenta resultados idênticos ao ser aplicado na série original ou sazonalmente ajustada. Já o método Theta, que na Seção 3.1 havia apresentado resultados iguais nos dois casos, apresenta resultados bastante próximos, porém um pouco melhores ao utilizar a série original.

A métrica MAPE seleciona o BATS com ajuste sazonal como melhor método, com MAPE médio de 18,589%, o que é uma melhoria de 33,840% em relação ao método *naive*. Ainda a partir do MAPE, o segundo melhor método é o Theta, com MAPE médio igual a 19,341% e uma melhoria em relação ao *naive* de 31,164%. Em terceiro lugar a partir do MAPE, está o Theta com ajuste sazonal, com valor médio igual a 19,343% e melhoria de 31,155%.

Ao avaliar pela métrica sMAPE (a mais utilizada na literatura), o melhor método é o DOTM com ajuste sazonal, com sMAPE médio de 13,739%. Este valor representa uma melhoria de 24,431% em relação ao método *naive*, o que é um incremento bastante considerável. Utilizando esta mesma métrica, o segundo e terceiro melhores métodos são DOTM e Theta com, respectivamente, 13,743% e 13,831%.

Já a métrica MASE seleciona o DOTM como o melhor método, apresentando um valor de 0,851, o que equivale a uma melhora de 27,495% em relação ao *naive*. O segundo melhor método, selecionado pelo MASE, é o DOTM com ajuste sazonal, com MASE médio extremamente próximo ao do DOTM: 0,852. Como terceiro melhor método, esta métrica seleciona o SES com *drift* com ajuste sazonal, com MASE médio de 0,853, valor também bastante próximo ao apresentado pelo DOTM.

Tanto a métrica sMAPE como a MASE selecionam como melhor, um método que apresentou tempo de execução menor que 1 minuto, o que é bastante interessante e possibilita o uso desses métodos em situações em que a previsão de múltiplas séries é necessária, de forma rápida, sistemática e prática.

3.2.1.1 Contexto

É importante analisar como a performance de cada um dos métodos varia de acordo com o contexto em que a série está inserida. Por esse motivo, elaborou-se a Tabela 7, que apresenta o valor médio das métricas de cada método, para cada conjunto de séries, ao separá-las pelo contexto em que está inserida. São apresentadas apenas as métricas sMAPE e MASE, pois são as mais comuns na análise do desempenho de previsão de séries temporais. Os métodos estão ordenados de forma crescente em relação ao sMAPE para o contexto Micro, pois, conforme a Tabela 1, é a classe com o maior número de séries. Mais uma vez, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito. Além disso, a Tabela 8 destaca o método com melhor desempenho para cada contexto, por métrica.

Tabela 7 – Métricas das previsões pontuais por contexto.

Método	sMAPE (%)						MASE					
	Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro	Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro
Theta	8,826	13,587	12,082	6,716	21,404	10,088	0,671	1,133	0,946	1,018	0,693	0,570
Theta com ajuste	8,826	13,587	12,084	6,717	21,413	10,084	0,671	1,133	0,946	1,018	0,693	0,569
Combinado com ajuste	8,139	13,754	12,342	6,793	21,704	9,539	0,738	1,071	0,969	1,026	0,710	0,545
Holt amortizado com ajuste	8,115	13,519	12,326	6,931	21,777	10,115	0,734	1,083	0,975	1,050	0,712	0,569
DOTM com ajuste	6,820	13,196	12,042	6,479	21,798	11,015	0,607	1,102	0,959	0,977	0,707	0,582
DOTM	6,822	13,201	12,012	6,468	21,835	11,043	0,606	1,102	0,956	0,975	0,707	0,584
TBATS	7,510	12,676	12,031	6,943	21,915	10,041	0,718	0,987	0,958	1,015	0,718	0,557
BATS	8,089	12,677	12,069	7,211	22,122	10,606	0,740	1,000	0,961	1,063	0,731	0,590
TBATS com ajuste	7,373	12,622	12,192	7,010	22,159	10,150	0,720	0,994	0,976	1,041	0,730	0,568
SES com ajuste	7,341	14,514	12,167	7,302	22,167	11,335	0,776	1,245	0,976	1,149	0,713	0,695
BATS com ajuste	7,617	12,621	12,297	7,094	22,249	10,236	0,741	0,994	0,981	1,042	0,736	0,574
ETS	7,101	12,699	12,480	6,788	22,612	10,704	0,705	0,988	0,960	1,010	0,734	0,581
ETS com ajuste	7,122	12,695	12,611	6,911	22,628	10,838	0,710	0,994	0,972	1,034	0,732	0,592
STL + ETS com ajuste	7,482	13,052	12,381	7,254	24,045	12,925	0,694	1,007	0,949	1,039	0,759	0,601
Combinado	9,821	14,706	14,878	7,339	24,250	27,812	0,946	1,192	1,260	1,126	0,809	3,155
Holt amortizado	9,377	14,606	14,544	7,562	24,359	27,511	0,892	1,216	1,252	1,163	0,810	2,992
ARIMA	8,546	13,352	11,893	6,630	24,666	13,196	0,776	1,043	0,933	0,940	0,767	0,621
STL + ETS	7,162	13,263	12,507	7,208	24,779	12,866	0,660	1,021	0,941	1,029	0,769	0,594
SES	8,105	15,260	14,222	7,797	24,880	20,629	0,832	1,337	1,240	1,237	0,819	1,600
SES com <i>drift</i> com ajuste	9,317	12,961	12,186	6,775	25,356	12,288	0,618	1,049	0,946	0,913	0,774	0,577
ARIMA com ajuste	8,399	13,542	11,966	6,415	25,514	13,494	0,768	1,067	0,945	0,903	0,789	0,635
Holt-Winters multiplicativo com ajuste	10,179	15,200	13,821	7,209	25,858	15,344	0,820	1,170	1,035	0,969	0,811	0,679
Holt com ajuste	11,120	13,990	13,424	7,059	25,924	13,596	0,850	1,012	1,015	0,974	0,817	0,602
Holt-Winters multiplicativo	10,257	14,835	14,131	7,229	26,066	15,230	0,822	1,140	1,026	0,978	0,814	0,674
SES com <i>drift</i>	10,146	13,896	14,292	7,333	26,194	23,466	0,708	1,166	1,214	1,014	0,838	1,774
<i>Naive</i> sazonal	9,260	17,455	14,609	9,195	26,208	16,925	1,057	1,530	1,146	1,474	0,844	1,050
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	9,260	17,455	14,609	9,195	26,208	16,925	1,057	1,530	1,146	1,474	0,844	1,050
Holt	13,895	14,741	16,081	7,583	27,353	37,288	1,271	1,121	1,385	1,076	0,896	5,275
Holt-Winters aditivo com ajuste	9,566	13,242	12,664	7,177	27,584	14,160	0,793	1,014	0,963	0,949	0,828	0,625
<i>Naive</i> com ajuste	7,374	15,203	13,335	7,820	28,005	14,362	0,787	1,284	1,043	1,167	0,960	0,806
<i>Naive</i>	8,027	15,964	15,432	8,398	29,057	23,247	0,834	1,373	1,301	1,269	0,988	1,672
<i>Drift</i> com ajuste	9,285	13,589	13,689	7,303	30,397	16,017	0,616	1,081	1,051	0,940	1,048	0,726
Holt-Winters aditivo	9,870	13,349	12,975	7,201	30,497	14,343	0,773	1,014	0,960	0,953	0,859	0,625
<i>Drift</i>	10,113	14,456	15,895	7,994	31,345	25,970	0,697	1,185	1,339	1,072	1,066	1,768
Média com ajuste	16,880	36,762	20,390	19,850	32,751	25,791	2,928	3,357	1,885	3,398	1,095	1,767
Média	17,746	36,830	21,849	19,940	34,104	33,454	2,983	3,373	2,029	3,420	1,151	2,449

A partir da Tabela 7, percebe-se que, pelo sMAPE, o melhor método para o contexto Demográfico é o DOTM com ajuste sazonal, com valor igual a 6,820%. Ao utilizar o MASE como critério, seleciona-se o DOTM, com MASE de 0,606. No contexto Financeiro, o melhor método pelo sMAPE é o BATS com ajuste sazonal, com 12,621% e o melhor pelo MASE é o TBATS, com 0,987. Já para o contexto Industrial, a partir de ambas as métricas, seleciona-se o ARIMA como melhor método, com sMAPE de 11,893% e MASE de 0,933.

Para séries do contexto Macro, o melhor método é novamente o ARIMA, porém com ajuste sazonal. Ele apresenta sMAPE de 6,415% e MASE de 0,903. No contexto Micro, o método de melhor desempenho, por ambas as métricas, é o Theta, com sMAPE de 21,404% e MASE de 0,693. Por último, para o contexto Outro, as duas métricas selecionam o combinado com ajuste sazonal como melhor método, apresentando sMAPE de 9,539% e MASE de 0,545.

Tabela 8 – Melhores métodos para previsões pontuais por métrica e contexto.

Métrica	Contexto					
	Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro
MAPE	ETS	<i>Naive</i> sazonal	ARIMA	TBATS com ajuste	Theta	Combinado com ajuste
sMAPE	DOTM com ajuste	BATS com ajuste	ARIMA	ARIMA com ajuste	Theta	Combinado com ajuste
MASE	DOTM	TBATS	ARIMA	ARIMA com ajuste	Theta	Combinado com ajuste

A Tabela 8 pode servir como um instrumento de seleção do método para previsão de séries temporais de cada contexto. Nos contextos Industrial, Micro e Outro, todas as métricas concordam em relação ao método de melhor desempenho: no Industrial, seleciona-se o ARIMA; no Micro, seleciona-se o Theta; no contexto Outro, seleciona-se o combinado com ajuste sazonal.

Para o contexto Macro, o sMAPE e o MASE concordam e o MAPE apresenta um resultado diferente. Utilizando as duas primeiras métricas, seleciona-se o ARIMA com ajuste sazonal para o contexto Macro. Por último, nos contextos Demográfico e Financeiro, cada métrica selecionou um método diferente. Como o MAPE é a pior métrica dentre elas, ele não será o critério utilizado. Dentre os restantes, é preferível um método com menor tempo de execução, isto é, seleciona-se o DOTM para o contexto Demográfico e o BATS com ajuste sazonal para o Financeiro.

