

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

PATRICK DOS REIS OLIVEIRA

**LEIS DE ESCALA EM TURBULÊNCIA  
MAGNETOHIDRODINÂMICA**

BRASÍLIA  
18 DE ABRIL DE 2022



Patrick dos Reis Oliveira

## **Leis de Escala em Turbulência Magnetohidrodinâmica**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Leonardo Luiz e Castro

Coorientador: Rodrigo Andrés Miranda Cerda

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

18 de abril de 2022

---

Patrick dos Reis Oliveira

Leis de Escala em Turbulência Magnetohidrodinâmica/ Patrick dos Reis Oliveira. – Brasília, 18 de abril de 2022-

79 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Leonardo Luiz e Castro

Monografia – Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física, 18 de abril de 2022.

1. Turbulência. 2. MHD. I. Leonardo Luiz e Castro. II. Universidade de Brasília. III. Instituto de Física. IV. Leis de Escala em Turbulência Magnetohidrodinâmica

CDU 02:141:005.7

---

Patrick dos Reis Oliveira

## **Leis de Escala em Turbulência Magnetohidrodinâmica**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 18 de abril de 2022:

---

**Leonardo Luiz e Castro**  
Leonardo Luiz Castro

---

**Co-Orientador**  
Rodrigo Andrés Miranda Cerda

---

**Professora**  
Gabriela Possa

---

**Professor**  
José Leonardo Ferreira

Brasília  
18 de abril de 2022



*A todos aqueles que conseguem se maravilhar com a ciência e  
a querem seguir para entender os mistérios do Universo sem histórias prontas.*



# Agradecimentos

Penso que realmente não teria me formado sem que boas amizades tivessem sido formadas durante a graduação. Em especial, Danielle Parente, Carol de Carvalho, Raul Lopes, Lucas Lima. Me ajudaram das mais variadas formas. Talvez cada um pegue um rumo agora mas espero que ainda possamos conversar e manter contato por um bom tempo.

Não posso me esquecer também dos ótimos professores com os quais tive contato, muitos me ensinaram o que eu quero ser como profissional, como professor. Sou muito grato ao professor Rodrigo Miranda pela paciência, pela dedicação e pela parceria com pesquisas e com o presente trabalho. Também sou grato ao professor Leleo (Leonardo Luiz e Castro) e à professora Adriane pelo suporte e pela confiança com o TCC e com o PTCC, respectivamente. Por último gostaria de citar o falecido professor Ivan Ferreira que, em certa altura da graduação, em meio a algumas dificuldades, me convenceu a não desistir da Física. Chego até aqui por conta de seus conselhos.

Por fim, chego aos meus maiores motores: pai, mãe e mana (Bochechuda). Obrigado por todo o apoio nos mais diversos momentos da vida, obrigado pela paciência e pela compreensão nas épocas em que meus cálculos e textos me fizeram ficar com a cabeça longe de tudo. Se eu me tornei um ser humano de caráter foi graças a vocês.



*“Se eu vi mais longe,  
foi por estar sobre ombros de gigantes.  
(Isaac Newton)”*



# Resumo

O estudo de turbulência é essencial para entender os mecanismos que dominam a dinâmica de fluidos e dos plasmas. Um dos poucos resultados teóricos não-triviais da turbulência hidrodinâmica foi obtido por Kolmogorov (1941), quem demonstrou que a terceira ordem da função de estrutura (ou seja, o terceiro momento estatístico) das flutuações de velocidade de um fluido segue uma lei-de-escala, o que foi amplamente confirmado através de experimentos em laboratórios usando túneis de vento e instrumentos de alta precisão (Frisch, 1995).

Neste trabalho é feita uma verificação da lei de [Kolmogorov \(1941\)](#) utilizando dados da componente vertical da velocidade do vento atmosférico coletados na copa da floresta Amazônica através do cálculo da função estrutural de terceira ordem e da aplicação de um ajuste linear no gráfico resultante. O valor do coeficiente angular obtido dentro do subintervalo inercial demonstra que a Lei de Kolmogorov é válida para os dados do vento atmosférico. Além disso, foi feita a dedução detalhada da teoria análoga da Lei de Kolmogorov para a teoria magnetohidrodinâmica (MHD), apresentada pela primeira vez por [Politano e Pouquet \(1998\)](#) e aplicável para a turbulência em plasmas. As implicações dos resultados obtidos neste trabalho de conclusão de curso são também discutidas.

**Palavras-chaves:** Turbulência. Kolmogorov. Escalas. Plasmas. Magnetohidrodinâmica.



# Abstract

The study of turbulence is essential to understand the mechanisms that dominate fluid and plasma dynamics. One of the few non-trivial theoretical results of hydrodynamic turbulence was obtained by Kolmogorov (1941), who demonstrated that the third order structure function (that is, the third statistical moment) of fluid velocity fluctuations follows a law of  $-5/3$ -scale, which has been amply confirmed through laboratory experiments using wind tunnels and high-precision instruments (Frisch, 1995).

In this work, a verification of the [Kolmogorov \(1941\)](#) law is performed using data from the vertical component of atmospheric wind speed collected in the canopy of the Amazon rainforest by calculating the third-order structural function and applying a linear fit to the resulting graph. The slope value obtained within the inertial subinterval demonstrates that Kolmogorov's Law is valid for atmospheric wind data. Furthermore, a detailed deduction of the analogous theory of Kolmogorov's Law was made for the magnetohydrodynamic (MHD) theory, presented for the first time by [Politano e Pouquet \(1998\)](#) and applicable to turbulence in plasmas. The implications of the results obtained in this course conclusion work are also discussed.

**Key-words:** Turbulence. Kolmogorov. Scales. Plasma. Magnetohydrodynamics.



# Lista de ilustrações

|                                                                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Mapa com a topografia da região da coleta de dados, as linhas em cinza mais claro denotam os pontos mais elevados da região. Fonte: (DIAS, 2002) | 51 |
| Figura 2 – Dados wM: perfil de intermitência na altura da copa das árvores (21m).                                                                           | 53 |
| Figura 3 – Dados wI: perfil de intermitência abaixo da copa das árvores. . . . .                                                                            | 54 |
| Figura 4 – Dados wS: perfil acima da copa das árvores (66m). . . . .                                                                                        | 54 |
| Figura 5 – Ajuste para os dados wI, abaixo das copas das árvores. . . . .                                                                                   | 56 |
| Figura 6 – Ajuste para os dados wM, na altura das copas das árvores. . . . .                                                                                | 56 |
| Figura 7 – Ajuste para os dados wS, acima das copas das árvores. . . . .                                                                                    | 57 |



# Lista de abreviaturas e siglas

|     |                                                                                       |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|
| K41 | Referência à teoria de Kolmogorov para a turbulência hidrodinâmica, publicada em 1941 |
| MHD | Magnetohidrodinâmica                                                                  |
| IF  | Instituto de Física                                                                   |
| UnB | Universidade de Brasília                                                              |



# Lista de símbolos

|                               |                                        |
|-------------------------------|----------------------------------------|
| $T$                           | temperatura                            |
| $\tau$                        | escala temporal                        |
| $\omega$                      | velocidade angular                     |
| $\vec{u}$                     | velocidade de escoamento do fluido     |
| $\nu$                         | viscosidade                            |
| $Re$                          | número de Reynolds                     |
| $\epsilon$                    | fluxo de energia                       |
| $L$                           | escala de comprimento                  |
| $k$                           | número de onda                         |
| $S_{ij}$                      | função estrutural de segunda ordem     |
| $S_{ijl}$                     | função estrutural de terceira ordem    |
| $C_{ij}$                      | função de correlação de segunda ordem  |
| $C_{ijl}$                     | função de correlação de terceira ordem |
| $\vec{J}$                     | densidade de corrente                  |
| $\rho$                        | densidade volumétrica                  |
| $\vec{z} = \vec{b} + \vec{v}$ | campo de Elsässer                      |
| $\eta$                        | difusividade magnética                 |
| $k_B$                         | constante de Boltzmann                 |
| $s$                           | entropia                               |



# Sumário

|            |                                                                                                     |           |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|            | Introdução . . . . .                                                                                | 23        |
| <b>I</b>   | <b>TURBULÊNCIA HIDRODINÂMICA E AS LEIS DE KOLMOGOROV</b>                                            | <b>27</b> |
| 1          | O ESPECTRO DE ENERGIA DE KOLMOGOROV . . . . .                                                       | 29        |
| 1.1        | A Primeira Teoria Quantitativa: $K41$ . . . . .                                                     | 29        |
| 2          | ESTRUTURAS DAS PEQUENAS ESCALAS DA TURBULÊNCIA, FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO E LEI $\frac{4}{5}$ . . . . . | 31        |
| 2.1        | Funções de Correlação: Descrição Estatística da Turbulência . . . . .                               | 31        |
| 2.2        | Invariância de Galileu . . . . .                                                                    | 31        |
| 2.3        | Lei $\frac{4}{5}$ de Kolmogorov . . . . .                                                           | 36        |
| <b>II</b>  | <b>TURBULÊNCIA MAGNETOHIDRODINÂMICA</b>                                                             | <b>39</b> |
| 3          | MHD . . . . .                                                                                       | 41        |
| 3.1        | Equações MHD . . . . .                                                                              | 41        |
| 3.1.1      | Equações de Movimento . . . . .                                                                     | 41        |
| 3.2        | Campos de Elsässer e Normalização Temporal de Alfvén . . . . .                                      | 45        |
| 3.2.1      | MHD e a Função Estrutural de Terceira Ordem . . . . .                                               | 47        |
| <b>III</b> | <b>RESULTADOS</b>                                                                                   | <b>49</b> |
| 4          | METODOLOGIA . . . . .                                                                               | 51        |
| 5          | RESULTADOS PARA A HIDRODINÂMICA . . . . .                                                           | 53        |
| 5.1        | Verificação Experimental da Lei de Kolmogorov . . . . .                                             | 53        |
| 6          | RESULTADOS PARA A MHD . . . . .                                                                     | 59        |
| 6.1        | Uma Derivação para a Função Estrutural de Terceira Ordem . . . . .                                  | 59        |
|            | Conclusão . . . . .                                                                                 | 65        |
|            | REFERÊNCIAS . . . . .                                                                               | 67        |

|            |                                                                                                  |           |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|            | <b>APÊNDICES</b>                                                                                 | <b>69</b> |
|            | <b>APÊNDICE A – LEIS DE CONSERVAÇÃO</b> . . . . .                                                | <b>71</b> |
| <b>A.1</b> | <b>Leis de Conservação</b> . . . . .                                                             | <b>71</b> |
| A.1.1      | Invariantes do Fluido . . . . .                                                                  | 71        |
| A.1.2      | Invariantes Magnéticas . . . . .                                                                 | 73        |
|            | <b>APÊNDICE B – DERIVAÇÃO DAS RELAÇÕES MATEMÁTICAS</b><br><b>DE POLITANO E POUQUET</b> . . . . . | <b>77</b> |

# Introdução

Entender o comportamento turbulento de escoamentos de fluidos é um dos principais problemas da física clássica. Inúmeros exemplos de características turbulentas são vistos em todas as escalas do universo, do interior de células ao fluxo de ar no sistema respiratório de seres vivos; dos oceanos e das atmosferas de planetas até as escalas galácticas. O fenômeno já era estudado 500 anos atrás. O renascentista Leonardo da Vinci atribuiu ao escoamento não comportado de fluidos o termo *turbolenza*, dando origem ao nome que é utilizado atualmente. Mais tarde se deu um tratamento de caráter matemático aos estudos sobre turbulência, com destaque para os trabalhos de Kolmogorov (1941) e Frisch. (1995).

O movimento de um fluido incompressível de viscosidade  $\nu$  pode ser descrito pelas Equações de Navier-Stokes (CONSTANTIN; FOIAS, 1988):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f}, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (2)$$

onde  $\vec{f}$  representa as forças externas que injetam energia no fluido e o forçam a se mover e  $\vec{u}$  é a velocidade característica do escoamento. Na equação (1) o segundo termo do lado esquerdo representa os transportes macroscópicos, ou seja, advecção e convecção, enquanto que o segundo termo do lado direito representa a difusão molecular.

Para medir o quão turbulento é um escoamento, usa-se o parâmetro adimensional chamado número de Reynolds, definido matematicamente por

$$Re = \frac{uL}{\nu}, \quad (3)$$

onde L representa a escala de comprimento analisada.

Quando  $Re \ll 1$  trata-se de um fluido viscoso, com movimento regular e linear. Por outro lado, se  $Re \gg 1$ , temos um regime turbulento. Nesse caso,  $\vec{u}$  é altamente irregular, as flutuações em torno de seu valor médio variam rapidamente,

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{U} + \delta \vec{u}. \quad (4)$$

Onde  $\delta \vec{u}$  indica as flutuações de velocidade em uma determinada escala. Tem-se que  $\delta u_L \sim \delta U$ , ou seja, as flutuações tem a mesma ordem de grandeza que a velocidade de escoamento

do fluido. Assim,

$$Re = \frac{\delta u_L L}{\nu}. \quad (5)$$

A turbulência é alimentada pela injeção de energia através das escalas do fluido, das macroscópicas para as microscópicas. Esta energia injetada é representada por

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int d^3 r |\vec{u}^2|. \quad (6)$$

Tomando a derivada temporal temos

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\nu \int d^3 r |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 + \int d^3 r \vec{u} \cdot \vec{f} \quad (7)$$

Na equação (7), o primeiro termo à direita representa a dissipação de energia enquanto que o segundo termo, a injeção de energia, definida por  $V\varepsilon$ , a potência injetada por unidade de volume.

