UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

ANA CLARA CARVALHO DE AQUINO

ALGUNS EXEMPLOS DE CAMPOS QUÂNTICOS QUE TRANSFORMAM EM DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DO GRUPO DE POINCARÉ

BRASÍLIA

12 DE MAIO DE 2020

Ana Clara Carvalho de Aquino

Alguns Exemplos de Campos Quânticos que Transformam em Diferentes Representações do Grupo de Poincaré

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Aleksandr Nikolaievich Pinzul

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

12 de maio de 2020

Ana Clara Carvalho de Aquino

Alguns Exemplos de Campos Quânticos que Transformam em Diferentes Representações do Grupo de Poincaré/ Ana Clara Carvalho de Aquino. – Brasília, 12 de maio de 2020-

55 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Aleksandr Nikolaievich Pinzul

Monografia – Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física, 12 de maio de 2020.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Ana Clara Carvalho de Aquino

Alguns Exemplos de Campos Quânticos que Transformam em Diferentes Representações do Grupo de Poincaré

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 12 de maio de 2020:

Aleksandr Nikolaievich Pinzul
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasília
12 de maio de 2020

Este trabalho é dedicado à minha irmã e ao meu pai, eu amo vocês.

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer o meu pai e a minha irmã por sempre me amarem, apoiarem e ajudarem quando eu preciso, especialmente nesse último ano. Sem vocês eu não teria conseguido terminar esse trabalho. Também queria agradecer o meu pai por ter despertado o meu interesse em física, sem as nossas conversas eu não teria escolhido esse curso, que foi a escolha certa para mim.

Gostaria de agradecer à todos os amigos que eu fiz durante o curso, pelo apoio, ajuda e conversas. Vocês sempre fizeram os meus dias na Unb serem mais divertidos.

Também gostaria de agradecer a todos os professores que fizeram parte da minha formação. Em especial o meu orientador Aleksandr Pinzul, pela paciência, ajuda e compreensão.

Por último eu gostaria de agradecer a Deus por me amar incondicionalmente e por ter criado esse lindo universo cheio de mistérios que eu tenho o prazer de desbravar.

"Se eu vi mais longe,
foi por estar sobre ombros de gigantes.
(Isaac Newton)

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo continuar os estudos do PTCC, que eram sobre o grupo de Lorentz. Isso é feito vendo que os campos, que correspondem às partículas elementares, se transformam como representações irredutíveis do grupo de Poincaré, que é um produto semidireto do grupo de Lorentz com as translações. Como exemplo, é feita a quantização canônica do campo escalar (que corresponde à representação (0,0)) e do campo de Dirac (a representação (1/2,0)+(0,1/2)). Para esse fim, os campos são promovidos a operadores e suas relações de comutação/anti-comutação são estabelecidas. Notando as diferenças entre eles por descreveram bósons e férmions respectivamente. Também é feito um breve comentário sobre a quantização do campo eletromagnético que apresenta outros desafios comparado aos campos anteriores por possuir invariância à transformações locais de calibre.

Palavras-chaves: Teoria quântica de campos. Grupo de Poincaré. Quantização Canônica. Campo escalar. Campo de Dirac. Campo eletromagnético.

Abstract

This monography aims to continue the studies of the PTCC, which were about the Lorentz group. This is achieved noticing that the fields, which correspond to elementary particles transform under irreducible representations of the Poincaré group, which is the semi direct product of the Lorentz group with translations. As examples, the canonical quantization of the following fields are done: the scalar field (which corresponds to the representation (0,0)), and the Dirac field (representation (1/2,0)+(0,1/2)). Therefore, the fields are promoted to operators and their commutation/anticommutation relations are set. We also notice the differences between these two fields that arise from the fact that the first describe bosons and the second one describes fermions. Moreover, a brief remark is made about the quantization of the eletromagnetic field which features other difficulties in comparison to the other fields because it is invariant under local gauge transformations.

Key-words: Quantum field theory. Poincaré group. Canonical quantization. Scalar field. Dirac field. Eletromagnetic field.

Lista de símbolos

$\mu, \nu, ...$	Índices de espaço-tempo de um vetor ou tensor
$i, j, ...$	Índices espaciais de um vetor ou tensor
$\eta^{\mu\nu}$	tensor métrico, $diag(1, -1, -1, -1)$
x^μ	quadrivetor contravariante
x_μ	quadrivetor covariante, $\eta_{\mu\nu}x^\nu$
$\mathbf{x}$	vetor
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	produto escalar de dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$
$a \cdot b$	produto escalar de dois quadrivetores a e b, $a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
$\mathcal{L}$	Densidade da Lagrangiana
L	Lagrangiana total
$\mathcal{H}$	Densidade da Hamiltoniana
H	Hamiltoniana total
∂^μ	Operador diferencial, $\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$
$\{A, B\}$	Anti-comutador, $\{A, B\} = AB + BA$

Sumário

Introdução 19

1 O CAMPO ESCALAR 21
1.1 Introduzindo o campo 21
1.2 Quantizando 24
1.3 Estados de Fock 25
1.4 Teorema de Noether 26
1.5 Tensor energia-momento e ordenamento normal 28

2 O CAMPO ESCALAR COMPLEXO 33

3 O CAMPO DE DIRAC 37
3.1 Representações de Lorentz 37
3.2 Equação de Dirac 38
3.3 Quantizando 43

4 O CAMPO ELETROMAGNÉTICO 47
4.1 Equações de Maxwell 47
4.2 Quantizando 49

Conclusão 53

Referências 55

Introdução

A teoria quântica de campos surge da necessidade de explicar como partículas se comportam em altas energias. Então, ela une a mecânica quântica com a teoria especial da relatividade. Quando essas duas teorias se encontram, alguns problemas surgem. Um exemplo, é que quando tentamos quantizar partículas relativísticas como é feito na mecânica quântica, encontramos energias negativas. Além disso, tempo e espaço não são tratados da mesma forma, tempo é um parâmetro enquanto as coordenadas são operadores, o que não deveria ocorrer, pois em uma teoria relativística não se pode ter distinção entre espaço e tempo.

Adicionalmente, na teoria especial da relatividade, energia pode virar massa e vice-versa. Isso faz com que existam estados com várias partículas que podem ser criadas e aniquiladas. Esses estados não podem ser descritos pela mecânica quântica que só descreve partículas estáveis. Esse problema, como os outros citados anteriormente, foram resolvidos com a quantização de campos.

Assim, a teoria quântica de campos surgiu como a solução desses problemas e conseguiu descrever fenômenos físicos que antes não podiam ser explicados com extrema precisão.

Quando uma lei física não é alterada depois de uma transformação, dizemos que temos uma simetria e que a lei é invariante. Simetrias são muito importantes no estudo da física, pois servem como guia para se fazer escolhas de teorias. Para o caso da teoria quântica de campos, queremos que ela seja invariante a transformações de Lorentz, já que o movimento das partículas não podem depender do referencial. Por causa disso, os campos deveriam se transformar sob representações irredutíveis desse grupo, porém, o grupo de Lorentz não é compacto o que faz com que ele não tenha representações unitárias finitas, mas somente infinitas.

