

Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA  
Engenharia Aeroespacial

**Comparação de Métodos de Determinação de  
Atitude para ADCS de CubeSats: Filtros de  
Kalman Estendido e *Unscented***

Autor: Álef Vinícius Ramos Dias  
Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva

Brasília, DF  
2022







Álef Vinícius Ramos Dias

**Comparação de Métodos de Determinação de Atitude  
para ADCS de CubeSats: Filtros de Kalman Estendido e  
*Unscented***

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva

Coorientador: Prof. Thiago Felipe Kurudez Cordeiro

Brasília, DF

2022

---

Álef Vinícius Ramos Dias

Comparação de Métodos de Determinação de Atitude para ADCS de CubeSats: Filtros de Kalman Estendido e *Unscented*/ Álef Vinícius Ramos Dias. – Brasília, DF, 2022-

152 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA , 2022.

1. UKF. 2. EKF. I. Prof. Dr. William Reis Silva. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Comparação de Métodos de Determinação de Atitude para ADCS de CubeSats: Filtros de Kalman Estendido e *Unscented*

CDU XX:XXX:XXX.X

---

Álef Vinícius Ramos Dias

# **Comparação de Métodos de Determinação de Atitude para ADCS de CubeSats: Filtros de Kalman Estendido e *Unscented***

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, XX de mês de ano:

---

**Prof. Dr. William Reis Silva**  
Orientador

---

**Titulação e Nome do Professor**  
**Convidado 01**  
Convidado 1

---

**Titulação e Nome do Professor**  
**Convidado 02**  
Convidado 2

Brasília, DF  
2022



# Agradecimentos

Gostaria de agradecer o apoio e consideração de todos os envolvidos nesse processo, meus colegas do núcleo de controle da Gama Cubedesign, que são a razão para a escolha do tema, assim como meu orientador, e coorientador por todo o auxílio, e minha mãe, minha tia, e minha namorada pelo suporte.



*“Is it possible that existence is our exile  
and nothingness our home?  
(Emil Cioran, Tears and Saints)*





# Resumo

O objetivo desse trabalho é determinar, para diferentes aplicações de ADCS (*Attitude Determination and Control System*), e diferentes sistemas, qual o método mais adequado para a estimação do vetor de estados dentre o Filtro de Kalman Estendido e o Filtro de Kalman *Unscented* (EKF e UKF respectivamente da sigla em inglês) pela análise relativa da performance dos filtros em simulações, a fim de determinar se a estimação mais acurada do UKF em relação ao EKF justifica a implementação nesse contexto, apesar do maior peso computacional. Para esse fim foi modelado um sistema de ADCS de um cubesat, com o intuito de comparar os resultados de simulações com as implementações dos diferentes filtros em um mesmo sistema. Os parâmetros utilizados para isso serão: o erro de estimação de cada filtro; o tempo de processamento associado a simulação de cada filtro; e os efeitos da estimação nos parâmetros de controle. Sendo esperado um desempenho superior do UKF em geral, porém com resultados satisfatórios do EKF quando a variância dos sensores for baixa, havendo maior vantagem no uso do UKF com sensores com maior variância, ou com missões que incluem a possibilidade de degradação dos sensores ao longo do tempo de forma que a variância aumente.

**Palavras-chaves:** Filtro de Kalman Estendido. Filtro de Kalman *Unscented*. Sistema de Determinação e Controle de Atitude. CubeSat.



# Abstract

This work's objective is to determine, for different ADCS (Attitude Control Determination System) applications, and systems, which method is more suited for state estimation, the Extended Kalman Filter or the Unscented Kalman Filter (EKF and UKF respectively), through the analysis of the relative performance of the filters in simulations, to determine if the UKF's more accurate estimation relative to EKF's justifies the greater computational load associated for its implementation in this context. Hence, a cubesats ADCS was modeled, to compare the simulation results for the implementation of each filter in the same system. To that end, the parameters for comparison are: each filter's estimation error; the processing time associated with each filter's simulation; and the effect of the filters in the control system parameters. In general, a better performance is expected of the UKF, although for low sensor variance a very similar performance for less processing is expected of the EKF, meaning the UKF's use is recommended in applications with higher sensor variance or higher sensor degradation implying higher sensor variance over an extended mission period.

**Key-words:** Extended Kalman Filter. Unscented Kalman Filter. Attitude Determination and Control System. CubeSat.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Estrutura do GAMASAT-1. Fonte: GONÇALVES; TORRES(2021) . . .	33
Figura 2 – Diagrama de blocos do ADCS. Fonte: Autor . . . . .	35
Figura 3 – Diagrama do ECEF. Fonte: Material de apoio de Mecânica do Voo . . .	36
Figura 4 – Diagrama do ECI. Fonte: Material de apoio de Mecânica do Voo . . . .	37
Figura 5 – GAMSAT-1. Fonte: Gama Cubedesign . . . . .	37
Figura 6 – Sistema de referência orbital local. Fonte: SILVA(2016) . . . . .	38
Figura 7 – Vista explodida do GAMASAT-1. Fonte: Gama Cubedesign . . . . .	39
Figura 8 – Sistema LVLH. Fonte: CRASSIDIS; JUNKINS (2014) . . . . .	39
Figura 9 – Diagrama do bloco de cinemática de atitude. Fonte: Autor . . . . .	41
Figura 10 – Diagrama do bloco de dinâmica de atitude. Fonte: Autor . . . . .	43
Figura 11 – Diagrama do bloco de atuadores. Fonte: Autor . . . . .	50
Figura 12 – Arranjo de atuadores alinhados com o referencial do corpo. Fonte: KöK (2012) . . . . .	51
Figura 13 – Arranjo piramidal de atuadores. Fonte: KöK (2012) . . . . .	52
Figura 14 – Diagrama do bloco do controlador. Fonte: Autor . . . . .	58
Figura 15 – Diagrama do bloco de estimação de atitude. Fonte: Autor . . . . .	78
Figura 16 – Modelo do ADCS. Fonte: Autor . . . . .	81
Figura 17 – Bloco do Controlador. Fonte: Autor . . . . .	83
Figura 18 – Bloco do Controlador de Apontamento. Fonte: Autor . . . . .	83
Figura 19 – Modelo do Atuador. Fonte: Autor . . . . .	84
Figura 20 – Modelo da Dinâmica. Fonte: Autor . . . . .	85
Figura 21 – Modelo da Cinemática. Fonte: Autor . . . . .	85
Figura 22 – Bloco de conversão de $\omega$ para $q$ . Fonte: Autor . . . . .	86
Figura 23 – Modelo dos Sensores. Fonte: Autor . . . . .	87
Figura 24 – Modelo da determinação de atitude via TRIAD. Fonte: Autor . . . . .	89
Figura 25 – Modelo da estimação de atitude pelo EKF. Fonte: Autor . . . . .	90
Figura 26 – Modelo de atitude pelo UKF. Fonte: Autor . . . . .	91
Figura 27 – Erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	95
Figura 28 – Erro de estimação de atitude dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	97
Figura 29 – ângulo de Euler do erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	98
Figura 30 – Erro de estimação do vetor solar dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	99
Figura 31 – Erro de estimação do vetor magnético dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	100
Figura 32 – Erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	101
Figura 33 – Erro de estimação de atitude dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	103
Figura 34 – ângulo de Euler do erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	104
Figura 35 – Erro de estimação do vetor solar dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	105

Figura 36 – Erro de estimação do vetor magnético dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	106
Figura 37 – Erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	107
Figura 38 – Erro de estimação de atitude dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	109
Figura 39 – ângulo de Euler do erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	110
Figura 40 – Erro de estimação do vetos solar dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	111
Figura 41 – Erro de estimação do vetor magnético dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	112
Figura 42 – Erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	113
Figura 43 – Erro de estimação de atitude dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	115
Figura 44 – ângulo de Euler do erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	116
Figura 45 – Erro de estimação do vetor solar dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	117
Figura 46 – Erro de estimação do vetor magnético dos filtros. Fonte: Autor . . . . .	118
Figura 47 – Tempo de processamento do EKF. Fonte: Autor . . . . .	119
Figura 48 – Tempo de processamento do UKF. Fonte: Autor . . . . .	120
Figura 49 – Estimação dos filtros da atitude. Fonte: Autor . . . . .	121
Figura 50 – Estimação dos filtros do viés. Fonte: Autor . . . . .	122
Figura 51 – Estimação dos filtros da atitude. Fonte: Autor . . . . .	124
Figura 52 – Erro de atitude em ângulos de Euler. Fonte: Autor . . . . .	125
Figura 53 – Componente vetorial do quatérnion de erro. Fonte: Autor . . . . .	126

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Separação dos cenários simulados de acordo com os sensores. Fonte: Autor . . . . .	93
Tabela 2 – Média ao longo do tempo do erro RMS dos filtros no cenário A. Fonte: Autor . . . . .	96
Tabela 3 – Média ao longo do tempo do erro de atitude RMS dos filtros no cenário A. Fonte: Autor . . . . .	96
Tabela 4 – Média ao longo do tempo do erro RMS dos filtros no cenário B. Fonte: Autor . . . . .	102
Tabela 5 – Média ao longo do tempo do erro de atitude RMS dos filtros no cenário B. Fonte: Autor . . . . .	102
Tabela 6 – Média ao longo do tempo do erro RMS dos filtros no cenário C. Fonte: Autor . . . . .	108
Tabela 7 – Média ao longo do tempo do erro de atitude RMS dos filtros no cenário C. Fonte: Autor . . . . .	108
Tabela 8 – Média ao longo do tempo do erro RMS dos filtros no cenário D. Fonte: Autor . . . . .	114
Tabela 9 – Média ao longo do tempo do erro de atitude RMS dos filtros no cenário D. Fonte: Autor . . . . .	114
Tabela 10 – Comparação das médias ao longo do tempo do erro RMS dos filtros nos 4 cenários. Fonte: Autor . . . . .	127





# Lista de abreviaturas e siglas

ADCS	<i>Attitude Determination and Control System</i>
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>
BLDC	<i>Brushless Direct Current</i>
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
GCD	Gama Cube Design
ECEF	<i>Earth-Centered/Earth-Fixed</i>
LVLH	<i>Local-Vertical/Local-Horizontal</i>
ECI	<i>Earth-Centered-Inertial</i>
PDF	<i>Probability Density Function</i>



# Lista de símbolos

$q$	Representação em quaternions da atitude do satélite
$T$	Período amostral
$k$	Índice de tempo discreto
$x$	Vetor de estados
$x_0$	Vetor de estados inicial
$x_k$	Vetor de estados no instante $k$
$\hat{x}_k$	Estimação do vetor de estados no instante $k$
$\hat{x}_0$	Estimação do vetor de estados no instante inicial
$\hat{x}_k^-$	Estimação do vetor de estados no instante $k$ a priori da medição dos sensores propagado pela dinâmica do sistema
$\hat{x}_k^+$	Estimação do vetor de estados no instante $k$ a posteriori da medição dos sensores
$P$	Matriz de covariância do erro de estimação
$P_0$	Matriz de covariância do erro de estimação inicial
$P_k$	V Matriz de covariância do erro de estimação no instante $k$
$\hat{P}_k$	Estimação da matriz de covariância do erro de estimação no instante $k$
$\hat{P}_0$	Estimação da matriz de covariância do erro de estimação no instante inicial
$\hat{P}_k^-$	Estimação da matriz de covariância do erro de estimação no instante $k$ a priori da medição dos sensores propagado pela dinâmica do sistema
$P_y$	Matriz de covariância do erro de estimação para o UKF item $[P_{xy}]$ Matriz de covariância cruzada para o UKF
$K_k$	Ganho de Kalman para a estimação a posteriori da medição
$\hat{x}_k^+$	Estimação da matriz de covariância do erro de estimação no instante $k$ a posteriori da medição dos sensores
$x^{(i)}$	Estados selecionados pela relação de pontos sigma

$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}$	Vetor para propagação dos pontos sigma
$\boldsymbol{\omega}$	Vetor de velocidades angulares no referencial do corpo
$\hat{\boldsymbol{\omega}}$	Estimação do vetor de velocidades angulares no referencial do corpo
$\boldsymbol{\omega}_m$	Vetor de velocidades angulares medido pelo giroscópio
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor de viés do giroscópio
$\Phi_k$	Matriz de transição de estados para o instante $k$
$\mathbf{w}_{d,k-1}$	Vetor de ruído branco associado a transição de estados para o instante $k$
$\mathbf{Q}$	Matriz de covariância do processo dinâmico do sistema
$\mathbf{Q}_k$	Matriz de covariância do processo de transição de estados para o instante $k$
$\mathbf{D}$	Matriz de cosseno de direção
$\mathbf{D}(\mathbf{q})$	Matriz de cosseno de direção representada em quatérnions
$\hat{\mathbf{S}}_v$	Vetor correspondente a posição do sol no referencial do corpo, chamado de vetor solar
$\hat{\mathbf{S}}_{v,k}$	Vetor solar no referencial do corpo instante $k$
$\hat{\mathbf{S}}_u$	Vetor correspondente a posição do sol no referencial inercial
$\hat{\mathbf{S}}_{u,k}$	Vetor solar no referencial inercial instante $k$
$\hat{\mathbf{M}}_v$	Vetor correspondente a posição do polo norte geográfico, sul magnético, da terra no referencial do corpo, chamado de vetor magnético
$\hat{\mathbf{M}}_{v,k}$	Vetor magnético no referencial do corpo no instante $k$
$\hat{\mathbf{M}}_u$	Vetor correspondente a posição do polo norte geográfico, sul magnético, da terra no no referencial inercial
$\hat{\mathbf{M}}_{u,k}$	Vetor magnético no referencial inercial no instante $k$
$\mathbf{v}_k$	Vetor de ruído branco associado a transição medição do vetor solar e do vetor do campo magnético
$\mathbf{R}$	Matriz de covariância do processo dinâmico de medição do vetor magnético e do vetor solar

$\mathbf{R}_k$	Matriz de covariância do processo de medição do vetor magnético e do vetor solar para o instante $k$
$J_r$	Momento de inércia da roda de reação
$\mathbf{H}_{a,i}$	Momento angular da roda de reação $i$ item $[\mathbf{H}_a]$ Momento angular resultante das rodas de reação
$\mathbf{H}_b$	Momento angular total do satélite
$\mathbf{T}_{a,i}$	Torque do atuador $i$
$\mathbf{T}_a$	Torque resultante de atuação
$\mathbf{T}_p$	Torque do gerado por perturbações
$\mathbf{T}_c$	Torque do controlador
$\boldsymbol{\omega}_{a,i}$	Velocidade angular do atuador $i$
$\mathbf{L}$	Matriz de distribuição dos torques dos atuadores
$\mathbf{J}$	Matriz de momentos de inércia do corpo



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>27</b>
1.1	Objetivo Geral	28
1.2	Objetivos Específicos	29
1.3	Metodologia	29
1.4	Justificativa	30
1.5	Organização do Trabalho	30
<b>2</b>	<b>CARACTERIZAÇÃO DO SATÉLITE QUE EMBARCA O SISTEMA DE ADCS</b>	<b>33</b>
2.1	GAMASAT-1	33
2.2	GAMASAT-2	34
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>35</b>
3.1	Representação de Atitude	35
3.1.1	Sistemas de referência utilizados	36
3.1.1.1	Sistema de referência equatorial Terrestre	36
3.1.1.2	Sistema de referência de atitude fixo no satélite	37
3.2	Sistema de referência para a atitude	39
3.2.1	Representação de atitude em quatérnions	40
3.3	Cinemática de atitude	41
3.4	Dinâmica de atitude	43
3.5	Sensores para a estimação e controle em malha fechada	44
3.5.1	Módulo do Sensor Inercial	44
3.5.2	Giroscópio	44
3.5.3	Inclusão do ruído do giroscópio no modelo	45
3.5.4	Sensores de atitude	46
3.5.4.1	Magnetômetro	47
3.5.4.2	Sensor Solar	47
3.6	Modelo de Medidas	48
3.7	Atuadores de atitude	49
<b>4</b>	<b>CONTROLE DE ATITUDE</b>	<b>55</b>
4.1	Controlador	55
<b>5</b>	<b>MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE ATITUDE</b>	<b>59</b>
5.1	Filtro de Kalman	59

<b>5.2</b>	<b>Filtro de Kalman Estendido</b>	<b>61</b>
5.2.1	Filtro de Kalman Estendido aplicado a determinação de atitude	63
<b>5.3</b>	<b>Filtro de Kalman <i>Unscented</i></b>	<b>66</b>
5.3.1	Propagação da média em sistemas não lineares	66
5.3.2	Propagação da covariância em sistemas não lineares	68
5.3.3	Transformação <i>Unscented</i>	69
5.3.3.1	Aproximação da média e da covariância pela transformação <i>unscented</i>	69
5.3.4	Implementação do Filtro de Kalman <i>Unscented</i>	72
5.3.5	Filtro de Kalman <i>Unscented</i> aplicado a determinação de atitude	75
<b>5.4</b>	<b>Comparação teórica entre os filtros</b>	<b>79</b>
<b>6</b>	<b>MODELO DA SIMULAÇÃO</b>	<b>81</b>
<b>6.1</b>	<b>Bloco do Controlador</b>	<b>82</b>
<b>6.2</b>	<b>Bloco do Atuador</b>	<b>84</b>
<b>6.3</b>	<b>Bloco de Dinâmica</b>	<b>84</b>
<b>6.4</b>	<b>Bloco de Cinemática</b>	<b>85</b>
<b>6.5</b>	<b>Bloco dos Sensores</b>	<b>86</b>
6.5.1	Caracterização dos sensores disponíveis	87
6.5.1.1	Sensores de luminosidade	87
6.5.1.2	Magnetômetro e giroscópio	88
<b>6.6</b>	<b>Bloco da TRIAD</b>	<b>88</b>
<b>6.7</b>	<b>Bloco do Filtro de Kalman Estendido</b>	<b>89</b>
<b>6.8</b>	<b>Bloco do Filtro de Kalman <i>Unscented</i></b>	<b>90</b>
<b>7</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>93</b>
<b>7.1</b>	<b>Cenário A - Variâncias máximas</b>	<b>94</b>
7.1.1	Erro dos estados	94
7.1.2	Erro de atitude	96
7.1.3	Erro de previsão do vetor de medidas e resíduos	99
<b>7.2</b>	<b>Cenário B - Variâncias máximas de atitude e mínima de giro</b>	<b>100</b>
7.2.1	Erro dos estados	100
7.2.2	Erro de atitude	102
7.2.3	Erro de previsão do vetor de medidas e resíduos	105
<b>7.3</b>	<b>Cenário C - Variâncias máximas de giro e mínimas de atitude</b>	<b>106</b>
7.3.1	Erro dos estados	106
7.3.2	Erro de atitude	108
7.3.3	Erro de previsão do vetor de medidas e resíduos	111
<b>7.4</b>	<b>Cenário D - Variâncias máximas de giro e mínimas de atitude</b>	<b>112</b>
7.4.1	Erro dos estados	112
7.4.2	Erro de atitude	114



7.4.3	Erro de previsão do vetor de medidas e resíduos . . . . .	117
<b>7.5</b>	<b>Carga computacional . . . . .</b>	<b>118</b>
<b>7.6</b>	<b>Sensibilidade à inicialização . . . . .</b>	<b>120</b>
<b>7.7</b>	<b>Efeito da integração do estimador no controlador . . . . .</b>	<b>123</b>
7.7.1	Atitude . . . . .	123
7.7.2	Erro de atitude em ângulos de Euler . . . . .	124
7.7.3	Erro de atitude pela parte vetorial do quatérnion de erro . . . . .	125
<b>8</b>	<b>DISCUSSÃO . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>8.1</b>	<b>Estimação de atitude . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>8.2</b>	<b>Controlador . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>9</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>129</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>131</b>
	<b>ANEXOS . . . . .</b>	<b>133</b>
	<b>ANEXO A – FUNÇÕES DO MATLAB UTILIZADAS . . . . .</b>	<b>135</b>
<b>A.1</b>	<b>Inicialização . . . . .</b>	<b>135</b>
<b>A.2</b>	<b>Conversão de ângulos de Euler para quatérnions . . . . .</b>	<b>140</b>
<b>A.3</b>	<b>Controlador . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>A.4</b>	<b>TRIAD . . . . .</b>	<b>142</b>
<b>A.5</b>	<b>EKF . . . . .</b>	<b>144</b>
<b>A.6</b>	<b>UKF . . . . .</b>	<b>147</b>



# 1 Introdução

Com o avanço das tecnologias, o poder computacional, assim como a eficiência energética dos microprocessadores tem aumentado (IYER et al., 2021), possibilitando o uso de modelos cada vez mais pesados computacionalmente a fim de reduzir os sistemas físicos e melhorar os modelos utilizados. Essa estratégia é especialmente vantajosa em sistemas espaciais, em que os custos de lançamento estão diretamente associados à massa.