3.2.1.2 Sazonalidade

Para estudar como o desempenho dos métodos se comporta em relação à presença de sazonalidade na série, construiu-se a Tabela 9, que apresenta o valor médio das métricas de cada método separadamente para dois grupos: séries sazonais e não sazonais. O critério utilizado para classificar uma série como sazonal é o mesmo que foi utilizado no procedimento descrito na Seção 2.4; dessa forma, são exibidos apenas os resultados dos métodos aplicados na série original. Assim como na Tabela 7, são apresentadas apenas as métricas sMAPE e MASE. Os métodos estão ordenados de forma crescente em relação ao sMAPE para o grupo não sazonal, pois existem mais séries não sazonais no conjunto de dados. Novamente, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito. Por último, a Tabela 10 apresenta o método com melhor performance por métrica, contexto e sazonalidade.

Tabela 9 – Métricas das previsões pontuais em relação à presença de sazonalidade.

Método	sMAPE (%)		MASE	
	Sazonal	Não sazonal	Sazonal	Não sazonal
DOTM	10,156	18,037	0,845	0,859
Theta	10,274	18,088	0,867	0,855
TBATS	9,954	18,496	0,833	0,894
Combinado	14,641	18,510	1,315	0,883
Holt amortizado	14,536	18,529	1,301	0,897
BATS	10,227	18,612	0,866	0,898
SES	14,183	18,657	1,244	0,907
ETS	10,343	18,682	0,845	0,889
ARIMA	11,224	19,340	0,838	0,902
SES com <i>drift</i>	14,221	19,653	1,159	0,857
STL + ETS	10,774	20,271	0,843	0,917
Holt	15,848	21,525	1,517	0,956
<i>Naive</i>	14,947	22,051	1,291	1,036
Holt-Winters aditivo	13,109	22,484	0,871	0,942
Holt-Winters multiplicativo	11,172	22,647	0,868	1,000
<i>Naive</i> sazonal	12,695	22,667	1,158	1,132
<i>Drift</i>	14,969	23,975	1,234	1,028
Média	26,054	28,406	2,782	1,651

Por meio da Tabela 9, conclui-se que, a partir das métricas sMAPE e MASE, o método que apresenta o melhor desempenho na previsão de séries temporais mensais sazonais é o TBATS,

com sMAPE de 9,954% e MASE de 0,833, sendo o único método que possui sMAPE abaixo de 10%. Em relação às séries não sazonais, a métrica sMAPE seleciona o DOTM como aquele de melhor desempenho, com valor de 18,037%; já a métrica MASE seleciona o método Theta, com MASE igual a 0,855.

É interessante observar que, muito próximo ao MASE obtido pelo Theta para séries não sazonais, está o método SES com *drift*, com MASE de 0,857. A proximidade desses dois resultados pode ser consequência do fato de que o método Theta está diretamente relacionado ao método SES com *drift*, como foi demonstrado em Hyndman e Billah (2003).

Tabela 10 – Melhores métodos para previsões pontuais por métrica, contexto e sazonalidade.

Métrica	Sazonalidade	Contexto					
		Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro
MAPE	Sazonal	STL + ETS	<i>Naive</i> sazonal	ARIMA	Holt-Winters multiplicativo	Theta	TBATS
	Não sazonal	ETS	ETS	Theta	Theta	Theta	Combinado
sMAPE	Sazonal	STL + ETS	TBATS	ARIMA	Holt-Winters aditivo	TBATS	TBATS
	Não sazonal	DOTM	BATS	SES com <i>drift</i>	DOTM	Theta	Combinado
MASE	Sazonal	DOTM	TBATS	ARIMA	Holt-Winters aditivo	TBATS	TBATS
	Não sazonal	DOTM	Holt	SES com <i>drift</i>	SES com <i>drift</i>	Theta	Combinado

A partir da Tabela 10, é possível selecionar o método de melhor desempenho para previsões pontuais considerando, de forma simultânea, o contexto da série, a presença ou não de sazonalidade e a métrica utilizada como critério. Para as séries sazonais, as três métricas apresentadas selecionam o mesmo método como o melhor nos contextos Industrial e Outro. Já para as não sazonais, essa concordância ocorre apenas nos contextos Micro e Outro. Para o restante de combinações de contexto e sazonalidade, é importante fazer uma cautelosa seleção da métrica utilizada como critério, pois diferentes métricas podem resultar em diferentes métodos definidos como os melhores para realizar previsões pontuais.

3.2.1.3 Horizonte de previsão

Além do contexto e da sazonalidade, outro fator que pode influenciar na precisão de cada método é o horizonte de previsão desejado. Alguns métodos podem ser mais precisos para previsões mais curtas e outros para previsões mais longas. Com o objetivo de estudar esse fator, o desempenho dos métodos será avaliado para cinco horizontes de previsão: 1 a 6, 7 a 12, 13 a 18, 1 a 12 e 1 a 18 meses à frente. Dessa forma, a Tabela 11 apresenta o valor médio das métricas de cada método, para cada um dos horizontes de previsão descritos. Assim como nas Tabelas 7 e 9, são apresentadas apenas as métricas sMAPE e MASE. Os métodos estão ordenados de forma crescente em relação ao sMAPE para o horizonte 1-18, com o intuito de apresentar a mesma ordenação da Tabela 6. Mais uma vez, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito. Em seguida, a Tabela 12 apresenta o método com melhor performance por métrica, contexto e horizonte de previsão.

Tabela 11 – Métricas das previsões pontuais por horizonte de previsão.

Método	sMAPE (%)					MASE				
	1-6	7-12	13-18	1-12	1-18	1-6	7-12	13-18	1-12	1-18
DOTM com ajuste	11,757	13,133	16,328	12,445	13,739	0,643	0,837	1,077	0,740	0,853
DOTM	11,753	13,135	16,342	12,444	13,743	0,643	0,836	1,076	0,740	0,852
Theta	11,687	13,181	16,624	12,434	13,831	0,644	0,842	1,098	0,743	0,862
Theta com ajuste	11,691	13,186	16,626	12,438	13,834	0,644	0,842	1,098	0,743	0,862
TBATS	11,604	13,282	16,641	12,443	13,842	0,627	0,844	1,111	0,735	0,861
Combinado com ajuste	11,772	13,293	16,790	12,533	13,952	0,644	0,852	1,121	0,748	0,872
TBATS com ajuste	11,650	13,508	16,731	12,579	13,963	0,636	0,865	1,126	0,751	0,876
Holt amortizado com ajuste	11,806	13,415	16,772	12,611	13,998	0,649	0,866	1,130	0,757	0,882
BATS	11,641	13,494	16,996	12,568	14,044	0,632	0,864	1,145	0,748	0,880
BATS com ajuste	11,654	13,587	16,932	12,621	14,058	0,637	0,872	1,134	0,754	0,881
ETS	11,844	13,395	17,177	12,620	14,139	0,636	0,843	1,115	0,740	0,865
ETS com ajuste	11,835	13,612	17,177	12,723	14,208	0,646	0,858	1,118	0,752	0,874
SES com ajuste	12,060	13,621	17,089	12,840	14,256	0,672	0,909	1,203	0,791	0,928
STL + ETS com ajuste	12,494	14,061	17,964	13,277	14,840	0,656	0,853	1,128	0,754	0,879
ARIMA	12,340	13,898	18,517	13,119	14,918	0,635	0,838	1,128	0,737	0,867
STL + ETS	12,883	14,177	18,231	13,530	15,097	0,656	0,848	1,125	0,752	0,877
ARIMA com ajuste	12,213	14,689	18,664	13,451	15,189	0,639	0,861	1,115	0,750	0,872
SES com <i>drift</i> com ajuste	12,228	14,660	18,817	13,444	15,235	0,644	0,838	1,078	0,741	0,853
Holt com ajuste	12,524	15,387	20,291	13,955	16,067	0,654	0,890	1,193	0,772	0,912
SES	14,479	14,691	19,487	14,585	16,219	0,872	1,022	1,379	0,947	1,091
Holt-Winters multiplicativo com ajuste	12,874	15,500	20,480	14,187	16,285	0,678	0,895	1,218	0,786	0,930
Holt-Winters aditivo com ajuste	13,127	15,714	20,029	14,420	16,290	0,664	0,868	1,152	0,766	0,895
Holt amortizado	14,395	15,063	19,601	14,729	16,353	0,883	1,073	1,397	0,978	1,117
Holt-Winters multiplicativo	12,923	15,576	20,686	14,250	16,395	0,676	0,893	1,215	0,784	0,928
Combinado	14,278	15,020	19,907	14,649	16,402	0,870	1,065	1,421	0,967	1,119
SES com <i>drift</i>	14,287	15,507	20,287	14,897	16,694	0,840	0,968	1,257	0,904	1,022
<i>Naive</i> com ajuste	14,806	16,238	19,246	15,522	16,764	0,795	1,025	1,295	0,910	1,038
<i>Naive</i> sazonal	15,870	15,737	20,094	15,804	17,234	0,966	1,009	1,464	0,987	1,146
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	15,870	15,737	20,094	15,804	17,234	0,966	1,009	1,464	0,987	1,146
Holt-Winters aditivo	14,298	16,112	21,719	15,205	17,376	0,673	0,867	1,171	0,770	0,903
<i>Drift</i> com ajuste	15,036	17,027	20,653	16,031	17,572	0,778	0,970	1,202	0,874	0,983
<i>Naive</i>	16,648	16,838	21,056	16,743	18,181	0,965	1,115	1,444	1,040	1,175
Holt	14,968	17,225	23,103	16,097	18,432	0,908	1,207	1,669	1,057	1,261
<i>Drift</i>	16,820	17,908	22,478	17,364	19,068	0,956	1,087	1,377	1,022	1,140
Média com ajuste	24,363	25,548	27,972	24,956	25,961	1,959	2,179	2,400	2,069	2,179
Média	26,002	25,857	29,514	25,930	27,124	2,076	2,216	2,509	2,146	2,267

Pela Tabela 11, percebe-se que, a partir das métricas exibidas, o TBATS é o de melhor desempenho para horizontes curtos (1 a 6 meses), com sMAPE de 11,604% e MASE de 0,627. Para horizontes médios e longos (7 a 12 e 13 a 18 meses), o sMAPE seleciona o DOTM com ajuste como melhor método, com valores iguais a, respectivamente, 13,133% e 16,328%. Já o MASE seleciona o DOTM, com 0,836 para horizontes médios e 1,076 para longos. Para 12 meses à frente, o sMAPE seleciona o método Theta como o melhor, com 12,434%. Já o MASE seleciona o TBATS, com 0,735. Para 18 meses à frente, os resultados são iguais aos do cenário geral da Tabela 6: sMAPE seleciona o DOTM com ajuste e o MASE seleciona o DOTM.

Tabela 12 – Melhores métodos para previsões pontuais por métrica, contexto e horizonte.