Esse problema é resolvido vendo que o grupo pelo qual os campos têm de ser representações unitárias irredutíveis é na verdade o de Poincaré, que é um produto semidireto do grupo de Lorentz com as translações. Esse grupo também é não compacto e então somente representações infinitas serão unitárias. Porém, queremos trabalhar com objetos que se transformam em uma representação irredutível e finita desse grupo. Isso só não é um problema porque o campo não depende somente dos índices do grupo de Lorentz (espinoriais) mas depende, também, das coordenadas, então a transformação também afeta índices contínuos. Isso é fácil de se ver quando escrevemos um campo $\psi(x)$ em termos de funções coeficientes e dos operadores a, $a^\dagger$ que mais na frente veremos que são operadores de criação e aniquilação. Uma componente α de um campo $\psi(x)$ tem que se transformar

da seguinte forma sob uma transformação de Lorentz Λ:

$$\psi^{\alpha}(x) \to \psi'^{\alpha}(x) = D(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\beta}\psi^{\beta}(\Lambda x), \tag{1}$$

onde $D(\Lambda)$ é uma representação não unitária e finita de uma transformação Λ de Lorentz. Como vamos ver mais a frente, podemos expandir o campo da seguinte forma

$$\psi^{\alpha}(x) = \sum_{\sigma} \int dk[a(k,\sigma)u^{(\alpha)}(k,\sigma)e^{-ik\cdot x} + a^{\dagger}(k,\sigma)v^{(\alpha)}(k,\sigma)e^{ik\cdot x}], \tag{2}$$

onde, σ é um índice relacionado ao spin. Essas funções dependem de σ e k, então têm que se transformar na representação irredutível de Lorentz que é não unitária, mas, essa representação pode ser dividida em duas partes. É possível ver isso aplicando uma transformação de Lorentz em u por exemplo,

$$D(\Lambda)^{\alpha}_{\alpha'}u^{\alpha'}(k,\sigma) = D^{(s)}[R(\Lambda,k)]^{\sigma}_{\sigma'}u^{\alpha'}(\Lambda k,\sigma') \tag{3}$$

podemos ver aqui que a transformação se repartiu em duas partes, uma parte explicitamente unitária $D^{(s)}[R(\Lambda,k)]$ e diferente para cada k, e em outra parte onde k se transforma. Por que o produto escalar definido para o campo envolve integração em k, essa representação com respeito desse produto escalar vai ser infinita e unitária, que era o que precisávamos. Assumimos que $D^{(s)}[R(\Lambda,k)]$ era unitária, isso é verdade porque essa matriz é uma representação unitária do pequeno grupo de Wigner, que para o caso de partículas massivas é o grupo $SO(3)$ ou seu recobrimento universal $SU(2)$ que é compacto e tem representações finitas unitárias. Para o caso de partículas não massivas o pequeno grupo é diferente sendo ele o $E(2)$, grupo de rotações em torno do eixo z mais translações na direção x e y. No entanto, ele não é compacto e somente representações da parte compacta, $SO(2)$, é relevante.

Sabendo disso, o que fazemos nesse trabalho, é a quantização canônica dos campos fundamentais. Como primeiro exemplo, é feita a quantização do campo escalar (representação $(0,0)$) por ser o campo mais simples e servir de base para a quantização dos outros campos. Depois, como exemplo de um campo fermiônico, o campo de Dirac (representação $(0,1/2)\oplus(1/2,0)$) é quantizado, e a conexão com *spin-statistics* é observada. Por fim, como exemplo de um campo de calibre sem massa, é feita a quantização do campo eletromagnético.

1 O campo escalar

1.1 Introduzindo o campo

O campo escalar é descrito por uma quantidade invariante a transformações de Lorentz em cada ponto do espaço-tempo. Ele é o exemplo mais simples de campo e obedece a equação de Klein-Gordon, que é obtida do mesmo modo que a equação de Schrödinger só que usando a relação da energia relativística. A equação é dada por

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0, \tag{1.1}$$

onde $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ e $(x) = (x^0, \mathbf{x})$ sendo $x^0 = t$. Também, por simplicidade usamos e iremos usar $c = \hbar = 1$ e o tensor métrico tem assinatura $(+, -, -, -)$.

A equação de Klein - Gordon é invariante a transformações de Lorentz já que $\Box$ é um escalar de Lorentz e ϕ é uma função escalar. Ela também pode ser obtida por meio do principio da menor ação. Com a ação na forma

$$S = \int d^4x\mathcal{L}, \tag{1.2}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade da Lagrangiana que depende somente da variável de campo e de suas derivadas. Mas, para ser mais geral, vamos considerar o caso em que $\mathcal{L}$ também depende de x^μ explicitamente (caso que acontece quando o sistema não é fechado). Então vamos ter,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu). \tag{1.3}$$

Vamos considerar a variação mais geral, o que vai ser útil para o teorema de Noether. Como na mecânica clássica podemos achar em qual circunstância a ação vai ser estacionária. Para isso, variamos as coordenadas e o campo

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \delta x^\mu, \\ \phi'(x) &= \phi(x) + \Delta\phi(x), \\ \Delta\phi(x) &= \phi'(x') - \phi(x') + \phi(x') - \phi(x) \\ &= \delta\phi + (\partial_\mu\phi)\delta x^\mu, \end{aligned} \tag{1.4}$$

e usamos as condições de contorno

$$\begin{aligned} \delta\phi(\mathbf{x}, t_i) &= \delta\phi(\mathbf{x}, t_f) = 0, \\ \delta x^\mu(\mathbf{x}, t_i) &= \delta x^\mu(\mathbf{x}, t_f) = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

para obter a varição da ação

$$\delta S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x'^\mu) - \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu),$$

onde $d^4x' = J(x'/x)d^4x$ sendo J a jacobiana dada por

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\right) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu),$$

desse modo temos,

$$d^4x' = d^4x + \partial_\mu(\delta x^\mu)d^4x,$$

e então

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R d^4x(\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu \delta x^\mu) \\ &= \int_R d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \mathcal{L}(\partial_\mu \delta x^\mu)\right] \\ &= \int_R d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\delta\phi) + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu)\right] \\ &= \int_R d^4x \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi - \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right]\delta\phi + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right] + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu)\right\}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

nesses cálculos foi usado o fato de que como

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x),$$

temos

$$\delta(\partial_\mu \phi(x)) = \partial_\mu \phi'(x) - \partial_\mu \phi(x) = \partial_\mu \delta\phi(x),$$

e também usamos a regra da cadeia. Agora, podemos utilizar a lei de Gauss nos dois últimos termos da equação 1.6 e então, obter

$$\delta S = \int_R d^4x \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right]\right\}\delta\phi + \int_{\partial R} d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu\right]. \tag{1.7}$$

Como $\delta\phi$ e δx^μ somem no contorno, vamos ter que

$$\delta S = \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \right\} \delta\phi = 0, \tag{1.8}$$

o quc implica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] = 0, \tag{1.9}$$

que são as equações de Euler - Lagrange para o campo ϕ. Usando a seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left[\eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \phi)(\partial_\beta \phi) - m^2 \phi^2 \right], \tag{1.10}$$

em 1.9, obtemos 1.1, que é o que queríamos.

A equação de Klein-Gordon tem soluções em forma de ondas planas, dadas por

$$u_{\mathbf{k}}(x,t) \propto e^{ik\cdot x}, \qquad k \cdot x = k^i x_i - k^0 t. \tag{1.11}$$

Essas soluções são autofunções do operadores de energia momento com autovalores $\pm k^\mu$. Colocando 1.11 em 1.1, vamos ver que elas só serão soluções se $\mathbf{k}^2 - (k^0)^2 + m^2 = 0$, o que implica

$$k^0 = \pm E_k = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \tag{1.12}$$

então, podemos ter energias positivas e negativas, o que é um problema que irá desaparecer quando quantizarmos o campo.

Podemos definir o seguinte produto escalar

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2) &= -i \int d^3x \{ \phi_1(x) \partial_t \phi^*(x) - [\partial_t \phi_1(x)] \phi^*(x) \} \\ &= -i \int d^3x \phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial_t} \phi^*(x), \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde a integração é sobre um hiperplano tipo espaço.