Tendo isso em vista, uma possível área de melhoria é no método de determinação de atitude, com a utilização de filtros digitais computacionalmente mais pesados, porém mais acurados, trazendo a possibilidade do uso de sensores mais simples e leves, assim como a possibilidade de redução de consumo de energia com chips mais eficientes de processamento. E mesmo que se opte pelo uso dos mesmos sensores, perdendo-se a possível vantagem de redução da massa, a determinação de atitude deve ser mais acurada, trazendo mais benefícios para diversas missões.

O sistema de determinação e controle de atitude (ADCS da sigla em inglês: *Attitude Determination and Control System*), é crítico para o funcionamento de diversas missões espaciais, uma vez que ele é responsável por manter o satélite orientado corretamente, aspecto crítico em diversas missões de sensoriamento remoto assim como de comunicação, com a necessidade de sensores ou antenas para alvos desejados. Em missões maiores, sistemas de ajuste mecânico nos sensores e antenas para o controle fino de apontamento são viáveis, uma vez que seria necessária mais energia para movimentar todo o satélite para um ajuste fino no apontamento do sensor, assim existem diferentes requisitos tanto na determinação quanto no controle de atitude de acordo com as missões.

Apesar dos diferentes requisitos para o controle de atitude, qualquer sistema deve se beneficiar de uma determinação de atitude mais acurada. Até mesmo uma missão sem requisitos de apontamento, como por exemplo a missão Nanosat-C-BR 1, projetada para o estudo do campo magnético da Terra por meio de sua medição em órbita, assim como validação dos sistemas no espaço e capacitação de pessoal (SCHUCH et al., 2019), possuir os dados de orientação do satélite permitiria a realização de um mapeamento mais acurado, sabendo-se a orientação do satélite, dos sensores e as tendências não isotrópicas do sensor.

Uma vez que a determinação de atitude é feita com o uso de sensores, cujas medições sempre incluem certo ruído, filtros estocásticos são abordagens mais adequadas para estimar ao invés de determinar a atitude, com o Filtro de Kalman sendo o filtro ótimo para a estimação de estados para sistemas lineares com ruído branco, e o melhor filtro linear para estimação de estados em sistemas não lineares (SIMON, 2006). Porém,

o sistema associado a cinemática de atitude e às medições de atitude não são lineares, assim variações do filtro de Kalman foram desenvolvidas como alternativas para a estimação nesses sistemas, com grande popularidade do Filtro de Kalman Estendido (EKF da sigla em inglês) em aplicações em satélites, uma vez que a dinâmica desses sistemas é não linear, sendo aplicado por meio de linearizações em torno das estimações para a propagação da covariância.

Assim, apesar dos diferentes requisitos de controle de diferentes missões de variados portes, a determinação de atitude acurada é universalmente útil, sendo ela o foco desse trabalho, a fim de determinar quando a utilização de um modelo mais pesado computacionalmente, porém mais acurado, no caso o UKF, um modelo que melhor aproxima a propagação da média e covariância do sistema, se mostra unilateralmente benéfico em relação ao EKF, com apenas uma aproximação linear de ambos.

O EKF utiliza da dinâmica não linear do sistema para a previsão dos estados, assim a vantagem desse filtro é ser mais acurado em relação a filtros lineares na previsão do estado, e ser computacionalmente mais leve em relação a filtros que propagam os momentos (média como o momento central de primeira ordem e covariância como o momento não central de segunda ordem) de forma não linear. O UKF, além de usar como base a dinâmica não linear, propaga os parâmetros estocásticos de forma mais fiel a dinâmica não linear, com aproximações da covariância do erro de estimação até o termo de quarta ordem da série de Taylor (SIMON, 2006) com a propagação da média por meio da propagação de pontos sigma pela mesma dinâmica não linear do sistema, comparado a aproximação linear do EKF para a média e covariância do erro de estimação.

Vale ressaltar alguns detalhes associados a comparação entre performance e custo computacional. É possível se otimizar os algoritmos para se obter performances melhores em ambos os filtros, com diversas variações dos filtros, sejam elas voltadas a acurácia ou velocidade apresentadas por SIMON (2006), como o *Simplex Unscented Kalman Filter*, o *Spherical Unscented Kalman Filter*, o *Hybrid Extended Kalman Filter*, o *Iterated Extended Kalman Filter*, o *Second-ordered Extended Kalman Filter*, entre outros. Foge ao escopo desse trabalho comparar as diferentes variações dos filtros, sendo avaliado o benefício de uma aproximação mais acurada da covariância do erro de estimação em um sistema relativamente simples, como um CubeSat com diferentes tipos de sensores no mesmo tipo de sistema.

## 1.1 Objetivo Geral

Para o mesmo sistema de controle, sensores, ruído nos sensores, e modelo da dinâmica do satélite, as vantagens e desvantagens de ambos os filtros na determinação de atitude devem ser quantizadas a fim de identificar quando deve ser implementado um

UKF ao invés de um EKF. O desempenho de estimação, os benefícios acarretados no sistema de controle, e o peso computacional devem ser quantificados e comparados a fim de quantificar os *tradeoffs* de um filtro em relação ao outro e auxiliar na escolha do método de estimação para diferentes missões.

## 1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos para atingir o objetivo geral são:

- Justificar teoricamente e comparar via simulação a acurácia e precisão da estimação de estados por UKF assim como seu custo computacional em relação ao EKF;
- Adaptar as simulações de um sistema em malha aberta com determinação de atitude por EKF e UKF para um sistema com controle em malha fechada, utilizando um controlador padrão, a fim de identificar se há benefícios de uma estimação mais acurada nos parâmetros de controle, como o erro em regime permanente, o sobressinal, e os tempos de atraso e pico. Esses parâmetros serão utilizados como base para o comportamento do controlador no sistema com e sem a inclusão de erros de medição para a determinação de atitude;
- Comparar os resultados de estimação com o estado real (sem ruído) para comparar o desempenho com o uso do UKF e do EKF;
- Comparar os tempos de processamento para ambos os filtros a fim de quantificar o custo computacional relativo de processamento dos filtros.

## 1.3 Metodologia

Por revisão bibliográfica será justificada a hipótese teórica de desempenho melhor às custas de um processamento mais pesado do UKF em relação ao EKF, que será testada via simulação a fim de quantificar as vantagens e desvantagens, para servir como base para escolha de um dos filtros em relação ao outro dados os requisitos de missão.

As simulações serão feitas via MATLAB, adaptando os trabalhos realizados por [SILVA et al. \(2016, 2022\)](#), modificando o caso de medição dos estados de um sistema passivo para um sistema de controle ativo em malha fechada, implementado no Simulink, baseado no trabalho de [AGUIAR et al.\(2021\)](#), com um controlador PD adaptado a quaternions de [FRESK; NIKOLAKOPOULOS \(2013\)](#), e como atuador, 3 rodas de reação alinhadas com os eixos do satélite controladas por um ESC (*Electronic Speed Controller*), que deve fazer o ajuste da variação da velocidade angular dos motores brushless-DC (BLDC) via PWM (*Pulse Width Modulation*).

Para comparação entre os filtros será medido o erro de estimação pela diferença entre o sinal real, calculado via TRIAD sem ruído, e a estimação dos filtros, com a atitude convertida de quatérnions para ângulos de Euler a fim de facilitar a interpretação do erro de atitude.

## 1.4 Justificativa

Como levantado na introdução, temos, por um lado, que o poder de processamento de microprocessadores tem aumentado, enquanto que suas dimensões e consumo tem diminuído, e, por outro lado, temos técnicas de estimação mais precisas que vem ao custo de seu peso computacional. Nesse contexto é importante avaliar se para a tecnologia atual o *tradeoff* de acurácia e peso computacional favorece outros métodos de estimação em determinadas aplicações. O contexto em questão é o método de determinação de atitude, sendo que o mais popular para aplicações espaciais é o EKF.

Assim, existe a possibilidade de melhoria com a implementação de filtros não lineares, porém o *tradeoff* entre o tempo de processamento, o consumo, e os benefícios quanto a precisão da estimação deve ser avaliado, especialmente em missões de pequeno porte, com pequenas reservas de energia, áreas para geração de energia solar menores e menos espaço físico para sistemas mais complexos são fatores limitantes que incentivam o uso de EKF nessas aplicações.

## 1.5 Organização do Trabalho

As próximas seções desse trabalho são divididas nos seguintes capítulos:

- O capítulo 2 trata do detalhamento do satélite utilizado como base para a simulação e no qual a estimação de atitude e controle em quatérnions são um diferencial proposto;
- O capítulo 3 trata da fundamentação teórica, estando dividido em:
  - Representação de Atitude: Trata dos sistemas de referência para a representação da atitude;
  - Cinemática de Atitude: Trata da relação entre a velocidade angular do satélite e sua atitude assim como a discretização dessa relação para implementação nos filtros;
  - Dinâmica de Atitude: Se trata da dinâmica para a modelagem do sistema na simulação, descrevendo como os atuadores e outros torques influenciam na atitude;

- Sensores para a estimação e controle em malha fechada: Trata dos sensores utilizados tanto para a previsão de estados no filtro, quanto para a determinação de atitude, descrevendo o que é medido, qual o tipo de erro esperado e como o sensor é modelado;
  - Modelo de medidas: Trata de como se espera que, para dada configuração do sistema, os vetores de atitude sejam medidos;
  - Atuadores de atitude: Trata de como o sinal de controle é convertido em um torque de atuação.
- O capítulo 4 trata do método de controle assim como do projeto do controlador;
  - O capítulo 5, que trata dos Métodos de Estimação de atitude, está subdividido em:
    - Filtro de Kalman: Trata do filtro de Kalman aplicado a sistemas lineares, como base para introduzir as variações para sistemas não lineares;
    - *Extended Kalman Filter* - EKF: Trata da teoria e da modelagem do filtro;
    - *Unscented Kalman Filter* - UKF: Trata da teoria e da modelagem do filtro, assim como da justificativa para o melhor desempenho esperado do UKF;
    - Comparação teórica entre os filtros: Trata da expectativa para o desempenho dos filtros a partir das demonstrações matemáticas realizadas.
  - O capítulo 6 trata da implementação das equações apresentadas nos capítulos anteriores na simulação, detalhando todos os subsistemas de ADCS;
  - O capítulo 7 apresenta os gráficos e tabelas referentes ao desempenho dos estimadores para diferentes cenários representando o uso de diferentes sensores, assim como com uma inicialização ruim, e o efeito dos estimadores no controlador;
  - O capítulo 8 trata da discussão dos resultados obtidos, detalhando o que ocorreu como esperado e apresentando possíveis justificativas para os resultados que não se alinharam com as expectativas.





## 2 Caracterização do satélite que embarca o sistema de ADCS

Como mencionado anteriormente, o projeto adaptado para a inclusão desse sistema de estimação de atitude é o GAMASAT-1, da equipe de competição Gama Cube Design, motivado pela competição CubeDesign do INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais). Nesse capítulo o sistema será caracterizado de acordo com seu projeto.

### 2.1 GAMASAT-1

O GAMASAT-1 é um satélite de mesa, ou seja, sua missão é apenas de aquisição de dados por meio de testes, sem um lançamento real, porém, seu projeto foi feito com uma missão espacial em mente, cujos objetivos são o monitoramento de óleo em praias brasileiras, o monitoramento de áreas de risco de barragem, e o monitoramento de áreas de risco de inundações (GONÇALVES; TORRES, 2021), sendo utilizadas para o modelo físico do controle as dimensões padronizadas para um CubeSat 1U, de 10cm de aresta nas dimensões  $x$  e  $y$ , e 11,35cm de aresta na dimensão  $z$ , com massa máxima de 1,33 Kg e centro de massa deslocado em até 2cm do centro geométrico, sendo sua estrutura composta de Alumínio 7071, Alumínio 7075, Alumínio 6061, Alumínio 5005 e/ou Alumínio 5052, com a geometria escolhida para o GAMASAT-1 mostrada na figura 1:

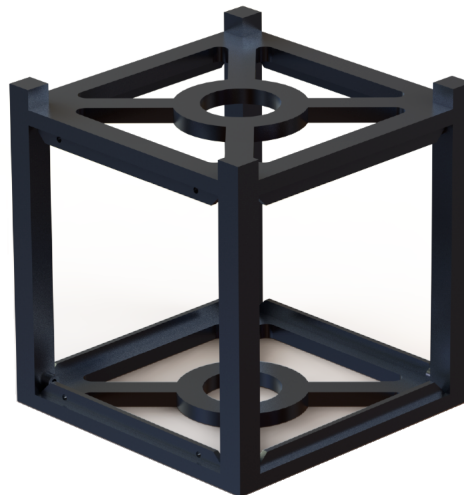


Figura 1 – Estrutura do GAMASAT-1. Fonte: GONÇALVES; TORRES(2021)

Assim, o tensor de inércia foi obtido após a modelagem 3D do sistema completo em *Solid Works*, que pode ser vista na figura 7, sendo utilizado o valor de  $\mathbf{J} = 0.022\mathbf{I} \text{ kg m}^2$  para o tensor de inércia, e no núcleo de controle o momento de inércia definido para a roda de reação é  $J_r = 3 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$ .

## 2.2 GAMASAT-2

O GAMASAT-2, inicialmente proposto por [GONÇALVES; TORRES \(2021\)](#), a fim de otimizar a estrutura do GAMASAT-1, ainda como um projeto 1U, sem alteração na missão, ainda está em fase conceitual, e sujeito a mudanças de acordo com as melhorias propostas por cada núcleo, sendo provável que, a fim de acomodar todas as propostas para tornar o projeto teórico mais compatível com a missão, o projeto seja alterado para um 3U, ou seja, um arranjo equivalente a 3 CubeSats 1U conectados no eixo  $z$  em termos de volume, tendo um limite de massa proporcionalmente maior. Esse trabalho trata de uma possível melhoria no ADCS, aprimorando o sistema de controle para atuação em três eixos, assim como adicionando um estimador de atitude, e realizando o controle em quatérnions, criando uma ferramenta para auxiliar na escolha entre os dois métodos de estimação propostos, EKF e UKF.

## 3 Fundamentação Teórica

O diagrama de blocos para a descrição do sistema modelado é apresentado na figura 2, composto pelos blocos que representam os elementos físicos do sistema, como o controlador, o atuador, e o estimador de atitude, assim como blocos responsáveis por simular as leis físicas para simular o comportamento do sistema: a dinâmica e a cinemática.

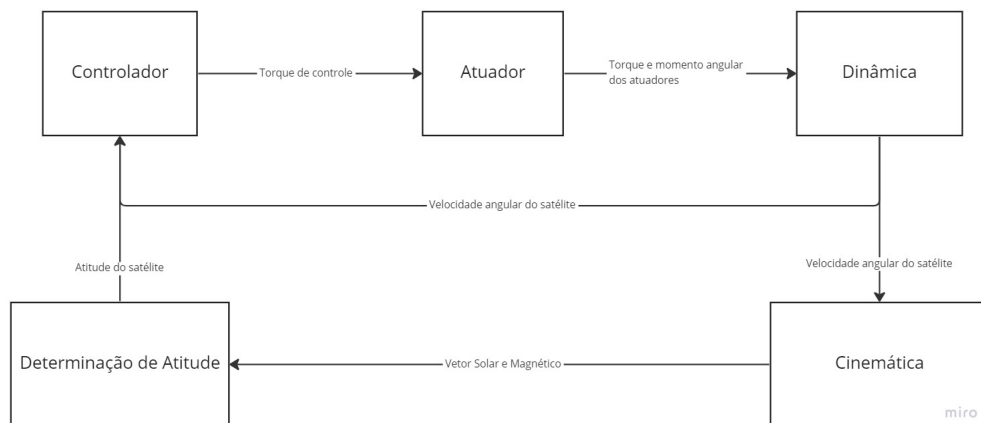


Figura 2 – Diagrama de blocos do ADCS. Fonte: Autor

A modelagem do sistema foi realizada pelo núcleo de controle da equipe de competição de cubesats Gama Cube Design, por meio de modificações no modelo disponibilizado pelo INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) na competição CubeDesign de 2020 (CUBEDESIGN..., 2020), a fim de melhor descrever o projeto sendo desenvolvido. Esse trabalho visa construir uma base para outro aprimoramento do modelo, adicionando ruído aos sensores, métodos de estimação em quatérnions, e controle de atitude, também em quatérnions.

Neste capítulo, a base teórica para os blocos referentes ao atuador, à dinâmica, e à cinemática será apresentada, assim como a base de modelagem com a dinâmica discretizada para a implementação dos filtros de Kalman.

### 3.1 Representação de Atitude

Para os fins desse trabalho, a dinâmica orbital não é de grande influência, uma vez que o processo de determinação e controle da atitude do satélite deve se dar em questão de segundos, não havendo chance de uma grande variação dos parâmetros orbitais na maioria das aplicações, assim tendo baixa influência na atitude em curtos períodos de simulação.

A dinâmica de atitude, por outro lado, possui uma grande influência nos resultados do ADCS, uma vez que seu modelo será utilizado para a previsão dos estados do filtro de Kalman, tanto para o EKF quanto para o UKF (com algumas diferenças).

### 3.1.1 Sistemas de referência utilizados

Antes de justificar a escolha do sistema de referência escolhido, é relevante se apresentar quais os referenciais utilizados. De forma geral, um referencial é um sistema de coordenadas especificado pela posição de sua origem e orientação de seus eixos no espaço, sendo a orientação do sistema o fator mais relevante para a análise de atitude, de acordo com [CRASSIDIS; JUNKINS\(2014\)](#).

#### 3.1.1.1 Sistema de referência equatorial Terrestre

Para o referencial da Terra, é comum a utilização do ECEF (*Earth-Centered/Earth-Fixed*), com a origem do sistema no centro da Terra, o eixo  $z$  alinhado com a rotação da Terra, com os eixos  $x$  e  $y$  no plano do equador, com  $x$  passando pela latitude de  $0^\circ$  e longitude de  $0^\circ$ , com o eixo  $y$  completando o sistema de referência seguindo a regra da mão direita, como mostrado na figura 3.

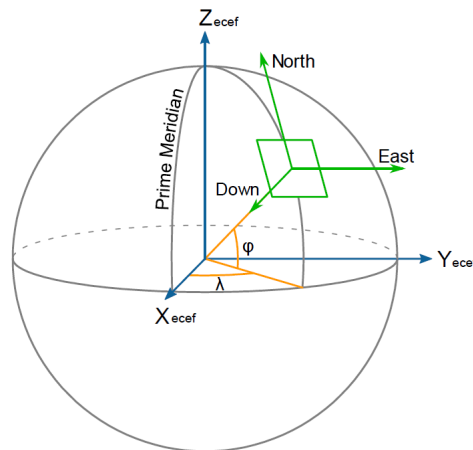


Figura 3 – Diagrama do ECEF. Fonte: Material de apoio de Mecânica do Voo

Conhecendo-se um par de vetores em ambos os referenciais é possível estimar a posição de um referencial em relação ao outro de diversas formas, como a matriz de direção de cossenos, ângulos de Euler, quatérnions, entre outros, de forma a descrever a rotação necessária para alinhar uma referência a outra.

Como Referencial Inercial é utilizado o sistema ECI (*Earth Centered Inertial*), mostrado na figura 4. De forma semelhante ao ECEF, o eixo  $z$  é alinhado com a rotação da Terra, porém, a fim de se manter um referencial inercial, diferentemente do ECEF esse sistema não gira com a Terra, e o apontamento do eixo  $x$  é definido como a estrela fixa

distante equinócio vernal ( $\gamma$ ) ou à constelação de Áries fixada no primeiro de janeiro de 2000 às 12 00 GMT ou J 2000, porém outros instantes podem ser escolhidos para um referencial inercial centrado na terra, sendo muito utilizado o próprio ECEF no instante inicial da simulação ou decolagem.