Métrica	Horizonte	Contexto					
		Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro
sMAPE	1-6	ETS	ETS com ajuste	ARIMA	ARIMA com ajuste	Theta	Combinado com ajuste
	7-12	DOTM	ETS	ARIMA	DOTM	Theta	Combinado com ajuste
	13-18	DOTM com ajuste	BATS com ajuste	Theta	ARIMA com ajuste	Theta	Combinado com ajuste
	1-12	DOTM	ETS	ARIMA	ARIMA com ajuste	Theta	Combinado com ajuste
	1-18	DOTM com ajuste	BATS com ajuste	ARIMA	ARIMA com ajuste	Theta	Combinado com ajuste
MASE	1-6	STL + ETS	ETS	ARIMA	ARIMA com ajuste	TBATS	Combinado com ajuste
	7-12	DOTM	Holt-Winters aditivo	ARIMA	SES com <i>drift</i> com ajuste	Theta	Combinado com ajuste
	13-18	DOTM	BATS com ajuste	Theta	SES com <i>drift</i> com ajuste	Theta	Combinado com ajuste
	1-12	DOTM	ETS	ARIMA	ARIMA com ajuste	Theta	Combinado com ajuste
	1-18	DOTM	TBATS	ARIMA	ARIMA com ajuste	Theta	Combinado com ajuste

A Tabela 12 mostra que, nos contextos Demográfico e Financeiro, cada combinação de horizonte e métrica pode levar a uma escolha diferente do melhor método. Para o Industrial, as duas métricas concordam em todos os horizontes: o ARIMA é o melhor para horizontes curtos, médios, 12 e 18 meses à frente; para horizontes longos, o Theta supera o ARIMA. No contexto Macro, o ARIMA com ajuste é o melhor método na maioria dos horizontes, porém também aparece o DOTM e o SES com *drift* com ajuste. Em relação ao Micro, o Theta possui a melhor performance para todos os horizontes e métricas, com exceção dos horizontes curtos e métrica MASE, em que o TBATS é o melhor. Por último, em todo o contexto Outro, o combinado com ajuste apresenta o melhor desempenho.

3.2.2 Previsões intervalares

Nesta seção, será realizada uma análise do desempenho das previsões intervalares dos modelos estatísticos. Foram obtidas previsões intervalares para todas as séries mensais do conjunto de dados, tanto com a série original como a partir da sazonalmente ajustada. Em seguida, foram avaliadas as métricas apresentadas na Seção 2.6.2 para cada série e modelo. Por último, para cada modelo, calculou-se a média de cada métrica.

A Tabela 13 apresenta os valores médios das métricas de cada modelo, o seu *ranking* relativo a cada métrica, o percentual de melhoria em relação ao *naive* e o tempo computacional para realizar as previsões. Os modelos estão ordenados de acordo com seu *ranking* da métrica MSIS. O melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito.

Tabela 13 – Métricas das previsões intervalares.

Modelo	MSIS	SPL	ACD	Ranking			Cobertura (%)	% de melhoria			Tempo (min)
				MSIS	SPL	ACD		MSIS	SPL	ACD	
ETS	6,342	0,174	0,030	1	1	9	92,032	51,185	31,825	-97,719	7,174
ETS com ajuste	6,610	0,178	0,040	2	2	18	90,982	49,125	30,176	-167,703	7,359
Combinado com ajuste	6,885	0,184	0,042	3	7	19	90,799	47,004	27,968	-179,886	0,198
Holt-Winters aditivo	6,950	0,220	0,038	4	20	14	91,223	46,510	13,764	-151,633	0,733
STL + ETS	7,001	0,183	0,070	5	6	26	88,014	46,114	28,079	-365,474	0,245
Holt-Winters aditivo com ajuste	7,012	0,219	0,039	6	19	15	91,056	46,031	14,010	-162,779	0,742
STL + ETS com ajuste	7,030	0,183	0,070	7	4	25	88,029	45,888	28,282	-364,438	0,268
ARIMA	7,062	0,226	0,035	8	21	13	91,453	45,643	11,416	-136,340	29,848
SES com <i>drift</i> com ajuste	7,067	0,205	0,058	9	16	22	89,247	45,607	19,475	-283,307	0,105
TBATS	7,083	0,186	0,071	10	8	27	87,936	45,483	27,096	-370,658	24,275
Holt amortizado com ajuste	7,178	0,199	0,050	11	12	21	89,998	44,750	22,005	-233,281	0,098
BATS com ajuste	7,194	0,186	0,071	12	9	28	87,901	44,627	27,069	-372,991	10,497
TBATS com ajuste	7,195	0,188	0,073	13	10	29	87,679	44,623	26,307	-387,766	22,025
ARIMA com ajuste	7,269	0,230	0,049	14	23	20	90,142	44,051	9,957	-223,691	17,826
Holt com ajuste	7,292	0,229	0,040	15	22	16	90,990	43,877	10,150	-167,185	0,079
DOTM	7,599	0,200	0,075	16	13	30	87,481	41,514	21,470	-400,985	0,614
DOTM com ajuste	7,610	0,205	0,076	17	15	31	87,442	41,430	19,688	-403,577	0,721
SES com ajuste	7,942	0,181	0,079	18	3	32	87,134	38,870	29,099	-424,054	0,072
SES com <i>drift</i>	8,399	0,215	0,040	19	17	17	90,986	35,351	15,700	-167,444	0,093
<i>Naive</i> sazonal	8,605	0,242	0,019	20	26	4	93,149	33,771	4,955	-23,328	0,071
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	8,641	0,242	0,020	21	25	5	93,021	33,488	5,009	-31,882	0,092
Combinado	8,819	0,201	0,025	22	14	6	92,456	32,123	21,213	-69,466	0,184
SES	9,050	0,194	0,058	23	11	23	89,181	30,347	23,927	-287,714	0,042
Holt amortizado	9,070	0,216	0,034	24	18	12	91,569	30,190	15,397	-128,564	0,082
Holt	10,001	0,250	0,026	25	27	7	92,351	23,026	2,092	-76,464	0,068
<i>Drift</i> com ajuste	10,974	0,267	0,005	26	29	2	94,549	15,537	-4,905	69,984	0,073
<i>Naive</i> com ajuste	11,192	0,236	0,027	27	24	8	92,270	13,857	7,488	-81,908	0,094
<i>Naive</i>	12,992	0,255	0,015	28	28	3	93,499	0,000	0,000	0,000	0,048
<i>Drift</i>	13,005	0,281	0,003	29	30	1	95,316	-0,096	-10,312	78,953	0,053
Média com ajuste	15,665	0,488	0,149	30	31	34	80,143	-20,573	-91,554	-889,839	0,074
Média	15,945	0,492	0,134	31	32	33	81,567	-22,727	-93,007	-794,971	0,053
BATS	$1,853 \cdot 10^4$	0,183	0,063	32	5	24	88,725	$-1,425 \cdot 10^5$	28,125	-318,040	11,586
Holt-Winters multiplicativo	$6,566 \cdot 10^{30}$	$3,327 \cdot 10^{29}$	0,030	33,5	33,5	10	92,025	$-5,054 \cdot 10^{31}$	$-1,305 \cdot 10^{32}$	-98,237	0,895
Holt-Winters multiplicativo com ajuste	$6,566 \cdot 10^{30}$	$3,327 \cdot 10^{29}$	0,034	33,5	33,5	11	91,581	$-5,054 \cdot 10^{31}$	$-1,305 \cdot 10^{32}$	-127,786	0,927

Novamente, assim como a Tabela 6, a Tabela 13 mostra que, apesar de existir certa concordância entre os resultados de cada métrica, o *ranking* relativo de performance pode variar

de acordo com a métrica de acurácia utilizada.

Outro fato que deve ser destacado é que 3 modelos apresentam desempenhos extremamente inferiores aos demais, e isso se deve ao fato de que, como o valor apresentado na Tabela 13 é a média da métrica em todo o conjunto de dados, caso o modelo apresente um desempenho muito ruim para alguma série e, dessa forma, obtenha uma métrica com valor muito elevado, isso impactará a média e, conseqüentemente, o desempenho geral daquele modelo. Isso ocorreu com o modelo de Holt-Winters multiplicativo (com ou sem ajuste sazonal) nas métricas MSIS e SPL, e também com o BATS, porém apenas na métrica MSIS.

Além disso, a Tabela 13 ilustra algo que já havia sido apresentado na Tabela 6: os modelos mais simples (vide Seção 2.5.1) estão posicionados entre os menos precisos, tanto ao aplicá-los na série original quanto na sazonalmente ajustada, pois o *ranking* relativo desses modelos (para MSIS ou SPL) é sempre maior ou igual a 20. Com isso, o argumento contra o uso de modelos tão simples é reforçado também ao avaliar as previsões intervalares.

Os modelos *naive* sazonal, Holt-Winters aditivo, ETS, ARIMA, DOTM, STL + ETS e TBATS pioram o desempenho ao utilizar a estratégia de tratar a sazonalidade antes de ajustar o modelo. O modelo Holt-Winters multiplicativo apresenta o mesmo resultado ao tratar previamente ou não a sazonalidade. Já os demais modelos melhoram o desempenho a partir do tratamento prévio da sazonalidade.

As métricas MSIS e SPL selecionam os mesmos modelos como os 2 melhores: em primeiro lugar, o ETS, com MSIS de 6,342 e SPL de 0,174 e, em segundo lugar, o ETS com ajuste sazonal, com MSIS de 6,610 e SPL de 0,178. A partir da métrica MSIS, o terceiro melhor modelo é o combinado com ajuste, com valor médio igual a 6,885. Já a partir do SPL, o terceiro melhor modelo é o SES com ajuste sazonal, com valor médio de 0,181.

É importante observar o incrível nível de melhora ao adotar o modelo ETS em relação ao *benchmark naive*: a métrica MSIS diminui em 51,185% e a métrica SPL diminui em 31,825%, o que é uma melhora considerável. O tempo de execução desse modelo (para este conjunto de dados) é de pouco mais de 7 minutos, sendo viável de aplicá-lo em situações cotidianas reais. Além disso, o ETS apresentou cobertura média de 92,032%, que é o valor mais próximo de 95% (objetivo inicial) dentre os 10 melhores modelos em relação ao MSIS ou SPL.