Para o caso estacionário, temos

$$\nu \frac{1}{V} \int d^3 r \langle |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \rangle = \varepsilon. \quad (8)$$

Dimensionalmente temos que

$$\varepsilon \sim \frac{\delta u_L^3}{L}. \quad (9)$$

Pela equação (9) vemos que  $\varepsilon$  deve ser finito e independente da viscosidade. O único modo disso acontecer é se  $\langle |\vec{\nabla} \cdot \vec{u}|^2 \rangle$  for dominado por grandes gradientes (pequenas escalas). Essas pequenas escalas são chamadas de escalas de viscosidade e podem ser determinadas em termos de  $\nu$  e  $\varepsilon$ :

$$l_\nu \sim \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \sim \left( \frac{\nu^3 L^4}{\delta u_L^3 L^3} \right)^{\frac{1}{4}} = L Re^{-\frac{3}{4}} \ll L. \quad (10)$$

Essa é conhecida como a *escala interna de Kolmogorov*. Temos então

$$L \gg l \gg l_\nu. \quad (11)$$

Esse intervalo é conhecido como *subintervalo inercial*.  $L$  representa as escalas macroscópicas, onde a energia é injetada,  $l$  as escalas intermediárias, são essas escalas que levam a energia injetada no sistema para as menores escalas,  $l_\nu$ . Em  $l_\nu$  a energia é dissipada.

Neste trabalho damos continuidade à dedução da teoria de Kolmogorov (1941) feita no primeiro trabalho de conclusão de curso. A validade dessa teoria será comprovada utilizando dados da velocidade do vento medidos na copa da floresta Amazônica. Além disso, será feita a dedução da equação análoga à teoria de Kolmogorov (1941) para o caso de turbulência magnetohidrodinâmica (MHD). A presente monografia está organizada do seguinte modo. No capítulo 1 é apresentada uma revisão sobre a turbulência hidrodinâmica e as leis de Kolmogorov (1941). No capítulo 2 são apresentados os conceitos básicos da teoria magnetohidrodinâmica. O capítulo 3 apresenta a metodologia e os resultados da verificação da teoria de Kolmogorov (1941) utilizando dados observacionais, e a dedução da teoria análoga para a turbulência MHD. Finalmente, no final do capítulo 3 apresentam-se uma discussão dos resultados, as conclusões e possíveis trabalhos futuros.



## Parte I

# Turbulência Hidrodinâmica e as Leis de Kolmogorov



# 1 O Espectro de Energia de Kolmogorov

## 1.1 A Primeira Teoria Quantitativa: $K41$

Kolmogorov (1962), postulou que, para números de Reynolds suficientemente elevados, alguns fatores se fazem presentes

- Universalidade: o tratamento estatístico das pequenas escalas é o mesmo para qualquer fluido em escoamento turbulento;
- Homogeneidade: não existem pontos especiais, todos tem a mesma importância;
- Isotropia: não existem direções preferenciais;
- Localidade das interações: o fluxo energético se dá via cascata entre as escalas.

O fluxo de energia entrando ou saindo de uma escala é dado por  $\epsilon$ . A energia não pode simplesmente aparecer em qualquer ponto dentro da escala inercial. Em 1922, Richardson teorizou que a transferência de energia é de caráter local e se dá via cascata

$$L \rightarrow \frac{L}{2} \rightarrow \frac{L}{4} \rightarrow \dots \rightarrow l_\nu \quad (1.1)$$

Dimensionalmente, para o fluxo de energia, temos

$$\frac{\delta u_l^2}{\tau_l} \sim \epsilon = \text{constante} \quad (1.2)$$

O tempo de cascata é

$$\tau_l \sim \frac{l}{\delta u_l} \quad (1.3)$$

Substituindo (1.3) em (1.2) temos

$$\frac{\delta u_l^3}{l} \sim \epsilon \rightarrow \delta u_l \sim (\epsilon l)^{\frac{1}{3}} \quad (1.4)$$

A forma espectral é dada por

$$\delta u_l^2 \sim \int_{k=\frac{1}{l}}^{\infty} E(k) dk \sim \frac{\epsilon^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}} \rightarrow E(k) \sim \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (1.5)$$

A equação (1.5) corresponde ao espectro de energia de Kolmogorov com  $k$  sendo o número de onda.



## 2 Estruturas das Pequenas Escalas da Turbulência, Funções de Correlação e Lei $\frac{4}{5}$

### 2.1 Funções de Correlação: Descrição Estatística da Turbulência

Nas equações (1) e (2),  $\vec{u}$  é um campo aleatório no espaço-tempo. Prever um particular  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  é praticamente impossível e sem sentido físico algum. Tenta-se então prever alguns valores médios para as grandezas envolvidas.

A hipótese ergódica (ver (FRISCH., 1995) para mais detalhes) é usualmente utilizada em análise estatística. A hipótese assume que o valor médio de um dos parâmetros no tempo e o valor médio estatístico são os mesmos.

Formalmente,  $P_1[\vec{u}_1(\vec{x}_1)]$  é a probabilidade de se obter a velocidade  $\vec{u}_1$  no ponto  $\vec{x}_1$ ,  $P_2[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{x}_1, \vec{x}_2]$  é a probabilidade de se obter a velocidade  $\vec{u}_1$  no ponto  $\vec{x}_1$  e a velocidade  $\vec{u}_2$  no ponto  $\vec{x}_2$  e assim por diante.

Para pequenas escalas, pode-se assumir que a turbulência é homogênea, i.e., todos os pontos no espaço tem a mesma importância estatística. Então,

- $P_1[\vec{u}_1, \vec{x}_1] = P_1[\vec{u}_1]$ ; é independente da posição.
- $P_2[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{x}_2 - \vec{x}_1]$ ; depende apenas da distância entre os pontos

As funções de correlação são definidas como

$$S_p = \left\langle \left( u(\vec{x} + \vec{r}) - u(\vec{x}) \right)^p \right\rangle,$$

onde  $p$  é o grau da função e  $\vec{r}$  é o vetor da distância entre dois pontos próximos nos quais se mede a quantidade  $u$ . Se  $u$  for uma grandeza vetorial (velocidade ou vorticidade, por exemplo), podemos trabalhar com funções de estrutura longitudinais e transversais.

### 2.2 Invariância de Galileu

Se  $\vec{u}'(\vec{x}, t) = \vec{u}(\vec{x} - \vec{U}t, t) + \vec{U}$ , então o incremento da velocidade será  $P[\delta\vec{u}; \vec{x}_2 - \vec{x}_1]$ . É por vezes difícil realizar essas medidas, então pode-se trabalhar com os momentos. Na função de estrutura temos que  $\langle \delta u_i \delta u_j \rangle = S_{ij}(\vec{r})$ ,  $\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ .  $\langle u_i(\vec{x}_1) u_j(\vec{x}_2) \rangle = C_{ij}(\vec{r})$  é uma função de correlação. Em geral podemos tratar de uma função de correlação que tenha  $m$  potências de  $u_i$  tomados em  $n$  pontos diferentes. Vemos que a energia  $\frac{1}{2} \langle |\vec{u}(\vec{x})|^2 \rangle = \frac{1}{2} C_{ij}(0)$

é uma função de segunda ordem de um ponto, independente da posição. Formalmente,  $\langle u_i(\vec{x}_1)u_j(\vec{x}_2) \rangle = \int D\vec{u}_1 D\vec{u}_2 P[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{x}_2 - \vec{x}_1]$ . Matematicamente,

$$S_{ij}(\vec{r}) = \langle \delta u_i \delta u_j \rangle = \langle (u_{2i} - u_{1i})(u_{2j} - u_{1j}) \rangle$$

$$S_{ij}(\vec{r}) = \langle u_{2i}u_{2j} \rangle + \langle u_{1i}u_{1j} \rangle - \langle u_{1i}u_{2j} \rangle - \langle u_{1j}u_{2i} \rangle$$

onde  $\langle u_{2i}u_{2j} \rangle = C_{ij}(0)$ ,  $\langle u_{1i}u_{1j} \rangle = C_{ij}(0)$ ,  $\langle u_{1i}u_{2j} \rangle = C_{ij}(\vec{r})$ ,  $\langle u_{1j}u_{2i} \rangle = C_{ji}(\vec{r})$ .

As simetrias auxiliam a reduzir o número de funções escalares. Da homogeneidade temos  $C_{ij}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = C_{ij}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$ . A isotropia assegura que não há direções especiais, preferenciais. Então

$$C_{ij}(\vec{r}) = C_1(r)\delta_{ij} + C_2(r)\hat{r}_i\hat{r}_j + C_3(r)\epsilon_{ijk}\hat{r}_k.$$

A paridade diz que  $C_{ij}(-\vec{r}) = C_{ij}(\vec{r})$  e que  $C_{ij}(-\vec{r}) = -C_{ji}(\vec{r})$ . Tem-se, portanto, duas funções escalares restantes:

$$C_{ij}(\vec{r}) = C_{TT}(r)(\delta_{ij} - \hat{r}_i\hat{r}_j) + C_{LL}\hat{r}_i\hat{r}_j.$$

Qualquer tensor de segunda ordem isotrópico é proporcional a  $\delta_{ij}$ , então

$$C_{ij}(0) = \Lambda\delta_{ij} \rightarrow \Lambda = \frac{C_{ii}(0)}{3} = \frac{\langle u^2 \rangle}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$C_{ij}(0) = \frac{1}{3}\langle u^2 \rangle\delta_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$$

Portanto,

$$S_{ij}(\vec{r}) = \frac{2}{3}\langle u^2 \rangle\delta_{ij} - 2C_{ij}(\vec{r}) = S_{TT}(r)(\delta_{ij} - \hat{r}_i\hat{r}_j) + S_{LL}(r)\hat{r}_i\hat{r}_j,$$

Com

$$\begin{aligned} S_{TT} &= \frac{2}{3}\langle u^2 \rangle - 2C_{TT}, & S_{LL} &= \frac{2}{3}\langle u^2 \rangle - 2C_{LL}, \\ S_{ii} &= 0, & C_{ii}(0) &= 2C_{TT}(0) + C_{LL}(0). \end{aligned}$$

A incompressibilidade gera uma restrição ainda maior:  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ , tal que  $\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial C_{ij}}{\partial r_j} = 0$ , e, assim,

$$C'_{TT}(r)\hat{r}_j(\delta_{ij} - \hat{r}_i\hat{r}_j) + C'_{LL}(r)\hat{r}_j\hat{r}_i\hat{r}_j + \\ + (C_{LL} - C_{TT})\left(\frac{\delta_{ij}r_j}{r^2} + \frac{3r_i}{r^2} - 2\frac{r_i r_j}{r^3}\hat{r}_j\right) = \hat{r}_i\left[C'_{LL} + \frac{2}{r}(C_{LL} - C_{TT})\right].$$

Nota-se que

$$\frac{\partial}{\partial r_j} = \frac{r_j}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \hat{r}_j \frac{\partial}{\partial r}.$$

O termo em parênteses é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \frac{r_i r_j}{r^2},$$

e o termo entre colchetes é

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 C_{LL} = \frac{2}{r} C_{TT}.$$

Obtem-se assim a relação de von-Karmán:

$$C_{TT}(r) = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 C_{LL} = \left(1 + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r}\right) C_{LL}. \quad (2.1)$$

Existem relações análogas para  $S_{TT}$  e  $S_{LL}$ . Assim, precisamos de apenas uma função escalar, por exemplo  $S_{LL}(r)$ .

Há uma descrição dentro do espaço  $k$ :

$$u_i(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} u_i(\vec{x})$$

$$u_i(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} u_i(\vec{k}) \rightarrow \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} u_i(\vec{k})$$

Então

$$\langle u_i(\vec{k}) u_j(\vec{k}') \rangle = \int d^3x \int d^3x' e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x}') \rangle,$$

onde

$$\langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x}') \rangle = C_{ij}(\vec{r}), \vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'.$$

$$= \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} C_{ij}(\vec{r}) \int d^3x' e^{-i\vec{x}'\cdot(\vec{k}+\vec{k}')}. \quad (2.2)$$

A primeira integral em (2.2) é igual a  $C_{ij}(\vec{k})$  e a segunda,  $(2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}')$ .

Dessa forma

$$\langle u_i(\vec{k}) u_j(\vec{k}') \rangle = C_{ij}(\vec{k}) (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}').$$

Como feito anteriormente, se estuda as propriedades dos princípios assumidos por Kolmogorov.