Colocando 1.11 em 1.13, obtemos

$$(u_{\mathbf{k}}(x,t), u_{\mathbf{k}'}(x,t)) = \delta^3(k - k') 2k^0 (2\pi)^3 \tag{1.14}$$

ou seja, soluções para $\mathbf{k}'s$ diferentes são ortogonais. Podemos normalizar os $u_{\mathbf{k}}$'s multiplicando eles por $[2k^0(2\pi)^3]^{-1/2}$ e então vamos ter que

$$(u_{\mathbf{k}}(x,t), u_{\mathbf{k}'}(x,t)) = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{1.15}$$

1.2 Quantizando

Agora, para quantizar o campo, podemos voltar a Lagrangiana 1.10 e analogamente ao que é feito na mecânica clássica, definimos o momento conjugado como

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x), \tag{1.16}$$

com isso, podemos tanto encontrar a densidade da Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \Pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}, \tag{1.17}$$

e consequentemente a Hamiltoniana

$$H = \int d^3x \mathcal{H}, \tag{1.18}$$

como também quantizar o campo. Isso pode ser feito de modo similar a mecânica quântica, tratando, agora, $\phi(x)$ e $\Pi(x)$ como operadores e estabelecendo as regras de comutação em um mesmo tempo

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{x}',t)] &= 0, \\ [\Pi(\mathbf{x},t), \Pi(\mathbf{x}',t)] &= 0, \\ [\phi(\mathbf{x},t), \Pi(\mathbf{x}',t)] &= i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Além disso, dado qualquer conjunto ortogonal de soluções de 1.1, podemos expandir o operador de campo nessa base. Então, faremos isso usando as soluções 1.11 e seus complexos conjugados normalizadas. Assim, obtemos

$$\phi(x,t) = \int d^3k[a(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}(x,t) + a^\dagger(\mathbf{k})u^*_{\mathbf{k}}(x,t)]. \tag{1.20}$$

Usando as regras de comutação 1.19 e a expansão 1.20 podemos encontrar as relações de comutação dos operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$,

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Para analisar o que esses operadores significam, podemos encontrar a Hamiltoniana (1.17, 1.18) usando 1.10 e 1.16,

$$H = \int d^3x \frac{1}{2}[\Pi^2(x) + \sum_{k=1}^{3}(\partial_i\phi)^2 + m^2\phi^2], \tag{1.22}$$

usando novamente 1.16 e também 1.20 e 1.21, podemos ver que depois de alguns cálculos, a Hamiltoniana toma a forma

$$H = \int d^3k \frac{E_k}{2}[a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})], \tag{1.23}$$

onde, se usa o fato de que $k^0 = E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$. Agora, com esse resultado, podemos comutar a Hamiltoniana com os operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), H] &= E_k a(\mathbf{k}), \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), H] &= -E_k a(\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Essas equações 1.24 mostram que os operadores $a(\mathbf{k})$ e $a^\dagger(\mathbf{k})$ aniquilam e criam um quantum de energia $E_\mathbf{k}$, respectivamente. Por causa disso, são chamados de operador de aniquilação e operador de criação respectivamente.

1.3 Estados de Fock

Uma base conveniente no espaço de Hilbert é a representação de Fock. Nela a base é construída a partir do vetor $|0\rangle$ chamado de vácuo. Ele representa o estado que não possui partículas de momento $\mathbf{k}$. Então podemos escrever

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \quad \mathbf{k}. \tag{1.25}$$

Usando o operador $a^\dagger(\mathbf{k})$ podemos obter o estado de uma partícula de momento $\mathbf{k}$

$$a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = |1_\mathbf{k}\rangle. \tag{1.26}$$

Dessa mesma forma, podemos obter estados com várias partículas de momentos diferentes

$$a^\dagger(\mathbf{k}_1)a^\dagger(\mathbf{k}_2)...a^\dagger(\mathbf{k}_j)|0\rangle = |1_{\mathbf{k}_1}, 1_{\mathbf{k}_2}, ..., 1_{\mathbf{k}_j}\rangle, \tag{1.27}$$

como também estados com várias partículas tanto de momentos iguais como diferentes

$$({}^1n!{}^2n!...{}^jn!)^{-1/2}(a^\dagger(\mathbf{k_1}))^{{}^1n}(a^\dagger(\mathbf{k}_2))^{{}^2n}...(a^\dagger(\mathbf{k}_j))^{{}^jn}|0\rangle = |{}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, ..., {}^jn_{\mathbf{k}_j}\rangle. \tag{1.28}$$

O lado esquerdo de 1.28 é multiplicado por fatores de $n!$ para os estados serem normalizados. Também, para n partículas de um único momento

$$\begin{aligned} a^\dagger(\mathbf{k})|n_\mathbf{k}\rangle &= (n+1)^{1/2}|(n+1)_\mathbf{k}\rangle, \\ a(\mathbf{k})|n_\mathbf{k}\rangle &= n^{1/2}|(n-1)_\mathbf{k}\rangle. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Os vetores de da base são normalizados da seguinte forma

$$\langle {}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, ..., {}^rn_{\mathbf{k}_r}|{}^1m_{\mathbf{k}'_1}, {}^2m_{\mathbf{k}'_2}, ..., {}^sm_{\mathbf{k}'_s}\rangle = \delta_{rs}\sum_\alpha \delta_{1n^{(1)}m}...\delta_{rn^{(s)}m}\delta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'_{\alpha(1)}}...\delta_{\mathbf{k}_r\mathbf{k}'_{\alpha(s)}}, \tag{1.30}$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações α dos números inteiros $1, 2, ...s$.

Podemos notar que não temos restrição quanto a quantidade de partículas de mesmo momento, então as partículas seguem a estatística de Bose. Esse fato segue das relações de comutação 1.21.

1.4 Teorema de Noether

Para aprofundar mais no significado dos estados de Fock precisamos, primeiro, voltar para 1.7. Mas agora, $\delta\phi$ e δx^μ não precisam ser mais iguais a zero fora da região R. Podemos reescrever essa equação da seguinte forma

$$\delta S = \int_R d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\right\}\delta\phi + \int_{\partial R} d\sigma_\mu \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}[\delta\phi + \partial_\nu\phi\delta x^\nu] - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\right]\delta x^\nu\right\}, \tag{1.31}$$

onde a única mudança foi adicionar e subtrair um termo. Podemos observar que o primeiro termo dentro dos colchetes na integral de superfície é igual ao $\Delta\phi$ na equação 1.4. Já o

segundo termo dentro dos colchetes nessa integral é o que chamamos de tensor energia-momento:

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\nu}\phi - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}. \tag{1.32}$$

Então, podemos reescrever 1.31 da seguinte forma

$$\delta S = \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right]\right\}\delta\phi + \int_{\partial R} d\sigma_{\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\Delta\phi - T^{\mu}_{\nu}\delta x^{\nu}\right]. \tag{1.33}$$

Agora, vamos aplicar uma transformação infinitesimal em x^{μ} e ϕ. Elas vão ser dadas por

$$\begin{aligned} \Delta x^{\mu} &= X^{\mu}_{\nu}\delta w^{\nu} \\ \Delta\phi &= \Phi_{\mu}\delta w^{\mu}, \end{aligned} \tag{1.34}$$

onde X^{μ}_{ν} é uma matriz e Φ_{μ} são números. Observando que ν poderia ser um índice duplo e também poderíamos ter índices para os campos $\Delta\phi_i$, por exemplo. Voltando a 1.34, vamos assumir que a ação é invariante à essas transformações e que o ϕ transformado obedece a equação de Euler - Lagrange 1.9. Então, a integral sobre R em 1.33 vai ser igual a zero depois de usar a equação de movimento, e o que sobra dessa equação é, usando 1.34,

$$\int_{\partial R} d\sigma_{\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\Phi_{\nu} - T^{\mu}_{k}X^{k}_{\nu}\right]\delta w^{\nu} = 0, \tag{1.35}$$

já que δw^{ν} é arbitrário, podemos escrever

$$\int_{\partial R} J^{\mu}_{\nu} d\sigma_{\mu} = 0, \tag{1.36}$$

onde

$$J^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\Phi_{\nu} - T^{\mu}_{k}X^{k}_{\nu}. \tag{1.37}$$