3.2.2.1 Contexto

De forma similar ao realizado com as previsões pontuais, a performance de cada modelo será avaliada pelo contexto em que a série está inserida. Desta forma, foi construída a Tabela 14, que apresenta o valor médio das métricas de cada modelo, ao separar as séries pelo contexto. São exibidas apenas as métricas MSIS e SPL, pois elas consideram não só a cobertura das predições, mas também a amplitude dos intervalos. Os modelos estão ordenados de forma crescente em relação ao MSIS para o contexto Micro, pois, conforme a Tabela 1, é a classe com maior número de séries. Novamente, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito. Além disso, a Tabela 15 destaca o modelo com melhor desempenho para cada contexto, por métrica.

Tabela 14 – Métricas das previsões intervalares por contexto.

Modelo	MSIS						SPL					
	Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro	Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro
ETS com ajuste	5,420	7,255	8,287	8,202	4,687	4,553	0,257	0,295	0,153	0,307	0,052	0,218
ETS	5,361	7,500	7,876	7,401	4,706	3,922	0,254	0,291	0,148	0,296	0,053	0,213
BATS	$2,383 \cdot 10^5$	6,389	8,424	10,107	4,837	4,224	0,209	0,257	0,153	0,361	0,060	0,173
BATS com ajuste	5,561	6,385	8,794	10,510	4,862	4,029	0,218	0,285	0,153	0,359	0,059	0,170
TBATS	5,816	7,131	8,317	10,089	4,914	3,468	0,225	0,248	0,154	0,369	0,063	0,160
TBATS com ajuste	5,701	6,248	8,627	10,585	4,944	4,000	0,232	0,257	0,153	0,374	0,061	0,164
SES com ajuste	6,774	13,951	8,267	10,070	4,972	5,901	0,255	0,335	0,157	0,237	0,062	0,489
Combinado com ajuste	5,650	9,118	8,263	8,129	4,998	4,188	0,251	0,288	0,161	0,316	0,065	0,175
DOTM	5,136	12,407	8,492	9,619	5,066	4,678	0,193	0,526	0,162	0,276	0,068	0,305
DOTM com ajuste	5,252	12,371	8,568	9,526	5,078	4,795	0,214	0,537	0,162	0,280	0,068	0,325
Holt amortizado com ajuste	5,770	9,031	8,523	9,031	5,084	4,353	0,258	0,306	0,163	0,365	0,069	0,194
SES com <i>drift</i> com ajuste	5,092	10,420	7,950	8,279	5,350	4,635	0,182	0,500	0,167	0,297	0,078	0,294
ARIMA	7,294	8,402	7,933	8,432	5,432	3,881	0,438	0,312	0,161	0,412	0,073	0,223
ARIMA com ajuste	7,304	8,859	8,274	8,606	5,456	4,812	0,434	0,316	0,159	0,424	0,076	0,232
STL + ETS com ajuste	5,562	7,788	8,136	8,784	5,463	4,714	0,262	0,281	0,153	0,309	0,067	0,234
Holt com ajuste	6,509	8,896	8,659	8,473	5,558	4,422	0,332	0,314	0,179	0,435	0,081	0,205
STL + ETS	5,655	8,153	7,957	8,419	5,662	4,217	0,262	0,281	0,151	0,306	0,072	0,229
Holt-Winters aditivo com ajuste	6,043	8,364	8,091	7,926	5,729	4,586	0,339	0,282	0,164	0,413	0,084	0,205
Holt-Winters aditivo	6,053	8,311	7,851	7,843	5,840	4,034	0,336	0,284	0,166	0,412	0,086	0,201
Holt-Winters multiplicativo com ajuste	$8,447 \cdot 10^{31}$	14,294	8,862	7,266	5,972	6,771	$4,280 \cdot 10^{30}$	0,538	0,180	0,350	0,056	0,232
Holt-Winters multiplicativo	$8,447 \cdot 10^{31}$	13,892	762,010	7,245	6,024	6,872	$4,280 \cdot 10^{30}$	0,525	16,725	0,350	0,056	0,233
SES	7,464	13,934	10,094	10,443	6,028	11,288	0,270	0,341	0,178	0,248	0,071	0,517
Combinado	7,681	10,019	11,139	8,569	6,029	19,929	0,276	0,300	0,190	0,322	0,074	0,254
Média com ajuste	17,622	33,395	14,084	23,220	6,039	14,628	1,235	0,971	0,189	0,743	0,059	1,853
Holt amortizado	7,621	10,198	11,199	9,664	6,105	18,810	0,281	0,322	0,190	0,372	0,078	0,265
Média	18,052	33,501	14,195	23,406	6,325	16,653	1,235	0,973	0,196	0,745	0,061	1,871
SES com <i>drift</i>	6,601	10,908	10,151	8,651	6,348	11,180	0,202	0,485	0,187	0,301	0,086	0,325
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	7,145	11,938	8,813	10,994	6,457	7,336	0,429	0,477	0,171	0,371	0,083	0,320
<i>Naive</i> sazonal	7,223	11,961	8,622	10,997	6,574	6,235	0,429	0,478	0,170	0,372	0,085	0,312
Holt	9,646	9,754	12,696	8,904	6,589	31,808	0,359	0,330	0,215	0,437	0,090	0,345
<i>Naive</i> com ajuste	7,146	12,850	10,127	8,800	13,930	11,437	0,274	0,356	0,194	0,256	0,171	0,555
<i>Naive</i>	8,244	13,903	13,765	10,620	14,898	12,489	0,294	0,371	0,227	0,281	0,181	0,548
<i>Drift</i> com ajuste	5,929	10,442	10,456	7,370	15,090	10,651	0,211	0,566	0,202	0,324	0,187	0,370
<i>Drift</i>	7,687	11,728	14,292	9,591	16,116	11,773	0,234	0,544	0,233	0,342	0,198	0,360

Por meio da Tabela 14, fica evidente que, a partir de ambas as métricas, o melhor modelo para o contexto Demográfico é o SES com *drift* com ajuste sazonal, com MSIS de 5,092 e SPL de 0,182. No contexto Financeiro, o melhor modelo pelo MSIS é o TBATS com ajuste sazonal, que obteve 6,248 e o melhor pelo SPL é o TBATS, com 0,248. Para o contexto Industrial, o MSIS seleciona o Holt-Winters aditivo como melhor modelo, com a métrica assumindo 7,851; já o SPL seleciona o ETS, com valor médio igual a 0,148.

Para as séries do contexto Macro, o melhor modelo pelo MSIS é o Holt-Winters multiplicativo, com 7,245 e, pelo SPL, é o SES com ajuste sazonal, que apresenta valor médio igual a 0,237. No contexto Micro, o modelo de melhor desempenho, por ambas as métricas, é o ETS com ajuste sazonal, com MSIS de 4,687 e SPL de 0,052. Por fim, para o contexto Outro, MSIS e SPL selecionam o TBATS como o melhor modelo, com valores respectivos de 3,468 e 0,160.

Tabela 15 – Melhores modelos para previsões intervalares por métrica e contexto.

Métrica	Contexto					
	Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro
ACD	Holt-Winters aditivo com ajuste	Holt-Winters multiplicativo	SES com <i>drift</i>	Holt-Winters multiplicativo	ETS	BATS
MSIS	SES com <i>drift</i> com ajuste	TBATS com ajuste	Holt-Winters aditivo	Holt-Winters multiplicativo	ETS com ajuste	TBATS
SPL	SES com <i>drift</i> com ajuste	TBATS	ETS	SES com ajuste	ETS com ajuste	TBATS

Assim como a Tabela 8, a Tabela 15 pode servir como um instrumento de seleção do modelo para previsão de séries temporais mais adequado para cada contexto. Para o contexto Demográfico, tanto o MSIS como o SPL selecionam o SES com *drift* com ajuste sazonal. Para o contexto Micro, o MSIS e o SPL levam à mesma escolha: ETS com ajuste sazonal. No contexto Outro, novamente essas 2 métricas concordam, dessa vez pela seleção do TBATS.

Para o contexto Financeiro, a escolha fica entre TBATS com ou sem ajuste sazonal: como o TBATS com ajuste apresenta menor tempo de execução, ele deve ser selecionado. Para o contexto Industrial, apesar do ETS apresentar um maior tempo de execução, como ele apresenta o menor SPL e o segundo menor MSIS, enquanto o Holt-Winters aditivo não está nem entre os 15 menores valores para SPL, parece ser mais razoável escolher o ETS. Por último, para o contexto Macro, como o SES com ajuste sazonal apresenta tempo de execução mais que 10 vezes menor que o Holt-Winters multiplicativo, ele deve ser o modelo escolhido.

3.2.2.2 Sazonalidade

De maneira semelhante ao realizado na Seção 3.2.1.2, as previsões serão avaliadas ao separar as séries pela presença ou ausência de sazonalidade. Assim como na Tabela 9, são exibidos apenas os resultados para a série original. Somente as métricas MSIS e SPL são apresentadas. Os modelos estão ordenados de forma crescente em relação ao MSIS para o grupo não sazonal. Mais uma vez, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito. Por último, a Tabela 17 apresenta o melhor modelo por métrica, contexto e sazonalidade.

Tabela 16 – Métricas das previsões intervalares em relação à presença de sazonalidade.

Modelo	MSIS		SPL	
	Sazonal	Não sazonal	Sazonal	Não sazonal
ETS	6,185	6,531	0,138	0,217
SES com <i>drift</i>	9,693	6,851	0,225	0,203
Combinado	10,381	6,949	0,180	0,225
BATS	$3,400 \cdot 10^4$	7,201	0,139	0,236
Holt amortizado	10,563	7,283	0,184	0,254
TBATS	6,803	7,419	0,137	0,244
DOTM	7,717	7,457	0,205	0,194
Holt-Winters aditivo	6,522	7,461	0,160	0,291
ARIMA	6,672	7,530	0,158	0,307
STL + ETS	6,554	7,536	0,145	0,229
Holt	11,976	7,637	0,205	0,302
SES	10,191	7,683	0,189	0,200
<i>Naive</i> sazonal	8,529	8,696	0,238	0,248
<i>Drift</i>	14,205	11,568	0,292	0,269
<i>Naive</i>	14,051	11,725	0,247	0,264
Média	16,843	14,871	0,512	0,469
Holt-Winters multiplicativo	330,124	$1,442 \cdot 10^{31}$	7,278	$7,308 \cdot 10^{29}$

A partir da Tabela 16, percebe-se que, para séries sazonais ou não sazonais, a métrica MSIS seleciona o ETS com, respectivamente, 6,185 e 6,531. Para as séries sazonais, a métrica SPL seleciona o modelo TBATS, com 0,137 e, para as não sazonais, o modelo escolhido é o DOTM, com 0,194. É interessante observar que, além do ETS apresentar os menores valores de MSIS, ele possui o segundo menor valor de SPL para séries sazonais e o quarto menor para as não sazonais.