Isotropia e paridade levam a

$$C_{ij}(\vec{k}) = C_1(k) \delta_{ij} + C_2(k) \hat{k}_i \hat{k}_j.$$

A incompressibilidade diz que  $k_i C_{ij} = 0$  logo  $C_2 = -C_1$  e portanto

$$C_{ij}(\vec{k}) = C(k) (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j).$$

É conveniente definir o espectro de tal modo que

$$\frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \varepsilon = \int_0^\infty dk E(k).$$

Bem,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle u^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left\langle \left| \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \vec{u}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right|^2 \right\rangle_{\text{volume}} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3 k \int d^3 k' e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \langle u_i(\vec{k}) u_i(\vec{k}') \rangle. \end{aligned}$$

Com  $C_{ii}(\vec{k}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} + \vec{k}')$ , onde  $C_{ii}(\vec{k}) = 2C(k)$ . Assim,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi^3)} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi C(k) \\ &= \int_0^\infty dk \frac{k^2 C(k)}{2\pi^2}. \end{aligned}$$

Obtemos então

$$E(k) = \frac{1}{2\pi^2} k^2 C(k).$$

Pode-se agora associar o espectro à uma função de correlação

$$C(k) = \frac{1}{2} C_{ii}(\vec{k}) = \frac{1}{2} \int d^3 r e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} C_{ii}(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 [2C_{TT}(r) + C_{LL}(r)] \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

Vale ressaltar que

$$[2C_{TT}(r) + C_{LL}(r)] = C_{LL} + \frac{1}{2} r C'_{LL}$$

$$\int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\vec{k}\vec{r}} = 4\pi \frac{\sin(kr)}{kr}$$

De modo que

$$C(k) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^2 [3C_{LL} + r C'_{LL}] 4\pi \frac{\sin(kr)}{kr}$$

Mas  $[3C_{LL} + r C'_{LL}] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 C_{LL}$ . Dessa forma,

$$C(k) = 2\pi \int_0^\infty dr \frac{\sin(kr)}{kr} \frac{\partial}{\partial r} r^3 C_{LL}(r)$$

$$C_{LL}(r) = \frac{1}{3} \langle u^2 \rangle - \frac{1}{2} S_{LL}(r),$$

e então

$$C(k) = \frac{2\pi}{3} \langle u^2 \rangle \int_0^\infty dr \frac{\sin(kr)}{kr} 3r^2 - \pi \int_0^\infty dr \frac{\sin(kr)}{kr} \frac{\partial}{\partial r} r^3 S_{LL}(r).$$

O valor da primeira integral é zero. O que leva a

$$E(k) = \frac{k^2}{2\pi^2} C(k) = \frac{1}{\pi} k^2 \int_0^\infty dr \frac{\sin(kr)}{kr} \frac{\partial}{\partial r} r^3 C_{LL}(r).$$

Para pequenos valores de k

$$E(k) = \frac{1}{\pi} k^2 \left[ \int_0^\infty dr \frac{\partial}{\partial r} r^3 C_{LL}(r) - \frac{1}{6} k^2 \int_0^\infty dr r^2 \frac{\partial}{\partial r} r^3 C_{LL}(r) + \dots \right] = \frac{1}{3\pi} k^4 \int_0^\infty dr r^4 C_{LL}(r) + \dots$$

A primeira integral é também nula uma vez que  $C_{LL}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  mais rápido que  $\frac{1}{r^3}$ . A segunda é igual a  $-2 \int_0^\infty dr r^4 C_{LL}(r)$ . Desse modo,

$$E(k) = \frac{1}{3\pi} k^4 \int_0^\infty dr r^4 C_{LL}(r).$$

O termo  $\int_0^\infty dr r^4 C_{LL} = \Lambda$  é o invariante de Loytsyanskii.

## 2.3 Lei $\frac{4}{5}$ de Kolmogorov

Começamos a construir a segunda Lei de Kolmogorov partindo da função de correlação para a velocidade

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u_{1i} u_{2j} \rangle &= -\frac{\partial}{\partial x_{1l}} \langle u_{1i} u_{1l} u_{2j} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_{2l}} \langle u_{1i} u_{2l} u_{2j} \rangle \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_{1i}} \langle p_1 u_{2j} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \langle p_2 u_{1i} \rangle \\ &\quad + \nu \nabla_1^2 \langle u_{1i} u_{2j} \rangle + \nu \nabla_2^2 \langle u_{1i} u_{2j} \rangle \\ &\quad + \langle u_{1i} f_{2j} \rangle + \langle u_{2j} f_{1i} \rangle \end{aligned}$$

Por conta da homogeneidade do espaço

$$\langle u_{1i} u_{2j} \rangle = C_{ij}(\vec{r})$$

$$\langle u_{1i} u_{1l} u_{2j} \rangle = C_{il,j}(\vec{r})$$

$$\langle u_{1i} u_{2l} u_{2j} \rangle = C_{lj,i}(-\vec{r}) = -C_{lj,i}(\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{1l}} = -\frac{\partial}{\partial r_l}; \quad \frac{\partial}{\partial x_{2l}} = \frac{\partial}{\partial r_l}$$

A isotropia faz com que os termos que envolvem a pressão desapareçam. Temos um termo dissipativo,  $2\nu \nabla^2 C_{ij}(\vec{r})$ , e um termo injetivo, term  $2\varepsilon_{ij}(\vec{r})$ . Usando essas relações temos então

$$\partial_t C_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_l} (C_{il,j} + C_{jl,i}) + 2\nu \nabla^2 C_{ij} + 2\varepsilon_{ij}(\vec{r})$$

Como  $C_{ij}(\vec{r})$  depende apenas de uma função escalar, podemos pegar apenas o traço sem ter o prejuízo de perder informações

$$\frac{1}{2} \partial_t C_{ii}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial r_l} C_{il,i} + \nu \nabla^2 C_{ii} + \epsilon_{ii}(\vec{r}) \quad (2.3)$$

Essa é uma versão de dois pontos para a energia. Com a isotropia e a homogeneidade sabemos que

$$\begin{aligned} C_{ii}(r) &= 2C_{TT}(r) + C_{LL}(r) = 2C_{LL} + r \frac{\partial}{\partial r} C_{LL} + C_{LL} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 C_{LL}. \end{aligned}$$

Mas  $C_{LL} = -\frac{1}{2}S_{LL} + \frac{1}{3}\langle u^2 \rangle$ , então

$$C_{ii}(r) = \langle u^2 \rangle - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^3 S_{LL}(r).$$

A função de correlação tripla  $C_{i,j}$  depende apenas de uma função escalar

$$C_{i,l,j}(r) = -\frac{1}{12} \left[ S_{LLL} \delta_{il} \hat{r}_j - \frac{1}{2} (r S'_{LLL} + 2S_{LLL}) (\delta_{ij} \hat{r}_l + \delta_{lj} \hat{r}_i) + (r S'_{LLL} - S_{LLL}) \hat{r}_i \hat{r}_l \hat{r}_j \right]$$

Para  $i = j$

$$C_{i,l,i} = -\frac{1}{12} \hat{r}_l \left( r S'_{LLL} + 4S_{LLL} \right) = \frac{1}{12} \frac{\hat{r}_l}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^4 S_{LLL}.$$

Substituindo essas relações em 2.3 obtemos uma relação entre as funções de correlação de segunda e terceira ordem,  $S_{LL}$  e  $S_{LLL}$ , chamada Equação de vón-Kármán Howarth.

Se assumirmos um regime estacionário e injeção de energia em grandes escalas, podemos simplificar 2.3 como

$$\frac{\partial}{\partial r_l} \left[ C_{i,l,i} + \nu \frac{\partial}{\partial r_l} C_{ii} \right] = -\varepsilon. \quad (2.4)$$

Integrando,

$$C_{i,l,i} + \nu \frac{\partial}{\partial r_l} C_{ii} = -\frac{1}{3} \varepsilon r_l.$$

Usando os resultados anteriores para  $C_{i,l,i}$  e  $C_{ii}$ , o primeiro termo do lado esquerdo da igualdade é igual a

$$\frac{1}{12} \hat{r}_l \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \left[ S_{LLL} - 6\nu S'_{LL} \right].$$

Dessa forma

$$S_{LLL} = -\frac{4}{5} \varepsilon r + 6\nu S'_{LL}. \quad (2.5)$$

Essa é Lei  $\frac{4}{5}$  de Kolmogorov.



## Parte II

# Turbulência Magnetohidrodinâmica



## 3 MHD

A teoria magnetohidrodinâmica (MHD) descreve o comportamento macroscópico de um fluido eletrizado (plasma). As escalas macroscópicas são aquelas maiores que as escalas características do plasma, tais como o comprimento de Debye  $\lambda_D$  e o raio de Larmor  $\rho_i$  das partículas carregadas (BISKAMP, 2003).

### 3.1 Equações MHD

Seguindo o livro de Dieter Biskamp (2003) iremos encontrar as equações para a teoria MHD.

#### 3.1.1 Equações de Movimento

A equação do momento na MHD pode ser obtida levando em consideração todas as forças atuantes em um elemento de volume do fluido  $\delta V$ , com massa  $\rho$ .

Na presença de um campo eletromagnético, uma partícula fica sujeita à Força de Lorentz:  $q_i(\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B}/c)$ . A força em um elemento macroscópico do fluido é o somatório das forças que atuam individualmente em cada partícula,  $\delta q \vec{E} + \delta \vec{J} \times \vec{B}/c$ . Para a maioria dos fluidos é verdade que  $\delta q \approx 0$ , restando apenas a atuação da componente magnética da força

$$\vec{F}_{Lz} = \delta V \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}, \quad (3.1)$$

com  $\delta \vec{J} = \vec{j} \delta V$ .

A segunda força atuante é a que surge em função da pressão térmica. Assume-se que as condições de equilíbrio térmico prevaleçam e assim tem-se que o tensor de pressão é isotrópico,  $p_{ij} = p \delta_{ij}$ , resultando em

$$\vec{F}_{term} = - \oint p d\vec{S} = -\delta V \vec{\nabla} p. \quad (3.2)$$

A integral é tomada em toda a superfície do elemento de fluido. A força gravitacional será

$$\vec{F}_{grav} = \delta V \rho \vec{g} \quad (3.3)$$

Como se trata de fluido, teremos uma componente devida à viscosidade. De maneira semelhante à força da pressão térmica, a força de viscosidade atua na superfície do elemento de volume,

$$\vec{F}_{visc} \oint \vec{\sigma}^{(\mu)} \cdot d\vec{S} = \delta V \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}^{(\mu)}, \quad (3.4)$$

com

$$\sigma^{(\mu)} = \sigma_{ij}^{(\mu)},$$

sendo o tensor de estresse e definido matematicamente como

$$\sigma_{ij}^{(\mu)} = \mu \left[ (\partial_t v_j + \partial_t v_i) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right], \quad (3.5)$$

$\mu$  é a viscosidade e é tratada como constante. O primeiro termo dentro dos colchetes é o tensor de deformação

$$w_{ij} = \partial_t v_j + \partial_t v_i. \quad (3.6)$$

Somando todas as forças, tem-se a equação de movimento, ou equação do momento

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \equiv \rho (\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} + \mu \left( \nabla^2 v + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) \quad (3.7)$$

A densidade de corrente  $\vec{j}$  tem relação com o campo magnético dada pela Lei de Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.8)$$

O vetor deslocamento é omitido, consistente como o fato de que as cargas são negligenciadas. Com isso a equação de continuidade para a densidade de cargas é  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ . Substituindo para  $\vec{j}$ , a força de Lorentz pode ser escrita como

$$\frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = \frac{-1}{8\pi} \nabla B^2 + \frac{1}{4\pi} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} = -\vec{\nabla} \cdot T^M, \quad (3.9)$$

onde  $T^M = T_{ij}^M$  é o tensor de estresse magnético

$$T_{ij}^M = \frac{1}{8\pi} B^2 \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} B_i B_j. \quad (3.10)$$

O primeiro termo do lado direito atua como uma pressão isotrópica que pode ser combinada com a pressão térmica e então tem-se a pressão total

$$P = p + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (3.11)$$

A razão

$$\beta = \frac{8\pi p}{B^2}, \quad (3.12)$$

caracteriza o quão forte é o campo magnético que atua no plasma.

Para a dinâmica do campo magnético, tem-se a Lei de Faraday

$$\partial_t \vec{B} = -c \vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad (3.13)$$

com o campo elétrico sendo determinado pela Lei de Ohm.

Para o referencial em repouso do elemento de volume,  $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$ , onde  $\sigma$  é a condutividade elétrica. Para o referencial de um observador, o elemento de fluido se move a uma velocidade  $v$  e, então, o campo elétrico é obtido das transformações de Galileu

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Assim

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{\sigma} \vec{j}. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) é a versão generalizada da Lei de Ohm. Substituindo  $E$  na Lei de Faraday e assumindo que a condutividade é uniforme, encontra-se a equação de advecção e difusão para o campo magnético

$$\partial_t \vec{B} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \eta \nabla^2 \vec{B}, \quad (3.15)$$

que também é chamada de Lei de Faraday ou ainda de equação da indução.  $\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$  é a difusividade magnética ou resistividade.

A conservação de massa leva à equação de continuidade para a densidade de massa. A variação da massa do elemento de volume

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V} \rho dV = - \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.16)$$

Pelo Teorema de Gauss

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.17)$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  para fluidos incompressíveis.

Por último, tem-se a equação dinâmica para a pressão. Para condições próximas às do equilíbrio térmico, a pressão está relacionada à densidade  $\rho$  e à temperatura  $T$  pela equação de estado.

Quando se lida com plasma diluído, pode-se assumir como válida a lei do gás ideal que, para um plasma formado por elétrons e apenas um tipo de íon positivo monovalente, fica

$$p = 2 \frac{\rho}{m_i} k_B T = 2n k_B T, \quad (3.18)$$

onde  $m_i$  é a massa do íon,  $n$  é a densidade numérica de partículas,  $\rho \approx n m_i$  e  $k_B$  é a constante de Boltzmann.