Da lei de Gauss e do fato de que R é arbitrário, temos

$$\int_R \partial_{\mu}J^{\mu}_{\nu} d^4x = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mu}J^{\mu}_{\nu} = 0. \tag{1.38}$$

Então, podemos concluir que se a ação é invariante a uma transformação. Consequentemente, vamos ter uma corrente que é conservada e como resultado disso, também teremos, uma carga conservada, ou seja, independente do tempo. Ela é dada por

$$Q_\nu = \int_\sigma J^\mu_\nu d\sigma_\mu, \tag{1.39}$$

onde σ é uma hiper superfície *spacelike*. Se integrarmos a segunda equação em 1.38, vamos obter,

$$\int_V \partial_0 J^0_\nu d^3x + \int_V \partial_i J^i_\nu d^3x = 0. \tag{1.40}$$

Podemos usar a lei de Gauss no segundo termo dessa equação e então, contanto que a superfície ∂V esteja bem longe, esse termo será igual a zero e assim o primeiro termo fica da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\int_V J^0_\nu d^3x = 0 = \frac{dQ_\nu}{dt}. \tag{1.41}$$

Com isso, podemos concluir que a carga é conservada. Essa relação é chamada de Teorema de Noether. Esse teorema é muito importante na física. Ele mostra, por exemplo, que quando a ação é invariante a translação temos conservação de momento e quando temos invariância a rotações, o momento angular é conservado.

1.5 Tensor energia-momento e ordenamento normal

Voltando a 1.32, podemos encontrar o tensor energia-momento para o campo escalar usando a Lagrangiana 1.10. Depois, de alguns cálculos, encontramos

$$T_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha\phi)(\partial_\beta\phi) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\lambda\delta}(\partial_\lambda\phi)(\partial_\delta\phi) + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\alpha\beta}. \tag{1.42}$$

Para $\alpha = \beta = 0$, temos

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left[(\partial_t\phi)^2 + \sum_{i=1}^{3}(\partial_i\phi)^2 + m^2\phi^2\right], \tag{1.43}$$

que é idêntico a densidade de Hamiltoniana 1.22. Já, os termos do tensor energia-momento com $\alpha = 0$ e $\beta = i$ com $i = 1, ..., n-1$, vamos ter a densidade de momento

$$T_{0i} = (\partial_0\phi)(\partial_i\phi). \tag{1.44}$$

Se substituirmos ϕ pela equação 1.20 em 1.43 e 1.44, e também integrarmos esses resultados sobre todo o espaço em um instante t, vamos encontrar

$$H \equiv \int_t T_{00} d^3x = \int_t d^3k \frac{E_k}{2} (a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})), \tag{1.45}$$

$$P_i \equiv \int_t T_{0i} d^3x = \int_t d^3k a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})k_i, \tag{1.46}$$

onde 1.45 é idêntico a equação 1.23 para a Hamiltoniana que encontramos antes. Também, 1.46 são as componentes do operador momento. Usando as relações de comutação 1.21, podemos escrever a Hamiltoniana na forma,

$$\begin{aligned} H &= \int d^3k \left(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) E_k \\ &= \int d^3k \left(N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) E_k, \end{aligned} \tag{1.47}$$

onde

$$\begin{aligned} N(\mathbf{k}) &\equiv a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}), \\ N &\equiv \int d^3k N(\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{1.48}$$

É possível ver que tanto H quanto P_i comutam com N

$$[N, H] = [N, P_i] = 0. \tag{1.49}$$

Podemos obter mais informações sobre o operador N observando os valores esperados dele. Usando 1.25, o valor esperado para o vácuo vai ser

$$\langle 0|N(\mathbf{k})|0\rangle = 0. \tag{1.50}$$

Agora, usando a segunda equação de 1.29, o valor esperado para um estado com várias partículas vai ser

$$\langle {}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, ..., {}^jn_{\mathbf{k}_j}|N(\mathbf{k})|{}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, ..., {}^jn_{\mathbf{k}_j}\rangle = {}^in, \tag{1.51}$$

então, para N, vamos obter

$$\langle {}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, ..., {}^jn_{\mathbf{k}_j}| \ N \ |{}^1n_{\mathbf{k}_1}, {}^2n_{\mathbf{k}_2}, ..., {}^jn_{\mathbf{k}_j}\rangle = \sum_i {}^in. \tag{1.52}$$

O valor esperado para o operador N é o número ${}^{i}n_{\mathbf{k}_i}$ que é o numero de quanta associado ao momento $\mathbf{k}_i$. Por isso, chamamos N_k de operador número e N de operador número total. Podemos ver de 1.49, que como, N comuta com P e H, os auto-estados de N também são auto-estados de P e H . Isso implica que quando aumentarmos ou reduzirmos ${}^{i}n_{\mathbf{k}_i}$ em uma unidade., variamos $\langle\ H\ \rangle$ e $\langle\ \mathbf{P}\ \rangle$ por um valor de E_k e $\mathbf{k}_i$ respectivamente. Então, $N_{\mathbf{k}}$ conta o número de partículas com momento $\mathbf{k}_i$ e energia E_k.

Vamos, agora, analisar o estado vácuo $|0\rangle$. Ele não possui partículas com momento $\mathbf{k}$ e então, usando 1.46, temos

$$\langle 0|\mathbf{P}|0\rangle = 0. \tag{1.53}$$

Logicamente, o valor esperado da Hamiltoniana também deveria ser zero, porém usando 1.47, obtemos

$$\langle 0|H|0\rangle = \langle 0|0\rangle \int d^3k \frac{E_k}{2} = \int d^3k \frac{E_k}{2}, \tag{1.54}$$

onde foi usada a normalização

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

Então, podemos ver que o valor esperado da energia não é zero, mas sim infinita. Isso ocorre porque temos uma energia $E_k/2$ para cada partícula com momento $\mathbf{k}$. Como podemos ter quantas partículas quisermos a soma vai para infinita.

Como a energia com valor zero é arbitraria, podemos facilmente concertar esse problema. Para fazer isso podemos realizar a operação " : : " chamada de ordenamento normal. Essa operação faz com que toda vez que um produto de aniquilação e criação aparecem, todo operador de aniquilação é movido para a direita de todos os operadores de criação, ou seja,

$$: a(\mathbf{k})a^{\dagger}(\mathbf{k}) := a^{\dagger}((\mathbf{k})a(\mathbf{k}), \tag{1.55}$$

então, a energia ordenada normalmente fica da seguinte forma,

$$: H := \int d^3k \left(a^{\dagger}(\mathbf{k})a(\mathbf{k})\right) E_k, \tag{1.56}$$

e o valor esperado no vácuo,

$$\langle 0| : H : |0\rangle = 0,$$

como era desejado.

2 O campo escalar complexo

Primeiro consideramos o caso em que o campo escalar era real e consequentemente hermitiano, mas agora vamos considerar o caso que ele não é. Nesse caso teremos duas equações de movimento

$$\begin{aligned}(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) &= 0,\\ (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi^\dagger(x) &= 0\end{aligned} \tag{2.1}$$

e a Lagrangiana para esse campo é

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^\dagger)(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi. \tag{2.2}$$

Os momentos conjugados vão ser dados por

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger(x),\\ \Pi^\dagger(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}(x).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Agora, podemos decompor esses campos em suas partes reais e imaginárias

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)),\\ \phi^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) - i\phi_2(x))\end{aligned} \tag{2.4}$$

com $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, sendo dois campos escalares distintos e reais que descrevem duas partículas distintas mas de mesma massa.