Tabela 17 – Melhores modelos para previsões intervalares por métrica, contexto e sazonalidade.

Métrica	Sazonalidade	Contexto					
		Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro
ACD	Sazonal	ETS	Holt-Winters multiplicativo	Combinado	Holt-Winters multiplicativo	STL + ETS	ETS
	Não sazonal	Holt-Winters aditivo	BATS	SES com <i>drift</i>	Holt-Winters multiplicativo	Holt amortizado	<i>Naive</i> sazonal
MSIS	Sazonal	DOTM	BATS	ARIMA	Holt-Winters multiplicativo	TBATS	ETS
	Não sazonal	BATS	BATS	SES com <i>drift</i>	<i>Drift</i>	ETS	TBATS
SPL	Sazonal	DOTM	TBATS	BATS	ETS	BATS	STL + ETS
	Não sazonal	BATS	TBATS	Média	SES	ETS	TBATS

Diferentemente do observado na Tabela 10, não há muita concordância entre as métricas, para cada par de contexto e sazonalidade. Os únicos casos em que o MSIS e o SPL levam à mesma escolha são: para o contexto Demográfico, em que ambos selecionam o DOTM para séries sazonais e o BATS para não sazonais; para séries não sazonais do contexto Micro, em que ambos escolhem o ETS; para séries não sazonais do contexto Outro, em que selecionam o TBATS. No restante dos pares de contexto e sazonalidade, é essencial uma seleção cuidadosa da métrica a ser utilizada como critério, pois ela terá impacto direto em qual modelo será escolhido.

3.2.2.3 Horizonte de previsão

De forma similar ao realizado na Seção 3.2.1.3, as previsões serão avaliadas para 5 horizontes de previsão: 1 a 6, 7 a 12, 13 a 18, 1 a 12 e 1 a 18 meses à frente. A Tabela 18 apresenta o valor médio das métricas de cada modelo, para cada horizonte. Assim como nas Tabelas 14 e 16, são apresentadas apenas as métricas MSIS e SPL. Os modelos estão ordenados de forma crescente em relação ao MSIS para o horizonte 1-18, com o intuito de apresentar a mesma ordenação da Tabela 13. Novamente, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito. Em seguida, a Tabela 19 apresenta o melhor modelo por métrica, contexto e horizonte.

Tabela 18 – Métricas das previsões intervalares por horizonte de previsão.

Modelo	MSIS					SPL				
	1-6	7-12	13-18	1-12	1-18	1-6	7-12	13-18	1-12	1-18
ETS	4.312	6.020	8.694	5.166	6.342	0.098	0.177	0.246	0.138	0.174
ETS com ajuste	4.496	6.297	9.037	5.396	6.610	0.102	0.182	0.250	0.142	0.178
Combinado com ajuste	4.914	6.656	9.086	5.785	6.885	0.109	0.185	0.257	0.147	0.184
Holt-Winters aditivo	4.922	6.656	9.271	5.789	6.950	0.118	0.216	0.326	0.167	0.220
STL + ETS	4.899	6.473	9.631	5.686	7.001	0.109	0.185	0.255	0.147	0.183
Holt-Winters aditivo com ajuste	4.945	6.810	9.281	5.877	7.012	0.117	0.217	0.323	0.167	0.219
STL + ETS com ajuste	4.883	6.504	9.704	5.694	7.030	0.109	0.185	0.254	0.147	0.183
ARIMA	4.737	6.891	9.559	5.814	7.062	0.112	0.227	0.338	0.170	0.226
SES com <i>drift</i> com ajuste	4.992	6.856	9.352	5.924	7.067	0.121	0.204	0.290	0.163	0.205
TBATS	4.595	6.511	10.142	5.553	7.083	0.104	0.187	0.267	0.145	0.186
Holt amortizado com ajuste	5.025	6.856	9.654	5.940	7.178	0.116	0.205	0.276	0.160	0.199
BATS com ajuste	4.688	6.641	10.254	5.665	7.194	0.104	0.187	0.266	0.146	0.186
TBATS com ajuste	4.705	6.668	10.211	5.687	7.195	0.106	0.189	0.268	0.148	0.188
ARIMA com ajuste	4.890	7.217	9.700	6.054	7.269	0.114	0.234	0.340	0.174	0.230
Holt com ajuste	4.961	7.135	9.779	6.048	7.292	0.118	0.228	0.341	0.173	0.229
DOTM	5.218	7.281	10.298	6.249	7.599	0.121	0.203	0.277	0.162	0.200
DOTM com ajuste	5.222	7.273	10.335	6.247	7.610	0.120	0.208	0.286	0.164	0.205
SES com ajuste	5.191	7.456	11.180	6.323	7.942	0.113	0.179	0.250	0.146	0.181
SES com <i>drift</i>	6.083	7.891	11.224	6.987	8.399	0.130	0.206	0.309	0.168	0.215
<i>Naive</i> sazonal	7.142	7.253	11.420	7.197	8.605	0.206	0.213	0.308	0.209	0.242
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	7.174	7.298	11.452	7.236	8.641	0.206	0.213	0.308	0.209	0.242
Combinado	6.062	8.258	12.137	7.160	8.819	0.119	0.197	0.287	0.158	0.201
SES	6.281	8.355	12.512	7.318	9.050	0.124	0.188	0.269	0.156	0.194
Holt amortizado	6.202	8.494	12.514	7.348	9.070	0.125	0.216	0.306	0.170	0.216
Holt	6.259	9.279	14.464	7.769	10.001	0.127	0.240	0.382	0.183	0.250
<i>Drift</i> com ajuste	6.829	11.267	14.825	9.048	10.974	0.148	0.273	0.381	0.210	0.267
<i>Naive</i> com ajuste	6.832	11.270	15.474	9.051	11.192	0.138	0.237	0.333	0.187	0.236
<i>Naive</i>	8.095	12.991	17.891	10.543	12.992	0.150	0.254	0.361	0.202	0.255
<i>Drift</i>	8.159	13.129	17.726	10.644	13.005	0.157	0.282	0.404	0.220	0.281
Média com ajuste	11.183	14.897	20.916	13.040	15.665	0.407	0.486	0.572	0.446	0.488
Média	11.671	15.243	20.921	13.457	15.945	0.411	0.490	0.575	0.450	0.492
BATS	20.873	$1,751 \cdot 10^3$	$5,381 \cdot 10^4$	885.920	$1,853 \cdot 10^4$	0.104	0.182	0.264	0.143	0.183
Holt-Winters multiplicativo	$1,162 \cdot 10^8$	$3,817 \cdot 10^{19}$	$1,970 \cdot 10^{31}$	$1,908 \cdot 10^{19}$	$6,566 \cdot 10^{30}$	$5,887 \cdot 10^6$	$1,934 \cdot 10^{18}$	$9,980 \cdot 10^{29}$	$9,669 \cdot 10^{17}$	$3,327 \cdot 10^{29}$
Holt-Winters multiplicativo com ajuste	$1,162 \cdot 10^8$	$3,817 \cdot 10^{19}$	$1,970 \cdot 10^{31}$	$1,908 \cdot 10^{19}$	$6,566 \cdot 10^{30}$	$5,887 \cdot 10^6$	$1,934 \cdot 10^{18}$	$9,980 \cdot 10^{29}$	$9,669 \cdot 10^{17}$	$3,327 \cdot 10^{29}$

A partir da Tabela 18, fica evidente que, para todos os horizontes de previsão incluídos nesta análise, tanto o MSIS como o SPL selecionam o ETS como o melhor modelo. Para o horizonte mais curto (1 a 6 meses), o ETS apresenta MSIS de 4,312 e SPL de 0,098. Para o horizonte médio (7 a 12 meses), os 2 valores aumentam (respectivamente, 6,020 e 0,177), o que já era esperado, pois, à medida que o horizonte de previsão aumenta, a incerteza também aumenta. Ao passar para o horizonte longo (13 a 18 meses), novamente as métricas pioram, com o ETS apresentando MSIS de 8,694 e SPL de 0,246. Para 12 meses à frente, o ETS apresenta MSIS de 5,166 e SPL de 0,138. Por último, para 18 meses à frente, os valores são iguais aos apresentados na Tabela 13: MSIS de 6,342 e SPL de 0,174.

Tabela 19 – Melhores modelos para previsões intervalares por métrica, contexto e horizonte.

Métrica	Horizonte	Contexto					
		Demográfico	Financeiro	Industrial	Macro	Micro	Outro
MSIS	1-6	ETS	BATS	ETS	Holt-Winters multiplicativo com ajuste	ETS	ETS
	7-12	DOTM	BATS	STL + ETS	ETS	BATS	TBATS
	13-18	SES com <i>drift</i> com ajuste	TBATS com ajuste	SES com <i>drift</i> com ajuste	<i>Drift</i> com ajuste	SES com ajuste	TBATS
	1-12	ETS	BATS	ETS	ETS	ETS com ajuste	TBATS
	1-18	SES com <i>drift</i> com ajuste	TBATS com ajuste	Holt-Winters aditivo	Holt-Winters multiplicativo	ETS com ajuste	TBATS
SPL	1-6	DOTM	ARIMA com ajuste	ETS	ETS	ETS	DOTM
	7-12	SES com <i>drift</i> com ajuste	TBATS	ETS	SES	ETS com ajuste	TBATS
	13-18	SES com <i>drift</i> com ajuste	TBATS	STL + ETS	SES com ajuste	ETS com ajuste	TBATS
	1-12	SES com <i>drift</i> com ajuste	TBATS	ETS	SES com ajuste	ETS com ajuste	TBATS
	1-18	SES com <i>drift</i> com ajuste	TBATS	ETS	SES com ajuste	ETS com ajuste	TBATS

A Tabela 19 evidencia que, para a grande maioria dos contextos, as métricas não concordam em relação ao melhor modelo. No contexto Demográfico, ambas as métricas selecionam o SES com *drift* com ajuste sazonal para os horizontes de 13 a 18 e 1 a 18 meses. Para o Industrial, as 2 métricas escolhem o ETS como o melhor modelo para os horizontes de 1 a 6 e 1 a 12 meses. No contexto Micro, ambas selecionam o ETS sem ajuste como o melhor modelo para o horizonte curto (1 a 6 meses) e o ETS com ajuste para os horizontes de 1 a 12 e 1 a 18 meses. Para o contexto Outro, ambas as métricas selecionam o TBATS como o melhor modelo para quase todos os horizontes, com exceção do horizonte curto (1 a 6 meses). Em relação aos contextos Financeiro e Macro, as métricas não concordam em nenhum horizonte de previsão.