O processo de condução de calor é difusivo e, portanto, pode ser negligenciado para escalas suficientemente grandes, o que leva a transformação de estado do elemento de fluido a ser adiabática

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0, \quad (3.19)$$

que é equivalente a um escoamento isentrópico  $\frac{ds}{dt} = 0$ , onde a entropia do gás ideal é

$$s = c_V \ln(p\rho^{-\gamma}). \quad (3.20)$$

A equação (3.19) pode ainda ser escrita como

$$\partial_t p + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p + \gamma p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (3.21)$$

com  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$  é o expoente adiabático. Para um gás simples,  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

Para que os efeitos do aquecimento e do resfriamento sejam contabilizados, pode-se introduzir uma relação mais politrópica:  $p(\rho) \approx \rho^\gamma$ , com algum valor de  $\rho^\gamma$  menor que o valor adiabático.

Tem-se que  $\gamma = 1$  descreve variações isotérmicas de pressão, correspondendo à condução infinita de calor, enquanto que  $\gamma \rightarrow \infty$  descreve a dinâmica de fluidos incompressíveis ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ .)

Se a condução de calor não for negligenciável, a energia interna  $u = \frac{p}{\rho}(\gamma - 1)$  deve ser considerada. Para a temperatura

$$\partial_t T + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T + (\gamma - 1)T \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (\gamma - 1)\kappa \nabla^2 T, \quad (3.22)$$

com  $\kappa$  sendo a difusividade de calor.

Em um tratamento consistente não apenas a condução de calor mas também a viscosidade térmica e a dissipação ôhmica devem ser consideradas também para a equação de energia

$$\rho \left( \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) u + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\nabla \cdot \vec{q} + \sigma^{(\mu)} : \vec{\nabla} \vec{v} - \frac{1}{\sigma} \vec{j}^2 \quad (3.23)$$

onde  $\vec{q} = -\kappa \rho \vec{\nabla} T$ .

Os efeitos dissipativos tem a forma de processos de difusão com viscosidade cinética  $\nu$ , e com as difusividades magnética e térmica,  $\eta$  e  $\kappa$ .

Para estudos numéricos da turbulência é comum usar operadores de difusão de ordens maiores, a hiperdifusão

$$\nabla^2 \rightarrow \nabla^{2\alpha}, \alpha > 1 \quad (3.24)$$

$\alpha$  é chamado de dissipatividade.

## 3.2 Campos de Elsässer e Normalização Temporal de Alfvén

Como a MHD é focada em plasma incompressível, a onda de Alfvén é o modo linear mais importante. Para o caso em que a velocidade da onda de Alfvén e o campo magnético são paralelos

$$v_l = \pm \frac{b}{l} \sqrt{4\pi\rho_0}.$$

O efeito fundamental das ondas de Alfvén na MHD se torna evidente quando se escreve as equações não lineares da MHD em termos dos campos de Elsässer, definidos como

$$\vec{z}^\pm = \vec{v} \pm \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \vec{b}. \quad (3.25)$$

Para fins de simplificação, normaliza-se as equações da MHD com respeito ao tempo de Alfvén  $t_A = \frac{L}{v_A}$

$$\frac{t}{t_A} = t; \quad \frac{x}{L} = x; \quad \frac{b}{B_0} = b; \quad \frac{p}{\rho_0 v_A^2} = p. \quad (3.26)$$

Nessas unidades, a difusividade magnética é o inverso do número de Lundquist

$$S = \frac{v_A L}{\eta}.$$

Os campos de Elsässer se tornam simplesmente

$$\vec{z}^\pm = \vec{v} \pm \vec{b} \quad (3.27)$$

Adicionando (3.7) e (3.15), tem-se

$$\partial_t z^\pm \vec{z}^\mp \cdot \vec{\nabla} z^\pm = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{2}(\nu + \eta)\nabla^2 z^\pm + \frac{1}{2}(\nu - \eta)\nabla^2 z^\mp, \quad (3.28)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{z}^\pm = 0.$$

Linearizando essas equações em torno de um campo magnético  $B_0$  uniforme e desprezando efeitos da dissipação,

$$\partial_t z^\pm \mp \vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla} z^\pm = 0. \quad (3.29)$$

A variável  $z^-$  descreve as ondas de Alfvén se propagando na direção de  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{z}^-(x - \vec{B}_0 t)$ , e  $z^+$  descreve as ondas de Alfvén se propagando na direção oposta  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{z}^+(x + \vec{B}_0 t)$ .

Como os campos de Elsässer são as variáveis fundamentais da MHD para o caso incompressível, também convém expressar as invariantes em termos destes campos.

A energia fica

$$E = \frac{1}{4} \int dV [(z^+)^2 + (z^-)^2], \quad (3.30)$$

e a helicidade se torna

$$H^C = \frac{1}{4} \int dV [(z^+)^2 - (z^-)^2]. \quad (3.31)$$

$H^M$  não é expressa em termos dos campos de um modo conveniente. Porém, há uma outra grandeza importante para a turbulência MHD, chamada de energia residual, dada pela diferença entre as energias cinética e magnética, que pode ser expressa como

$$E^R = \frac{1}{2} \int dV (\vec{v}^2 - \vec{b}^2) = \frac{1}{2} \int dV \vec{z}^+ \cdot \vec{z}^-. \quad (3.32)$$

### 3.2.1 MHD e a Função Estrutural de Terceira Ordem

H. Politano e A. Pouquet (1998) mostram em seu artigo como as funções estruturais ficam em termos das variáveis da teoria MHD. As funções estruturais neste caso também são deduzidas a partir das equações de Navier-Stokes. Para um fluido incompressível podemos escrever (1) como

$$\left( \partial_t + \vec{z}^\mp \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{z}^\pm = -\vec{\nabla} P_* + \nu_+ \nabla^2 \vec{z}^\pm + \nu_- \nabla^2 \vec{z}^\mp. \quad (3.33)$$

Como visto anteriormente,  $\vec{z}$  é o campo de Elsässer e  $\vec{b}$  é a indução magnética.  $P_* = P + b/2$  é a pressão total.  $\nu_\pm = (\nu \pm \eta)/2$ , com  $\nu$  sendo a viscosidade e  $\eta$ , a difusividade magnética, e,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$ .

Politano e Pouquet (1998) deduzem as funções de escala em termos da velocidade e do campo magnético

$$\langle \delta v_L^3(\vec{r}) \rangle - 6 \langle b_L^2(\vec{x}) v_L(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = -K_d \epsilon^T r, \quad (3.34)$$

$$-\langle \delta b_L^3(\vec{r}) \rangle + 6 \langle v_L^2(\vec{x}) b_L(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = -K_d \epsilon^C r. \quad (3.35)$$

Os subíndices L e d representam a componente longitudinal e o número de dimensões analisadas, respectivamente.  $\epsilon^T$  e  $\epsilon^C$  correspondem ao fluxos de energia total e de correlação

$$\epsilon^T = \frac{1}{2}(\epsilon^+ + \epsilon^-),$$

$$\epsilon^C = \frac{1}{2}(\epsilon^+ - \epsilon^-),$$

$k_d$  obedece a relação  $d_*(d+2)K_d = 12$ . A Lei 4/5 de Kolmogorov é recuperada para  $\vec{b} = 0$  e  $d_* = d = 3$ .



Parte III

Resultados



## 4 Metodologia

Para a parte do trabalho dedicada à teoria hidrodinâmica, utilizamos os dados coletados e apresentados no artigo [Chian et al. \(2008\)](#). Fazendo um estudo sobre turbulência na atmosfera, os autores coletaram dados sobre a velocidade do vento na copa das árvores na floresta amazônica em 1999. Os dados foram coletados durante o projeto LBA (Large-Scale Biosphere-Atmosphere Experiment in Amazonia). O projeto visava estudar funções climatológicas, bioquímicas, ecológicas e hidrológicas da Amazônia, os impactos do desmatamento e as interações entre a Amazônia e o clima da Terra. As velocidades verticais do vento foram coletadas para três alturas diferentes, abaixo da copa, na altura da copa e acima da copa das árvores (108000 dados para cada altura). Os dados foram coletados a uma taxa de 60Hz por um anemômetro sônico. As antenas foram instaladas em vários pontos diferentes no estado de Rondônia, ver figura 1 abaixo, os dados analisados neste trabalho são referentes aos dados coletados na antena instalada na Reserva Biológica de Jaru (Rebio Jaru.) Com os dados, foram construídos gráficos de séries temporais para as velocidades. Além disso, por meio de um código em C, calculou-se valores para a função estrutural de terceira ordem, o que permitiu, por meio de análise gráfica, o estudo da faixa inercial de Kolmogorov.

Para o estudo da turbulência MHD, foram feitas deduções matemáticas para obter a relação da função estrutural de terceira ordem, seguindo o trabalho de [Bandyopadhyay \(2020\)](#).

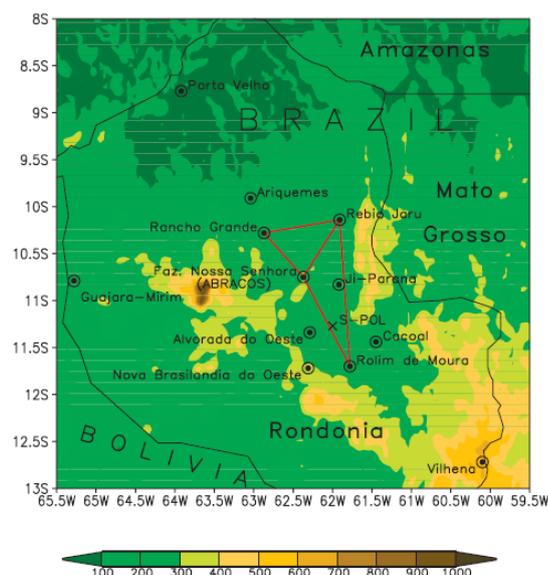


Figura 1 – Mapa com a topografia da região da coleta de dados, as linhas em cinza mais claro denotam os pontos mais elevados da região. Fonte: [\(DIAS, 2002\)](#)



## 5 Resultados para a Hidrodinâmica

### 5.1 Verificação Experimental da Lei de Kolmogorov

Como mencionado no Capítulo 4, utilizaremos dados da velocidade vertical do vento medidos em três alturas diferentes. As figuras 2, 3 e 4 mostram as séries temporais da velocidade medida no meio, abaixo e acima da copa das árvores, respectivamente. Ao plotarmos as séries temporais das velocidades, verificamos os perfis de intermitência das mesmas. Nesses gráficos,  $w_M$  representa os dados na altura da copa das árvores,  $w_I$  representa os dados abaixo da copa das árvores e, por fim,  $w_S$  representa os dados medidos acima da copa das árvores. Os dados  $w_I$ ,  $w_M$  e  $w_S$  estão em m/s e o tempo está em segundos, no intervalo entre 0 e 1800s. As medidas foram feitas entre 12h e 12h30min.

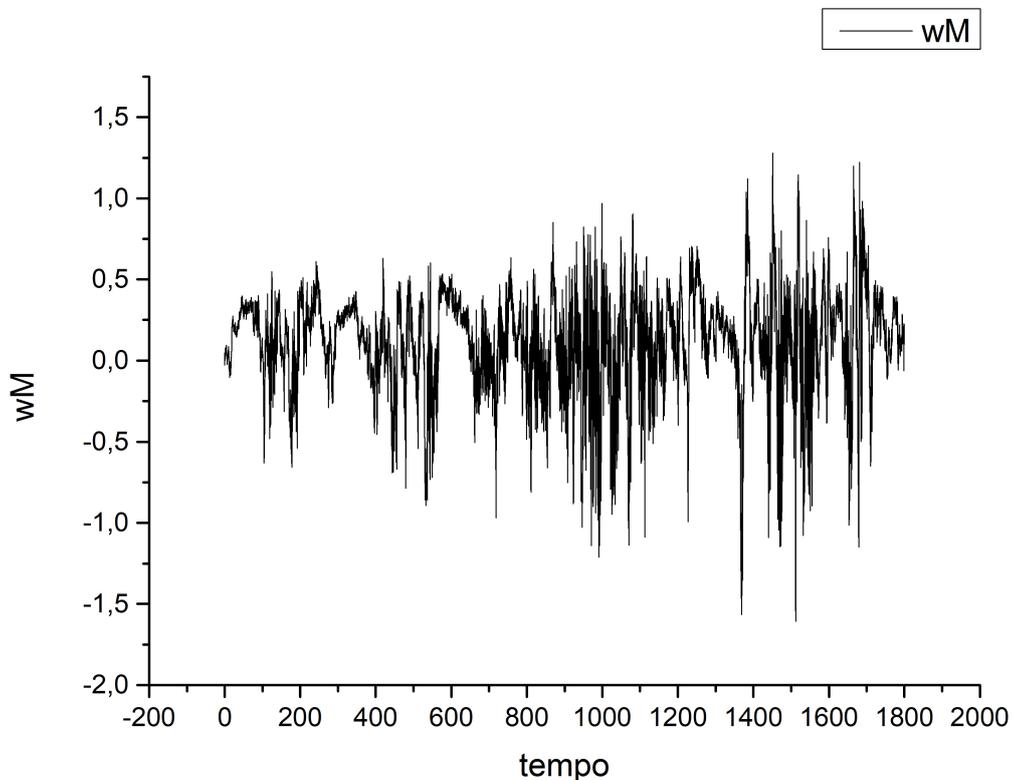


Figura 2 – Dados  $w_M$ : perfil de intermitência na altura da copa das árvores (21m).