Como $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ seguem as regras de comutação 1.19 podemos obter as regras de comutação de 2.4 com 2.3, que são

$$[\phi(\mathbf{x},t), \Pi^\dagger(\mathbf{x}',t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{x},t), \Pi(\mathbf{x}',t)] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{2.5}$$

Esses campos $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ podem ser decompostos de maneira similar a 1.20. Então vamos ter

$$\phi_i(x,t) = \int d^3k[a_i(\mathbf{k})u_\mathbf{k}(x,t) + a_i^\dagger(\mathbf{k})u_\mathbf{k}^*(x,t)], \tag{2.6}$$

onde $i = 1, 2$ e os operadores criação e aniquilação vão seguir as regras de comutação 1.21,

$$\begin{aligned} [a_i(\mathbf{k}), a_j(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a_i^\dagger(\mathbf{k}), a_j^\dagger(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [a_i(\mathbf{k}), a_j^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sabendo disso, podemos expandir, também, $\phi(x)$ e $\phi^\dagger(x)$. Usando 2.4, 2.6, e definindo

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\mathbf{k}) + ia_2(\mathbf{k})), \\ b(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\mathbf{k}) - ia_2(\mathbf{k})), \end{aligned} \tag{2.8}$$

vamos obter

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \int d^3k[a(\mathbf{k})u_\mathbf{k}(x,t) + b^\dagger(\mathbf{k})^\dagger u_\mathbf{k}^*(x,t)], \\ \phi^\dagger(x,t) &= \int d^3k[b(\mathbf{k})u_\mathbf{k}(x,t) + a^\dagger(\mathbf{k})^\dagger u_\mathbf{k}^*(x,t)]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

As relações de comutação para os operadores 2.8 podem ser obtidas usando as definições delas e as regras de comutação 2.7. Após alguns cálculos, obtemos,

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{2.10}$$

com todos os outros comutadores sendo iguais a zero. Para ver o que esses operadores de aniquilação e criação fazem, vamos, aplicar a seguinte transformação no campo

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{-i\theta}\phi, \\ \phi &\rightarrow \phi^\dagger e^{i\theta}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde θ é uma constante real.

Essa transformação deixa a Lagrangiana 2.5 invariante. Diferentemente da transformação de Lorentz, essa transformação não altera as coordenadas do espaço-tempo e por isso, é chamada de interna.

Sabemos do teorema de Noether, discutido anteriormente, que com uma invariância temos uma carga conservada. Então, para achá-la vamos voltar a 1.37 com

$$\begin{aligned} \Phi &= -i\phi, \\ \Phi^\dagger &= i\phi^\dagger, \\ X &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

obtendo,

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(-i\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(i\phi^\dagger) \\ &= -i(\partial^\mu \phi^\dagger \phi) + i(\partial^\mu \phi \phi^\dagger) \end{aligned} \tag{2.13}$$

consequentemente, a carga conservada 1.39 vai ser dada por

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x J^0 \\ &= \int d^3x i[\dot{\phi}\phi^\dagger - \dot{\phi}^\dagger \phi] \\ &= \int d^3k[a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})], \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde foi usado 2.10 e a operação de ordenamento normal. Podemos lembrar da definição 1.48 para o operador número e perceber que o primeiro e segundo termo de 2.14 são similares a ele. Então, podemos escrever

$$Q = \int d^3k[N_a(\mathbf{k}) - N_b(\mathbf{k})]. \tag{2.15}$$

Assim, é possível concluir que $N_a(\mathbf{k})$ conta o número de partículas com uma certa carga e $N_b(\mathbf{k})$ conta o número de partículas com carga oposta a primeira. Então, vemos que $a^\dagger(\mathbf{k})$ e $a(\mathbf{k})$ criam e aniquilam partículas enquanto $b^\dagger(\mathbf{k})$ e $b(\mathbf{k})$ criam e aniquilam antipartículas que possuem a mesma massa e carga oposta a partícula.

O vácuo vai ser definido pelo estado sem partículas e antipartículas

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = b(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \tag{2.16}$$

e podemos obter estados com partículas e antipartículas da seguinte forma

$$\begin{aligned} a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle &= |1_\mathbf{k}\rangle, \\ b^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle &= |\tilde{1}_\mathbf{k}\rangle. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Estados com várias partículas e antipartículas podem ser obtidos de forma similar ao caso do campo escalar real.

A Hamiltoniana para o campo escalar complexo pode ser obtido de maneira similar ao caso real usando 1.17 para a densidade da Hamiltoniana. Integrando, e usando 2.9, além

das regras de comutação, obtemos a seguinte Hamiltoniana já ordenada normalmente,

$$\begin{aligned} H &= \int d^3k \left[a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\right] E_k \\ &= \int d^3k [N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k})] E_k. \end{aligned} \tag{2.18}$$

3 O campo de Dirac

Vimos, anteriormente, que o problema de energias negativas para uma partícula livre foi resolvido por meio da interpretação da equação de onda como um campo quântico. Mas antes, Dirac tentou resolver esse problema procurando uma equação que fosse de primeira ordem ao invés de segunda como a equação de Klein-Gordon. Então, o que ele fez foi tentar encontrar a raiz da equação

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = p^\mu p_\mu = p^2 = m^2. \tag{3.1}$$

Mas aqui, vamos encontrar a equação de Dirac de forma diferente, usando as propriedades de transformação de espinores quando aplicada uma transformação de Lorentz neles. Para isso, primeiro vamos relembrar um pouco sobre representações do grupo de Lorentz.

3.1 Representações de Lorentz

No PTCC vimos que o grupo de Lorentz pode ser considerado como $SU(2)\otimes SU(2)$. Podemos ver isso fazendo duas combinações lineares dos seus geradores $\mathbf{J}$ (rotações) e $\mathbf{K}$ (*boosts*). Essas combinações são

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

com as regras de comutação

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= i\epsilon_{ijk}A_k, \\ [B_i, B_j] &= i\epsilon_{ijk}B_k, \\ [A_i, B_j] &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Assim, vamos ter representações de Lorentz classificadas como (j, j') com $j, j' = 0, 1/2, 1, 3/2...$

No caso em que temos $(0, 0)$ vamos ter uma representação escalar. Para $(1/2, 0)$ ou $(0, 1/2)$ vamos ter duas representações espinoriais não equivalentes, a tipo 1 e a tipo 2 respectivamente. Elas vão se transformar da seguinte forma

Tipo 1: $(\frac{1}{2}, 0)$:

$$\xi' = \exp\left[i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot(\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\phi})\right]\xi. \tag{3.4}$$

Tipo 2: $(0, \frac{1}{2})$:

$$\eta' = \exp\left[i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot(\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\phi})\right]\eta. \tag{3.5}$$

Essas representações são intercambiáveis sob paridade. Então, temos que considerar o espinor em quatro dimensões que vai se transformar da seguinte forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i/2\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\phi})} & 0 \\ 0 & e^{i/2\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\phi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Tendo lembrado disso, podemos prosseguir em encontrar a equação de Dirac.

3.2 Equação de Dirac

A equação de Dirac pode ser obtida aplicando um *boost* no espinor de Dirac. Mas antes, vamos renomear os espinores ξ e η como

$$\xi \to \phi_R, \quad \eta \to \phi_L \tag{3.8}$$

com R significando *right* e L *left* que indicam se o espinor é *right-handed* ou *left-handed*. Eles se transformam com em 3.4 e 3.5. Então, vamos ter,

$$\begin{aligned} \phi_R \to \exp\left[+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}\right]\phi_R &= \left[\cosh(\phi/2) + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\sinh(\phi/2)\right]\phi_R, \\ \phi_L \to \exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}\right]\phi_L &= \left[\cosh(\phi/2) - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\sinh(\phi/2)\right]\phi_L. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Se considerarmos que inicialmente a partícula estava em repouso e que depois da transformação ela está com momento $\mathbf{p}$, podemos escrever 3.9, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \phi_R(\boldsymbol{p}) &= \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\phi_R(0), \\ \phi_L(\boldsymbol{p}) &= \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{p}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\phi_L(0), \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $\gamma = 1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ e $\beta = v/c$. Também foi usado o fato de que como $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, podemos escrever

$$\gamma = \cosh\phi, \quad \gamma\beta = \sinh\phi \tag{3.11}$$

e então, usando as identidades para funções hiperbólicas, obtemos

$$\cosh\phi/2 = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2}, \quad \sinh\phi/2 = \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2}. \tag{3.12}$$