3.3 Bagging

Nesta seção, será aplicado o procedimento descrito na Seção 2.7.4, com o objetivo de tentar melhorar o desempenho dos modelos. O conjunto de dados será o mesmo, ou seja, todas as séries mensais da competição M3 (Makridakis e Hibon, 2000), equivalente a 1.428 séries. Novamente, cada modelo será considerado tanto ao aplicá-lo na série original como ao tratar a sazonalidade previamente (vide Seção 2.4). Serão construídas previsões pontuais e intervalares (com 95% de confiança). É importante ressaltar que o modelo Holt-Winters multiplicativo (com ou sem ajuste sazonal) não será incluído nesta análise, pois ele não pode ser aplicado para séries que não são estritamente positivas e, ao realizar o procedimento de *bagging* descrito na Seção 2.7.4, esse pré-requisito não será garantido.

3.3.1 Previsões pontuais

Nesta seção, serão analisados os resultados obtidos pelas previsões pontuais utilizando *bagging*, que serão comparados com os resultados originais apresentados na Tabela 6. A Tabela 20 apresenta os valores médios das métricas de cada método, para cada estratégia de previsão pontual utilizando *bagging* descrita na Seção 2.7.4.1. É apresentado também o tempo computacional para realizar as previsões. Além disso, a Tabela 20 repete parte dos resultados apresentados na Tabela 6, para facilitar a comparação. Os métodos estão na mesma ordem que foram apresentados na Tabela 6. Mais uma vez, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito.

Tabela 20 – Métricas das previsões pontuais utilizando *bagging*.

Método	Original				<i>Bagging</i>						
	MAPE (%)	sMAPE (%)	MASE	Tempo (min)	MAPE (%)	sMAPE (%)	MASE	Média		Tempo (min)	
DOTM com ajuste	19,762	13,739	0,852	0,721	18,808	13,474	0,839	18,562	13,408	0,836	56,725
DOTM	19,727	13,743	0,851	0,614	18,749	13,447	0,836	18,538	13,452	0,837	61,089
Theta	19,341	13,831	0,862	1,507	18,585	13,704	0,850	18,427	13,727	0,851	134,301
Theta com ajuste	19,343	13,834	0,862	1,534	18,619	13,678	0,850	18,367	13,704	0,850	136,760
TBATS	21,988	13,842	0,861	24,275	19,012	13,722	0,855	18,156	13,629	0,853	2,726,833
Combinado com ajuste	22,224	13,952	0,872	0,198	19,521	13,712	0,854	19,060	13,653	0,852	22,941
TBATS com ajuste	19,633	13,963	0,876	22,025	18,989	13,824	0,869	18,085	13,728	0,862	2,587,346
Holt amortizado com ajuste	22,107	13,998	0,882	0,098	19,538	13,787	0,862	19,164	13,726	0,861	11,982
BATS	20,232	14,044	0,880	11,586	18,546	13,761	0,861	18,027	13,683	0,858	1,365,740
BATS com ajuste	18,589	14,058	0,881	10,497	18,728	13,785	0,862	18,138	13,682	0,858	1,254,111
ETS	20,698	14,139	0,865	7,174	19,233	13,701	0,834	18,758	13,647	0,835	781,901
ETS com ajuste	19,427	14,208	0,874	7,359	19,865	13,870	0,853	19,017	13,782	0,841	889,296
SES com ajuste	20,584	14,256	0,928	0,072	19,512	14,017	0,915	19,194	14,001	0,914	6,997
STL + ETS com ajuste	20,225	14,840	0,879	0,268	19,354	14,204	0,849	19,054	14,172	0,849	32,182
ARIMA	21,786	14,918	0,867	29,848	19,404	13,997	0,834	19,362	14,144	0,835	3,572,400
STL + ETS	20,511	15,097	0,877	0,245	19,516	14,584	0,853	19,039	14,565	0,853	28,337
ARIMA com ajuste	21,153	15,189	0,872	17,826	19,428	14,330	0,842	19,322	14,449	0,843	2,491,342
SES com <i>drift</i> com ajuste	20,358	15,235	0,853	0,105	20,041	15,127	0,856	19,245	15,113	0,839	12,769
Holt com ajuste	26,491	16,067	0,912	0,079	20,904	15,054	0,873	20,179	15,044	0,867	8,522
SES	24,395	16,219	1,091	0,042	22,616	15,880	1,075	22,410	15,827	1,074	5,121
Holt-Winters aditivo com ajuste	24,634	16,290	0,895	0,742	20,844	15,336	0,878	20,134	15,348	0,873	93,381
Holt amortizado	27,336	16,353	1,117	0,082	23,566	15,979	1,084	22,925	15,878	1,079	9,668
Combinado	27,482	16,402	1,119	0,184	23,642	15,934	1,090	23,112	15,825	1,080	20,379
SES com <i>drift</i>	23,958	16,694	1,022	0,093	22,335	16,529	1,010	22,019	16,511	1,008	11,213
<i>Naive</i> com ajuste	24,382	16,764	1,038	0,094	21,675	14,585	0,930	20,162	14,453	0,926	6,040
<i>Naive</i> sazonal	20,926	17,234	1,146	0,071	19,873	15,380	1,071	18,983	15,367	1,070	3,812
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	20,926	17,234	1,146	0,092	19,961	15,381	1,071	19,055	15,367	1,071	5,922
Holt-Winters aditivo	22,770	17,376	0,903	0,733	21,551	16,303	0,886	20,894	16,403	0,884	77,540
<i>Drift</i> com ajuste	25,252	17,572	0,983	0,073	22,338	15,189	0,860	20,464	15,180	0,855	6,967
<i>Naive</i>	28,097	18,181	1,175	0,048	25,875	16,487	1,102	24,557	16,375	1,098	3,893
Holt	33,128	18,432	1,261	0,068	26,185	17,555	1,212	25,101	17,453	1,188	7,267
<i>Drift</i>	29,260	19,068	1,140	0,053	25,730	17,134	1,055	23,679	17,105	1,052	5,069
Média com ajuste	33,798	25,961	2,179	0,074	34,202	26,019	2,196	33,773	25,922	2,177	4,012
Média	36,200	27,124	2,267	0,053	36,123	27,124	2,267	36,130	27,124	2,267	2,265

Pela observação da Tabela 20, é perceptível que o tempo de execução aumenta bastante ao utilizar a estratégia de *bagging*, e isso se deve ao fato de que, ao adotar essa estratégia, é necessário aplicar o método para cada uma das 100 amostras *bootstrap* da série, enquanto a estratégia original realiza apenas um ajuste por série e método. Além disso, fica evidente que, para a grande maioria dos métodos, adotar o *bagging* melhorou as métricas de avaliação, tanto utilizando a média como a mediana.

Para a métrica MAPE, o melhor valor encontrado na Tabela 6 foi 18,589%, do BATS com ajuste sazonal. Em contrapartida, ao utilizar o BATS com *bagging* pela mediana, foi possível obter um MAPE de 18,027%, o que representa uma melhoria de 3,023% em relação ao melhor valor encontrado sem utilizar *bagging*.

Na métrica sMAPE, o melhor valor encontrado originalmente havia sido 13,739%, do DOTM com ajuste sazonal. Contudo, ao utilizar este mesmo método, porém aplicando *bagging*

pela mediana, o valor obtido foi 13,408%, equivalente a uma melhora de 2,409% em relação ao melhor resultado sem utilizar *bagging*.

Por último, ao avaliar a métrica MASE, percebe-se que, ao aplicar os métodos ETS ou ARIMA com *bagging* pela média, obteve-se um MASE de 0,834, valor que é 1,998% melhor do que o obtido pelo DOTM sem *bagging*, que era o melhor MASE atingido originalmente.

A Tabela 21 apresenta o percentual de melhoria de cada método utilizando *bagging* em relação a ele mesmo, porém sem utilizar esta técnica. Os métodos estão na mesma ordem que foram apresentados nas Tabelas 6 e 20. Novamente, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito.

Tabela 21 – Percentual de melhoria das previsões pontuais utilizando *bagging*.

Método	Média			Mediana		
	MAPE (%)	sMAPE (%)	MASE	MAPE (%)	sMAPE (%)	MASE
DOTM com ajuste	4,827	1,929	1,526	6,072	2,409	1,878
DOTM	4,958	2,154	1,878	6,027	2,117	1,761
Theta	3,909	0,918	1,392	4,726	0,752	1,276
Theta com ajuste	3,743	1,128	1,392	5,046	0,940	1,392
TBATS	13,535	0,867	0,697	17,428	1,539	0,929
Combinado com ajuste	12,163	1,720	2,064	14,237	2,143	2,294
TBATS com ajuste	3,290	0,995	0,799	7,885	1,683	1,598
Holt amortizado com ajuste	11,621	1,507	2,268	13,313	1,943	2,381
BATS	8,333	2,015	2,159	10,899	2,570	2,500
BATS com ajuste	-0,748	1,942	2,157	2,426	2,675	2,611
ETS	7,078	3,098	3,584	9,373	3,480	3,468
ETS com ajuste	-2,255	2,379	2,403	2,110	2,998	3,776
SES com ajuste	5,208	1,676	1,401	6,753	1,789	1,509
STL + ETS com ajuste	4,307	4,286	3,413	5,790	4,501	3,413
ARIMA	10,934	6,174	3,806	11,126	5,188	3,691
STL + ETS	4,851	3,398	2,737	7,177	3,524	2,737
ARIMA com ajuste	8,155	5,655	3,440	8,656	4,872	3,326
SES com <i>drift</i> com ajuste	1,557	0,709	-0,352	5,467	0,801	1,641
Holt com ajuste	21,090	6,305	4,276	23,827	6,367	4,934
SES	7,292	2,090	1,467	8,137	2,417	1,558
Holt-Winters aditivo com ajuste	15,385	5,856	1,899	18,267	5,783	2,458
Holt amortizado	13,791	2,287	2,954	16,136	2,905	3,402
Combinado	13,973	2,853	2,592	15,901	3,518	3,485
SES com <i>drift</i>	6,774	0,988	1,174	8,093	1,096	1,370
<i>Naive</i> com ajuste	11,102	12,998	10,405	17,308	13,785	10,790
<i>Naive</i> sazonal	5,032	10,758	6,545	9,285	10,833	6,632
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	4,611	10,752	6,545	8,941	10,833	6,545
Holt-Winters aditivo	5,354	6,175	1,883	8,239	5,600	2,104
<i>Drift</i> com ajuste	11,540	13,561	12,513	18,961	13,613	13,021
<i>Naive</i>	7,908	9,317	6,213	12,599	9,933	6,553
Holt	20,958	4,758	3,886	24,230	5,311	5,789
<i>Drift</i>	12,064	10,143	7,456	19,074	10,295	7,719
Média com ajuste	-1,195	-0,223	-0,780	0,074	0,150	0,092
Média	0,213	0,000	0,000	0,193	0,000	0,000

Métodos que apresentam melhora terão percentuais positivos e métodos que apresentam piora terão valores negativos. Como a Tabela 21 mostra, em geral, valores positivos, é confirmada a afirmação feita anteriormente de que, para a grande maioria dos métodos, adotar a estratégia de *bagging* descrita na Seção 3.3 melhorou as métricas de avaliação. Dependendo do método, da

métrica e do tipo de *bagging*, a magnitude da melhoria varia bastante. Porém, vale destacar os métodos *naive* com ajuste e *drift* com ajuste que, ao adotar qualquer uma das estratégias de *bagging*, melhoram todas as métricas em pelo menos 10%.