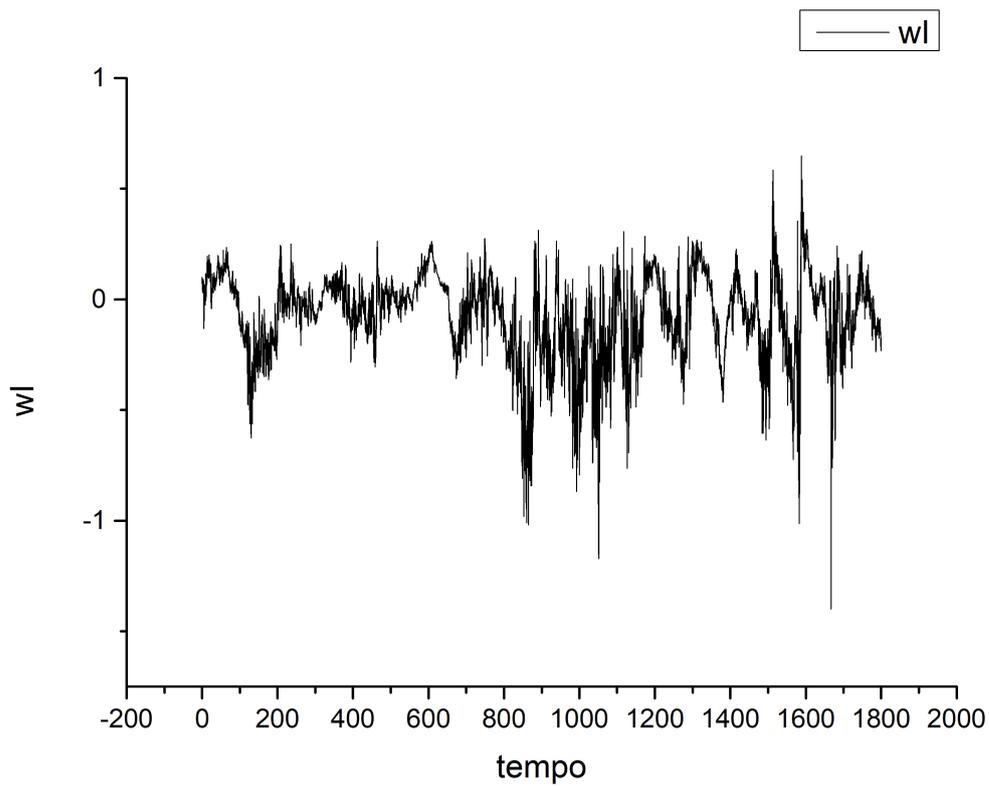


Figura 3 – Dados  $wI$ : perfil de intermitência abaixo da copa das árvores.

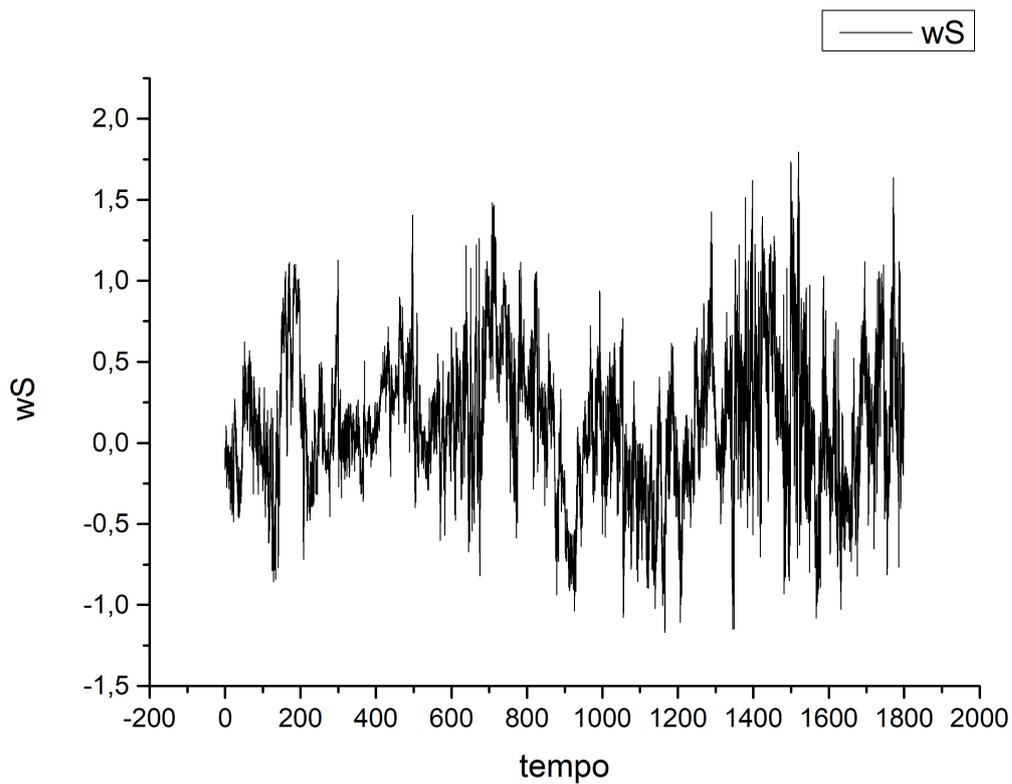


Figura 4 – Dados  $wS$ : perfil acima da copa das árvores (66m).

Para montar a escala temporal, levamos em consideração que cada medida foi coletada a cada 1/60s, portanto, para 108000 dados, teremos um tempo total de 1800s

Outra parte do processo envolveu computar valores para a função estrutural de terceira ordem. Para tal, foi criado um código em C que lê os arquivos que continham os dados das velocidades. De forma simplória, definimos a função de terceira ordem como

$$S_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ |w(\tau + t_i) - w(t_i)| \right]^3 \quad (5.1)$$

Aqui,  $N$  é a metade da quantidade de valores, ou seja, 54000.  $\tau$  é o intervalo entre duas medidas, se  $\tau = 1$ , teremos a diferença entre as medidas  $w_2$  e  $w_1$ , se  $\tau = 2$ , teremos  $w_3 - w_1$  e assim por diante.

Com os valores obtidos para  $S_3$ , partiu-se para a verificação da Lei  $\frac{4}{5}$  de Kolmogorov (2.5) quando  $\nu \rightarrow 0$ . Para o caso de baixa viscosidade, ou seja, para escoamento turbulento, temos

$$S_3 = -\frac{4}{5} \epsilon r \quad (5.2)$$

No lugar de  $r$  usaremos a escala de tempo mencionada anteriormente, de 0 a 1800s, correspondendo ao instante em que cada medida foi tomada. Como justificativa para tal substituição foi utilizada a Hipótese de Taylor. A Hipótese diz que as funções de covariância da turbulência em uma localização fixa no tempo e no espaço na direção longitudinal são, em boa medida, as mesmas funções (BOLZAN, 2004).

A função fica então com a forma

$$S_3 = -\frac{4}{5} \epsilon \left( \frac{\tau}{60} \right) \quad (5.3)$$

Para que essa relação apresente caráter linear, fazemos

$$\begin{aligned} \log[S_3] &= \log \left[ -\frac{4}{5} \epsilon \left( \frac{\tau}{60} \right) \right] \\ \log[S_3] &= \log \left[ -\frac{4}{5} \epsilon \right] + \log \left[ \frac{\tau}{60} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Se fizermos  $y = \log[S_3]$  e  $x = \log[\tau/60]$ , é esperado que, na região do ajuste linear, o coeficiente angular da reta seja próximo ou igual a 1. Abaixo temos os gráficos dos três conjuntos de dados.

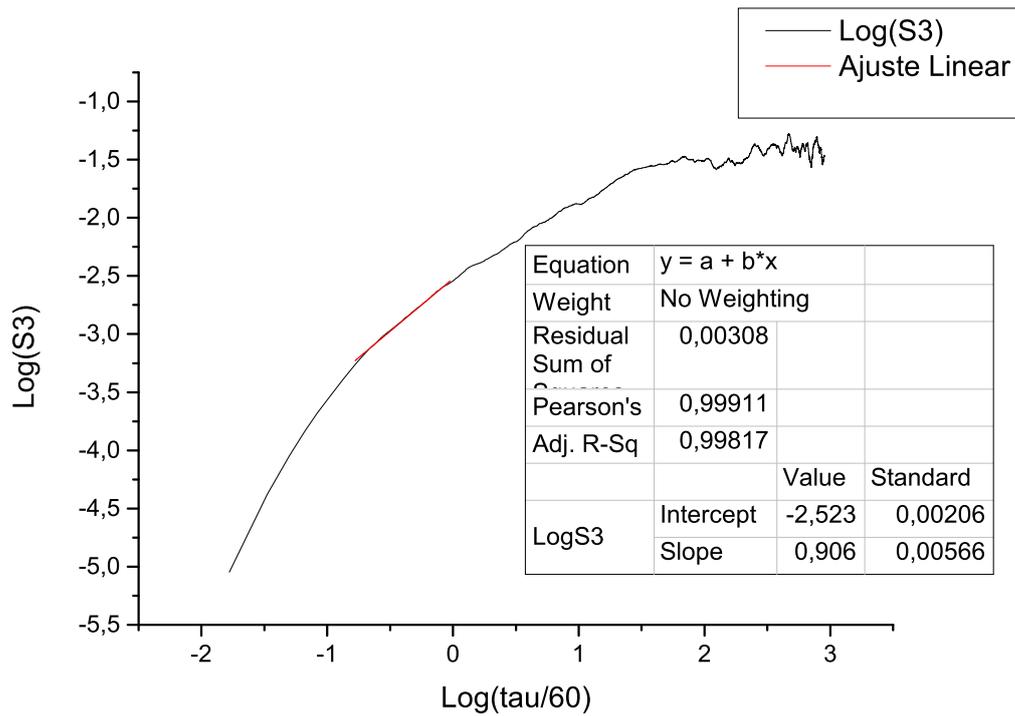


Figura 5 – Ajuste para os dados wI, abaixo das copas das árvores.

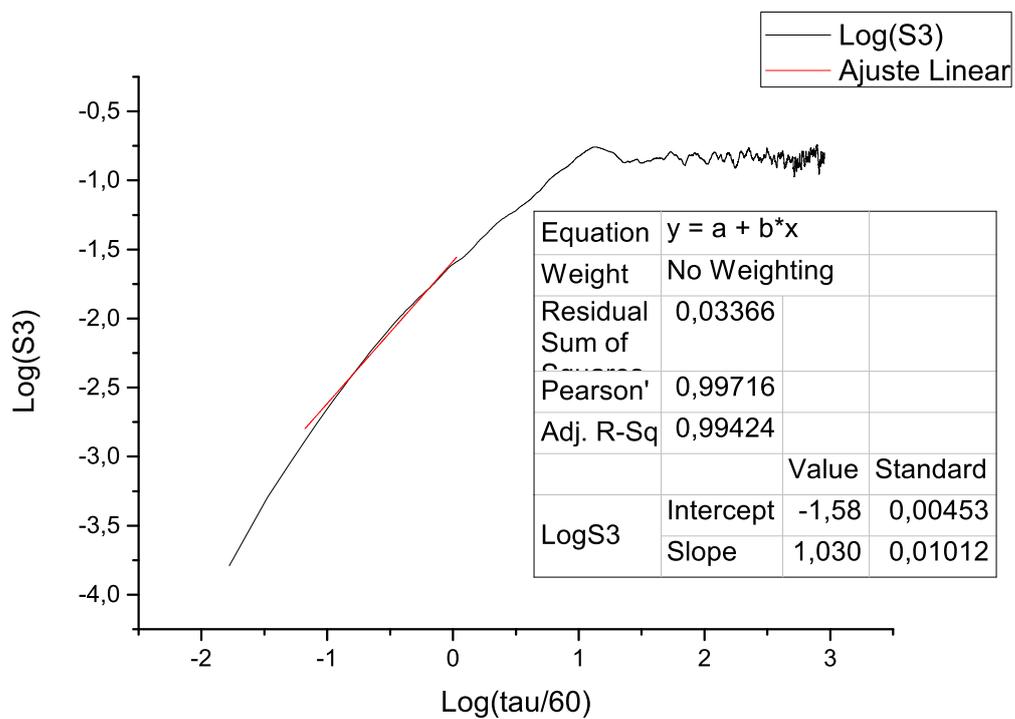


Figura 6 – Ajuste para os dados wM, na altura das copas das árvores.