Para uma partículas de momento $\mathbf{p}$, massa m e energia total E, temos que $\gamma = E/m$. Substituindo esse resultado em 3.10 e notando que $\phi_R(0) = \phi_L(0)$ para uma partícula em repouso. Já que nesse caso não temos como saber para que lado está o spin, obtemos

$$\begin{aligned} \phi_R(\boldsymbol{p}) &= \frac{E + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{m}\phi_L(\boldsymbol{p}), \\ \phi_L(\boldsymbol{p}) &= \frac{E - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{m}\phi_R(\boldsymbol{p}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Podemos escrever essas equações na forma matricial

$$\begin{pmatrix} -m & p_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ p_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(\boldsymbol{p}) \\ \phi_L(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = 0, \tag{3.14}$$

e definindo as matrizes

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

podemos escrever 3.14 da seguinte forma

$$\begin{aligned} (\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m)\psi(p) &= 0, \quad \text{ou} \\ (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(p) &= 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Essa é a equação de Dirac para partículas massivas. Podemos notar que as matrizes γ seguem a seguinte relação de anti-comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} \tag{3.17}$$

que é conhecida como álgebra de Clifford. Também, podemos observar que qualquer outra matriz γ'^μ que obtida da seguinte forma

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} \tag{3.18}$$

com S sendo uma matriz unitária, também seguirá a álgebra de Clifford. Consequentemente, essa matriz será uma representação válida das matrizes γ. Nesse caso, a equação de Dirac será satisfeita pelo espinor quadridimensional

$$\psi' = S\psi. \tag{3.19}$$

Agora, voltando a 3.16, podemos ver que uma partícula em repouso vai obedecer

$$\gamma^0 p_0 \psi = m\psi \quad \Rightarrow \quad p_0\psi = m\gamma^0\psi. \tag{3.20}$$

De 3.17 temos que $(\gamma^0)^2 = 1$. Então, os seus autovalores podem ter o valor de 1 ou -1. Desse modo, vamos ter

$$E = \pm m, \tag{3.21}$$

sendo duas soluções para cada sinal da energia. Já para uma partícula em movimento vamos ter

$$E = \pm(m^2 + p^2)^{1/2} \tag{3.22}$$

duas vezes para cada uma das soluções.

Então, podemos ver que a equação de Dirac não resolve o problema das energias negativas, porém, Dirac contorna isso dando uma nova interpretação do vácuo, a de que ele é todo ocupado por elétrons com energia negativa e por causa do principio de exclusão de Pauli, nenhuma outra partícula poderia ocupar esses estados de energia negativa. Nessa nova interpretação, Dirac conseguiu prever a existência de anti-partículas, já que se tivermos um buraco de energia $-|E|$, um elétron com energia E pode emitir uma quantidade de energia $2|E|$ e preencher esse buraco. Agora, nesse caso vamos ter

$$e^- \quad + \quad buraco \quad \rightarrow \quad energia.$$

Para termos a conservação de carga, o buraco vai ter carga $+e$, mas vai continuar com a mesma massa do elétron, então, o buraco vai ser o que chamamos de anti-partícula. Desse modo, a equação de Dirac já não descreve mais uma única partícula e uma melhor interpretação dessa equação seria considera-la uma equação de campo, que é o que vamos fazer mais a frente. Mas agora, vamos encontrar soluções de ondas planas para essa equação.

Para o caso em que a partícula estiver em repouso (3.20), as soluções vão ser dadas por

$$\begin{aligned} \psi(0) &= u(0)e^{-imt} \quad E > 0, \\ \psi(0) &= v(0)e^{imt} \quad E < 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

sendo $u(0)$ dois espinores para energia positiva e $v(0)$, dois espinores para energia negativa

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Nessa representação, chamada de Dirac-Pauli, γ^0 é diagonal e dada por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Ela pode ser obtida por meio de 3.16, usando 3.15 com

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

e então o espinor ψ que vai satisfazer 3.16 vai ser dado por

$$\psi = S \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_R + \phi_L \\ \phi_R - \phi_L \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

As soluções de partículas com um momento $\mathbf{p}$, vão ser dadas por

$$\begin{aligned} \psi(p) &= u(p)e^{-ip\cdot x} \quad E > 0, \\ \psi(p) &= v(p)e^{ip\cdot x} \quad E < 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Para encontrar as soluções explicitas para essa partícula, podemos aplicar um *boost* em 3.6

$$\begin{pmatrix} \phi'_R \\ \phi'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{1/2\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}} & 0 \\ 0 & e^{-1/2\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

e transformar M (matriz boost na representação dos espinores *left* e *right*) para a representação de Dirac-Pauli. Ele vai ser dado por

$$M' = SMS^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi/2) & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sinh(\phi/2) \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sinh(\phi/2) & \cosh(\phi/2) \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Usando 3.12 e $\gamma = E/m$, obtemos

$$M' = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_x+ip_y}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Agora, é só multiplicar a matriz M' pelos espinores 3.24, que vamos obter as soluções explicitas

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \\ v^{(1)} &= \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $p_\pm = p_x \pm ip_y$. As normalizações desses espinores vão ser dadas por

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(p)u^{(\alpha')}(p) &= \delta_{\alpha\alpha'}, \\ \bar{v}^{(\alpha)}(p)v^{(\alpha')}(p) &= -\delta_{\alpha\alpha'}, \\ \bar{u}^{(\alpha)}(p)v^{(\alpha')}(p) &= 0, \\ u^{(\alpha)\dagger}(p)u^{(\alpha')}(p) &= v^{(\alpha)\dagger}(p)v^{(\alpha')}(p) = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\alpha'}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

onde $\bar{u}^{(\alpha)}$ e $\bar{v}^{(\alpha)}$ são espinores adjuntos definidos como $\bar{u}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)\dagger}\gamma^0$ e $\bar{v}^{(\alpha)} = v^{(\alpha)\dagger}\gamma^0$.

Para uso em cálculos posteriores vamos definir os operadores

$$\begin{aligned} P_+ &= \sum_\alpha u^{(\alpha)}(p)\bar{u}^{(\alpha)}(p) = \frac{\gamma\cdot p + m}{2m}, \\ P_- &= -\sum_\alpha v^{(\alpha)}(p)\bar{v}^{(\alpha)}(p) = \frac{-\gamma\cdot p + m}{2m} \end{aligned} \tag{3.34}$$

que são operadores de projeção. O primeiro projeta estados de energia positiva e o segundo, estados de energia negativa.

3.3 Quantizando

Para irmos para uma interpretação de campo da equação de Dirac, precisamos encontrar uma Lagrangiana que por meio das equações de Euler-Lagrange dá 3.16. Essa Lagrangiana vai ser

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi, \tag{3.35}$$

onde $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ e ψ, $\overline{\psi}$ são tratados como dois campos independentes. Algo a notar, sobre 3.35, é que ela não é hermitiana. Uma Lagrangiana hermitiana teria a forma

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi] - m\overline{\psi}\psi \tag{3.36}$$

que só difere de 3.35 por uma divergência total

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}' = \frac{i}{2}\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) \tag{3.37}$$

o que não muda a ação. Então por simplicidade vamos usar a 3.35. De onde podemos obter o seguinte momento conjugado

$$\Pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}(x)} = i\psi^\dagger(x). \tag{3.38}$$

Agora, como foi feito para o campo escalar, vamos expandir o campo na base das soluções de ondas planas definidas anteriormente

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{\alpha=1,2}[b_\alpha(k)u^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot x} + d_\alpha^\dagger(k)v^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot x}], \tag{3.39}$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{k_0}\sum_{\alpha=1,2}[b_\alpha^\dagger(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k)e^{ik\cdot x} + d_\alpha(k)\overline{v}^{(\alpha)}(k)e^{-ik\cdot x}]. \tag{3.40}$$

Igualmente como no caso do campo escalar complexo, vemos que temos dois operadores criação e aniquilação distintos $b_\alpha(k)$ e $d_\alpha(k)$.