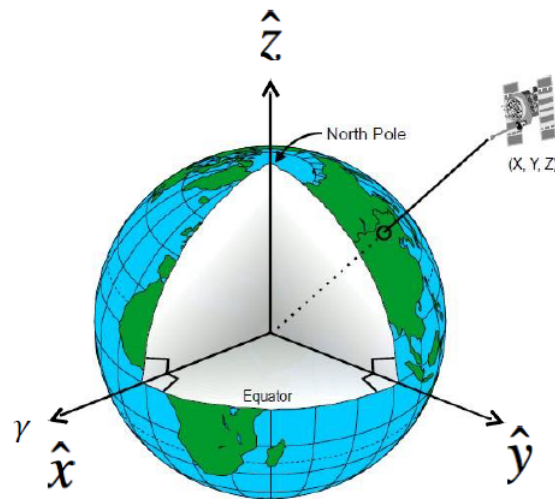


Figura 4 – Diagrama do ECI. Fonte: Material de apoio de Mecânica do Voo

### 3.1.1.2 Sistema de referência de atitude fixo no satélite

Para o sistema de referência de atitude, nesse caso o referencial do corpo, um sistema de coordenadas fixo no seu centro de gravidade é escolhido, com eixos normais as faces do satélite, mostrado na figura 5:

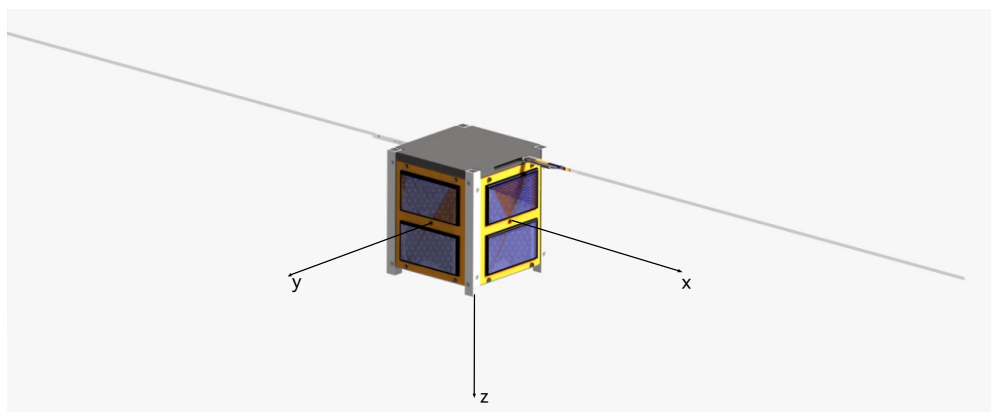


Figura 5 – GAMSAT-1. Fonte: Gama Cubedesign

Esse referencial é o referencial em que os sensores medem seus dados, com o eixo  $z$  escolhido como a face da câmera, oposta a face das antenas, e os eixos  $x$  e  $y$  seguem pela regra da mão direita e normais a duas faces, com o eixo  $x$  paralelo as antenas e o eixo  $y$  normal a elas. Dessa forma, com uma missão de imageamento, seria desejado se manter o eixo  $z$  apontado para o centro da Terra, o eixo  $x$  deve ser tangencial a órbita e o eixo  $y$

segue pela regra da mão direita, como pode ser visto na figura 6, sendo essa a orientação desejada na maior parte do tempo para o sistema do corpo do satélite em uma missão de imageamento.

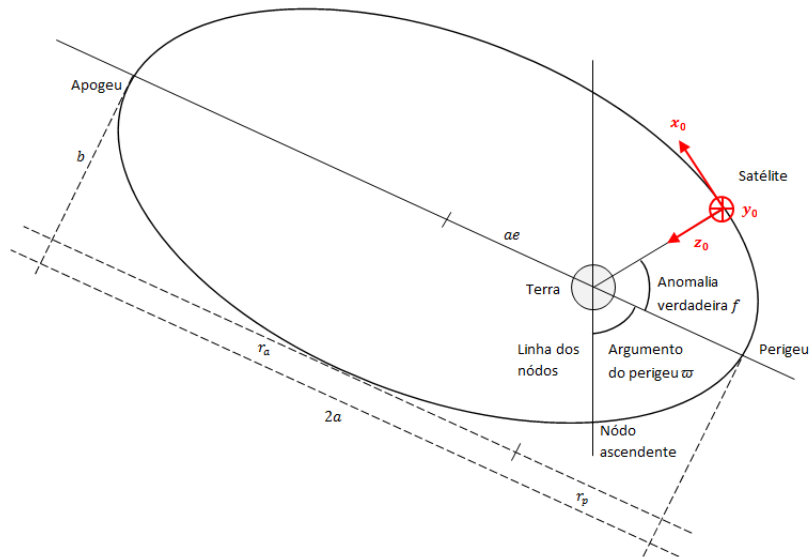


Figura 6 – Sistema de referência orbital local. Fonte: SILVA(2016)

Para uma missão de observação da Terra seria desejado se manter a orientação mostrada na figura 6, de forma a manter a câmera apontada para o centro da Terra e um mesmo alinhamento para as imagens, visando a facilitar a criação de mosaicos com as imagens. Porém, a estimação orbital e a simulação de uma órbita completa fogem ao escopo desse trabalho. Para a comparação dos métodos de estimação e sistema de controle de atitude, uma simulação de segundos, considerando os a posição relativa do sol, do norte, e do satélite em relação a Terra constantes.

Esse modelo 1U (cubo de aresta de 10cm de acordo com a norma ISO 19683 de 2017) foi projetado apenas para controle em um eixo, com possibilidade de estimação em três. Para fim de modelagem serão utilizados os dados referentes ao GAMASAT-1, porém, para a implementação considerando-se o espaço interno, para o controle em três eixos provavelmente seria necessário um arranjo 3U (três satélites 1U empilhados como um satélite), devido ao espaço limitado para os componentes para uma missão, como pode ser visto na figura 7.

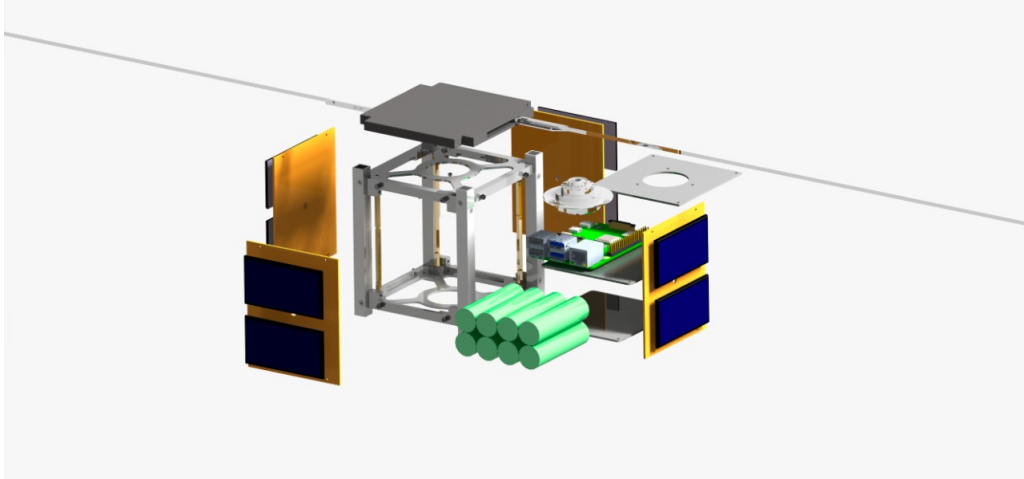


Figura 7 – Vista explodida do GAMASAT-1. Fonte: Gama Cubedesign

### 3.2 Sistema de referência para a atitude

Um referencial útil para missões de imageamento é o LVLH (*Local-Vertical/Local-Horizontal*), uma vez que seu eixo  $z$  ( $\mathbf{O}_3$ ) está apontado para o nadir, seu eixo  $y$  ( $\mathbf{O}_2$ ) aponta na direção oposta ao vetor de velocidade angular, e o eixo  $x$  ( $\mathbf{O}_1$ ) é definido pela regra da mão direita, como pode ser visto na figura 8. Assim o alinhamento das imagens do satélite se mantém, facilitando a criação de mosaicos e a aquisição de dados não redundantes.

Em um sistema real, o vetor magnético e o solar podem ser medidos no ECI com erro desprezível, e pela matriz de rotação do ECI para o LVLH é definido o vetor solar e o magnético nesse referencial, e comparando-os com o vetor solar e o magnético no corpo é possível se calcular a rotação necessária para se atingir o alinhamento desejado. Para o cálculo do erro do estimador, o TRIAD é utilizado para determinar a atitude conhecendo-se perfeitamente o vetor solar e o magnético no referencial fixo no corpo, determinando a matriz de cossenos de direção, e por meio dela os quatérnions associados a atitude.

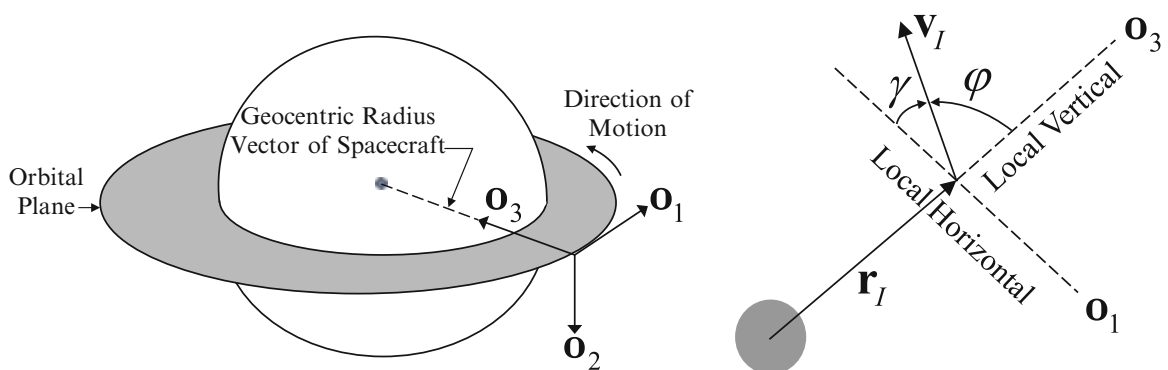


Figura 8 – Sistema LVLH. Fonte: [CRASSIDIS; JUNKINS \(2014\)](#)

A representação dos versores desse sistema em um referencial inercial, como apre-

sentada por [CRASSIDIS; JUNKINS \(2014\)](#), é:

$$\mathbf{o}_{3I} = -\frac{\mathbf{r}_I}{\|\mathbf{r}_I\|} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{o}_{2I} = -\frac{\mathbf{r}_I \times \mathbf{v}_I}{\|\mathbf{r}_I \times \mathbf{v}_I\|} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{o}_{1I} = \mathbf{o}_{2I} \times \mathbf{o}_{3I} \quad (3.3)$$

Em que  $\mathbf{r}_I$  e  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_I$  são a posição e a velocidade do satélite em um referencial inercial, como o ECI, sendo simples de definir a relação com outros referenciais no corpo, pela relação entre os versores do LVLH, e o *flight-path angle* ( $\gamma$ ). Dado o momento angular específico do satélite como  $\mathbf{h}_I = \mathbf{r}_I \times \mathbf{v}_i$ , tem-se  $h = \|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{r}_I\| \|\mathbf{v}_i\| \sin(\varphi) = rv \sin(\varphi)$ , assim, como  $\gamma + \varphi = 90^\circ$ , o *flight-path angle* pode ser calculado pela relação  $\cos(\gamma) = \frac{h}{rv}$  ([CRASSIDIS; JUNKINS, 2014](#)).

Neste trabalho, como não será utilizada a dinâmica orbital, para a definição do referencial é utilizado um vetor solar e um vetor magnético já no referencial LVLH para determinação da orientação relativa do sistema. Devido ao curto tempo de simulação, esses vetores de referência são considerados constantes. Dessa forma, uma possível melhoria no modelo para versões futuras da simulação é a adição de uma função que modele para dados parâmetros orbitais o vetor solar e magnético no referencial ECI, e faça a transição para o LVLH, além da adição das forças associadas aos referenciais orbitais não inerciais.

### 3.2.1 Representação de atitude em quatérnions

Devido ao uso de atuadores em todos os eixos, não há grandes vantagens na utilização da representação em ângulos de Euler para fins de modelagem, principalmente com a desvantagem das singularidades associadas à certas rotações. Assim, será utilizada a representação em quatérnions, por não haverem singularidades e por facilitarem o uso de rotações em torno de eixos arbitrários. Quatérnions são vetores de 4 dimensões, definidos por um vetor tridimensional unitário e um ângulo para a rotação de um sistema inercial para um sinótico em torno desse vetor ([SILVA et al., 2022](#)), e assim, a atitude do satélite pode ser expressada como uma rotação em quatérnions do sistema de referências inercial. Nesse trabalho os quatérnions são definidos como:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^* \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \sin \frac{\zeta}{2} \\ e_2 \sin \frac{\zeta}{2} \\ e_3 \sin \frac{\zeta}{2} \\ \cos \frac{\zeta}{2} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Em que  $\mathbf{q}^* = \mathbf{e} \sin \frac{\zeta}{2}$  e  $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3]^T$ , e  $\mathbf{q}$  satisfaz a relação:



$$\mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (3.5)$$

Como o estado que se deseja controlar é a atitude, representada em quatérnions, seria natural escolhe-los como os estados. Porém, como será apresentado na seção 3.5.3, o ruído associado ao giroscópio não se propaga de maneira linear no sistema, para lidar com isso, como será apresentado no final da seção 5.3.4, o viés do giroscópio é agregado aos estados, sendo ele também estimado devido a sua propagação não linear. Com isso, o vetor de estados pode ser feito com os quatérnions e o viés do giroscópio:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

### 3.3 Cinemática de atitude

A cinemática de atitude relaciona a velocidade angular do satélite e a representação de sua atitude em quatérnions, a fim de calcular os vetores de medição no corpo a partir dos vetores conhecidos no LVLH. Expandindo o bloco apresentado na figura 2, o interior do bloco de cinemática é apresentado na figura 9.

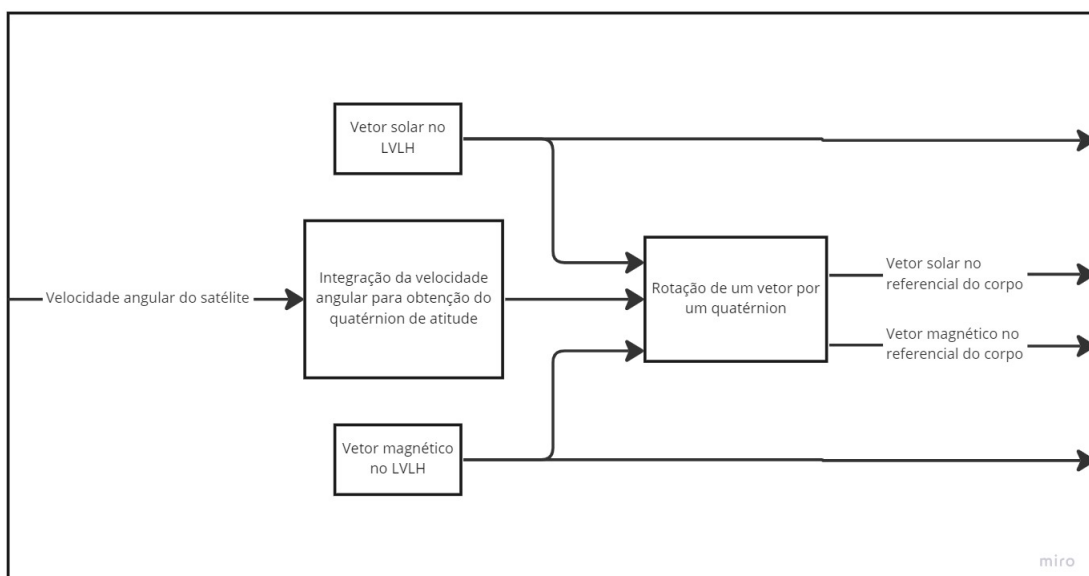


Figura 9 – Diagrama do bloco de cinemática de atitude. Fonte: Autor

Representando-se a velocidade angular do referencial do corpo em relação a um referencial inercial centrado no corpo por  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ , a taxa de variação dos quatérnions pode ser expressada em função das componentes da velocidade angular (CRASSIDIS; JUNKINS, 2014):

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_\omega \mathbf{q} \quad (3.7)$$

A equação 3.7 é utilizada no bloco de integração da velocidade angular para obtenção do quatérnion de atitude, e a rotação por quatérnions será apresentada na seção 3.6, uma vez que se relaciona com a medição do vetor solar e do vetor magnético no referencial do corpo.

Para finalizar, como a implementação dos filtros necessita de uma discretização da dinâmica do sistema, seria simples realizar uma discretização usual pela relação da derivada com sua contraparte discreta, substituindo-se  $\dot{\mathbf{q}}$  por  $(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})/T$ , com  $T$  sendo o período amostral constante, em que seria obtida a relação  $\mathbf{q}_k = (\mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_\omega T)\mathbf{q}_{k-1}$ , porém essa operação é uma aproximação imprecisa válida apenas para posições muito próximas, cujo ângulo entre os quatérnions associados ao instante  $t$  e  $t + T$  é muito próximo de zero, devido a perda da propriedade associada a norma unitária dos quatérnions ao se somá-os, de forma que, para se manter a norma unitária, a discretização adequada apresentada por WERTZ (1978) é dada por:

$$\mathbf{q}(t + T) = \left( \cos\left(\frac{\Delta\zeta}{2}\right) \mathbf{I} + \text{sen}\left(\frac{\Delta\zeta}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & e_3 & -e_2 & e_1 \\ -e_3 & 0 & e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 & 0 & e_3 \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{q}(t) \quad (3.8)$$

Utilizando a relação de que  $|\boldsymbol{\omega}|T \approx \Delta\zeta$ , a relação para normalização dos vetores na matriz, e utilizando a relação  $\mathbf{q}(t + T) = \mathbf{q}_k$  e  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{k-1}$  é possível reescrever a dinâmica em tempo discreto como:

$$\mathbf{q}_k = \left( \cos\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}|T}{2}\right) \mathbf{I} + \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|} \text{sen}\left(\frac{|\boldsymbol{\omega}|T}{2}\right) \boldsymbol{\Omega}_\omega \right) \mathbf{q}_{k-1} = \boldsymbol{\Theta}(|\boldsymbol{\omega}|, T) \mathbf{q}_{k-1} \quad (3.9)$$

Com essa relação a norma unitária dos quatérnions é garantida, sendo ela utilizada para a previsão dos estados, com certa adaptação para inclusão do erro do giroscópio associado à velocidade angular.

### 3.4 Dinâmica de atitude

A dinâmica de atitude é regida pela interação entre os atuadores de atitude e a cinemática do sistema, simulando a transferência de torque para o satélite e dando sua velocidade angular resultante, como detalhado na expansão do bloco de dinâmica de atitude apresentado na figura 10.