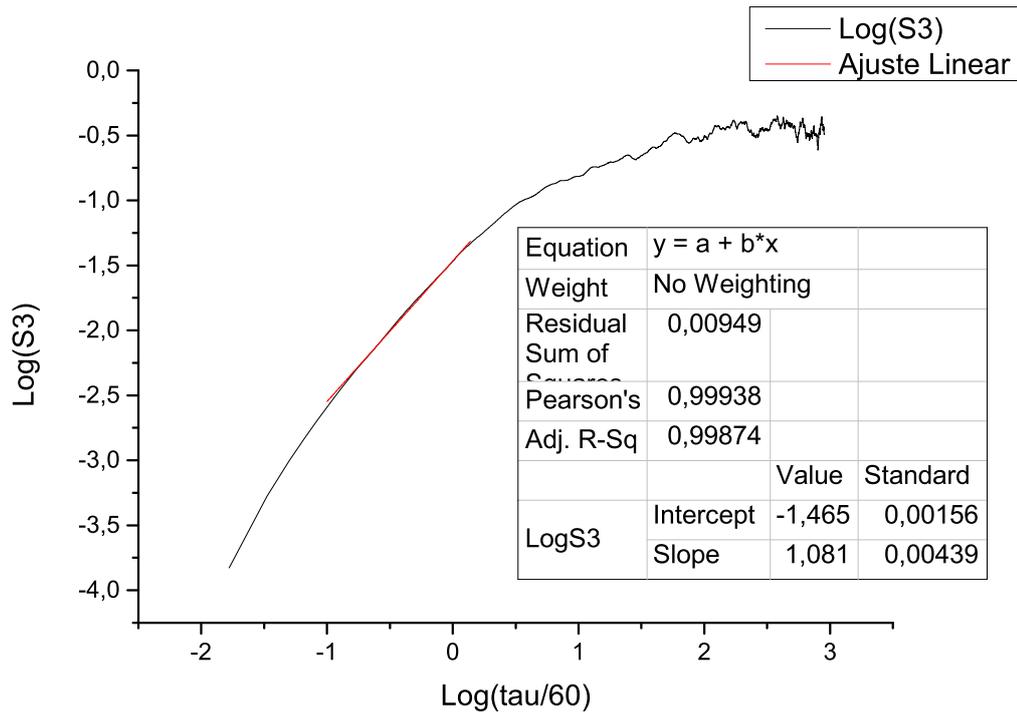


Figura 7 – Ajuste para os dados wS, acima das copas das árvores.

Da Figura 5, é possível observar que o ajuste linear para os dados abaixo da copa das árvores (wI) é válido para um intervalo relativamente pequeno de  $\tau/60$ , quando comparado com o mesmo intervalo obtido para os dados no meio e acima da copa (wM e wS, respectivamente). Da mesma forma, também pode ser observado que o coeficiente angular da reta foi igual a 0,906 para os dados wI, enquanto que para os dados wM e wS os valores obtidos foram 1,030 e 1,081, respectivamente. Esses resultados serão interpretados na conclusão.



## 6 Resultados para a MHD

### 6.1 Uma Derivação para a Função Estrutural de Terceira Ordem

Em 1941, Kolmogorov deduziu uma expressão para a cascata de energia dentro da escala inercial a partir das equações de Navier-Stokes. Essa expressão foi a função estrutural de terceira ordem para fluidos homogêneos, isotrópicos, incompressíveis e neutros (BANDYOPADHYAY, 2020). Politano e Pouquet (1998) obtiveram uma expressão equivalente da função de terceira ordem para a turbulência MHD usando as variáveis de Elsässer. A função de terceira ordem vem sendo usada como um método de se estudar e estimar as taxas de transferência de energia no vento solar, por exemplo.

Podemos escrever a função estrutural de terceira ordem como duas leis de escala simétricas em termos dos campos de Elsässer (BANDYOPADHYAY, 2020)

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \delta \vec{z}^{\mp} | \delta \vec{z}^{\pm} |^2 \rangle = -4\epsilon^{\pm} \quad (6.1)$$

onde  $\delta \vec{z}^{\pm}(\vec{x}, \vec{r}) = \vec{z}^{\pm}(\vec{x} + \vec{r}) - \vec{z}^{\pm}(\vec{x})$ . Para sistemas homogêneos,  $\langle \delta \vec{z}^{\mp} | \delta \vec{z}^{\pm} |^2 \rangle$  é uma função apenas do vetor deslocamento  $\vec{r}$ .

O lado direito da equação (6.1) é a taxa de dissipação das energias de Elsässer, dada por  $\epsilon^{\pm} = \frac{1}{2} \partial_t \langle | \vec{z}^{\pm} |^2 \rangle$ , com a taxa total de transferência de energia sendo dada por

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon^+ + \epsilon^-).$$

A equação (6.1) é aplicável no intervalo inercial, onde  $\epsilon$  é constante. Se o sistema for isotrópico, podemos integrá-la sobre o volume de uma esfera de raio  $r$  para obter a Lei de Kolmogorov-Yaglow para a MHD

$$Y^{\pm}(r) = -\frac{4}{3}\epsilon^{\pm}r \quad (6.2)$$

onde  $Y^{\pm}(r) = \langle \hat{r} \cdot \delta \vec{z}^{\pm}(\vec{r}) | \delta \vec{z}^{\pm}(\vec{r}) |^2 \rangle$  são as funções estruturais de terceira ordem mistas. (6.2) é a abordagem padrão para se estimar as taxas de transferência de energia para a escala inercial no vento solar (BANDYOPADHYAY, 2020).

Quando se assume uma forte anisotropia, os resultados são comparáveis com os do caso isotrópico.

Para deduzir a função estrutural de terceira ordem começamos pelas seguintes equações

$$\partial_t z_i^\pm = -z_k^\mp \partial_k z_i^\pm \pm B_{0k} \partial_k z_i^\pm - \partial_i p + \nu \partial_k \partial_k z_i^\pm \quad (6.3)$$

$$\partial_t z_i^{\pm'} = -z_k^\mp \partial'_k z_i^{\pm'} \pm B_{0k} \partial'_k z_i^{\pm'} - \partial'_i p' + \nu \partial'_k \partial'_k z_i^{\pm'} \quad (6.4)$$

$z^\pm$  denota o campo em uma posição  $x$  e  $z^{\pm'}$ , o campo em uma posição  $x + r$ .

Definindo  $\delta z_i^\pm = z_i^{\pm'} - z_i^\pm$  e  $\delta p = p' - p$ , ao fazer a subtração da Eq.(6.3) da Eq.(6.4), temos

$$\begin{aligned} \partial_t (z_i^{\pm'} - z_i^\pm) &= -(z_k^\mp \partial'_k z_i^{\pm'} \mp B_{0k}) \partial'_k z_i^{\pm'} - \partial'_i p' + \nu \partial'_k \partial'_k z_i^{\pm'} \\ &+ (z_k^\mp \partial_k z_i^\pm \mp B_{0k}) \partial_k z_i^\pm + \partial_i p - \nu \partial_k \partial_k z_i^\pm \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \implies \partial_t \delta z_i^\pm &= -z_k^\mp \partial'_k (z_i^{\pm'} - z_i^\pm) \pm B_{0k} \partial'_k (z_i^{\pm'} - z_i^\pm) \\ &- \partial_i (p' - p) + \nu \partial'_k \partial'_k (z_i^{\pm'} - z_i^\pm) \\ &+ z_k^\mp \partial_k (z_i^\pm - z_i^{\pm'}) \mp B_{0k} \partial_k (z_i^\pm - z_i^{\pm'}) \\ &+ \partial_i (p' - p) - \nu \partial_k \partial_k (z_i^\pm - z_i^{\pm'}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Como as variáveis com linha são independentes das variáveis sem linha,  $\partial_k z_i^{\pm'} = \partial'_k z_i^{\pm'} = 0$ , teremos

$$\begin{aligned} \partial_t \delta z_i^\pm &= -z_k^\mp \partial'_k \delta z_i^\pm \pm B_{0k} \partial'_k \delta z_i^\pm - \partial'_i \delta p + \nu \partial'_k \partial'_k \delta z_i^\pm \\ &- z_k^\mp \partial_k \delta z_i^\pm \pm B_{0k} \partial_k \delta z_i^\pm - \partial_i \delta p + \nu \partial_k \partial_k \delta z_i^\pm \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \implies \partial_t \delta z_i^\pm &= -\left(z_k^{\mp'} - z_k^\mp\right) \partial'_k \delta z_i^\pm - z_k^\mp \partial'_k \delta z_i^\pm \\ &\pm B_{0k} \partial'_k \delta z_i^\pm - \partial'_i \delta p + \nu \partial'_k \partial'_k \delta z_i^\pm \\ &- z_k^\mp \partial_k \delta z_i^\pm \pm B_{0k} \partial_k \delta z_i^\pm - \partial_i \delta p + \nu \partial_k \partial_k \delta z_i^\pm \end{aligned} \quad (6.8)$$

Multiplicando (6.8) por  $2\delta z_i^\pm$  e tomando os valores médios, chegamos a

$$\begin{aligned} \langle \partial_t |\delta z_i^\pm|^2 \rangle &= \langle -\delta z_k^\mp \partial'_k |\delta z_i^\pm|^2 - z_k^\mp \partial'_k |\delta z_i^\pm|^2 \pm B_{0k} \partial'_k |\delta z_i^\pm|^2 \\ &- 2\delta z_i^\pm \partial'_i \delta p + 2\nu \delta z_i^\pm \partial'_k \partial'_k \delta z_i^\pm - z_k^\mp \partial_k |\delta z_i^\pm|^2 \\ &\pm B_{0k} \partial_k |\delta z_i^\pm|^2 - 2\delta z_i^\pm \partial_i \delta p + 2\nu \delta z_i^\pm \partial_k \partial_k \delta z_i^\pm \rangle \end{aligned} \quad (6.9)$$

Mas

$$\vec{\nabla} \cdot z^\pm = 0 \implies \partial_k \delta z_k^\pm = 0 \quad (6.10)$$

Então, a equação (6.9) nos dá

$$\begin{aligned} \partial_t \langle |\delta z_i^\pm|^2 \rangle &= -\partial'_k \langle \delta z_k^\mp |\delta z_i^\pm|^2 \rangle - \partial'_k \langle z_k^\mp |\delta z_i^\pm|^2 \rangle \\ &\pm B_{0k} \partial'_k \langle |\delta z_i^\pm|^2 \rangle - 2\partial'_i \langle \delta z_i^\pm \delta p \rangle + 2\nu \langle \delta z_i^\pm \partial'_k \partial'_k \delta z_i^\pm \rangle \\ &- \partial_k \langle z_k^\mp |\delta z_i^\pm|^2 \rangle \pm B_{0k} \partial_k \langle |\delta z_i^\pm|^2 \rangle - 2\partial_i \langle \delta z_i^\pm \delta p \rangle \\ &+ 2\nu \langle \delta z_i^\pm \partial_k \partial_k \delta z_i^\pm \rangle \end{aligned} \quad (6.11)$$

Tratando agora as derivadas segundas, temos

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_k |\delta z_i^\pm|^2 &= \partial_k [2\delta z_i^\pm \partial_k \delta z_i^\pm] \\ &= 2 \left[ (\partial_k \delta z_i^\pm) (\partial_k \delta z_i^\pm) + \delta z_i^\pm \partial_k^2 \delta z_i^\pm \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

Manipulando os termos temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_k \partial_k |\delta z_i^\pm|^2 &= (\delta z_i^\pm) \partial_k \partial_k (\delta z_i^\pm) + [\partial_k (\delta z_i^\pm)]^2 \\ \implies \delta z_i^\pm \partial_k \partial_k (\delta z_i^\pm) &= \frac{1}{2} \partial_k \partial_k |\delta z_i^\pm|^2 - [\partial_k (\delta z_i^\pm)]^2 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Usando a equação (6.13) na equação (6.11), encontramos

$$\begin{aligned} \partial_t \langle |\delta z_i^\pm|^2 \rangle &= -\partial'_k \langle \delta z_k^\mp |\delta z_i^\pm|^2 \rangle - \partial'_k \langle z_k^\mp |\delta z_i^\pm|^2 \rangle \\ &\pm B_{0k} \partial'_k \langle |\delta z_i^\pm|^2 \rangle - 2\partial'_i \langle \delta z_i^\pm \delta p \rangle \\ &+ 2\nu \langle \frac{1}{2} \partial'_k \partial'_k |\delta z_i^\pm|^2 - [\partial'_k (\delta z_i^\pm)]^2 \rangle \\ &- \partial_k \langle z_k^\mp |\delta z_i^\pm|^2 \rangle \pm B_{0k} \partial_k \langle |\delta z_i^\pm|^2 \rangle - 2\partial_i \langle \delta z_i^\pm \delta p \rangle \\ &+ 2\nu \langle \frac{1}{2} \partial_k \partial_k |\delta z_i^\pm|^2 - [\partial_k (\delta z_i^\pm)]^2 \rangle \end{aligned} \quad (6.14)$$

Usando as identidades  $\partial_k = \partial_{r_k}$  e  $\partial'_k = \partial_{r_k}$ , alguns termos na equação acima serão cancelados, restando apenas

$$\partial_t \langle |\delta z_i^\pm|^2 \rangle = -\partial_{r_k} \langle \delta z_k^\mp |\delta z_i^\pm|^2 \rangle + 2\nu \langle \partial_{r_k}^2 |\delta z_i^\pm|^2 \rangle - 4\nu \langle |\partial_{r_k} \delta z_i^\pm|^2 \rangle \quad (6.15)$$