Nesse caso, a densidade de Hamiltoniana vai ser dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi\dot{\psi} - \mathcal{L} \\ &= \psi^\dagger i\frac{\partial\psi}{\partial t}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde foi usado 3.35 e 3.38. A Hamiltoniana total, usando 3.39 e 3.40, além das condições de normalização 3.33, será dada por

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\mathcal{H} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{mk_0}{k_0}\sum_\alpha[b^\dagger_\alpha(k)b_\alpha(k) - d_\alpha(k)d^\dagger_\alpha(k)]. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Podemos observar que a Hamiltoniana não é positiva definida, já que o operador $d_\alpha(k)d^\dagger_\alpha(k)$ vai contribuir com uma parte negativa na energia. Esse problema não some se empregarmos o ordenamento normal, usado anteriormente. A solução encontrada para resolver isso, é assumir que os operadores de criação e aniquilação anti-comutam ao invés de comutarem, como era no caso do campo escalar. As relações de anti-comutação vão ser dadas por

$$\begin{aligned} \{b_\alpha(k), b^\dagger_{\alpha'}(k')\} &= \{d_\alpha(k), d^\dagger_{\alpha'}(k')\} = (2\pi)^3\frac{k_0}{m}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\alpha\alpha'}, \\ \{b_\alpha(k), b_{\alpha'}(k')\} &= \{b^\dagger_\alpha(k), b^\dagger_{\alpha'}(k')\} = 0, \\ \{d_\alpha(k), d_{\alpha'}(k')\} &= \{d^\dagger_\alpha(k), d^\dagger_{\alpha'}(k')\} = 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Para se livrar da energia infinita no vácuo, vamos aplicar a operação de ordenamento normal, como foi feito no caso do campo escalar. Só que, agora, ele vai ser definido de forma diferente já que os operadores anti-comutam ao invés de comutarem. Dessa vez, vamos colocar o operador criação na direita do de aniquilação e trocar o sinal como se a relação de anti-comutação fosse igual a zero. Desse modo vamos ter

$$:H:= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{mk_0}{k_0}\sum_\alpha[b^\dagger_\alpha(k)b_\alpha(k) + d^\dagger_\alpha(k)d_\alpha(k)] \tag{3.44}$$

que é uma hamiltoniana sempre positiva e assim, o problema das energias negativas foi resolvido.

Uma consequência do uso de anti-comutadores pode ser notada da primeira e segunda relações de 3.43 que implicam $b^\dagger_\alpha(k)b^\dagger_\alpha(k) = d^\dagger_\alpha(k)d^\dagger_\alpha(k) = 0$, ou seja, não se pode ter mais de uma partícula em um mesmo estado. Esse é o principio de exclusão de Pauli. Então, concluímos que o campo de Dirac segue a estatística de Fermi.

Assim, como no caso do campo escalar complexo, a Lagrangiana 3.35 é invariante a transformações de fase como em 2.11. Então, para este caso vamos ter que a corrente conservada, dada pelo teorema de Noether vai ser

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}(-i\psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})}(i\overline{\psi}) \\ &= \overline{\psi}\gamma^\mu \psi \end{aligned} \tag{3.45}$$

e consequentemente, a carga conservada vai ser dada por

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x J^0 \\ &= \int d^3x \psi^\dagger \psi \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{mk_0}{k_0} \sum_\alpha [b_\alpha^\dagger(k) b_\alpha(k) - d_\alpha^\dagger(k) d_\alpha(k)]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Então, podemos ver que como no caso do campo escalar complexo, temos partículas e antipartículas. Com $b_\alpha^\dagger(k)$ criando partículas e $d_\alpha^\dagger(k)$ antipartículas.

Assim, como no caso anterior o vácuo é definido como o estado sem partículas e antipartículas

$$b_\alpha(k)|0\rangle = d_\alpha(k)|0\rangle = 0 \tag{3.47}$$

e os estados com partículas e/ou antipartículas podem ser criados a partir dele usando os operadores de criação.

Por fim, podemos encontrar as relações de anti-comutação para $\psi_i^\dagger$ e ψ_j onde i e j são componentes do espinor quadridimensional. Com alguns cálculos, é possível, achar essas relações usando 3.39, 3.40, 3.34 e 3.43. Elas vão ser dadas por

$$\begin{aligned} \{\psi_i(\mathbf{x},t), \psi_j^\dagger(\mathbf{x}',t)\} &= \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta_{ij}, \\ \{\psi_i(\mathbf{x},t), \psi_j(\mathbf{x}',t)\} &= 0, \\ \{\psi_i^\dagger(\mathbf{x},t), \psi_j^\dagger(\mathbf{x}',t)\} &= 0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

4 O campo eletromagnético

O último campo que vamos quantizar é o eletromagnético. Ele é um exemplo de campo sem massa e com simetria de calibre e isso faz com que tenhamos algumas diferenças na hora da quantização. Veremos isso mais a frente, mas, primeiro vamos relembrar as equações de Maxwell e ver como podemos escrevê-las de uma forma covariante.

4.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell no vácuo são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

O campo elétrico e magnético podem ser escritos em função de um quadrivetor potencial

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \tag{4.2}$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \end{aligned} \tag{4.3}$$

que satisfazem a segunda e terceira equação de 4.1.Podemos escrever 4.3 de forma covariante, definindo um rotacional quadridimensional antissimétrico dado por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{4.4}$$

que pode ser representado pela matriz

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Esse tensor é chamado de tensor campo eletromagnético por suas componentes serem ocupadas por componentes dos campos elétrico e magnético. Agora, se escrevermos a seguinte equação

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0, \tag{4.6}$$

podemos ver que é possível obter as equações de Maxwell restantes (primeira e última) a partir dela. Por exemplo

$$\partial F^{i0} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{E} \tag{4.7}$$

que é a primeira equação em 4.1. A ultima equação pode ser obtida de forma similar.

As equações 4.1 são invariantes a transformações de calibre, o que significa, que se adicionarmos o gradiente de alguma função escalar $\theta(x)$ ao potencial

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \theta(x) \tag{4.8}$$

os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ não vão mudar. Podemos ver isso em

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial_\mu(\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu) \\ &= \partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu\theta(x)) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu\theta(x)) \\ &= F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)\theta(x) = F^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

O fato do campo eletromagnético ser um campo de calibre trás alguns problemas para a quantização desse campo. Isso vem de o campo ter somente duas componentes independentes, mas ser descrito por $A^\mu(x)$ que possui quatro. Então, se escolhermos uma transformação de calibre que diminui as componentes independentes para duas, perdemos a covariância. Podemos, também, escolher uma transformação que mantém a covariância, mas fazendo isso, vamos ter duas componentes que não possuem significado físico. Então, para se obter o significado físico das componentes precisamos usar o formalismo de *Gupta-Bleuer* que não será feito aqui. Nesse trabalho foi escolhido quantizar o campo usando a transformação de calibre de Coulomb (radiação) que é dado por

$$\phi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{4.10}$$

e consequentemente vamos ter,

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{4.11}$$

Nessa condição de calibre, vamos ter que $A^\mu(x)$ só terá duas componentes independentes.