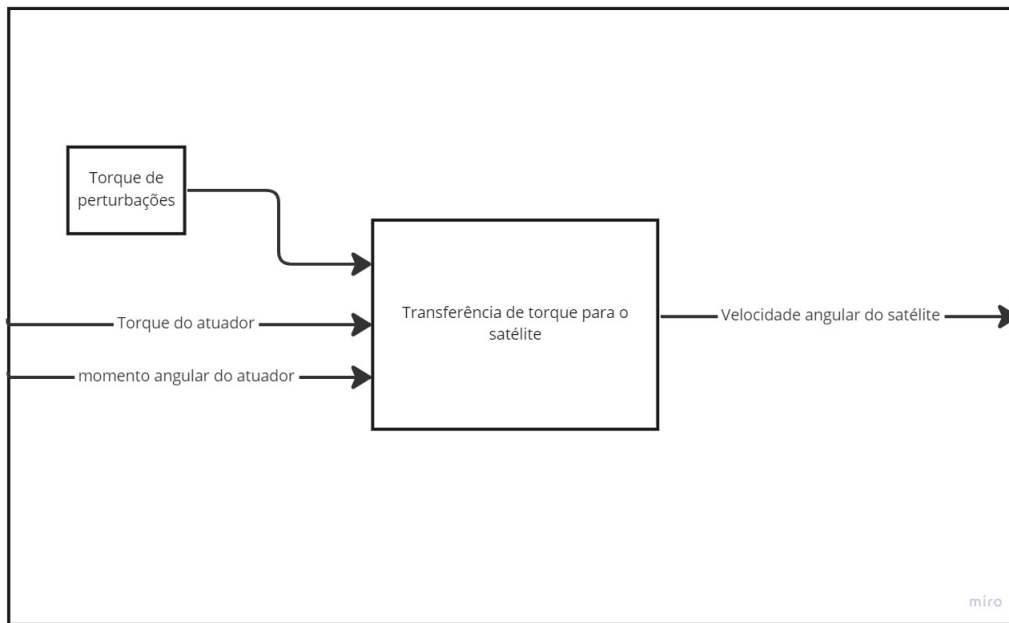


Figura 10 – Diagrama do bloco de dinâmica de atitude. Fonte: Autor

Os atuadores serão apresentados em mais detalhes em sua própria seção, com seu efeito no sistema descrito por um torque de atuação  $\mathbf{T}_a$ , e um momento angular associado aos atuadores  $\mathbf{H}_a$ . Assim, o momento angular total é dado pela soma do momento angular do corpo e dos atuadores:

$$\mathbf{H}_b = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_a \quad (3.10)$$

Em que  $\mathbf{H}_b$  é o momento angular total do sistema, e  $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$  dá o momento angular do satélite, sendo o produto de seu tensor de inércia pela velocidade angular do satélite.

Assim, é possível se chegar no sistema de equações diferenciais que relaciona o torque e momento angular dos atuadores, a partir do equacionamento do torque resultante como a taxa de variação do momento angular resultante computado por dois métodos (equações 3.11 e 3.12):

$$\dot{\mathbf{H}}_b = \left[ \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right]_b = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{H}}_a = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{T}_a \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_b = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_b + \mathbf{T}_p \quad (3.12)$$

$$\dot{\omega} = \mathbf{J}^{-1}[-\omega \times (\mathbf{J}\omega + \mathbf{H}_a) + \mathbf{T}_p - \mathbf{T}_a] \quad (3.13)$$

Em que  $\mathbf{T}_p$  representa torques associados a perturbações. Por fim o torque dos atuadores é dado pelo sinal de controle determinado pelo algoritmo  $P^2$ , que se aproxima de um controlador PD adaptado a quatérnions, assim  $\mathbf{T}_a = -\mathbf{T}_c$ , e a equação pode ser reescrita como:

$$\dot{\omega} = \mathbf{J}^{-1}[-\omega \times (\mathbf{J}\omega + \mathbf{H}_a) + \mathbf{T}_p + \mathbf{T}_c] \quad (3.14)$$

## 3.5 Sensores para a estimação e controle em malha fechada

### 3.5.1 Módulo do Sensor Inercial

O sensor inercial consiste em um módulo contendo um giroscópio, acelerômetro e magnetômetro. Para o ADCS não é necessária a inclusão de um acelerômetro, como será apresentado na seção 3.6, porém, diversos módulos inerciais utilizam o acelerômetro a fim de reduzir o ruído e viés do giroscópio, que é necessário para o modelo. Dessa forma, o acelerômetro não será modelado como um sensor, e seu efeito nas medições será adicionado apenas utilizando o ruído associado ao módulo indicado pelo fornecedor no *datasheet*. O magnetômetro dá o vetor magnético, sendo ele a direção do norte da terra, de forma que a taxa de variação desse vetor é equivalente a componentes da velocidade angular, incluindo-se o vetor solar na determinação de atitude, é possível ser obter as outras componentes, com tanto que o satélite não se encontre em uma posição orbital em que não se possa medir um dos vetores o em que os vetores sejam colineares, que é medida pelo giroscópio, uma relação útil de se aproveitar em sistemas de controle do tipo PID, uma vez que o sinal de erro consiste na diferença entre o estado desejado e o atual, ou seja, o ângulo entre o estado atual e o desejado ( $e(t) = -\zeta$ ), o sinal de controle consiste em uma combinação linear entre esse ângulo, sua derivada, e sua integral, não havendo a necessidade de um cálculo discreto da derivada do erro, pois o giroscópio mede exatamente a taxa de variação do erro ( $\dot{e}(t) = \frac{d}{dt}(-\zeta) = -\omega$ ).

### 3.5.2 Giroscópio

O giroscópio mede a velocidade angular do satélite, utilizada tanto na cinemática quanto na dinâmica de atitude, sendo necessária para a previsão do próximo estado pelo filtro de Kalman. Essas medidas, modeladas como um processo estocástico são representadas com um viés e um ruído branco, e a sua representação clássica, dada por WERTZ (1978) é modelada como:

$$\Delta \boldsymbol{\vartheta}_i = \int_0^{\Delta t} (\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i) dt \quad (3.15)$$

Em que  $\Delta \boldsymbol{\vartheta}_i$  são as componentes do deslocamento angular em torno dos 3 eixos medido no intervalo  $\Delta t$ ,  $\boldsymbol{\omega}_i$  são as 3 componentes da velocidade angular, e  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  são as 3 componentes do viés do giroscópio, todos no referencial girante do corpo. Assim, as medidas do giroscópio, considerando-se as características estocásticas do sensor, podem ser representadas como:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_i = \frac{d\boldsymbol{\vartheta}_i}{dt} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i - \boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i + \boldsymbol{\nu}_i \quad (3.16)$$

Em que  $\boldsymbol{\omega}_m$  é equivalente a  $\frac{d\boldsymbol{\vartheta}_i}{dt}$ , que é o vetor medido pelo giroscópio e  $\boldsymbol{\nu}_i$  é o ruído branco associado ao processo.

### 3.5.3 Inclusão do ruído do giroscópio no modelo

Definindo-se a taxa de variação do viés como:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.17)$$

E, de forma semelhante a equação 3.7, os quatérnions e a velocidade angular podem ser relacionados, porém isolando-se o vetor de velocidade angular:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}_q \boldsymbol{\omega} \quad (3.18)$$

Substituindo a expressão para a medida ruidosa da velocidade angular medida pelo giroscópio na equação da dinâmica contínua do sistema, como apresentado por [CORDEIRO \(2012\)](#), a descrição utilizada para os filtros é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_\omega & -\frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}_q \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}_q & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varpi} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

E, por meio da discretização da dinâmica, o sistema utilizado no filtro é descrito por:

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_k \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{G}_{k-1} \boldsymbol{w}_{d,k-1} \quad (3.20)$$

Em que  $\mathbf{w}_{d,k-1}$  é o vetor com o ruído e a taxa de variação do viés do giroscópio discretizados, a matriz  $\mathbf{G}_{k-1}$  é equivalente a matriz  $\mathbf{G}$ , porém com parâmetros discretos para os quatérnions  $\mathbf{q}$  na matriz  $\mathbf{\Xi}_q$ , que se torna  $\mathbf{\Xi}_{q_k}$ , e  $\mathbf{\Phi}_k$  é dada por:

$$\mathbf{\Phi}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{\Theta}(t_k, t_{k-1}) & \mathbf{\Psi}(t_k, t_{k-1}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Em que  $\mathbf{\Theta}(t_k, t_{k-1})$  é definido pela equação 3.9, e  $\mathbf{\Psi}(t_k, t_{k-1})$  é definido por um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Psi}(t, t_{k-1}) = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}_\omega \mathbf{\Psi}(t, t_{k-1}) - \frac{1}{2} \mathbf{\Xi}_q \\ \mathbf{\Psi}(t_{k-1}, t_{k-1}) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Que por integração direta dá a relação:

$$\mathbf{\Psi}(t_k, t_{k-1}) = -\frac{1}{2} \mathbf{\Theta}(t_k, t_{k-1}) \mathbf{\Xi}_{q_{k-1}} T \quad (3.23)$$

E, por fim, de forma semelhante a covariância do vetor de ruído  $\mathbf{w}_{d,k-1}$  pode ser calculada pela integração de:

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{\Phi}(t_k, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \mathbf{\Phi}^T(t_k, \tau) d\tau \quad (3.24)$$

Em que  $\mathbf{Q}$  é dado por:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\omega & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_\varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Em que  $\mathbf{Q}_\omega$  é a covariância do ruído do giroscópio e  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  é a covariância do viés do giroscópio.

### 3.5.4 Sensores de atitude

Os sensores de atitude medem no referencial do corpo vetores conhecidos, em geral, no referencial da Terra, sendo possível determinar a orientação do referencial do satélite em relação ao referencial da Terra pela medição de no mínimo dois vetores. Sensores comuns para a aplicação de determinação de atitude são sensores solares, sensores de horizonte, magnetômetros, *star trackers*, entre outros. O uso de um módulo inercial permite a integração acelerômetro-giroscópio a fim de reduzir seu erro, e a relação diferencial entre a medição do giroscópio e do magnetômetro torna conveniente a escolha de um módulo, que melhor aproveita a relação entre as medidas para uma estimação inicial coerente.

Dessa forma, já possuindo o magnetômetro no módulo inercial, as escolhas condizentes para um cubesat estão entre um sensor infravermelho de horizonte e um sensor solar, devido as dimensões de *star trackers*. Para uma missão de imageamento, com operação apenas durante o dia, os problemas associados a perda do vetor solar quando o satélite é eclipsado pela Terra é pequena, assim, sensores de luminosidade foram escolhidos por serem leves, pequenos, e de baixo custo, podendo ser utilizados para a determinação do vetor solar.

#### 3.5.4.1 Magnetômetro

O magnetômetro determina o vetor magnético, ou seja, o vetor que aponta para o polo sul magnético, que é aproximadamente o norte geográfico da Terra, assim sua representação é semelhante a do vetor solar:

$$\hat{\mathbf{M}}_v = \begin{bmatrix} M_x + \nu_x \\ M_y + \nu_y \\ M_z + \nu_z \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Sendo  $\hat{\mathbf{M}}_v$  o vetor que aponta para o norte da terra representado no referencial do corpo,  $M_x$ ,  $M_y$ , e  $M_z$  são as componentes do vetor do campo magnético e  $\nu_x$ ,  $\nu_y$ , e  $\nu_z$  são o ruído branco associado as componentes.

#### 3.5.4.2 Sensor Solar

O sensor solar é responsável por medir o vetor solar, definido como um vetor cuja direção é a mesma do sol em relação ao satélite, e cuja magnitude pode ser utilizada para determinar a distância do sol conhecendo-se seu brilho, apesar da informação referente a magnitude não ser relevante para a determinação de atitude. Nesse trabalho o sensor solar será representado por sensores de luminosidade em ambos os lados do satélite nos 3 eixos, nos furos no centro de cada face das paredes do satélite mostrados na figura 7, com as medidas representadas por  $S_{-x}$ ,  $S_{+x}$ ,  $S_{-y}$ ,  $S_{+y}$ ,  $S_{-z}$ , e  $S_{+z}$ , em que  $S_{+x}$  é o valor medido pelo sensor no eixo  $x$  do no referencial do corpo voltado no mesmo sentido do eixo, enquanto  $S_{-x}$  é a luminosidade medida pelo sensor no mesmo eixo na face oposta do satélite, com o mesmo se aplicando aos outros 2 eixos. Dessa forma, o vetor solar no referencial do corpo medido por sensores ideais e puramente determinísticos seria na forma:

$$\mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} S_{+x} - S_{-x} \\ S_{+y} - S_{-y} \\ S_{+z} - S_{-z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Assim, considerando-se as características determinísticas e estocásticas que relacionam as medidas dos sensores, além das constantes de calibração associadas a eles  $(C_{+x}, C_{-x}, C_{+y}, C_{-y}, C_{+z}, C_{-z})$ , com a posição do sol, o vetor solar é dado por:

$$\hat{\mathbf{S}}_v = \begin{bmatrix} C_{+x}(S_{+x} + \nu_{+x}) - C_{-x}(S_{-x} + \nu_{-x}) \\ C_{+y}(S_{+y} + \nu_{+y}) - C_{-y}(S_{-y} + \nu_{-y}) \\ C_{+z}(S_{+z} + \nu_{+z}) - C_{-z}(S_{-z} + \nu_{-z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x + \nu_x \\ S_y + \nu_y \\ S_z + \nu_z \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Em que  $S_x = C_{+x}S_{+x} - C_{-x}S_{-x}$  e  $\nu_x = C_{+x}\nu_{+x} - C_{-x}\nu_{-x}$ , e como  $\nu_x$  é uma combinação linear de  $\nu_{+x}$  e  $\nu_{-x}$ , tratados nesse trabalho como dois ruídos brancos, ele também é um ruído branco.

### 3.6 Modelo de Medidas

Tanto para a determinação de atitude a partir dos estados estimados utilizando a dinâmica do sistema e os dados medidos, quanto para a estimação dos estados, é necessário entender como os estados se relacionam com as medições na forma  $y_k = h_k(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{v}_k)$ , em que  $y_k$  é o vetor com as medições dos sensores,  $\hat{\mathbf{x}}_k$  é o estado estimado, e  $v_k$  é o ruído associado aos processos estocásticos envolvidos. A partir dos sensores apresentados, por meio da obtenção do vetor solar e do vetor magnético no referencial do corpo, é possível saber a orientação do corpo no espaço.

Como deseja-se expressar o vetor de medidas em função dos quatérnions, basta representar os vetores a partir do referencial inercial aplicando-se a matriz de rotação do referencial inercial ao referencial do corpo, ou seja:

$$\mathbf{v}_i = h_i(\mathbf{q}) = \mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{u}_i \quad (3.29)$$

Em que  $\mathbf{v}_i$  é a medida do sensor  $i$  (vetor no referencial do corpo),  $h_i$  é a função que relaciona o vetor na referência e os estados (nesse caso apenas as componentes dos estados correspondentes aos quatérnions), que, com sensores perfeitamente alinhados com o sistema de coordenadas do corpo, pode ser expresso como a matriz de rotação entre os referenciais  $(\mathbf{D}(\mathbf{q}))$ , multiplicado pelo vetor na referência  $(\mathbf{u}_i)$ . Pela representação da matriz de cossenos de direção, e por uma representação dos vetores de medida considerando uma medição ao longo de cada eixo com seu ruído associado, de acordo com os resultados obtidos para o vetor solar obtido pelos sensores de luminosidade e do vetor magnético obtido pelo magnetômetro, a equação 3.29 pode ser aberta como:



$$\begin{bmatrix} v_{i,x} \\ v_{i,y} \\ v_{i,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,x} \\ u_{i,y} \\ u_{i,z} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Assim, a representação do vetor de medidas será composta pela relação da equação 3.30 para o vetor solar e o vetor magnético medidos, aumentando a ordem do vetor de quatérnions em 3 a fim de utilizar o vetor de estados ao invés de apenas os quatérnions, porém, como o viés do giroscópio não é medido, apenas estimado, a região da matriz associada a esses componentes será nula:

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{v,k} \\ \mathbf{M}_{v,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(q_k) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{D}(q_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{u,k} \\ \mathbf{M}_{u,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(q_k)\mathbf{S}_u \\ \mathbf{D}(q_k)\mathbf{M}_u \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Como o vetor e medidas depende apenas dos quatérnions, não é necessário expressá-lo em função do vetor de estados expandido, sendo feita a previsão de  $y_k$  no filtro por meio apenas dos primeiros quatro componentes do vetor de estados, que equivalem aos quatérnions.

Por fim, para adicionar os efeitos estocásticos, considerando que as medições do referencial não possuem erros, o valor estimado de medida do sensor deve subtrair o erro de medição, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{v,k} \\ \hat{\mathbf{M}}_{v,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{v,k} - \boldsymbol{\nu}_{s,k} \\ \mathbf{M}_{v,k} - \boldsymbol{\nu}_{m,k} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_{v,k} \\ \hat{\mathbf{M}}_{v,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(q_k)\mathbf{S}_{u,k} \\ \mathbf{D}(q_k)\mathbf{M}_{u,k} \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k \quad (3.32)$$

Em que  $\mathbf{v}_k$  é o ruído associado ao vetor de medidas, agregando o ruído dos sensores de luminosidade e do magnetômetro.

## 3.7 Atuadores de atitude

Como mencionado na introdução, será utilizado um atuador que consiste de rodas de reação em cada eixo do satélite acopladas a motores BLDC. Rodas de reação são um atuador comum em ADCS, com algumas das alternativas sendo magnetorqueadores e *cold gas thrusters*, que tem suas vantagens e desvantagens, muitas vezes sendo utilizados em conjunto. Magnetorqueadores possuem um torque baixo, não sendo bons atuadores

principais para sistemas que precisam de um tempo de resposta curto, e *cold gas thrusters* possuem uma quantidade limitada de gás para atuar o satélite, o que iria reduzir sua vida útil. A escolha do motor se dá devido aos perigos associados às cerdas de motores *brushed*, uma vez que o desgaste dos contatos de carbono pode causar curtos, além desses motores possuem uma vida útil menor se comparados a motores BLDC.

A saturação dos motores é um problema associado a necessidade de aceleração da roda de reação para a geração de torque, o que significa que no fim de uma manobra, com o intuito de se manter na posição desejada, a velocidade angular da roda de reação deve ser mantida, uma vez que sua desaceleração causa um torque na direção oposta. Uma forma comum de lidar com esse problema é com o uso de magnetorqueadores, que podem contrabalancear uma desaceleração lenta das rodas de reação. Apesar disso, nesse trabalho não serão utilizados magnetorqueadores, nem será considerada a saturação dos motores, uma vez que esses efeitos não tem grande influência na estimação de atitude, apesar de que o nível de saturação poderia ser implementado por meio de uma velocidade máxima nos motores e o magnetorqueador poderia ser modelado como um torque de atuação, sendo possíveis aprimoramentos futuros do modelo, juntos a um sistema de determinação orbital.

Na prática, o sinal de controle deve influenciar na modulação de uma ESC (*Electronic Speed Controller*), com o valor do sinal de controle correspondendo a frequência da PWM gerada para a rotação do motor, que se traduz em um momento angular e uma transferência de torque para o satélite, como mostrado na figura 11. Esse comportamento será simulado no Simulink utilizando o modelo apresentado por [AGUIAR et al. \(2021\)](#), incluindo até mesmo o regulador de velocidade por controle proporcional integral presente no bloco de atuadores.

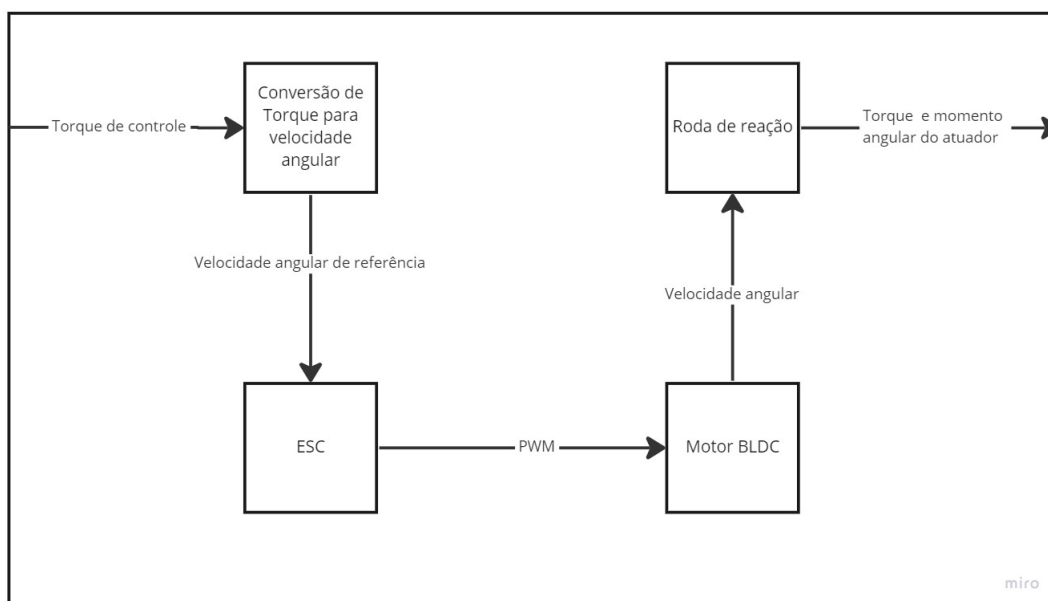


Figura 11 – Diagrama do bloco de atuadores. Fonte: Autor

O torque associado a cada atuador é dado pela relação:

$$\mathbf{T}_{ai} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} J_r \quad (3.33)$$

Em que  $\mathbf{T}_{ai}$  é o torque do atuador  $i$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai}$  é a taxa de variação da velocidade angular do motor, ambos os vetores representados no referencial do corpo, com o subscrito 1 representando o atuador no eixo  $x$ , o subscrito 2 no eixo  $y$ , exemplificados na figura 12, e o 3 no  $z$ , com  $J_r$  como o momento de inércia das rodas de reação, sendo considerado o mesmo valor para todos os atuadores.