Mas,

$$\langle |\partial_{r_k} \delta z_i^\pm|^2 \rangle = \langle |\partial_k \delta z_i^\pm|^2 \rangle = \langle |\partial'_k \delta z_i^\pm|^2 \rangle = \langle |\partial_k z_i^\pm|^2 \rangle = \langle |\partial'_k z_i^\pm|^2 \rangle \quad (6.16)$$

então

$$\partial_t \langle |\delta z_i^\pm|^2 \rangle = -\partial_{r_k} \langle \delta z_k^\mp |\delta z_i^\pm|^2 \rangle + 2\nu \langle \partial_{r_k}^2 |\delta z_i^\pm|^2 \rangle - 4\nu \langle |\partial_k z_i^\pm|^2 \rangle \quad (6.17)$$

O último termo na equação (6.17) acima é a taxa de dissipação de energia da variável de Elsässer:

$$\nu \langle |\partial_k z_i^\pm|^2 \rangle = \epsilon^\pm \quad (6.18)$$

Na escala inercial, a derivada temporal tende a zero. Além disso, para um elevado número de Reynolds,  $\nu \rightarrow 0$ , e o segundo termo do lado direito da igualdade da equação (6.17) também tende a zero. Contudo, o último termo do lado direito não vai a zero. Isso é devido ao fato de que se assume que a taxa de dissipação é finita para o limite em que  $Re \rightarrow \infty$  (BANDYOPADHYAY, 2020). Temos, finalmente, a partir da (6.17), que

$$\partial_{r_k} \langle \delta z_k^\mp |\delta z_i^\pm|^2 \rangle = -4\epsilon^\pm \quad (6.19)$$

ou ainda

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \delta \vec{z}^\mp |\delta \vec{z}^\pm|^2 \rangle = -4\epsilon^\pm \quad (6.20)$$

Se assumirmos a condição de isotropia, podemos integrar a equação (6.20) no volume de uma esfera de raio  $r$

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \langle \delta \vec{z}^\mp |\delta \vec{z}^\pm|^2 \rangle d^3V = -4 \iiint_V \epsilon^\pm d^3V \quad (6.21)$$

Se  $r$  estiver dentro do intervalo inercial, o fluxo  $\epsilon^\pm$  é uniforme. Assim, aplicando o teorema do divergente para o lado esquerdo da equação anterior, teremos

$$\begin{aligned} \oint_S \langle \delta \vec{z}^\pm | \delta \vec{z}^\pm|^2 \rangle \cdot \hat{n} dS &= -4\epsilon^\pm \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \\ \langle \delta z_L^\mp | \delta \vec{z}^\pm|^2 \rangle 4\pi r^2 &= -4\epsilon^\pm \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \\ \langle \delta z_L^\mp | \delta \vec{z}^\pm|^2 \rangle &= -\frac{4}{3} \epsilon^\pm r \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde  $\delta z_L^\mp = \delta \vec{z}^\mp \cdot \hat{r}$  é a componente longitudinal do incremento  $\delta \vec{z}^\mp$  na direção  $r$ . As equações (6.20) e (6.22) são as formas anisotrópicas e isotrópicas, respectivamente, da lei de terceira ordem da MHD (BANDYOPADHYAY, 2020).



# Conclusão

Neste trabalho de conclusão de curso foi feita uma dedução para a Lei 4/5 de Kolmogorov para a função estrutural de terceira ordem para o caso da turbulência hidrodinâmica. Além disso, foram utilizados dados de velocidade vertical do vento medidos na copa das árvores da floresta amazônica afim de se comprovar a lei 4/5 experimentalmente. Por fim, foi apresentada uma dedução da equação análoga à da Lei de Kolmogorov (1941) para a turbulência MHD.

Os dados da velocidade vertical do vento mostram que a Lei de Kolmogorov (1941) é válida para um certo intervalo de valores de  $\tau$ . Esse intervalo é conhecido como subintervalo inercial (FRISCH., 1995) e é caracterizado por uma transferência de energia via cascata das escalas maiores para as menores, onde a escala é representada por  $\tau$ . A escala temporal tem correspondência com as escalas espaciais segundo a hipótese de Taylor como visto na seção 5.1. Os dados na altura da copa das árvores foi que mais se apresentou do valor teórico, que deve ser igual a um. Isso pode ser explicado pelo fato de, na região abaixo das copas, o ar próximo ao solo possuir uma temperatura maior quando comparado com regiões mais altas em relação ao solo (mas ainda baixas da floresta). Esse perfil de temperatura que diminui com a altura produz movimentos convectivos que formam vórtices de grande escala. Quando esses vórtices atravessam a copa da floresta são quebrados por conta da presença de galhos e folhas, o que pode contribuir para uma homogeneização da turbulência. Acima da copa, a radiação solar incide diretamente e produz uma camada limite (em inglês, *boundary layer*), com um perfil de temperatura instável que leva à formação de vórtices de grande escala. Como a turbulência no meio da copa resulta ser mais homogênea, isso explica o resultado da análise seja mais próximo da teoria para os dados da altura das copas.

A fórmula análoga à Lei de Kolmogorov para a MHD foi exposta no capítulo 6 utilizando as variáveis de Elsässer, que envolvem as variáveis velocidade e campo magnético (interno) do plasma. Apesar dessa lei ser aplicável ao caso MHD, a lei de Kolmogorov para a hidrodinâmica pode ser recuperada ao considerar o campo magnético nulo (POLITANO; POUQUET, 1998). Portanto, podemos concluir que a equação (6.22) é uma generalização da lei de Kolmogorov (1941).

Com relação à derivação da lei para a MHD, observa-se que, para obter a equação (6.22), foi suposta isotropia. Isso implica que essa equação não é válida para plasmas magnetizados, já que na presença de um campo magnético ocorre uma diferença no movimento das partículas carregadas nas direções paralela e perpendicular ao campo. Exemplos de plasmas magnetizados incluem o plasma do vento solar e o plasma em motores ou propul-

sores elétricos. Essa anisotropia impede a aplicação da tripla integral na equação (6.21), portanto, para comprovar a lei MHD nesses casos, seria necessário aplicar a equação (6.20).

Como meta para sequência deste trabalho, tem-se como ideia utilizar dados observacionais de turbulência em plasmas, por exemplo, coletados no vento solar, ou também dados de simulações numéricas, para se comprovar a validade da equação (6.20).

# Referências

- BANDYOPADHYAY, R. Turbulent heating in space plasmas: Theory and observations. 2020. Citado 4 vezes nas páginas 51, 59, 62 e 63.
- BISKAMP, D. *Magnetohydrodynamic Turbulence*. Center for Interdisciplinary Plasma Science, Garching, Germany: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 41.
- BOLZAN, M. J. A. Um estudo sobre características do subdomínio inercial da turbulência desenvolvida em escoamento acima e dentro da copa da floresta amazônica de terra firme e acima do pantanal matogrossense. *Tese de Doutorado do Curso da Pós-Graduação em Meteorologia*, INPE-10394-TDI/920, 2004. Citado na página 55.
- CHIAN, A. C. L. et al. Analysis of phase coherence in fully developed atmospheric turbulence: Amazon forest canopy. *Nonlinear Process in Geophysics*, v. 15, n. 4, 2008. Citado na página 51.
- CONSTANTIN, P.; FOIAS, C. Navier–stokes equations. *University of Chicago Press, Chicago*, 1988. Citado na página 23.
- DIAS, M. A. F. S. Cloud and rain processes in a biosphere-atmosphere interaction context in the amazon region. *J. Geophys. Res.*, 107(D20), 8072, v. 107, n. D20, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 51.
- FRISCH., U. Turbulence, the legacy of a. n. kolmogorov. *Cambridge University Press*, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 23, 31 e 65.
- KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds number. *Dokl. Acad. Nauk.*, n. SSSR 30, p. 9–13, 1941. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 23 e 65.
- POLITANO, H.; POUQUET, A. von kármán-howarth equation for magnetohydrodynamics and its consequences on third-order longitudinal structure and correlation functions. *Physical Review E*, v. 57, n. 1, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 59 e 65.



# Apêndices



# APÊNDICE A – Leis de Conservação

## A.1 Leis de Conservação

As leis de conservação desempenham um papel importante na teoria MHD na medida em que refletem algumas imposições da dinâmica dos fluidos, que são quebradas apenas por efeitos dissipativos. Existem dois tipos de invariáveis, aquelas relacionadas ao fluido, densidade, velocidade e energia interna, e aquelas que envolvem apenas o campo magnético.

### A.1.1 Invariantes do Fluido

A conservação de massa é descrita pela equação de continuidade (3.17). Para discutir a conservação do momento escrevemos (3.7) do seguinte modo

$$\partial_t \rho \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{T} + \rho \vec{g}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $T$  é o tensor de estresse total e que pode ser escrito como

$$T_{ij} = -\left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right)\delta_{ij} - \left(v_j - \frac{B_i B_j}{4\pi}\right) + \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + R_{ij} + \sigma_{ij}^\mu, \quad (\text{A.2})$$

onde  $R_{ij}$  é a soma do tensor de estresse de Reynolds,  $-\rho v_i v_j$ , e do tensor de Maxwell,  $\frac{B_i B_j}{4\pi}$ .

Um caso especial de (A.1) em sistemas com rotação é a equação de conservação do momento angular em coordenadas cilíndricas  $(t, \theta, \phi)$ . Multiplicando a componente azimutal de (A.1) por  $r$  e rearranjando termos, encontra-se

$$\partial_t(\rho r v_\phi) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{r} \left[ \rho v_\phi v - \frac{1}{4\pi} B_\phi B + \left(p + \frac{1}{8\pi^2}\right) \vec{e}_\phi \right] - \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \mu \left( r \vec{\nabla} \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{e}_\phi \right). \quad (\text{A.3})$$

Integrando (A.1) no volume  $V$  tem-se a forma integral da equação de conservação do momento

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v dV = \oint_S \vec{T} \cdot d\vec{S} + \int_V \rho \vec{g} dV. \quad (\text{A.4})$$

A mudança no momento tem origem no estresse que atua na superfície do volume e nas forças volumétricas. O campo magnético acaba se estendendo para além das dimensões do fluido e, portanto, não há conservação de momento por conta do estresse na superfície do fluido.

Multiplicando (3.7) por  $\rho v$  usando  $\vec{g} = \vec{\nabla}\phi_g$ , multiplicando (3.15) por  $\vec{B}$  e então adicionando os resultados a (3.23), encontra-se uma relação para densidade total de energia

$$\partial_t \left( \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + u + \phi_g \right) + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}^E = 0, \quad (\text{A.5})$$

com o fluxo de energia

$$\vec{F}^E = \left( \frac{1}{2} V^2 + h + \phi_g \right) \rho v - \vec{\sigma}^\mu \cdot \vec{v} + \vec{q} + \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}, \quad (\text{A.6})$$

onde  $h$  é a entalpia, dada por

$$h = u + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}. \quad (\text{A.7})$$

Integrando (A.5) no volume  $V$  encontra-se a relação para a conservação de energia

$$\frac{dE}{dt} = - \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{F}^E. \quad (\text{A.8})$$

Em um sistema isolado a energia total

$$E = \int dV \left( \rho \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + u + \phi_g \right) + \frac{1}{8\pi} B^2 \right), \quad (\text{A.9})$$

é conservada. Como a força de Coriolis é perpendicular a  $v$ , não altera a energia.

A lei de conservação de energia é obtida agora apenas das equações do momento e do campo magnético

$$\frac{dE}{dt} = - \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{F}^E - D^E, \quad (\text{A.10})$$

aqui a energia é o somatório das energias cinética, potencial e magnética

$$E = \int dV \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi_g + \frac{1}{8\pi} B^2 \right). \quad (\text{A.11})$$

Nota-se que  $\vec{F}^E$ , dada por

$$\vec{F}^E = \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \phi_g \right) \vec{v} + \frac{1}{4\pi} \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{A.12})$$

não contém termos dissipativos.

$D^E$  é a dissipação de energia e é dada por

$$D^E = \int dV \left( \frac{1}{\sigma} j^2 + \mu \omega^2 \right). \quad (\text{A.13})$$

Outra importante grandeza conservada na teoria MHD é a helicidade

$$H^C = \int \vec{v} \cdot \vec{B} dV. \quad (\text{A.14})$$

Multiplicando (3.7) por  $\vec{B} \rho$  e (3.15) por  $v$ , adicionando os resultados e integrando no volume, obtém-se

$$\frac{dH^C}{dt} = - \oint_S \vec{F}^C \cdot d\vec{S} - D^C, \quad (\text{A.15})$$

onde

$$\vec{F}^E = \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \left( \phi_g + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right) \vec{B}, \quad (\text{A.16})$$

é o fluxo de helicidade e

$$D^C = (\nu + \eta) \int_V dV \Sigma_{ij} \partial_t B_j \partial_i v_j, \quad (\text{A.17})$$

representa os efeitos dissipativos de  $H^C$ .

### A.1.2 Invariantes Magnéticas

Enquanto  $E$  e  $H^C$  envolvem contribuições tanto do fluido quanto do campo magnético, a lei de indução (3.15) implica a invariância de duas importantes grandezas puramente magnéticas, fluxo e helicidade magnéticos.