4.2 Quantizando

Como nos casos anteriores, para quantizar, precisamos de uma Lagrangiana que dá as equações de Maxwell. Ela vai ser

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{4.12}$$

Então, os momentos conjugados são

$$\begin{aligned} \Pi^0(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \\ \Pi^i(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = -\dot{A}^i = E^i. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Impondo as relações de comutação, obtemos

$$\begin{aligned} [A_i(x), A_j(x')] &= 0, \\ [\Pi^i(x), \Pi^j(x')] &= 0, \\ [A_i(x), \Pi^j(x')] &= \delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Essas relações de comutação possuem um problema, a última relação não satisfaz a condição $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. É possível ver isso aplicando uma divergência nessa ultima relação

$$[\nabla \cdot \mathbf{A}(x), E^i(x')] = i\partial^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0. \tag{4.15}$$

Para as condições de quantização obedecerem a de calibre, temos que modificar a primeira. Se trocarmos o δ_j^i por

$$\delta_i^{j\prime} = \delta_i^j + \partial_i \left(\frac{1}{\nabla^2} \right) \partial^j \tag{4.16}$$

e aplicar o divergente nele, vamos ter

$$\begin{aligned} \partial^i \delta_i^{j\prime} &= \partial^j + \partial^i \partial_i \left(\frac{1}{\nabla^2} \right) \partial^j \\ &= \partial^j - \partial^j = 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

então, as relações de comutação vão obedecer 4.10. As novas relações de comutação vão ser

$$\begin{aligned}
[A_i(x), A_j(x')] &= 0, \\
[\Pi^i(x), \Pi^j(x')] &= 0, \\
[A_i(x), \Pi^j(x')] &= i\delta_i^{j\prime}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}').
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Agora, voltando a 4.6, podemos escrever essa equação, usando 4.11, da seguinte forma

$$\Box A^\nu = 0 \tag{4.19}$$

e como $A^0 = 0$,

$$\Box \mathbf{A} = 0 \tag{4.20}$$

que é a equação de Klein-Gordon para um campo sem massa. Então, como feito anteriormente, podemos expandir $A^\mu(x)$ usando suas soluções de ondas planas. Elas vão ter a forma

$$\mathbf{A}(x) \propto \epsilon(\mathbf{k})e^{\pm ik\cdot x}, \tag{4.21}$$

onde $\epsilon(\mathbf{k})$ é um que representa a polarização da solução. Também, notamos que $E_k = k^0 = |\mathbf{k}|$ e $k^2 = 0$.

Como $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ temos que ter

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}) = 0, \tag{4.22}$$

ou seja, a direção de propagação é ortogonal a de polarização. Como consequência disso, vamos ter dois vetores de polarização que podemos escolher como sendo ortonormais

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}) &= 0, \\
\epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) &= \delta_{\lambda\lambda'}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

com $\lambda = 1, 2$.

Sabendo de tudo isso, podemos expandir $\mathbf{A}(x)$ na base das ondas planas e obter

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}} \left[\epsilon(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x}a(\mathbf{k}, \lambda) + \epsilon^*(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\right]. \tag{4.24}$$

Com um pouco de cálculo, é possível inverter 4.24 e achar equações para os operadores $a(\mathbf{k},\lambda)$ e $a^\dagger(\mathbf{k},\lambda)$, que vão ser dados por

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k},\lambda) &= i\int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}}(e^{ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\mathbf{A}(x))\cdot\epsilon^*(\mathbf{k},\lambda), \\ a^\dagger(\mathbf{k},\lambda) &= -i\int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}}(e^{-ik\cdot x}\overleftrightarrow{\partial_0}\mathbf{A}(x))\cdot\epsilon(\mathbf{k},\lambda). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Com isso, podemos achar as relações de comutação para eles, que vão ser

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k},\lambda), a(\mathbf{k}',\lambda)] &= 0, \\ [a^\dagger(\mathbf{k},\lambda), a^\dagger(\mathbf{k}',\lambda)] &= 0, \\ [a(\mathbf{k},\lambda), a^\dagger(\mathbf{k}',\lambda)] &= \delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Essas são as mesmas relações de comutação para os operadores de aniquilação e criação do campo escalar real. Então, o significado desses operadores aparece da mesma forma de como apareceu para aquele campo. Desse modo, vamos ter que $a^\dagger(\mathbf{k},\lambda)$ vai criar fótons na polarização λ e $a(\mathbf{k},\lambda)$ vai aniquilar esses fótons.

A Hamiltoniana vai ser dada por,

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\mathcal{H} \\ &= \int d^3x(\Pi^i\dot{A}_i - \mathcal{L}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2) \end{aligned} \tag{4.27}$$

que pode ser escrita em termos do potencial. Depois, pode-se usar 4.24 e 4.26 para obter

$$H = \sum_{\lambda=1}^{2}\int d^3k E_k a^\dagger(\mathbf{k},\lambda)a(\mathbf{k},\lambda), \tag{4.28}$$

onde $E_k = k^0 > 0$ a Hamiltoniana já foi ordenada normalmente.

Podemos notar que a Hamiltoniana é sempre positiva. Também, é possível ver, que como $\mathbf{A}(x)$ é hermitiano, então, o fóton não vai ter carga, assim, como o campo escalar real. Finalmente, para encontrar os estados de Fock, é só seguir os mesmos passos que foram feitos para os outros campos.

Conclusão

Este trabalho foi feito com o intuito de começar os estudos na área de teoria quântica de campos. Tendo isso em vista, foi feito uma revisão bibliográfica da quantização canônica de diferentes campos quânticos. Primeiramente, foi quantizado o campo escalar. Ao fazer isso passamos a tratar a equação de onda como operador e impor relações de comutação entre ela e o momento conjugado. Como consequência da quantização vimos que o problema das energias negativas que existia na mecânica relativística sumiu. Nessa primeira parte, também introduzimos o teorema de Noether que tem uma importante participação na interpretação de campos que descrevem partículas com carga. Além disso, falamos sobre o operador de ordenamento normal que resolve o problema de o vácuo ter energia infinita depois da quantização.

O segundo campo que quantizamos foi o campo escalar complexo como um exemplo de uma teoria com uma carga conservada não trivial. Essa carga vem do fato do campo ser invariante a transformações de fase. Como consequência disso, teve a aparição de partículas e antipartículas.

O próximo campo quantizado foi o de Dirac. Porém ao fazer isso foi observado que para não ter energias negativas foi necessário usar relações de anti-comutação na hora da quantização o que implicou que as partículas descritas por esse campo obedece o principio da exclusão de Pauli e então são férmions ao contrário do campo escalar que descreve bósons. Foi visto, também, que similarmente a campos escalares complexos, o campo de Dirac descreve partículas e antipartículas.

O último campo quantizado foi o eletromagnético. A quantização dele foi feita para termos um exemplo de campo sem massa e de calibre. Para esse tipo de campo foi visto que como temos uma invariância dele a transformações locais de calibre é possível quantizá-lo escolhendo diferentes condições de calibre. Aqui foi escolhido a condição de Coulomb que restringe a quantização somente aos graus de liberdade físicos. Por o campo eletromagnético ser abeliano, não tivemos que introduzir métodos mais complicados para a quantização, porem, se ele fosse um campo de calibre não abeliano teríamos mais dificuldade em prosseguir com a quantização do modo como foi feito para os outros campos.

Este trabalho foi baseado principalmente em certos capítulos dos livros (Ryder 1996), (Birrell e Davies 1984), (Das 2008) e (Lahiri e Pal 2005). Mas também foram usados como referência os livros (Peskin e Schroeder 2018), (Zee 2010) e (Zee 2016).

Referências

BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. *Quantum fields in curved space*. [S.l.]: Cambridge university press, 1984. Citado na página 53.

DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. [S.l.]: World Scientific, 2008. Citado na página 53.

LAHIRI, A.; PAL, P. B. *A first book of quantum field theory*. [S.l.]: CRC Press, 2005. Citado na página 53.

PESKIN, M.; SCHROEDER, D. V. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado na página 53.

RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado na página 53.

ZEE, A. *Quantum field theory in a nutshell*. [S.l.]: Princeton university press, 2010. v. 7. Citado na página 53.

ZEE, A. *Group theory in a nutshell for physicists*. [S.l.]: Princeton University Press, 2016. v. 17. Citado na página 53.