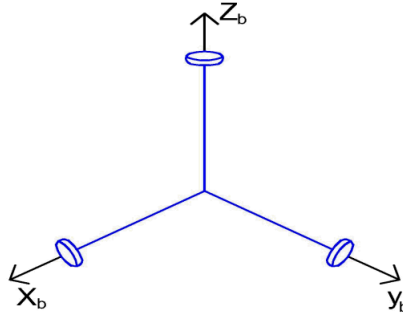


Figura 12 – Arranjo de atuadores alinhados com o referencial do corpo. Fonte: KöK (2012)

Assim, com 3 atuadores, um em cada eixo, o torque resultante é simplesmente:

$$\mathbf{T}_a = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{a1} J_r + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{a2} J_r + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{a3} J_r = J_r \mathbf{I} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{a1} \\ \dot{\omega}_{a2} \\ \dot{\omega}_{a3} \end{bmatrix} = J_r \mathbf{L} \dot{\boldsymbol{\omega}}_a \quad (3.34)$$

Em que o subscrito  $ai$  se refere ao atuador  $i$ , e  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  é a taxa de variação da velocidade angular do atuador, e  $J_r$  é o momento de inércia das rodas de reação, e a matriz  $\mathbf{L}$  é a matriz de distribuição dos torques para o arranjo de atuadores, que nesse caso mais simples é a própria matriz identidade. Vale ressaltar que o mesmo momento de inércia é utilizado para os atuadores nos três eixos pois são utilizadas rodas de reação com o mesmo momento de inércia, caso o tensor de inércia não fosse uma matriz diagonal, ou houvessem diferentes momentos em torno dos eixos do satélite, o uso de atuadores com diferentes propriedades seria recomendado a fim de manter os mesmos requisitos de controle de atitude em todos os eixos.

Uma possível melhoria que poderia ser implementada em um sistema real seria um arranjo piramidal, bastante utilizado comercialmente devido a segurança trazida pela redundância de atuadores e a possibilidade de melhor administração do nível de saturação dos motores. Nesse caso, de acordo com o trabalho de KöK (2012), em que todos os torques passam pelo centro de massa do satélite, ou seja, o vértice da pirâmide está no centro de massa, todos com uma inclinação de  $45^\circ$  em relação ao plano  $xy$  no referencial fixo no corpo, assim como sua projeção no plano formando retas de  $45^\circ$  e  $-45^\circ$ , como pode ser

visto na figura 13, com  $\beta = \theta = 45^\circ$ , o torque resultante da atuação de todos os motores representado no referencial do corpo é dado por:

$$\mathbf{T}_a = \dot{\omega}_{a1} J_r + \dot{\omega}_{a2} J_r + \dot{\omega}_{a3} J_r + \dot{\omega}_{a4} J_r = J_r \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{a1} \\ \dot{\omega}_{a2} \\ \dot{\omega}_{a3} \\ \dot{\omega}_{a4} \end{bmatrix} = J_r \mathbf{L} \dot{\omega}_a \quad (3.35)$$

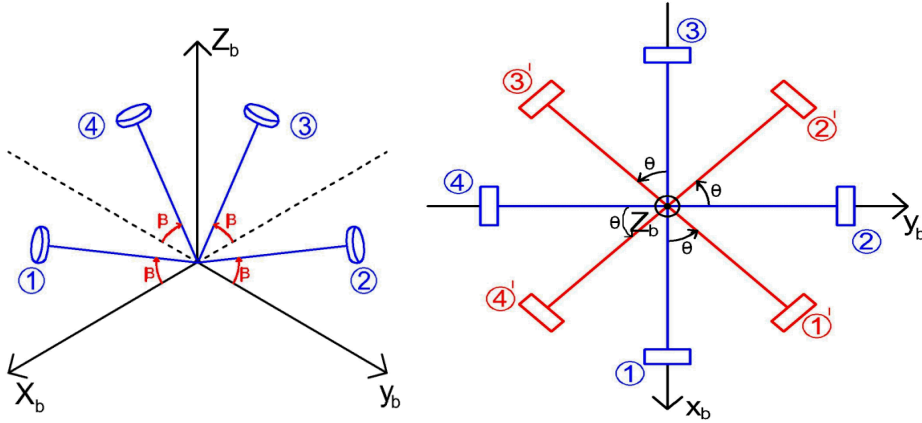


Figura 13 – Arranjo piramidal de atuadores. Fonte: KòK (2012)

Em que  $L$  é a matriz de distribuição das velocidades angulares de cada roda de reação, sendo considerado um arranjo de atuadores rotacionados  $45^\circ$  em relação aos eixos  $x$  e  $y$  assim como em relação ao plano  $xy$ ,  $\dot{\omega}_a$  é a taxa de variação da velocidade angular resultante dos atuadores,  $\dot{\omega}_{a1}$ , associado a  $\mathbf{T}_{a1}$ , e sua projeção no plano  $xy$  está no primeiro quadrante,  $\dot{\omega}_{a2}$ , associado a  $\mathbf{T}_{a2}$  com sua projeção no plano  $xy$  no segundo quadrante, e assim por diante.

Porém, essa distribuição não será implementada, uma vez que ao ser limitado certo torque de atuação, existem infinitas soluções para as combinações dos atuadores que geram esse torque, sendo necessária uma análise de saturação para a determinação do arranjo utilizado, o que não é o foco desse trabalho, por isso se optou pela simulação dos atuadores mais simples. Além disso, dado o modelo de negócios associado a CubeSats, com alta renovação tecnológica associada as ciclos rápidos de missões, a redundância deixa de ser necessária, com uso de um atuador menos beneficiado pela economia de escala.

Substituindo-se a relação do torque resultante dos atuadores de atitude, assim como do momento angular resultante, na equação 3.14, obtêm-se a dinâmica em função das velocidades angulares das rodas de reação da equação 3.36.

$$\dot{\omega} = \mathbf{J}^{-1}[-\omega \times (\mathbf{J}\omega + J_r \mathbf{L} \dot{\omega}_a) + \mathbf{T}_p - J_r \mathbf{L} \dot{\omega}_a] \quad (3.36)$$

Em que o torque de controle e o torque das rodas de reação é relacionado por:

$$\mathbf{T}_c = -\mathbf{T}_a = -J_r \mathbf{L} \dot{\boldsymbol{\omega}}_a \quad (3.37)$$

Ou seja, a velocidade para a qual os motores BLDC devem ser regulados pela ESC segue a relação:

$$\boldsymbol{\omega}_a = \frac{1}{J_r} \int \mathbf{T}_c dt \quad (3.38)$$



## 4 Controle de Atitude

O sistema de controle de atitude é responsável por determinar o torque que deve ser gerado pelas rodas de reação de acordo com o quão distante ou próximo o satélite se encontra da atitude desejada, sendo projetado para ter um comportamento coerente com os requisitos da missão. Para os fins desse trabalho, um tempo de acomodação inferior a 10 segundos, e sobressinal inferior a 10%, de forma a se atingir a referência dentro do tempo de simulação, com o mínimo de potência desperdiçada por *overshoot*, e com um erro pequeno o suficiente para garantir que com o satélite em órbita, um alvo desejado ainda seja capturado pela câmera.

Aqui o sistema foi simplificado para considerar que a saída do controlador já é um torque de controle, pronto para ser distribuído entre seus componentes como torque de cada atuador, porém, em um sistema real deve haver um componente entre o controlador e os motores, a fim de traduzir o sinal de controle em uma rotação dos motores com a corrente necessária, esse componente é o ESC (*Electronic Speed Controller*), que controla a velocidade de motores BLDC por meio de PWM (*Pulse Width Modulation*).

### 4.1 Controlador

O controlador possui como entradas a referência (estado desejado) e o estado atual, e como saída o sinal de comando. O estado desejado consiste em uma orientação no espaço representada em quatérnions em um referencial inercial centrado no corpo, o estado atual é outro vetor de quatérnions representando o estado atual em relação a esse referencial inercial centrado no corpo, enquanto o sinal de controle determina o torque de atuação, que é computado por meio de um sistema de controle semelhante ao PID adaptado para quatérnions a fim de manter uma norma unitária.

Esse método de controle utiliza como partida o erro, que normalmente seria dado pela diferença entre a referência e o estado atual, ou seja:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}_r - \mathbf{q}(t) \quad (4.1)$$

Porém esse tipo de abordagem faria o erro não representar um quatérnion, pois sua norma não seria unitária. A fim de manter a norma unitária, com a abordagem apresentada por [FRESK; NIKOLAKOPOULOS \(2013\)](#), o quatérnion de erro é representado por:

$$\mathbf{q}_{err} = \mathbf{q}_r \otimes \mathbf{q}_m^* \quad (4.2)$$

Em que  $\mathbf{q}_r$  é o quatérnio da atitude desejada, e  $\mathbf{q}_m^*$  é o conjugado do quatérnio estimado para a atitude do satélite, e o produto de quatérnios é definido de duas formas, apresentadas por [CRASSIDIS; JUNKINS \(2014\)](#):

$$\mathbf{q} \otimes \bar{\mathbf{q}} = [\mathbf{q} \otimes] \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \odot \mathbf{q} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{q} \odot \bar{\mathbf{q}} = [\mathbf{q} \odot] \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q} \quad (4.4)$$

em que:

$$[\mathbf{q} \otimes] = [\Psi(\mathbf{q}) \mathbf{q}] \quad (4.5)$$

$$[\mathbf{q} \odot] = [\Xi(\mathbf{q}) \mathbf{q}] \quad (4.6)$$

Sendo  $\Psi(\mathbf{q})$  e  $\Xi(\mathbf{q})$  definidos pelas seguintes matrizes  $4 \times 3$ :

$$\Psi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_4 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\Xi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Assim, o erro é calculado como:

$$\begin{bmatrix} q_{err,1} \\ q_{err,2} \\ q_{err,3} \\ q_{err,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{r,1} \\ q_{r,2} \\ q_{r,3} \\ q_{r,4} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -q_{m,1} \\ -q_{m,2} \\ -q_{m,3} \\ q_{m,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{r,4} & q_{r,3} & -q_{r,2} & q_{r,1} \\ -q_{r,3} & q_{r,4} & q_{r,1} & q_{r,2} \\ q_{r,2} & -q_{r,1} & q_{r,4} & q_{r,3} \\ -q_{r,1} & -q_{r,2} & -q_{r,3} & q_{r,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_{m,1} \\ -q_{m,2} \\ -q_{m,3} \\ q_{m,4} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$e(t) = \begin{bmatrix} q_{err,1} \\ q_{err,2} \\ q_{err,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_{r,4}q_{m,1} - q_{r,3}q_{m,2} + q_{r,2}q_{m,3} + q_{r,1}q_{m,4} \\ q_{r,3}q_{m,1} - q_{r,4}q_{m,2} - q_{r,1}q_{m,3} + q_{r,2}q_{m,4} \\ -q_{r,2}q_{m,1} + q_{r,1}q_{m,2} - q_{r,4}q_{m,3} + q_{r,3}q_{m,4} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Essa expressão representa o erro de cada eixo, porém, caso essa referência demande uma rotação superior a  $\pi$  radianos, a menor rotação para essa orientação é na verdade associada ao conjugado do erro. O que pode ser visto em  $q_{m,4}$ , que, se for negativo, representa uma referencia a mais de  $\pi$  radianos da orientação atual.

Assim, um controlador  $P^2$  poderia ser implementado como:



$$\mathbf{T}_c = -P_q \mathbf{e}(t) - P_\omega \boldsymbol{\omega}(t) \quad (4.11)$$

Em que  $T_c$  é o torque de controle,  $P_q$  é a constante de proporcionalidade ao quatérnio de erro, e  $P_\omega$  é a constante de proporcionalidade com a velocidade angular.

Para a implementação de um controlador PD, para se computar a derivada do erro, basta derivar o quatérnio de erro pela equação 4.12:

$$\dot{\mathbf{q}}_{err} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_\omega \mathbf{q}_{err} \quad (4.12)$$

Assim, a derivada do erro pode ser obtida pelas primeiras 3 componentes da derivada do quatérnio de erro:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_{err,1} \\ \dot{q}_{err,2} \\ \dot{q}_{err,3} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

E o torque de controle pode ser obtido por uma combinação linear do erro e de sua derivada:

$$\mathbf{T}_c = -P_q \mathbf{e}(t) - P_\omega \dot{\mathbf{e}}(t) \quad (4.14)$$

Em que  $T_c$  é o torque de controle,  $P_q$  é a constante de proporcionalidade ao quatérnio de erro, e  $P_\omega$  é a constante de proporcionalidade com a taxa de variação do erro.

Por fim, a integral numérica do erro poderia ser computada para se implementar um controlador PID completo, podendo ser utilizado o método do trapézio, de forma que a integral do erro seria dada por:

$$\int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau \approx \mathbf{E}_{n-1} + \frac{(\mathbf{e}(n-1) + \mathbf{e}(n))T}{2} \quad (4.15)$$

Em que  $t = nT$ , sendo  $t$  o instante atual,  $T$  o período de amostragem, e  $n$  o instante amostrado. Além disso  $\mathbf{E}_{n-1}$  é a integral computada no intervalo de 0 a  $(n-1)T$ , de forma que a integral é um processo iterativo, inicializado como zero.

Assim, o sinal de controle com o controlador PID seria dado por:

$$\mathbf{T}_c = -P_q \mathbf{e}(t) - P_i \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau - P_\omega \dot{\mathbf{e}}(t) \quad (4.16)$$

Em que  $T_c$  é o torque de controle,  $P_q$  é a constante de proporcionalidade ao quatérnio de erro,  $P_i$  é a constante de proporcionalidade a integral do erro, e  $P_\omega$  é a constante

de proporcionalidade com a taxa de variação do erro. Assim, o diagrama de blocos do controlador PID utilizado pode ser expresso como mostrado na figura 14:

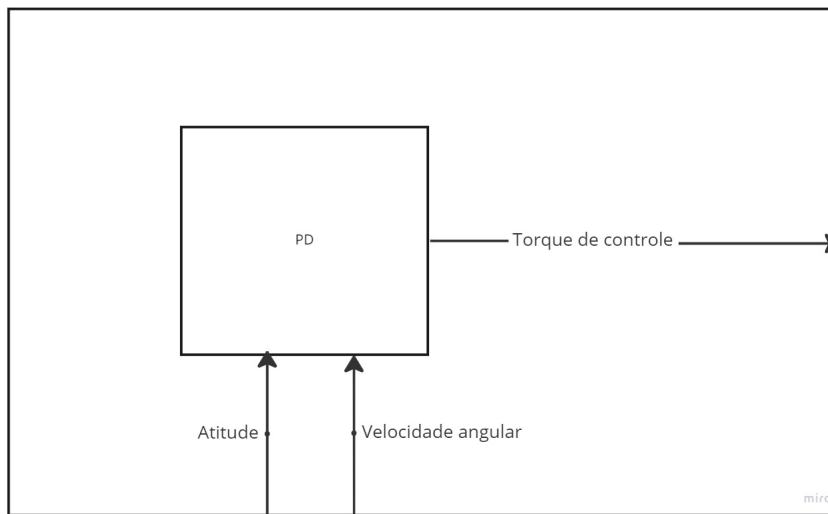


Figura 14 – Diagrama do bloco do controlador. Fonte: Autor

Caso fosse utilizado um arranjo piramidal de atuadores, seria necessário converter esse torque em uma combinação linear dos 4 motores, porém com um atuador em cada eixo, cada componente do torque corresponde ao torque do atuador correspondente.

## 5 Métodos de Estimação de Atitude

Existem diversos métodos de determinação e estimação de atitude, nesse trabalho, além da estimação de atitude realizada pelos filtros de Kalman propostos, será utilizada a TRIAD para a determinação de atitude, sem a introdução dos efeitos estocásticos dos sensores, para se calcular o erro de estimação dos filtros em relação ao estado real. Para esse trabalho, a TRIAD consiste no cálculo da matriz de rotação dos vetores solar e magnético no LVLH para os vetores no referencial do corpo por meio da criação de um sistema dextrogiro a partir dos vetores medidos em ambos os referenciais, assim a atitude é extraída por meio da conversão da matriz de cossenos diretores para os quatérnions.

### 5.1 Filtro de Kalman

Como mencionado na introdução, o filtro de Kalman é um filtro ótimo para estimação dado que certos pré requisitos sejam cumpridos. No caso de sistemas lineares, o filtro de Kalman é ótimo, no caso de sistemas não lineares ele é o filtro linear ótimo, se o modelo para a previsão for razoavelmente próximo da real dinâmica do sistema (SIMON, 2006). Porém, erros associados a linearização influenciam em como as componentes estocásticas se propagam ao longo das iterações, com seu valor médio e desvio padrão se distanciando dos valores reais durante o funcionamento do filtro. O UKF é uma variação não linear do do Filtro de Kalman projetada para lidar com esse tipo de problema.

Para um sistema linear dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varpi} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{\varpi} \sim (0, \mathbf{Q}_c) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{v} \sim (0, \mathbf{R}_c) \quad (5.4)$$

Em que a equação 5.1 é uma representação de um sistema linear genérico de dinâmica contínua, com  $\mathbf{x}$  como o vetor de estados,  $\mathbf{u}$  como uma entrada no sistema,  $\mathbf{y}$  representado o estado medido como uma combinação linear dos estados do sistema, e as equações 5.3 e 5.4 representam o valor médio de 0 e as covariâncias de  $\mathbf{Q}_c$  e  $\mathbf{R}_c$  para o ruído de  $\boldsymbol{\varpi}$  e  $\mathbf{v}$  respectivamente, formando uma matriz diagonal caso as componentes não

sejam correlatas, além da covariância entre  $\boldsymbol{\varpi}$  e  $\boldsymbol{v}$  ser nula, ou seja, os ruídos do sistema e da medição são independentes.

Como, em geral, a etapa de medição do sistema, assim como o processamento, são digitais, a implementação mais comum de filtros de Kalman é a digital, assim, é relevante apresentar a discretização genérica utilizada e o filtro de Kalman para a dinâmica discretizada:

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_{k-1} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\varpi}_{k-1} \quad (5.5)$$

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \quad (5.6)$$

Em que:

$$\boldsymbol{F} = e^{\boldsymbol{A}T} \approx \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T \quad (5.7)$$

$$\boldsymbol{G} = (e^{\boldsymbol{A}T} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \approx \boldsymbol{B}T \quad (5.8)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = (e^{\boldsymbol{A}T} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{A}^{-1} \approx \boldsymbol{I}T \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{C} \quad (5.10)$$

$$\boldsymbol{\varpi}_k \sim (0, \boldsymbol{Q}_k) \rightarrow \boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{Q}_c T \quad (5.11)$$

$$\boldsymbol{v}_k \sim N(0, \boldsymbol{R}_k) \rightarrow \boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{R}_c/T \quad (5.12)$$

Em que  $T$  é o período de amostragem, que por ser tipicamente pequeno, entre as ordens de  $10^{-6}$  e  $10^{-3}$  segundos, justifica as aproximações de primeira ordem para os termos nas equações 5.7, 5.8, e 5.9, de forma que a relação discreta provém da solução geral do sistema de EDOs ao se descrever o estado em um próximo instante. Essa Discretização simplificada é Meramente ilustrativa para um sistema linear de dinâmica contínua genérico e dinâmica contínua discretizada dos sensores para introdução aos conceitos do filtro de Kalman. Para esse trabalho será utilizada a discretização apresentada na equação 3.9.