3.3.2 Previsões intervalares

Nesta seção, a análise será similar à da Seção 3.3.1, porém com as previsões intervalares. Dessa forma, a Tabela 22 apresenta os valores médios das métricas de cada modelo, para a terceira e quarta estratégia de previsão intervalar utilizando *bagging* descrita na Seção 2.7.4.2. As outras estratégias foram avaliadas, porém os resultados apresentados foram muito ruins e, por isso, não serão considerados na análise. É apresentado também o tempo computacional para realizar as previsões. Além disso, a Tabela 22 repete parte dos resultados apresentados na Tabela 13, para facilitar a comparação. Os modelos estão na mesma ordem que foram apresentados na Tabela 13. Novamente, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito. É importante ressaltar que, da mesma forma que na Tabela 13, o método Theta não será incluído na análise, pois, conforme descrito na Seção 2.5.4.1, ele é um método e não um modelo.

Tabela 22 – Métricas das previsões intervalares utilizando *bagging*.

Modelo	Original					Bagging								
	MSIS	SPL	ACD	Cobertura (%)	Tempo (min)	Média				Mediana				Tempo (min)
	MSIS	SPL	ACD	Cobertura (%)	Tempo (min)	MSIS	SPL	ACD	Cobertura (%)	MSIS	SPL	ACD	Cobertura (%)	Tempo (min)
ETS	6,342	0,174	0,030	92,032	7,174	6,229	0,168	0,049	90,146	6,310	0,167	0,055	89,515	781,901
ETS com ajuste	6,610	0,178	0,040	90,982	7,359	6,900	0,174	0,060	89,041	6,577	0,171	0,066	88,371	889,296
Combinado com ajuste	6,885	0,184	0,042	90,799	0,198	7,329	0,195	0,063	88,737	7,196	0,192	0,065	88,461	22,941
Holt-Winters aditivo	6,950	0,220	0,038	91,223	0,733	7,426	0,248	0,060	88,967	7,457	0,247	0,063	88,733	77,540
STL + ETS	7,001	0,183	0,070	88,014	0,245	6,908	0,180	0,093	85,726	7,025	0,181	0,100	85,033	28,337
Holt-Winters aditivo com ajuste	7,012	0,219	0,039	91,056	0,742	7,607	0,248	0,060	88,955	7,517	0,248	0,063	88,706	93,381
STL + ETS com ajuste	7,030	0,183	0,070	88,029	0,268	7,007	0,180	0,094	85,609	7,031	0,180	0,101	84,909	32,182
ARIMA	7,062	0,226	0,035	91,453	29,848	7,167	0,243	0,046	90,371	7,182	0,242	0,051	89,877	3,572,400
SES com <i>drift</i> com ajuste	7,067	0,205	0,058	89,247	0,105	7,594	0,216	0,080	87,037	7,359	0,216	0,081	86,913	12,769
TBATS	7,083	0,186	0,071	87,936	24,275	7,861	0,230	0,121	82,898	7,939	0,223	0,126	82,400	2,726,833
Holt amortizado com ajuste	7,178	0,199	0,050	89,998	0,098	8,163	0,214	0,074	87,624	7,584	0,207	0,078	87,193	11,982
BATS com ajuste	7,194	0,186	0,071	87,901	10,497	7,415	0,201	0,099	85,146	7,475	0,198	0,105	84,469	1,254,111
TBATS com ajuste	7,195	0,188	0,073	87,679	22,025	7,954	0,235	0,107	84,263	7,829	0,219	0,112	83,773	2,587,346
ARIMA com ajuste	7,269	0,230	0,049	90,142	17,826	7,441	0,240	0,069	88,115	7,430	0,238	0,072	87,803	2,491,342
Holt com ajuste	7,292	0,229	0,040	90,990	0,079	7,638	0,249	0,056	89,352	7,545	0,246	0,061	88,920	8,522
DOTM	7,599	0,200	0,075	87,481	0,614	7,759	0,208	0,092	85,757	7,811	0,209	0,095	85,458	61,089
DOTM com ajuste	7,610	0,205	0,076	87,442	0,721	7,927	0,209	0,093	85,714	7,827	0,209	0,096	85,438	56,725
SES com ajuste	7,942	0,181	0,079	87,134	0,072	8,407	0,185	0,096	85,380	8,193	0,184	0,098	85,166	6,997
SES com <i>drift</i>	8,399	0,215	0,040	90,986	0,093	8,459	0,225	0,049	90,091	8,469	0,225	0,051	89,947	11,213
<i>Naive</i> sazonal	8,605	0,242	0,019	93,149	0,071	8,185	0,229	0,017	93,347	8,206	0,229	0,017	93,316	3,812
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	8,641	0,242	0,020	93,021	0,092	8,673	0,230	0,016	93,363	8,248	0,229	0,017	93,305	5,922
Combinado	8,819	0,201	0,025	92,456	0,184	8,829	0,209	0,035	91,476	8,815	0,206	0,038	91,246	20,379
SES	9,050	0,194	0,058	89,181	0,042	9,000	0,195	0,062	88,768	9,027	0,195	0,064	88,570	5,121
Holt amortizado	9,070	0,216	0,034	91,569	0,082	9,114	0,225	0,044	90,554	9,150	0,222	0,048	90,161	9,668
Holt	10,001	0,250	0,026	92,351	0,068	10,078	0,269	0,031	91,861	10,058	0,266	0,036	91,375	7,267
<i>Drift</i> com ajuste	10,974	0,267	0,005	94,549	0,073	11,502	0,274	0,005	94,479	10,746	0,272	0,006	94,448	6,967
<i>Naive</i> com ajuste	11,192	0,236	0,027	92,270	0,094	11,146	0,238	0,032	91,850	10,959	0,237	0,032	91,803	6,040
<i>Naive</i>	12,992	0,255	0,015	93,499	0,048	12,821	0,257	0,013	93,705	12,808	0,257	0,013	93,655	3,893
<i>Drift</i>	13,005	0,281	0,003	95,316	0,053	12,926	0,288	0,005	95,522	12,902	0,288	0,005	95,545	5,069
Média com ajuste	15,665	0,488	0,149	80,143	0,074	16,553	0,497	0,158	79,178	15,929	0,495	0,158	79,186	4,012
Média	15,945	0,492	0,134	81,567	0,053	16,117	0,498	0,141	80,902	16,122	0,498	0,141	80,871	2,265
BATS	$1,853 \cdot 10^4$	0,183	0,063	88,725	11,586	192,36	0,198	0,091	85,909	7,226	0,193	0,097	85,317	1,365,740

A partir da Tabela 22, fica evidente que, ao aplicar qualquer uma das técnicas de *bagging*, é possível reduzir o MSIS e o SPL do melhor modelo aplicado originalmente. O ETS aplicado usando *bagging* pela média permite um MSIS de 6,229, valor que é 1,782% menor do que o melhor valor obtido originalmente, que era de 6,342, do próprio ETS. Já o ETS com *bagging* pela mediana apresenta um SPL de 0,167, o que representa uma melhoria de 4,023% em relação ao melhor valor utilizando a estratégia original, que também era do modelo ETS.

A Tabela 23 apresenta o percentual de melhoria de cada modelo utilizando *bagging* em relação a ele mesmo, porém sem utilizar esta técnica. Os modelos estão na mesma ordem que

foram apresentados nas Tabelas 13 e 22. Mais uma vez, o melhor resultado de cada coluna está destacado em negrito.

Tabela 23 – Percentual de melhoria das previsões intervalares utilizando *bagging*.

Modelo	Média			Mediana		
	MSIS	SPL	ACD	MSIS	SPL	ACD
ETS	1,782	3,448	-63,333	0,505	4,023	-82,825
ETS com ajuste	-4,387	2,247	-50,000	0,499	3,933	-65,714
Combinado com ajuste	-6,449	-5,978	-50,000	-4,517	-4,348	-55,692
Holt-Winters aditivo	-6,849	-12,727	-57,895	-7,295	-12,273	-64,914
STL + ETS	1,328	1,639	-32,857	-0,343	1,093	-42,379
Holt-Winters aditivo com ajuste	-8,485	-13,242	-53,846	-7,202	-13,242	-61,384
STL + ETS com ajuste	0,327	1,639	-34,286	-0,014	1,639	-44,158
ARIMA	-1,487	-7,522	-31,429	-1,699	-7,080	-46,370
SES com <i>drift</i> com ajuste	-7,457	-5,366	-37,931	-4,132	-5,366	-39,439
TBATS	-10,984	-23,656	-70,423	-12,085	-19,892	-77,470
Holt amortizado com ajuste	-13,722	-7,538	-48,000	-5,656	-4,020	-56,147
BATS com ajuste	-3,072	-8,065	-39,437	-3,906	-6,452	-48,319
TBATS com ajuste	-10,549	-25,000	-46,575	-8,812	-16,489	-53,795
ARIMA com ajuste	-2,366	-4,348	-40,816	-2,215	-3,478	-46,868
Holt com ajuste	-4,745	-8,734	-40,000	-3,470	-7,424	-52,000
DOTM	-2,106	-4,000	-22,667	-2,790	-4,500	-27,233
DOTM com ajuste	-4,166	-1,951	-22,368	-2,852	-1,951	-25,815
SES com ajuste	-5,855	-2,210	-21,519	-3,160	-1,657	-24,484
SES com <i>drift</i>	-0,714	-4,651	-22,500	-0,833	-4,651	-26,323
<i>Naive</i> sazonal	4,881	5,372	10,526	4,637	5,372	11,380
<i>Naive</i> sazonal com ajuste	-0,370	4,959	20,000	4,548	5,372	15,227
Combinado	-0,113	-3,980	-40,000	0,045	-2,488	-50,140
SES	0,552	-0,515	-6,897	0,254	-0,515	-10,864
Holt amortizado	-0,485	-4,167	-29,412	-0,882	-2,778	-42,322
Holt	-0,770	-7,600	-19,231	-0,570	-6,400	-39,428
<i>Drift</i> com ajuste	-4,811	-2,622	0,000	2,078	-1,873	-10,333
<i>Naive</i> com ajuste	0,411	-0,847	-18,519	2,082	-0,424	-18,414
<i>Naive</i>	1,316	-0,784	13,333	1,416	-0,784	10,312
<i>Drift</i>	0,607	-2,491	-66,667	0,792	-2,491	-81,813
Média com ajuste	-5,669	-1,844	-6,040	-1,685	-1,434	-6,133
Média	-1,079	-1,220	-5,224	-1,110	-1,220	-5,443
BATS	98,962	-8,197	-44,444	99,961	-5,464	-53,691

Como a maioria dos valores da Tabela 23 são negativos, conclui-se que, em geral, ao aplicar a técnica *bagging*, as métricas de avaliação de previsão intervalar pioram. Porém, para modelos específicos, como o ETS, as métricas MSIS e SPL melhoram. Dessa forma, dependendo do modelo utilizado, pode valer a pena aplicar *bagging* para obter previsões intervalares.