O fluxo magnético é definido como uma integral de superfície

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (\text{A.18})$$

Integrando (3.15) sobre uma superfície  $S$  e aplicando o Teorema de Stokes tem-se

$$\int_S \partial_t \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \frac{c}{\sigma} \oint_l \vec{j} \cdot d\vec{l}. \quad (\text{A.19})$$

O primeiro termo do lado direito é o fluxo através um elemento de superfície  $dS$  durante um intervalo de tempo  $dt$

$$\oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} dt = - \oint \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}) dt = \int_{dS} \vec{B} \times d\vec{S}, \quad (\text{A.20})$$

de modo que a derivada temporal total tem a forma

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \partial_t \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_l \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}) = - \frac{c}{\sigma} \oint_l \vec{j} \cdot d\vec{l}. \quad (\text{A.21})$$

Portanto, o fluxo magnético é conservado para  $\sigma \rightarrow \infty$ .

As linhas de campo podem ser vistas como tubos de diâmetro infinitesimal. Na ausência de resistividade elas preservam suas individualidades; não podem ser quebradas, apenas torcidas no plasma. Muitos dos processos que ocorrem em plasmas não conservam a topologia do campo mas envolvem a reconexão das linhas de campo.

Uma lei de conservação semelhante surge na hidrodinâmica onde a equação de Euler pode ser escrita da mesma forma que a equação (3.15)

$$\partial_t \vec{\omega} - \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0. \quad (\text{A.22})$$

Portanto o fluxo de vorticidade,

$$\int \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l},$$

também chamado de circulação, é conservado.

O campo magnético é arrastado junto com o movimento do plasma, formando uma estrutura complexa. Uma medida dessa complexidade é a helicidade magnética, dada por

$$H^M = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dV, \quad (\text{A.23})$$

onde  $\vec{A}$  é o vetor potencial,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  e  $H^M$  é similar à helicidade cinética  $H^K = \int \vec{c} \cdot \vec{\omega} dV$ , que é conservada na hidrodinâmica.

É preciso verificar que  $H^M$  é invariante para a transformação de Gauge. Realizando a transformação  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ , tem-se

$$H^{M'} - H^M = \int_V \vec{B} \cdot \vec{\nabla}\chi dV = \oint_S \chi \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (\text{A.24})$$

A componente normal  $B_{\parallel}$  nas bordas da superfície devem desaparecer, uma vez que  $\chi$  é arbitrário. Porém, várias configurações magnéticas de interesse da astrofísica ocorrem de dois modos. No primeiro caso, a configuração é aberta, com as linhas se estendem ao infinito e, no segundo, a configuração é fechada, acoplada, com as linhas presas à uma superfície. Em ambos casos a helicidade (A.24) não é invariante para uma transformação de Gauge. Uma alternativa foi sugerida por Finn e Antonsen (1985)

$$H_{alt}^M = \int_V dV (\vec{A} - \vec{A}_0) \cdot (\vec{B} - \vec{B}_0), \quad (\text{A.25})$$

onde  $\vec{B}_0 = \vec{\nabla}\vec{A}_0$  é algum campo usado como referencial.

Em um sistema aberto,  $B_0$  pode ser um campo estático com as mesmas propriedades assintóticas de  $\vec{B}$ . Em um sistema acoplado, as componentes normais de  $\vec{B}_0$  e  $\vec{B}$  devem ser as mesmas.

É possível então encontrar uma lei de conservação para a helicidade magnética. Por conta da invariância de Gauge, podemos fazer uma escolha de tal forma que o potencial vetor desapareça  $\vec{E} = \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}$ . Aplicando a lei de Faraday (3.13), encontra-se

$$\int \partial_t(\vec{A} \cdot \vec{B})dV = \int (\vec{B} \cdot \partial_t\vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\vec{B})dV = -2c \int \vec{E} \cdot \vec{B}dV + c \oint (\vec{A} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}. \quad (\text{A.26})$$

Usando a lei de Ohm (3.14) e usando a condição de contorno  $B_{\parallel} = 0$ , o segundo termo do lado direito pode ser escrito como  $-\oint (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{v} \cdot d\vec{S}$ . Uma vez que

$$\oint (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{v} \cdot d\vec{S} dt = \int_{dV} \vec{A} \cdot \vec{B}dV,$$

é a variação em  $H^M$  devida a variação  $dV$  no volume, então

$$\frac{dH^M}{dt} = \int \partial_t(\vec{A} \cdot \vec{B})dV = \oint (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{2c}{\sigma} \int dV \vec{j} \cdot \vec{B}. \quad (\text{A.27})$$

A helicidade é conservada no limite  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Como as propriedades da turbulência são estudadas com a aproximação de uma turbulência homogênea com condições de contorno periódicas, os termos envolvendo superfície nas equações de conservação somem e  $E$ ,  $H^C$  e  $H^M$  são conservadas se a dissipação for negligenciada. Essas quantidades são, portanto, chamadas de invariantes ideais.

Pode ser verificado que, de modo semelhante ao caso 3D, energia

$$E = \int d^2x \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{8\pi} B^2 \right) = \int d^2x \left( \frac{1}{2} \rho (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{8\pi} (\vec{\nabla} \psi)^2 \right), \quad (\text{A.28})$$

e helicidade

$$H^C = \int d^2x \vec{v} \cdot \vec{B} = - \int d^2x \omega \psi, \quad (\text{A.29})$$

são conservadas.

Ao invés da helicidade magnética, que desaparece no caso 2D, a forma escalar do campo magnético diz que todo momento de  $\psi$  é conservado, em particular o quadrático

$$A = \int d^2x \psi^2, \quad (\text{A.30})$$

também chamado de potencial magnético quadrático médio.

# APÊNDICE B – Derivação das Relações Matemáticas de Politano e Pouquet

As equações (3.34) e (3.35) apresentadas anteriormente são obtidas matematicamente partindo-se da (3.33), a equação de Navier-Stokes em termos das variáveis de Elsässer, válida para um fluido incompressível.

A Lei de Kolmogorov surge das leis de conservação no limite em que a taxa de dissipação de energia é desprezível (escala inercial). A Lei  $\frac{4}{5}$  segue da equação de von-Kármán Howarth que pode ser generalizada para a teoria MHD usando os campos de Elsässer:

$$E^\pm = \frac{1}{2} \langle |\vec{Z}^\pm|^2 \rangle$$

Primeiramente busca-se encontrar a equação que expressa a evolução temporal do tensor de correlação de segunda ordem que, no caso de isotropia, pode ser escrito como

$$R_{ij}^\pm = \langle Z_i^\pm(\vec{x}) Z_j^\pm(\vec{x}') \rangle = F^\pm(\vec{r}) r_{ij}^\pm + G^\pm(\vec{r}) \delta_{ij} \quad (\text{B.1})$$

Como as equações MHD são simétricas para  $\pm$ , faremos a demonstração para o caso positivo.

No caso positivo, as componentes do tensor de correlação, longitudinal  $[f^+(\vec{r})]$  e lateral  $[g^+(\vec{r})]$ , podem ser reescritas como

$$Z^{+2} f^+(\vec{r}) = \langle Z_L^+(\vec{r}) Z_L^+(\vec{r}') \rangle$$

$$Z^{+2} g^+(\vec{r}) = \langle Z_n^+(\vec{r}) Z_n^+(\vec{r}') \rangle$$

A isotropia implica equipartição da energia das componentes longitudinal (L) e lateral (n):

$$\langle Z_L^{+2} \rangle = \langle Z_n^{+2} \rangle = d_*^- \langle Z_i^+ Z_i^+ \rangle = Z^{+2}$$

onde  $d = d_*$  é a dimensão dos vetores que estão atrelados à dinâmica do escoamento.

No espaço d-dimensional, a incompressibilidade garante que

$$g^+(r) = f^+(r) + \frac{1}{d-1} r f'(r)$$

De maneira análoga, para as componentes longitudinais do tensor de correlação de dois pontos de terceira ordem entre os campos  $Z^+$  e  $Z^-$  tem-se

$$C_{LLL}^{+-+} = \langle Z_L^+(\vec{x}) Z_L^-(\vec{x}) Z_L^+(\vec{x}) \rangle = C_3^+ k^{+-+}(r)$$

onde

$$C_3^+ = Z^{+2} Z^-$$

Usando a incompressibilidade e a homogeneidade, a equação de von-Kármán Howarth para a teoria MHD tem a forma seguinte

$$\partial_t [Z^{+2} f^+(r)] = \left( \partial_r + \frac{d+1}{r} \right) C_3^+ k^{+-+}(r) + 2 \left( \partial_r^2 + \frac{d+1}{r} \right) [\nu_+ Z^{+2} f^+(r) + \nu_- Z^+ Z^- f^{+-}(r)]$$

O termo  $Z^+ Z^- f^{+-}(r) = \langle Z_L^+(\vec{x}) Z_L^-(\vec{x}) \rangle = Z^+ Z^- f^{+-}(r)$  é o coeficiente longitudinal do tensor de correlação entre os campos  $Z^\pm$  cujo traço corresponde à energia relativa  $E^R = \langle |v|^2 - |b|^2 \rangle$

A equação acima pode ser reescrita para a teoria MHD em termos das funções estruturais a seguir

$$B_{ij}^+(\vec{x}) = \langle \delta Z_i^+(\vec{r}) \delta Z_j^+(\vec{x}) \rangle$$

e

$$B_{ijl}^{+-+}(\vec{x}) = \langle \delta Z_i^+(\vec{x}) \delta Z_j^-(\vec{x}) \delta Z_l^+(\vec{x}) \rangle$$

O fluxo total para o campo positivo será:  $\partial_t \langle Z_L^{+2} \rangle = -2\epsilon^+ / d_*$

A seguir escrevemos as funções estruturais de segunda e terceira ordens em termos das funções de correlação:

$$R_{LL}^+(\vec{r}) = \frac{1}{d} \langle Z^{+2} \rangle - \frac{1}{2} B_{LL}^+(\vec{r})$$

$$4C_{LLL}^{+-+}(\vec{r}) = B_{LLL}^{+-+}(\vec{r}) - 2C_{LLL}^{+++}(\vec{r}) = 4C_3 k^{+-+} \quad (\text{B.2})$$

onde o termo a função de correlação de terceira ordem é, levando em consideração a homogeneidade, dado por  $C_{LLL}^{+-+}(\vec{r}) = Z_L^+(\vec{x})Z_L^+(\vec{x})Z_L^-(\vec{x}')$ .

Por fim, chegamos então à uma forma alternativa para a equação de von-Kármán Howarth para a MHD:

$$-\frac{2\epsilon^+}{d} - \frac{1}{2}\partial_t B_{LL}^+(\vec{r}) = r^{-\gamma}\partial_r\left[r^\gamma\left(\frac{1}{4}B_{LLL}^{+-+}(\vec{r}) - \frac{1}{2}C^{+-+}(\vec{r})\right)\right] - r^{-\gamma}\partial_r[r^\gamma\partial_r[\nu_+B_{LL}^+(\vec{r}) + \nu_-B_{LL}^-(\vec{r})]] \quad (\text{B.3})$$

com  $\gamma = d + 1$  e  $B_{LL}^-(\vec{r}) = \langle\delta Z_L^-(\vec{r})\delta Z_L^+(\vec{r})\rangle$ .

Desprezando o termo da derivada temporal e os termos dissipativos no domínio inercial, integrando sobre  $r$ , obtemos uma lei análoga à de Kolmogorov, porém, para fluidos magnetizados

$$\langle\delta Z_L^{+2}(\vec{r})\delta Z_L^-(\vec{r})\rangle - 2\langle Z_L^+(\vec{x})Z_L^+(\vec{x})Z_L^-(\vec{x}')\rangle = -C_d\epsilon^+\vec{r} \quad (\text{B.4})$$

com  $C_d = 2k_d/3$ , onde

$$k_d = \frac{12}{d_*(d+2)} \quad (\text{B.5})$$

Usando a simetria para  $\pm$  mencionada no início da seção, temos uma expressão equivalente para  $Z^-$ :

$$\langle\delta Z_L^{-2}(\vec{r})\delta Z_L^+(\vec{r})\rangle - 2\langle Z_L^-(\vec{x})Z_L^-(\vec{x})Z_L^+(\vec{x}')\rangle = -C_d\epsilon^-\vec{r} \quad (\text{B.6})$$

Para a aproximação  $\epsilon^+ \approx \epsilon^-$ , i.e., para um fluxo desprezível de campo magnético de velocidade  $\epsilon^C$ , com  $2\epsilon^C = \epsilon^+ - \epsilon^- = 2E^C$ ,  $E^C = \langle\vec{v}\cdot\vec{b}\rangle$ , os lados esquerdos das equações B.4 e B.6 são comparáveis.

Voltamos, então, para as variáveis originais da MHD,  $\vec{v}$  e  $\vec{b}$ . No lugar de  $\epsilon^\pm$ , usaremos os correspondentes fluxos de energia total e de correlação,  $\epsilon^T$  e  $\epsilon^C$  respectivamente, com  $\epsilon^+ + \epsilon^- = 2\epsilon^T$ . As duas leis de escala em termos da velocidade e do campo magnético são

$$\langle\delta v_L^3(\vec{r})\rangle - 6\langle b_L^2(\vec{x})v_L(\vec{x} + \vec{r})\rangle = -k_d\epsilon^T\vec{r} \quad (\text{B.7})$$

$$-\langle\delta b_L^3(\vec{r})\rangle + 6\langle v_L^2(\vec{x})b_L(\vec{x} + \vec{r})\rangle = k_d\epsilon^C\vec{r} \quad (\text{B.8})$$

Como dito anteriormente, se  $\vec{b} = 0$ , recuperamos a Lei de Kolmogorov.