Para esse sistema discretizado, o filtro de Kalman estima os estados a partir das equações:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0^+ = E(\boldsymbol{x}_0) \quad (5.13)$$

$$\boldsymbol{P}_0^+ = E[(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0^+)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0^+)^T] \quad (5.14)$$

$$\boldsymbol{P}_k^- = \boldsymbol{F}_{k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}^+\boldsymbol{F}_{k-1}^T + \boldsymbol{Q}_{k-1} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (5.16)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} \quad (5.17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (5.18)$$

Em que  $\hat{\mathbf{x}}_0^+$  é a inicialização do vetor de estados, feita pelo valor esperado do estado inicial, como pode ser visto na equação 5.13,  $\mathbf{P}_0^+$  é a inicialização da covariância, dado pela covariância do estado inicial esperado,  $\mathbf{P}_k^-$  é a previsão da covariância a partir da covariância medida anteriormente, como pode ser visto pela relação mostrada na equação 5.15,  $\mathbf{K}_k$  é o ganho de Kalman, utilizado para ponderar a confiança relativa na diferença entre o o vetor de medições previsto e o medido, quanto maior seu valor, maior a confiança nos sensores, quanto menor seu valor, maior a confiança no modelo.  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  é a estimacão *a priori* da medida do estado, sendo a própria dinâmica do sistema para o próximo estado dado o estado atual, como pode ser visto comparando-se as equacões 5.17 e 5.5, e  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  é a estimacão *a posteriori* da medida do vetor  $\mathbf{y}_k$ , ponderando a medio feita na estimacão por meio da covariância do erro de estimacão.

Assim, uma explicao intuitiva do funcionamento do filtro de Kalman é que a estimacão do estado é feita como uma combinao linear entre o estado previsto e a diferença entre a medio prevista e a medida, como pode ser visualizado na equaco 5.18. Em outras palavras, é feita a estimacão *a priori* do estado seguinte a partir do estado anterior pela dinâmica do sistema (equaco 5.17), e essa estimacão *a priori* é atualizada pela diferença do vetor de medies previsto e a medio realizada pelos sensores, ponderada pelo ganho de Kalman (equaco 5.18), de forma que quanto menor esse ganho, menor a contribuo associada a uma medida diferente da prevista, que ocorre quando os sensores utilizados possuem grandes erros associados, enquanto que valores grandes dessa constante aumentam a confiança no estado medido em relao ao previsto, uma vez que, como pode ser visto pela equaco 5.16, esse peso é ponderado pela relao entre a medio e o estado, pela covariância do estado e pelo ruído associado a medio.

## 5.2 Filtro de Kalman Estendido

Uma forma relativamente simples de se aplicar o Filtro de Kalman em sistemas não lineares é por meio de uma linearizao. Uma abordagem que utiliza disso é o Filtro de Kalman Linearizado, que lineariza o sistema em torno de uma trajetória nominal, ou seja, do comportamento que o sistema teria se sua dinâmica fosse determinística. A propagao de estados por meio de relaes não lineares é relativamente simples, a

dificuldade de aplicação do filtro do Kalman na estimação de estados em sistemas não lineares está no cálculo da covariância do erro de estimação, assim, no EKF essa matriz é obtida por meio de uma linearização, porém em torno do ultimo estado estimado, devido a dificuldade de se modelar uma trajetória nominal, com essa estratégia tendo sido desenvolvida especificamente para problemas não lineares de navegação de espaçonaves (ANDREWS, 1968), porém tendo aplicações em diversos outros sistemas.

Para a computação do EKF discretizado, ou seja, com a dinâmica continua do sistema discretizada, e medições discretas, a fim de melhorar a compatibilidade com processadores e controladores e facilitar a implementação do sistema, o modelo pode ser descrito como:

$$\mathbf{x}_k = f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \boldsymbol{\varpi}_{k-1}) \quad (5.19)$$

$$\mathbf{y}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (5.20)$$

$$\boldsymbol{\varpi} \sim (0, \mathbf{Q}_k) \quad (5.21)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k) \quad (5.22)$$

A inicialização do estado e da covariância do erro de estimação continua a mesma do filtro de Kalman:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E[\mathbf{x}_0] \quad (5.23)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] \quad (5.24)$$

Em seguida, para a linearização, são computadas as derivadas parciais associadas a função não linear que descreve o sistema no ponto da ultima estimação:

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{L}_{k-1} = \left. \frac{\partial f_{k-1}}{\partial \boldsymbol{\varpi}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \quad (5.26)$$

Assim, a atualização associada à estimação *a priori* do estado e à covariância do erro de estimação é dada por:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{L}_{k-1}^T \quad (5.27)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1}, 0) \quad (5.28)$$

E, com a estimação *a priori* é calculada, a derivada parcial da função que associa as medições aos estados a fim de lineariza-la é realizada em torno da estimação do estado *a priori* da medição:

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{M}_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (5.30)$$

Por fim, a medição do instante  $k$  é incorporada na estimação do estado do instante:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k^T)^{-1} \quad (5.31)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - h_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)) \quad (5.32)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (5.33)$$

Ou seja, a linearização é feita em torno da estimação, e utilizada para o cálculo do ganho de Kalman e da estimativa da covariância do erro de estimação, podendo não ser representativa da real covariância pois, assim como no caso do filtro de Kalman linearizado,  $\mathbf{P}$  representa a covariância do erro de estimação apenas se ele for próximo do ponto de linearização, com sensores com erros maiores a linearização incorporada no cálculo de  $\mathbf{P}$  deixa de ser uma boa aproximação, de forma que, na teoria, como o ganho de Kalman depende da covariância do erro de estimação, ao longo do processo de estimação o filtro deve diminuir o desempenho, uma vez que o erro se acumula na previsão do próximo estado.

### 5.2.1 Filtro de Kalman Estendido aplicado a determinação de atitude

Uma modificação para a aplicação em estimação de atitude do EKF usual em quatérnions é o uso de matrizes reduzidas, uma vez que a restrição associada a quatérnions quanto a sua norma unitária implica em uma singularidade na matriz de covariância do erro de estimação (LEFFERTS; MARKLEY; SHUSTER, 1982). Porém foi mostrado por CARMÍ; OSHMAN (2008), que a principal razão para as singularidades na covariância do erro de estimação na verdade é a linearização para seu cálculo.

Apesar disso, com o objetivo de lidar com essa singularidade associada aos quatérnions, uma das formas propostas por LEFFERTS; MARKLEY; SHUSTER (1982) é a utilização de uma forma reduzida da matriz de covariância do erro de estimação, aqui chamada de *tilde* $\mathbf{P}_k$ , que implica na redução de outras matrizes associadas ao filtro, que serão denotadas pelo til na descrição do algoritmo do filtro.

Seguindo a implementação associada ao EKF com matriz de covariância reduzida apresentada por CORDEIRO (2012), a partir dos resultados das seções anteriores, é possível aplicar o EKF a dinâmica do ADCS, com a função  $f$  da equação 5.19, seguindo a dinâmica descrita na equação 3.9, expandindo-se os estados para inclusão do viés, obtendo-se a relação da equação 3.20, e realizando o mesmo processo para a função  $h$ , da equação 5.20 pela relação da equação 3.32, de forma que os ruídos associados serão implementados nas simulações segundo o erro descrito no *datasheet* de diferentes sensores de luminosidade, giroscópios, e magnetômetros. Assim, o EKF para determinação de atitude é dado pelo seguinte conjunto de passos:

As equações do sistema e de medição são dadas por:

$$\mathbf{x}_k = \Phi_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{w}_{d,k-1} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{q}_k) \mathbf{S}_{u,k} \\ \mathbf{D}(\mathbf{q}_k) \mathbf{M}_{u,k} \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k \quad (5.35)$$

$$\mathbf{w}_{d,k-1} \sim (0, \mathbf{Q}_k) \quad (5.36)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k) \quad (5.37)$$

A inicialização do estado e da covariância do erro de estimação é:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E[\mathbf{x}_0] = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]^T \quad (5.38)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Sendo a identidade associada aos quatérnions  $3 \times 3$  pelo uso da covariância reduzida.

Para a propagação do estado estimado:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (5.40)$$



$$\tilde{\mathbf{G}}_{k-1} = \mathbf{S}^T(\mathbf{q}_{k-1}^+) \mathbf{G}_{k-1} = -\frac{1}{2} \mathbf{I}_{6 \times 6} \quad (5.41)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{k-1} \approx \tilde{\mathbf{G}}_{k-1} \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{G}}_{k-1}^T T \quad (5.42)$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_k = \mathbf{S}^T(\mathbf{q}_k^-) \mathbf{\Phi}_k \mathbf{S}(\mathbf{q}_{k-1}^+) \quad (5.43)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k-1}^+ = \mathbf{S}^T(\mathbf{q}_{k-1}^+) \tilde{\mathbf{P}}_{k-1}^+ \mathbf{S}(\mathbf{q}_{k-1}^+) \quad (5.44)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_k^- = \tilde{\mathbf{\Phi}}_k \tilde{\mathbf{P}}_{k-1}^+ \tilde{\mathbf{\Phi}}_k^T + \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1} \quad (5.45)$$

Em que os parâmetros de predição são  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e  $\tilde{\mathbf{P}}_k^-$ , além de  $\mathbf{q}_{k-1}^+$  ser os primeiros quatro componentes de  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ , e  $\mathbf{q}_k^-$  os primeiros quatro componentes de  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ , e a matriz  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  é dada por:

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi}_q & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Assim, a previsão de medidas pode ser feita:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{D}([\hat{x}_{k,1}^-, \hat{x}_{k,2}^-, \hat{x}_{k,3}^-, \hat{x}_{k,4}^-]^T) \mathbf{S}_{u,k} \\ \mathbf{D}([\hat{x}_{k,1}^-, \hat{x}_{k,2}^-, \hat{x}_{k,3}^-, \hat{x}_{k,4}^-]^T) \mathbf{M}_{u,k} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

E para entrar na fase de atualização, o ganho de Kalman reduzido deve ser calculado e expandido para sua forma não reduzida a fim de atualizar os estados:

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-}$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{S}^T(\mathbf{q}_k^-) \quad (5.48)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_k = \tilde{\mathbf{P}}_k^- \tilde{\mathbf{H}}_k^T (\tilde{\mathbf{H}}_k \tilde{\mathbf{P}}_k^- \tilde{\mathbf{H}}_k^T + R_k) \quad (5.49)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{S}(\mathbf{q}_k^-) \tilde{\mathbf{K}}_k \quad (5.50)$$

Assim, a atualização pode ser feita por:

$$\tilde{\mathbf{P}}_k^+ = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}_k \tilde{\mathbf{H}}_k) \tilde{\mathbf{P}}_k^- \quad (5.51)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (5.52)$$

Sendo realizada uma normalização nas componentes do vetor de estados correspondentes aos quatérnions:

$$\frac{1}{\sqrt{(\hat{x}_{k,1}^+)^2 + (\hat{x}_{k,2}^+)^2 + (\hat{x}_{k,3}^+)^2 + (\hat{x}_{k,4}^+)^2}} \begin{bmatrix} (\hat{x}_{k,1}^+)^2 \\ (\hat{x}_{k,2}^+)^2 \\ (\hat{x}_{k,3}^+)^2 \\ (\hat{x}_{k,4}^+)^2 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Com a covariância do erro de estimação completa podendo ser recuperada a partir da reduzida pela relação:

$$\mathbf{P}_K^+ = \mathbf{S}(\mathbf{q}_k^+) \tilde{\mathbf{P}}_k^+ \mathbf{S}^T(\mathbf{q}_k^+) \quad (5.54)$$

### 5.3 Filtro de Kalman *Unscented*

O UKF, além de fazer a linearização em torno das estimações do estado da mesma forma que o EKF, lidando com a desvantagem do filtro de Kalman linearizado de se necessitar de uma trajetória nominal para a linearização, também lida com os efeitos da propagação do erro de estimação em um sistema não linear.

Para o cálculo da covariância do erro em casos em que o erro de estimação não é próximo o suficiente de zero para que a linearização do EKF seja apropriada, o UKF é um filtro linear mais vantajoso que o EKF para um sistema não linear. Sendo assim melhor em sistemas com sensores mais simples, com menor precisão, ou com possibilidade de degradação dos sensores, interferindo em sua precisão a longo prazo, ambos casos em que o erro de estimação pode se distanciar de zero. Assim, para a implementação do UKF, é relevante tratar da propagação da média e da covariância em sistemas não lineares a fim de se apresentar as transformações *unscented*.

#### 5.3.1 Propagação da média em sistemas não lineares

Como o EKF utiliza uma aproximação de primeira ordem para a atualização da média do estado, a fim de demonstrar quando essa aproximação é inadequada, é relevante apresentar a expansão completa em séries de Taylor em torno de  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$  a fim de

computar mais facilmente os momentos (SIMON, 2006). Assim, é possível representar a média da medição como:

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = h(\tilde{\mathbf{x}}) + D_{\tilde{\mathbf{x}}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h + \frac{1}{3!}D_{\tilde{\mathbf{x}}}^3h + \dots \quad (5.55)$$

Em que o operador  $D_{\tilde{\mathbf{x}}}^k h$ , para um vetor de estados  $\mathbf{x}$  de dimensão  $n \times 1$  é definido como:

$$D_{\tilde{\mathbf{x}}}^k h = \left( \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i} \right)^k h(x) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} \quad (5.56)$$

E, por definição, a expectância de  $D_{\tilde{\mathbf{x}}}^k h$  contém os momentos centrais de ordem  $k$  associados a  $\tilde{\mathbf{x}}$ , assim, como todos os momentos ímpares são nulos, o valor médio de  $\mathbf{y}$  pode ser expresso como:

$$\bar{\mathbf{y}} = h(\mathbf{x}) = h(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h) + \frac{1}{4!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^4h) + \dots \quad (5.57)$$

A partir da equação 5.57 é possível se ter uma noção do quão boa é a aproximação de primeira ordem para dado sistema com uma relação não linear descrita por  $h$ , de forma que o UKF se mostra uma opção melhor que o EKF primeiramente quando o termo de segunda ordem não for desprezível, estando ele associado a variância dos sensores.

Por fim, para facilitar a comparação com a média associada a transformação *unscented*, assim como justificar as expressões utilizadas, é relevante se fazer a abertura do termo de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h) &= \frac{1}{2!}E \left[ \left( \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i} \right)^2 h(x) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} \right] \\ \frac{1}{2!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h) &= \frac{1}{2!}E \left[ \sum_{i,j=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_j \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} \right] \\ \frac{1}{2!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h) &= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n E[\tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_j] \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} \\ \frac{1}{2!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h) &= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Substituindo a expressão da equação 5.60 na 5.57 temos:

$$\bar{\mathbf{y}} = h(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{1}{4!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^4h) + \dots \quad (5.59)$$

### 5.3.2 Propagação da covariância em sistemas não lineares

A covariância de  $\mathbf{y}$  é definida como:

$$\mathbf{P}_y = E[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T] \quad (5.60)$$

E pode ser expressa em termos das equações 5.55 e 5.57 a partir da relação:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} &= [h(\tilde{\mathbf{x}}) + D_{\tilde{\mathbf{x}}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h + \frac{1}{3!}D_{\tilde{\mathbf{x}}}^3h + \dots] - [h(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h) + \frac{1}{4!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^4h) + \dots] \\ \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} &= [D_{\tilde{\mathbf{x}}}h + \frac{1}{2!}D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h + \frac{1}{3!}D_{\tilde{\mathbf{x}}}^3h + \dots] - [\frac{1}{2!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h) + \frac{1}{4!}E(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^4h) + \dots] \end{aligned} \quad (5.61)$$

Assim, aplicando-se a expectância em  $(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T$ , e utilizando-se da mesma propriedade associada a aparição da expressão dos momentos de ordem  $k$ , em que os momentos ímpares são nulos, temos:

$$\mathbf{P}_y = E[D_{\tilde{\mathbf{x}}}h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}h)^T] + E\left[\frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^3h)^T}{3!} + \frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h)^T}{2!2!} + \frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}^3h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}h)^T}{3!}\right] + E\left(\frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h}{2!}\right)E\left(\frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h}{2!}\right)^T + \dots \quad (5.62)$$

De forma que, pela expansão do primeiro termo da equação 5.62 é possível se chegar na expressão utilizada para a aproximação utilizada no EKF:

$$\begin{aligned} E[D_{\tilde{\mathbf{x}}}h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}h)^T] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i \frac{\partial h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}}\right) \left(\sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_j \frac{\partial h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}}\right)^T\right] \\ E[D_{\tilde{\mathbf{x}}}h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}h)^T] &= E\left[\sum_{i,j} \tilde{\mathbf{x}}_i \frac{\partial h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i} \Big|_{\mathbf{x}_i=\tilde{\mathbf{x}}} \frac{\partial h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_j} \Big|_{\mathbf{x}_j=\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{x}}_j\right] \\ E[D_{\tilde{\mathbf{x}}}h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}h)^T] &= \sum_{i,j} \mathbf{H}_i E(\tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_j) \mathbf{H}_j^T \\ E[D_{\tilde{\mathbf{x}}}h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}h)^T] &= \sum_{i,j} \mathbf{H}_i \mathbf{P}_{ij} \mathbf{H}_j^T = \mathbf{H} \mathbf{P}_x \mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (5.63)$$

Assim, a equação 5.62 pode ser escrita como:

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{H} \mathbf{P}_x \mathbf{H}^T + E\left[\frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^3h)^T}{3!} + \frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h)^T}{2!2!} + \frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}^3h(D_{\tilde{\mathbf{x}}}h)^T}{3!}\right] + E\left(\frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h}{2!}\right)E\left(\frac{D_{\tilde{\mathbf{x}}}^2h}{2!}\right)^T + \dots \quad (5.64)$$

No EKF, a covariância do erro de medição é dada por  $\mathbf{P}_y = \mathbf{H}\mathbf{P}_x\mathbf{H}^T + \mathbf{R}$ , ou seja, a covariância é aproximada pelo primeiro termo da expansão, com  $\mathbf{R}$  sendo a covariância do ruído associado a medição,  $\mathbf{v}$ , de forma que a equação para a atualização da covariância do erro de estimação é aproximada por  $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$  pela propagação de  $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\varpi}_k$ , em que  $\mathbf{H} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$  e  $\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}$ , assim, de forma semelhante a conclusão da seção anterior, caso os termos de ordem dois da equação 5.64 não sejam desprezíveis, o EKF deixa de ser aplicável ao sistema para previsões acuradas, sendo necessário compensar pelas não linearidades na propagação da covariância. Essa compensação é feita no UKF por meio da chamada transformação *unscented*.

### 5.3.3 Transformação *Unscented*

A transformação *unscented* se baseia em dois princípios relativamente simples: (I) É simples de se aplicar uma transformação não linear em apenas um ponto; e (II) não é difícil encontrar um set de pontos no espaço de estados que aproxima a verdadeira PDF (*Probability Density Function*) do sensor.

Assim, com um vetor  $\mathbf{x}$ , com média  $\bar{\mathbf{x}}$ , e covariância  $\mathbf{P}_x$  conhecidas, ao se selecionar  $2n + 1$  pontos determinísticos cuja média e covariância aproximam os valores conhecidos, incluindo a média conhecida, chamados de pontos sigma, é possível aproximar a média  $\bar{\mathbf{y}}$  e a covariância  $\mathbf{P}_y$  do vetor  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ , com  $h$  uma função não linear, ao se aplicar a função não linear nos pontos sigma e computando a média e a covariância.

Para a seleção dos  $2n$  pontos sigma é utilizada a relação:

$$\mathbf{x}^{(i)} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (5.65)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left(\sqrt{n\mathbf{P}_x}\right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.66)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = -\left(\sqrt{n\mathbf{P}_x}\right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.67)$$

Em que  $\sqrt{n\mathbf{P}_x}$  é definida tal que  $(\sqrt{n\mathbf{P}_x})^T \sqrt{n\mathbf{P}_x} = n\mathbf{P}_x$ , e  $(\sqrt{n\mathbf{P}_x})_i$  é a linha  $i$  de  $\sqrt{n\mathbf{P}_x}$ .