Para a maior parte dos modelos, ao adotar alguma estratégia de *bagging*, a métrica ACD piora. Mesmo assim, em alguns desses modelos, as métricas MSIS e SPL melhoram, pois elas avaliam não só a cobertura dos intervalos, mas também a amplitude deles. Assim, a estratégia de *bagging* conseguiu melhorar o desempenho de alguns modelos ao atribuir uma amplitude mais adequada ao nível de incerteza da série.

4 Discussão e Conclusão

Existem diversas situações em que previsões automáticas precisas de séries temporais são necessárias, como, por exemplo, caso se deseje obter previsões de demanda para um conjunto extenso de produtos, em que fazer uma análise individual de cada um dos produtos é inviável. O estudo dos modelos utilizados para obter previsões focou, em geral, na melhora da qualidade do ajuste do modelo, o que não está necessariamente relacionada à acurácia das previsões para dados não observados (Makridakis, Spiliotis e Assimakopoulos, 2020). Neste trabalho, buscou-se estudar e avaliar o desempenho dos principais modelos para previsões de séries temporais mensais, de forma a concluir qual é a melhor abordagem para cada situação.

Assim como foi observado em Makridakis e Hibon (2000), o *ranking* relativo de performance variou bastante de acordo com a métrica de acurácia utilizada. Isso ocorreu tanto para as previsões pontuais, como intervalares. Além disso, Makridakis e Hibon (2000) afirmou que a acurácia de vários métodos combinados é superior, em média, aos métodos individuais que estão sendo combinados. Isso também foi observado neste trabalho, pois, para as previsões pontuais e intervalares, o método combinado com ajuste sazonal teve um desempenho melhor do que os 3 outros métodos que o compõem e, além disso, apresentou um bom desempenho em geral, ao compará-lo com os demais métodos.

Ao avaliar cada modelo, foi considerado aplicá-lo direto na série original ou após realizar um ajuste sazonal. Esse ajuste permitiu uma melhora considerável do desempenho de vários modelos, porém piorou parcialmente o desempenho de outros. Assim, com o intuito de decidir se essa abordagem será aplicada ou não, é importante avaliar especificamente o que ocorreu com o modelo de interesse ao realizar o ajuste sazonal prévio da série.

Ao comparar as previsões pontuais dos métodos, deve-se destacar o desempenho geral do DOTM, com e sem ajuste sazonal, que além de apresentar um custo computacional baixo, obteve um ótimo desempenho nas métricas sMAPE e MASE. Ao separar pelo contexto, alguns métodos se destacaram. O DOTM (com e sem ajuste) foi muito bem para séries demográficas, já o BATS e TBATS (também com e sem ajuste) tiveram ótimo desempenho em séries financeiras. Para as séries industriais, o melhor foi, sem dúvidas, o ARIMA. No contexto Macro, o ARIMA novamente foi o melhor, dessa vez com ajuste sazonal. Já para os contextos Micro e Outro, os melhores métodos para previsões pontuais foram, respectivamente, Theta e combinado com ajuste sazonal. Para as séries sazonais, o método de melhor desempenho foi o TBATS e, para as não sazonais, dependendo da métrica utilizada, pode-se escolher o DOTM ou Theta. Passando para o horizonte de previsão, o TBATS apresentou as previsões mais precisas para horizontes curtos (1 a 6 meses), enquanto o DOTM (com ou sem ajuste sazonal, dependendo da métrica utilizada) foi mais preciso para horizontes médios (7 a 12 meses) e longos (13 a 18 meses). Além disso, assim como foi destacado em Makridakis e Hibon (2000), a métrica de vários métodos se modificou dependendo do horizonte de previsão escolhido.

Conforme Makridakis, Spiliotis e Assimakopoulos (2020), previsões pontuais devem estar sempre acompanhadas de previsões intervalares, pois as últimas quantificam a incerteza ao redor das primeiras. Dessa forma, deve-se analisar o desempenho das previsões intervalares. Nesse caso, o modelo de maior destaque foi o ETS, com e sem ajuste sazonal, apresentando os menores valores de MSIS e SPL, um custo computacional baixo e uma cobertura observada próxima do valor objetivo. Para o contexto Demográfico, o SES com *drift* com ajuste sazonal teve um desempenho muito bom. Nas séries financeiras, assim como nas previsões pontuais, destaca-se o desempenho do BATS e TBATS (com e sem ajuste), sendo que esses modelos também foram muito bem para o contexto Outro. No contexto Micro, o melhor modelo foi o ETS, com e sem ajuste sazonal. Para os contextos Macro e Industrial, houve uma discordância considerável entre as métricas. A partir da métrica MSIS, o ETS foi o melhor modelo tanto para séries sazonais como para não sazonais. Já o SPL seleciona o TBATS para as sazonais (assim como as previsões pontuais) e o DOTM para as não sazonais. Em relação ao horizonte de previsão, o ETS apresentou o melhor desempenho médio para todos os horizontes considerados.

Uma estratégia muito utilizada em *machine learning* para melhorar a precisão de previsões é o *bagging*. Ao aplicar essa estratégia neste trabalho, foi possível melhorar consideravelmente a acurácia das previsões pontuais de quase todos os modelos considerados, porém houve aumento do custo computacional. Inclusive, foi possível melhorar o resultado do melhor sMAPE para séries mensais da competição M3 publicado por Fiorucci et al. (2016b), que era do DOTM com 13,7%. Ao utilizar esse modelo juntamente com *bagging*, obteve-se um sMAPE de 13,4%, equivalente a uma melhora de 2,2%. Em relação às previsões intervalares, o *bagging* melhorou a precisão de um pequeno número de modelos; no geral, as métricas de precisão das previsões intervalares pioraram com essa estratégia, em contraste ao que ocorreu com as previsões pontuais. Ao utilizar *bagging* com o modelo ETS, que havia sido o modelo mais preciso para previsões intervalares sem *bagging*, foi possível reduzir o MSIS em 1,8% e o SPL em 4%. Assim, conclui-se que a estratégia de *bagging* utilizada neste trabalho é uma ferramenta muito poderosa para melhorar a precisão de previsões pontuais de séries mensais para diferentes modelos e, para alguns desses modelos, ela pode ser útil também para as previsões intervalares.

Referências

- ASSIMAKOPOULOS, V.; NIKOLOPOULOS, K. The theta model: a decomposition approach to forecasting. *International journal of forecasting*, Elsevier, v. 16, n. 4, p. 521–530, 2000.
- BERGMEIR, C.; HYNDMAN, R. J.; BENÍTEZ, J. M. Bagging exponential smoothing methods using STL decomposition and Box–Cox transformation. *International journal of forecasting*, Elsevier, v. 32, n. 2, p. 303–312, 2016.
- BOX, G. E.; COX, D. R. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, Wiley Online Library, v. 26, n. 2, p. 211–243, 1964.
- BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. Introduction to time series and forecasting. New York Springer 1996., 1996.
- CLEVELAND, R. B. et al. STL: A seasonal-trend decomposition. *Journal of official statistics*, v. 6, n. 1, p. 3–73, 1990.
- CLEVELAND, W. S. Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of the American statistical association*, Taylor & Francis, v. 74, n. 368, p. 829–836, 1979.
- FIORUCCI, J. A. et al. Package ‘forecTheta’. 2016.
- FIORUCCI, J. A. et al. Models for optimising the theta method and their relationship to state space models. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 32, n. 4, p. 1151–1161, 2016.
- GUERRERO, V. M. Time-series analysis supported by power transformations. *Journal of forecasting*, Wiley Online Library, v. 12, n. 1, p. 37–48, 1993.
- HYNDMAN, R. et al. *forecast: Forecasting functions for time series and linear models, 2019, R package version 8.7*. 2017.
- HYNDMAN, R. et al. *Forecasting with exponential smoothing: the state space approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.
- HYNDMAN, R. J.; ATHANASOPOULOS, G. *Forecasting: principles and practice*. [S.l.]: OTexts, 2018.
- HYNDMAN, R. J.; BILLAH, B. Unmasking the Theta method. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 19, n. 2, p. 287–290, 2003.
- HYNDMAN, R. J. et al. A state space framework for automatic forecasting using exponential smoothing methods. *International Journal of forecasting*, Elsevier, v. 18, n. 3, p. 439–454, 2002.
- LAHIRI, S. N. *Resampling methods for dependent data*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- LIVERA, A. M. D.; HYNDMAN, R. J.; SNYDER, R. D. Forecasting time series with complex seasonal patterns using exponential smoothing. *Journal of the American statistical association*, Taylor & Francis, v. 106, n. 496, p. 1513–1527, 2011.
- MAKRIDAKIS, S.; HIBON, M. The M3-Competition: results, conclusions and implications. *International journal of forecasting*, Elsevier, v. 16, n. 4, p. 451–476, 2000.

MAKRIDAKIS, S.; SPILIOTIS, E.; ASSIMAKOPOULOS, V. The M4 Competition: 100,000 time series and 61 forecasting methods. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 54–74, 2020.

MORETTIN, P.; TOLOI, C. *Análise de séries temporais*. [S.l.]: Editora Bluscher, 2006.

ORD, J. K.; KOEHLER, A. B.; SNYDER, R. D. Estimation and prediction for a class of dynamic nonlinear statistical models. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 92, n. 440, p. 1621–1629, 1997.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>.