#### 5.3.3.1 Aproximação da média e da covariância pela transformação *unscented*

Para se aproximar a média de  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ , denotada como  $\bar{\mathbf{y}}_u$ , conhecendo-se a média e a covariância de  $\mathbf{x}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{P}_x$  respectivamente, pela transformação *unscented*, após a criação dos pontos sigma é computada uma média ponderada da transformação linear dos vetores gerados pelo ponto sigma, ou seja:

$$\bar{\mathbf{y}}_u = \sum_{i=1}^{2n} W^i \mathbf{y}^{(i)} \quad (5.68)$$

Sendo  $\mathbf{y}^{(i)}$  transformação *unscented* do  $i$ -ésimo ponto sigma e  $W^{(i)}$  o peso associado a transformação *unscented* do  $i$ -ésimo ponto sigma, ou seja:

$$\mathbf{y}^{(i)} = h(\mathbf{x}^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2n \quad (5.69)$$

$$W^{(i)} = \frac{1}{2n}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2n \quad (5.70)$$

Realizando-se a expansão em séries de Taylor em torno de  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$  para  $\bar{\mathbf{y}}_u$  substituindo as equações 5.69 e 5.70 obtêm-se:

$$\bar{\mathbf{y}}_u = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left( h(\tilde{\mathbf{x}}) + D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}} h + \frac{1}{2!} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^2 h + \dots \right) \quad (5.71)$$

É simples de se mostrar que a transformação *unscented* força os termos de ordem ímpar a se comportarem de forma semelhante à expansão de Taylor da média de uma transformação não linear de uma variável aleatória, em que os momentos centrais de ordem ímpar são nulos, fazendo os termos de ordem ímpar da expansão de  $\bar{\mathbf{y}}_u$  são nulos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}}^{2k+1} h &= \sum_{j=1}^{2n} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i^{(j)} \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i} \right)^{2k+1} h(x) \Big|_{x=\tilde{\mathbf{x}}} \right] \\ \sum_{j=1}^{2n} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}}^{2k+1} h &= \sum_{j=1}^{2n} \left[ \sum_{i=1}^n (\tilde{\mathbf{x}}_i^{(j)})^{2k+1} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i^{2k+1}} h(x) \Big|_{x=\tilde{\mathbf{x}}} \right] \\ \sum_{j=1}^{2n} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}}^{2k+1} h &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{2n} (\tilde{\mathbf{x}}_i^{(j)})^{2k+1} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i^{2k+1}} h(x) \Big|_{x=\tilde{\mathbf{x}}} \right] \end{aligned}$$

Por fim, devido a relação da transformação *unscented*, em que  $\tilde{\mathbf{x}}^{n+j} = -\tilde{\mathbf{x}}^j$ , os termos  $(\tilde{\mathbf{x}}_i^{(j)})^{2k+1}$  e  $(\tilde{\mathbf{x}}_i^{(n+j)})^{2k+1}$  se cancelam.

$$\sum_{j=1}^{2n} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}}^{2k+1} h = 0 \quad (5.72)$$

Assim,  $\bar{\mathbf{y}}_u$  pode ser simplificado para:

$$\bar{\mathbf{y}}_u = h(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{1}{2!} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^2 h + \frac{1}{4!} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^4 h + \dots \right) \quad (5.73)$$

Abrindo o termo de segunda ordem a identidade utilizada para a transformação *unscented* torna ambas as séries idênticas até a segunda ordem:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2!} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^2 h &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2!} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i} \right)^2 h(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} \\ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2!} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^2 h &= \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i,j=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)} \tilde{\mathbf{x}}_j^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} h(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} \\ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2!} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^2 h &= \frac{1}{4n} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^{2n} \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)} \tilde{\mathbf{x}}_j^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} h(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}}\end{aligned}$$

Pela mesma relação da transformação *unscented*, em que  $\tilde{\mathbf{x}}^{n+j} = -\tilde{\mathbf{x}}^j$ , as potências pares separadas por  $n$  são iguais:  $(\tilde{\mathbf{x}}^{n+j})^{2n} = (-\tilde{\mathbf{x}}^j)^{2n} = (\tilde{\mathbf{x}}^j)^{2n}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2!} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^2 h &= \frac{1}{4n} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n 2\tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)} \tilde{\mathbf{x}}_j^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} h(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} \\ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2!} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^2 h &= \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)} \tilde{\mathbf{x}}_j^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} h(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}}\end{aligned} \quad (5.74)$$

Assim, é possível entender a definição da transformação *unscented* de forma a igualar o termo de segunda ordem da equação 5.74 ao da equação 5.60:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)} \tilde{\mathbf{x}}_j^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} h(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} &= \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n (\sqrt{n\mathbf{P}})_{ki} (\sqrt{n\mathbf{P}})_{kj} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} h(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} \\ \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{x}}_i^{(k)} \tilde{\mathbf{x}}_j^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} h(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}}\end{aligned} \quad (5.75)$$

Assim, substituindo na equação para  $\bar{\mathbf{y}}_u$  o termo de ordem 2, a aproximação da média pela transformação *unscented* é:

$$\bar{\mathbf{y}}_u = h(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left( \frac{1}{4!} D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^4 h + \dots \right) \quad (5.76)$$

Que, comparado à equação 5.59, é exatamente igual até a segunda ordem, sendo possível demonstrar o mesmo para ordens superiores, e passa a ser uma aproximação no contexto do filtro de Kalman *unscented* em que  $\tilde{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{P}_x$  são apenas estimações, além da média calculada dos  $n$  pontos ser exatamente igual a média real apenas no limite quando  $n$  vai pra infinito, apesar da simplificação com  $n$  associada a escolha dos pontos sigma:

$$\bar{\mathbf{y}}_u = h(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i \partial \tilde{\mathbf{x}}_j} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{1}{4!} E[D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^4 h] + \frac{1}{6!} E[D_{\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}}^6 h] + \dots$$

De forma semelhante, a covariância de  $\mathbf{y}$  pode ser aproximada por:

$$\mathbf{P}_u = \sum_{i=1}^{2n} W^{(i)} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{y}_u) (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{y}_u)^T$$

$$\mathbf{P}_u = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{y}_u) (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{y}_u)^T = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (h(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{y}_u) (h(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{y}_u)^T \quad (5.77)$$

Pelo mesmo processo de expansão em séries de Taylor utilizado para expressar a média de  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$  por meio dos  $2n+1$  pontos sigma que aproximam a média e covariância de  $\mathbf{x}$  é possível ver que a expressão de  $\mathbf{P}_u$  da equação 5.77 tem a mesma expansão da propagação da média mostrada na equação 5.64 até o termo de ordem quatro (SIMON, 2006), sendo uma aproximação melhor da covariância que é utilizada no EKF por uma aproximação linear.

### 5.3.4 Implementação do Filtro de Kalman *Unscented*

Para a computação do UKF, assim como no EKF o modelo utilizado é discretizado:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) + \boldsymbol{\varpi}_k \quad (5.78)$$

$$\mathbf{y}_k = h_k(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{v}_k \quad (5.79)$$

$$\boldsymbol{\varpi}_k \sim (0, \mathbf{Q}_k) \quad (5.80)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k) \quad (5.81)$$

A fim de representar a discretização da medida nas equações 5.20 e 5.81 em relação à sua versão contínua.

A inicialização do estado e da covariância do erro de estimação continua a mesma:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E[\mathbf{x}_0] \quad (5.82)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] \quad (5.83)$$



Em seguida, para a propagação do instante  $k - 1$  ao  $k$ , são escolhidos  $2n + 1$  pontos sigma  $\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}$ , com as mudanças apropriadas para que a os momentos se tornem aproximações mais fieis, no caso com uma aproximação termo a termo da média em todas as ordens, e uma aproximação de quarta ordem da covariância,  $\mathbf{x}_k$  são  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  e  $\mathbf{P}_{k-1}^+$ , por meio das equações apresentadas para a escolha dos pontos sigma:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (5.84)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (5.85)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left( \sqrt{n\mathbf{P}_{k-1}^+} \right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.86)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = - \left( \sqrt{n\mathbf{P}_{k-1}^+} \right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.87)$$

Com os pontos sigma selecionados, sua transformação para obtenção do vetor de estados é feita por meio da transformação não linear associada a aplicação da função  $f$ , obtendo-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{u}_k, t_k) \quad (5.88)$$

Assim, a estimação *a priori* do estado e da covariância do erro de estimação é obtida pela média e covariância da transformação dos pontos sigma:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} \quad (5.89)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (5.90)$$

Após as equações de atualização, as medições são incorporadas para a obtenção da estimação *a posteriori*, começando novamente pelos pontos sigma, porém, agora com a melhor estimação para a média e covariância de  $\mathbf{x}_k$  sendo  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e  $\mathbf{P}_k^-$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (5.91)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (5.92)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left( \sqrt{n\mathbf{P}_k^-} \right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.93)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = - \left( \sqrt{n\mathbf{P}_k^-} \right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.94)$$

A fim de melhorar o tempo de processamento os pontos sigma anteriores podem ser utilizados, as custas de performance um pouco reduzida.

Em seguida, a transformação não linear associada a função  $h$  é utilizada para computar as medições previstas a partir dos pontos sigma:

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} = h(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}, t_k) \quad (5.95)$$

Assim, é possível estimar a média e covariância associada aos pontos sigma para a medição prevista:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} \quad (5.96)$$

$$\mathbf{P}_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)(\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)^T + \mathbf{R}_k \quad (5.97)$$

Assim como a covariância entre os estados estimados e as medidas previstas:

$$\mathbf{P}_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)^T \quad (5.98)$$

Com isso, as equações usuais do filtro de Kalman podem ser utilizadas para a estimação dos estados:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \quad (5.99)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (5.100)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_y \mathbf{K}_k^T \quad (5.101)$$

Essas equações assumem uma relação linear com o ruído, caso o ruído tenha uma relação não linear com os estados e medidas, ou seja:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\varpi}_k, t_k) \quad (5.102)$$

$$\mathbf{y}_k = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k, t_k) \quad (5.103)$$

Nesse caso, o ruído é incorporado no vetor de estados, ou seja:

$$\mathbf{x}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\varpi}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

Assim a inicialização dos estados e da covariância do erro de estimação se torna:

$$\mathbf{x}_0^{a+} = \begin{bmatrix} E(\mathbf{x}_0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.105)$$

$$\mathbf{P}_0^{a+} = \begin{bmatrix} E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T] & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

Assim, o mesmo processo é utilizado, porém, para a estimação aumentada da média e covariância,  $\mathbf{Q}_{k-1}$  e  $\mathbf{R}_k$  das equações 5.90 e 5.97. Como a relação entre os estados e o vetor de medidas varia linearmente com o ruído, não será necessário expandir os estados pelo ruído dos sensores de luminosidade e do magnetômetro, por outro lado, a propagação do ruído do giroscópio é não linear, assim seu viés é incorporado nos estados.

### 5.3.5 Filtro de Kalman *Unscented* aplicado a determinação de atitude

O sistema usado para o UKF é o mesmo apresentado para o EKF, ou seja:

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{w}_{d,k-1} \quad (5.107)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{q}_k) \mathbf{S}_{u,k} \\ \mathbf{D}(\mathbf{q}_k) \mathbf{M}_{u,k} \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k \quad (5.108)$$

$$\mathbf{w}_{d,k-1} \sim (0, \mathbf{Q}_k) \quad (5.109)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (0, \mathbf{R}_k) \quad (5.110)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E[\mathbf{x}_0] = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]^T \quad (5.111)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

Sendo a identidade associada aos quatérnions  $3 \times 3$  pelo uso da matriz de covariância reduzida, para evitar singularidades utilizando-se a decomposição de Cholesky para o cálculo da raiz da matriz de covariância do erro de estimação para o cálculo dos pontos sigma, como feito por [SILVA \(2016\)](#).

Como o vetor de estados possui sete elementos, temos  $n = 7$ , dando um total 15 pontos sigma a serem definidos (segundo a relação de que para um estado de tamanho  $n$  são escolhidos  $2n + 1$  pontos sigma, em que  $2n$  são propagados da estimação anterior do estado, e um deles é a própria estimação anterior). Assim a transformação *unscented* é aplicada para a geração dos pontos sigma:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (5.113)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 14 \quad (5.114)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left( \sqrt{n\mathbf{P}_{k-1}^+} \right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (5.115)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = -\left( \sqrt{n\mathbf{P}_{k-1}^+} \right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (5.116)$$

Com os pontos sigma selecionados, para manter o comportamento de quatérnions é necessário garantir que a norma continue unitária, assim os primeiros 4 componentes do vetor de estados são normalizados pela relação:

$$\frac{1}{\sqrt{(\tilde{x}_1^{(i)})^2 + (\tilde{x}_2^{(i)})^2 + (\tilde{x}_3^{(i)})^2 + (\tilde{x}_4^{(i)})^2}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^{(i)} \\ \tilde{x}_2^{(i)} \\ \tilde{x}_3^{(i)} \\ \tilde{x}_4^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 14 \quad (5.117)$$

Em seguida, sua transformação para obtenção do vetor de estados é feita por meio da transformação não linear associada a aplicação da função  $f$ , obtendo-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \Phi_k \mathbf{x}_{k-1}^{(i)} \quad (5.118)$$

Assim, a estimação *a priori* do estado e da covariância do erro de estimação é obtida pela média e covariância da transformação dos pontos sigma:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} \quad (5.119)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Em que  $\mathbf{Q}_{k-1}$  é computado por meio da equação 3.24

Após as equações de atualização, as medições são incorporadas para a obtenção da estimação *a posteriori*, desejando-se maior acurácia os pontos sigma também são atualizados pela predição, porém, agora com a melhor estimação para a média e covariância de  $\mathbf{x}_k$  sendo  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  e  $\mathbf{P}_k^-$ , porém, a matriz de covariância é reduzida para se computar sua raiz evitando-se singularidades com a decomposição de Cholesky, antes de ser expandida normalmente para a propagação dos pontos sigma:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (5.120)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \tilde{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 14 \quad (5.121)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} = \left( \sqrt{n\mathbf{P}_k^-} \right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (5.122)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(n+i)} = - \left( \sqrt{n\mathbf{P}_k^-} \right)_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (5.123)$$

Com os pontos sigma selecionados, o processo de renormalização apresentado na equação 5.117 é feito novamente, assim como sua transformação para obtenção do vetor de estados por meio da transformação não linear associada a aplicação da função  $f$ , obtendo-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \Phi_k \mathbf{x}_{k-1}^{(i)} \quad (5.124)$$

Em seguida, a transformação não linear associada a função  $h$  é utilizada para computar as medições previstas a partir dos pontos sigma:

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}([\hat{x}_{k-1,1}^{(i)}, \hat{x}_{k-1,2}^{(i)}, \hat{x}_{k-1,3}^{(i)}, \hat{x}_{k-1,4}^{(i)}]^T) \mathbf{S}_{u,k} \\ \mathbf{D}([\hat{x}_{k-1,1}^{(i)}, \hat{x}_{k-1,2}^{(i)}, \hat{x}_{k-1,3}^{(i)}, \hat{x}_{k-1,4}^{(i)}]^T) \mathbf{M}_{u,k} \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

Assim, é possível estimar a média e covariância associada aos pontos sigma para a medição prevista:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} \hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} \quad (5.126)$$

$$\mathbf{P}_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)(\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)^T + \mathbf{R}_k \quad (5.127)$$

Assim como a covariância entre os estados estimados e as medidas previstas:

$$\mathbf{P}_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_k)^T \quad (5.128)$$

Com isso, as equações usuais do filtro de Kalman podem ser utilizadas para a estimação dos estados:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \quad (5.129)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (5.130)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_y \mathbf{K}_k^T \quad (5.131)$$

Assim, o bloco de estimação de atitude é apresentado na figura 15:

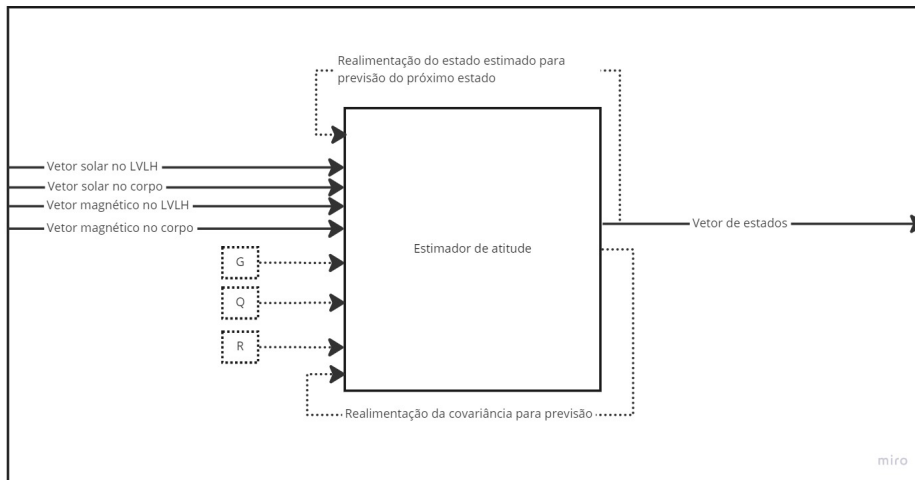


Figura 15 – Diagrama do bloco de estimação de atitude. Fonte: Autor

No caso do TRIAD apenas são necessários os vetores de medição em ambos os referenciais, e para os filtros de Kalman é necessário realimentar os estados e covariâncias devido a sua natureza iterativa, assim como informar parâmetros do sistema como as matrizes de covariância do modelo de medidas ( $\mathbf{R}$ ) e do sistema ( $\mathbf{Q}$ ), assim como a matriz que relaciona os ruídos do modelo com os estados ( $\mathbf{G}$ ). Para a simulação serão implementados os 3 estimadores com a operação do TRIAD determinístico a fim de comparar as

estimações do EKF e do UKF em relação ao real estado do sistema, a fim de computar o erro de estimação de cada filtro sob diferentes circunstâncias.

## 5.4 Comparação teórica entre os filtros

Como demonstrado matematicamente, o UKF aproxima melhor que o EKF a propagação dos momentos dos processos estocásticos associados ao sistema, uma vez que o EKF utiliza uma aproximação linear, sendo acurado no máximo até a primeira ordem tanto para a propagação do estado pela média, quanto para a propagação da covariância para a estimação do estado a posteriori da medição, comparado ao UKF, que representa a média exatamente e aproxima a covariância até a quarta ordem. Assim, em casos em que a aproximação linear é suficiente, espera-se um desempenho semelhante de ambos os filtros, porém, em casos que os termos de ordem superior não são desprezíveis, o UKF deve se mostrar mais acurado.

Assim, é esperado que com ruídos pequenos no sistema, em um pequeno período de simulação, a performance do UKF e do EKF sejam semelhantes, uma vez que a vantagem do UKF em relação ao EKF está no cálculo mais acurado da média e da covariância do erro de estimação. Porém, com o aumento do erro de medição, é esperado que a estimação do UKF se mostre consideravelmente melhor que a do EKF, especialmente em períodos curtos de estimação devido a melhor convergência do UKF especialmente em cenários com uma inicialização do valor esperado do estado e da covariância distantes dos valores reais. Para testar essa hipótese, o sistema de ADCS será simulado com diferentes níveis de ruído nos sensores, com diversos testes a fim de se realizar uma comparação por Monte Carlo, sendo feita a comparação da média e desvio padrão do erro de estimação.

Na prática, em sistemas maiores, existe a possibilidade do uso de métodos de estimação não lineares, que melhor se aproximam dos estados reais quando a precisão é um requisito primário, assim como a escolha de sensores mais robustos e precisos a fim de manter o erro de estimação próximo de zero ao longo de toda a missão. Assim, espera-se uma maior vantagem do UKF para o caso de nano-satélites, com pouca ou nenhuma redundância nos sensores, e com o mínimo de hardware a fim de manter o sistema pequeno e leve, de acordo com os padrões estabelecidos.

Espera-se, a partir do levantamento do erro de estimação de cada filtro, estabelecer uma relação entre as tolerâncias e o tempo de processamento, a fim de determinar os limites que tornam uma situação mais favorável a um filtro em relação ao outro na estimação dos estados, assim como a medição de impactos que o UKF pode ter em relação ao EKF na performance do sistema de controle - é esperada uma dinâmica semelhante para ambos os filtros, porém com maiores erros de estimação, espera-se um erro em regime permanente menor do UKF.





## 6 Modelo da simulação

Este capítulo tem como objetivo traduzir as equações apresentadas nos capítulos anteriores em blocos do Simulink para a simulação do sistema de determinação e controle de atitude.

A modelagem do sistema de determinação e controle de atitude segue a mesma estrutura dos diagramas de blocos da figura 2 como mostrado na figura 16, com a implementação das equações apropriadas em forma de blocos do Simulink, assim como os códigos, implementados como funções nos blocos no interior de cada parte do sistema de ADCS, com uma organização inspirada nos componentes físicos para a implementação experimental do sistema.

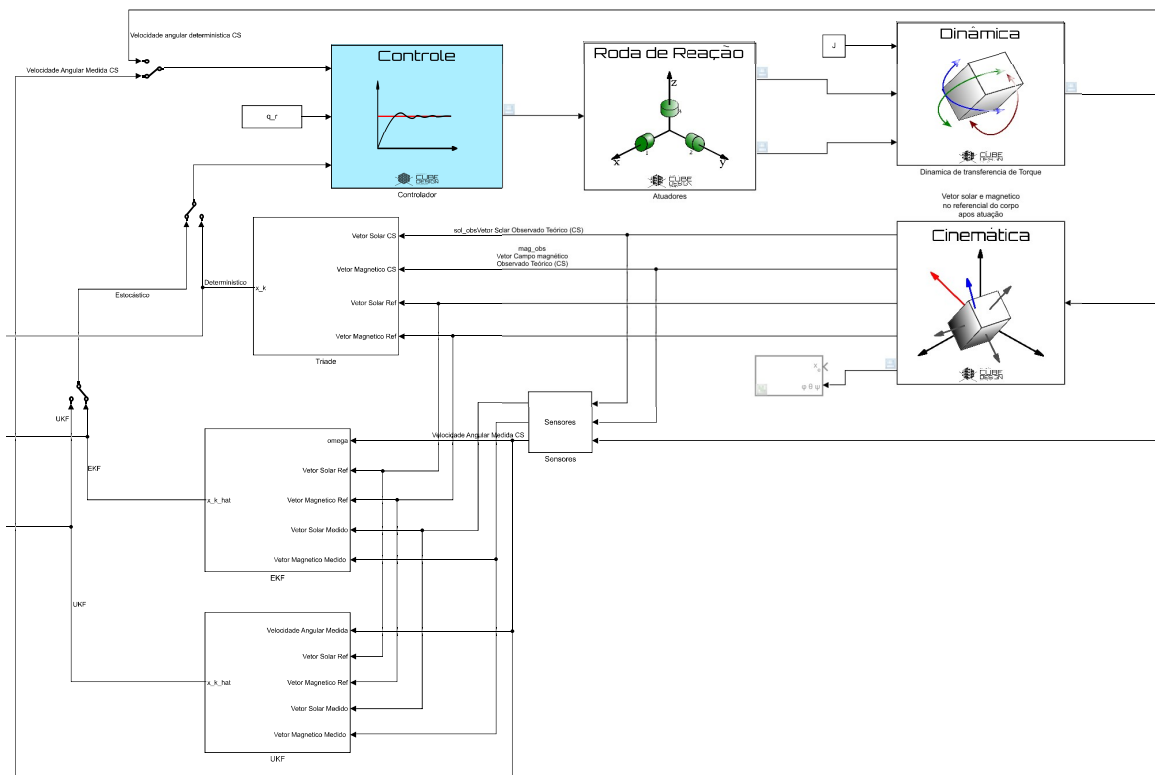


Figura 16 – Modelo do ADCS. Fonte: Autor

Os *switches* no canto esquerdo trocam o estimador utilizado pelo sistema, no modo apresentado na figura, está sendo utilizado o sinal do giroscópio com ruído como entrada para o controlador, e a estimação do EKF. Para comparar a estimação dos filtros o sistema de controle irá operar invertendo-se os dois primeiros *switches*, com o sistema de controle atuando sem considerar ruídos, e os estimadores utilizando os mesmos estados com o mesmo ruído para se utilizar as mesmas condições para ambos os filtros. Para se comparar a influência dos filtros no sistema de controle, será utilizada a configuração da

figura 16 para se testar o EKF e, para testar o UKF, o terceiro *switch* deve ser invertido.

## 6.1 Bloco do Controlador

Assim como apresentado no diagrama do controlador apresentado na figura 14, o controlador deve, a partir da atitude do sistema e de sua velocidade angular, dar o torque de referência para os atuadores. Para a competição CubeDesign as missões associadas ao controlador eram duas, simulando inicialmente as condições de inserção do satélite em órbita, com uma fase inicial de estabilização, seguida por uma fase de apontamento, havendo um controlador para cada fase. Para a comparação entre os filtros não é necessário o uso dos diferentes modos de operação, sendo projetado apenas o controlador de apontamento, utilizado na maior parte da missão. Porém existe a possibilidade de implementação de ambos os controladores para o projeto, simulação e teste de uma missão pela adição de *switches* no bloco do controlador e a adição de um controlador de estabilização, que necessita de entrada apenas a velocidade angular, tendo como referência uma velocidade angular nula.

Usualmente, para um sistema de controle, seria necessário apenas o sinal de erro para implementação do controlador, porém é possível se computar a derivada do quatérnio de erro para o controlador PD de forma mais acurada, evitando as complicações associadas a anti-causalidade da componentes derivativa de um controlador PID, utilizando a velocidade angular. Assim, o controlador é mostrado na figura 17, com o bloco referente ao controle de apontamento contendo a função correspondente ao algoritmo PD utilizado na figura 18. A função do Matlab implementada no bloco da figura 18 pode ser vista no anexo A.3, com o cálculo do quatérnio de erro apresentado no capítulo 4, para determinar o erro por suas 3 componentes, e a derivada do erro pelas primeiras três componentes da derivada do quatérnio de erro.

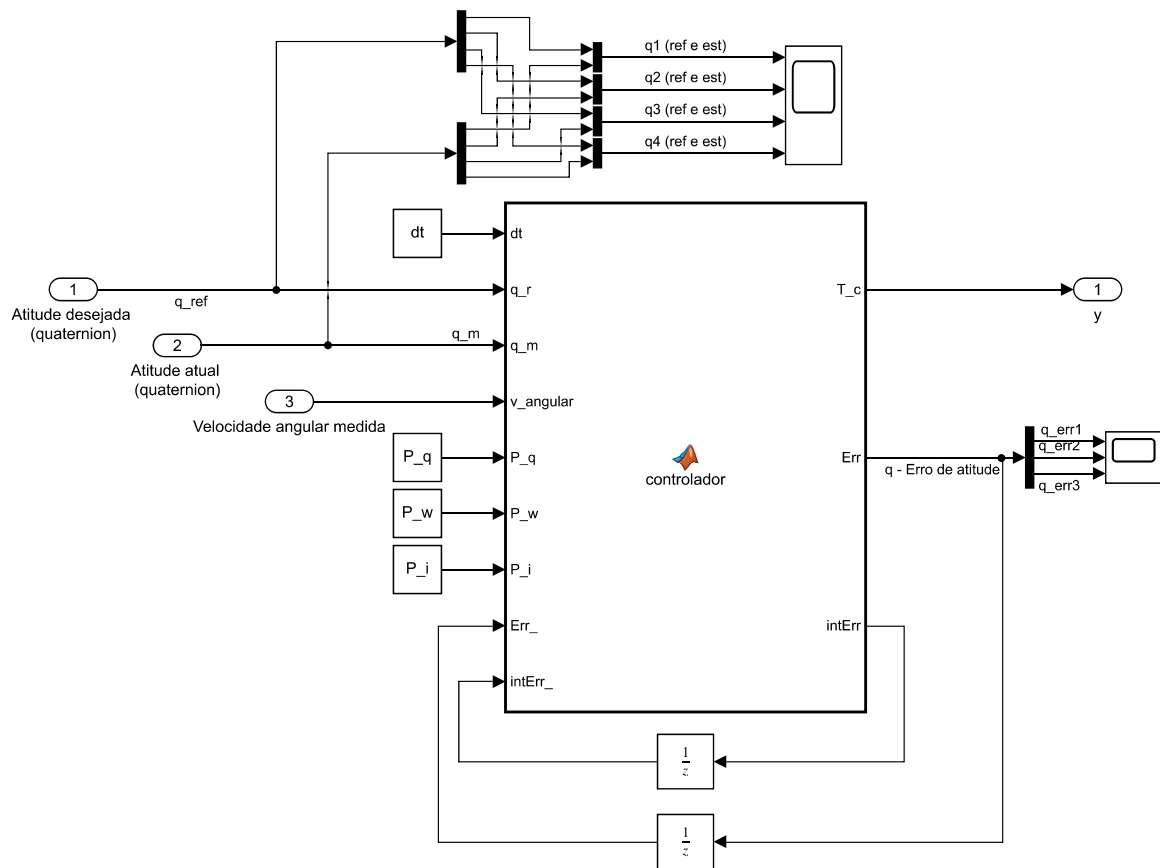


Figura 17 – Bloco do Controlador. Fonte: Autor

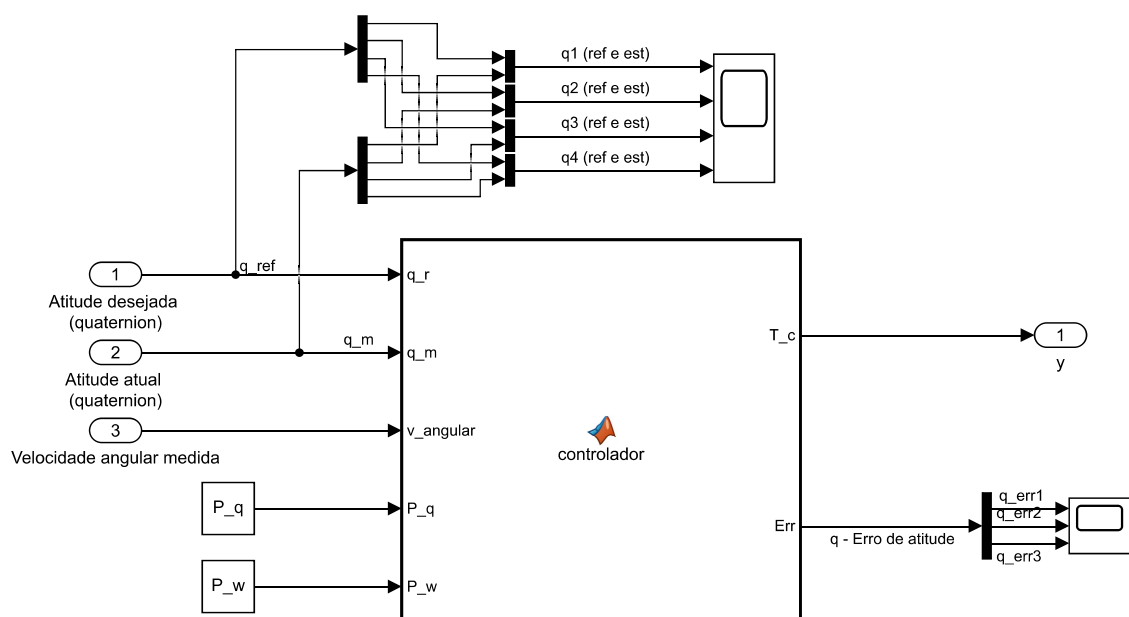


Figura 18 – Bloco do Controlador de Apontamento. Fonte: Autor

## 6.2 Bloco do Atuador

Assim como mostrado na figura 11, o bloco do atuador recebe como entrada o torque de controle e dá como saída a velocidade angular do satélite. Para isso, o torque de controle é dividido pelo momento de inércia das rodas de reação, a fim de virar a taxa de variação da velocidade angular, e integrado para se ter a velocidade angular de referência para os motores BLDC, como pode ser visto na figura 19, seguindo a equação 3.38, a fim de gerar o sinal PWM para controlar a velocidade dos motores BLDC por meio da ESC (AGUIAR et al., 2021). Por fim, pela velocidade angular dos motores é calculado o momento angular dos atuadores, pelo produto do momento de inércia das rodas de reação, e pela derivada do momento angular é computado o torque dos atuadores.

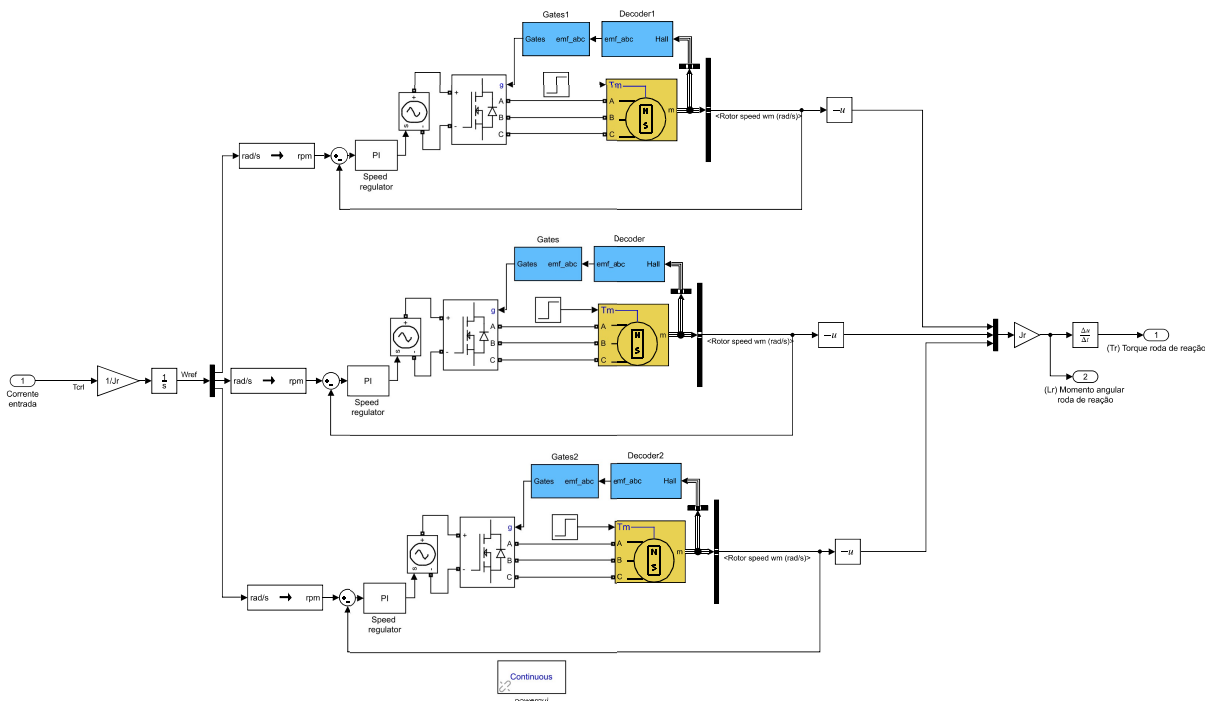


Figura 19 – Modelo do Atuador. Fonte: Autor

## 6.3 Bloco de Dinâmica

O modelo da dinâmica foi implementado simplesmente como uma formulação em diagrama de blocos da equação 3.13, recebendo como entradas do atuador: o torque; e o momento angular, utilizando o momento de inércia inicializado no código do anexo A.1, assim como a velocidade angular inicial, como pode ser visto na figura 20, não sendo considerados torques de perturbações, como pode ser visto no bloco de torque externo, com um vetor nulo.

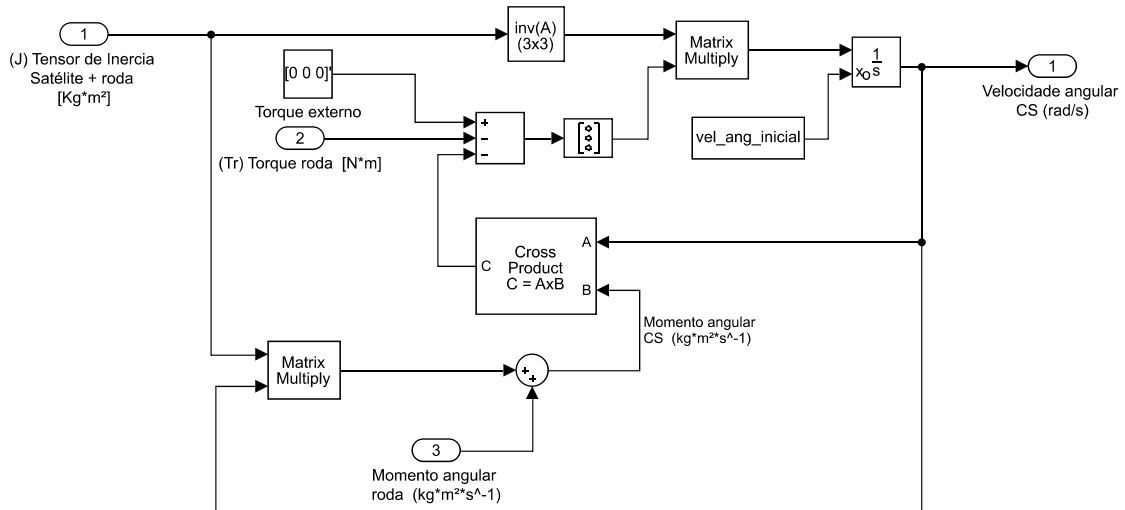


Figura 20 – Modelo da Dinâmica. Fonte: Autor

## 6.4 Bloco de Cinemática

O bloco da cinemática recebe a velocidade angular do satélite e calcula a sua atitude em quatérnios a fim de gerar uma animação do movimento, assim como calcular o vetor solar e o magnético medidos no referencial girante do corpo em relação ao LVLH, como mostrado na figura 21, de forma semelhante ao bloco apresentado na figura 9. Como pode ser visto na figura 22, os quatérnios de atitude são calculados por meio da equação 3.7, abrindo-se os produtos matriciais e igualando-se as componentes, sendo utilizada uma convenção diferente da desse trabalho, trocando-se a ordem com componente escalar do quatérnio, sendo o primeiro ao invés do quarto, a fim de utilizar a função do Simulink de rotação de um vetor por um quatérnio, que utiliza essa notação.

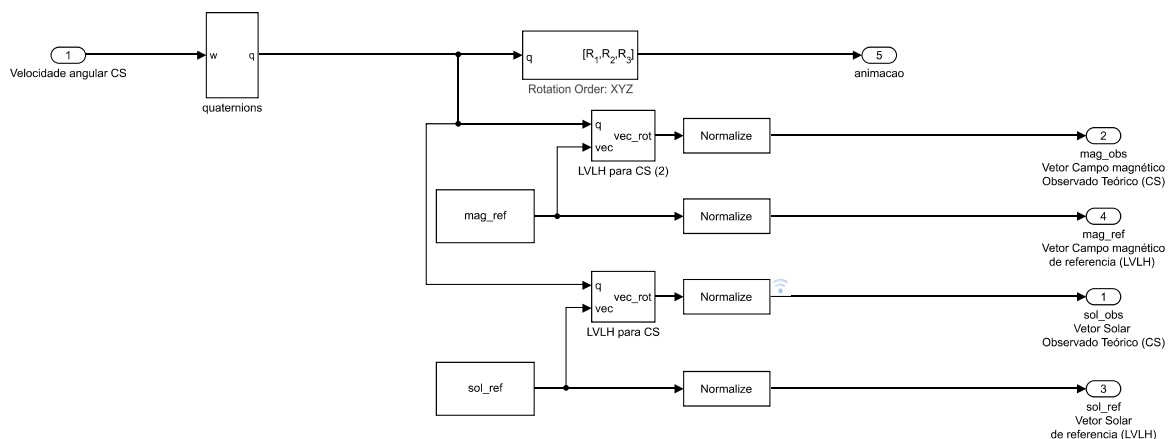


Figura 21 – Modelo da Cinemática. Fonte: Autor

As condições iniciais de orientação do satélite são adicionadas nos blocos integradores da figura 22, sendo inicializados em ângulos de Euler e convertidos para quatérnios no código do anexo A.1 por meio da função do anexo A.2.

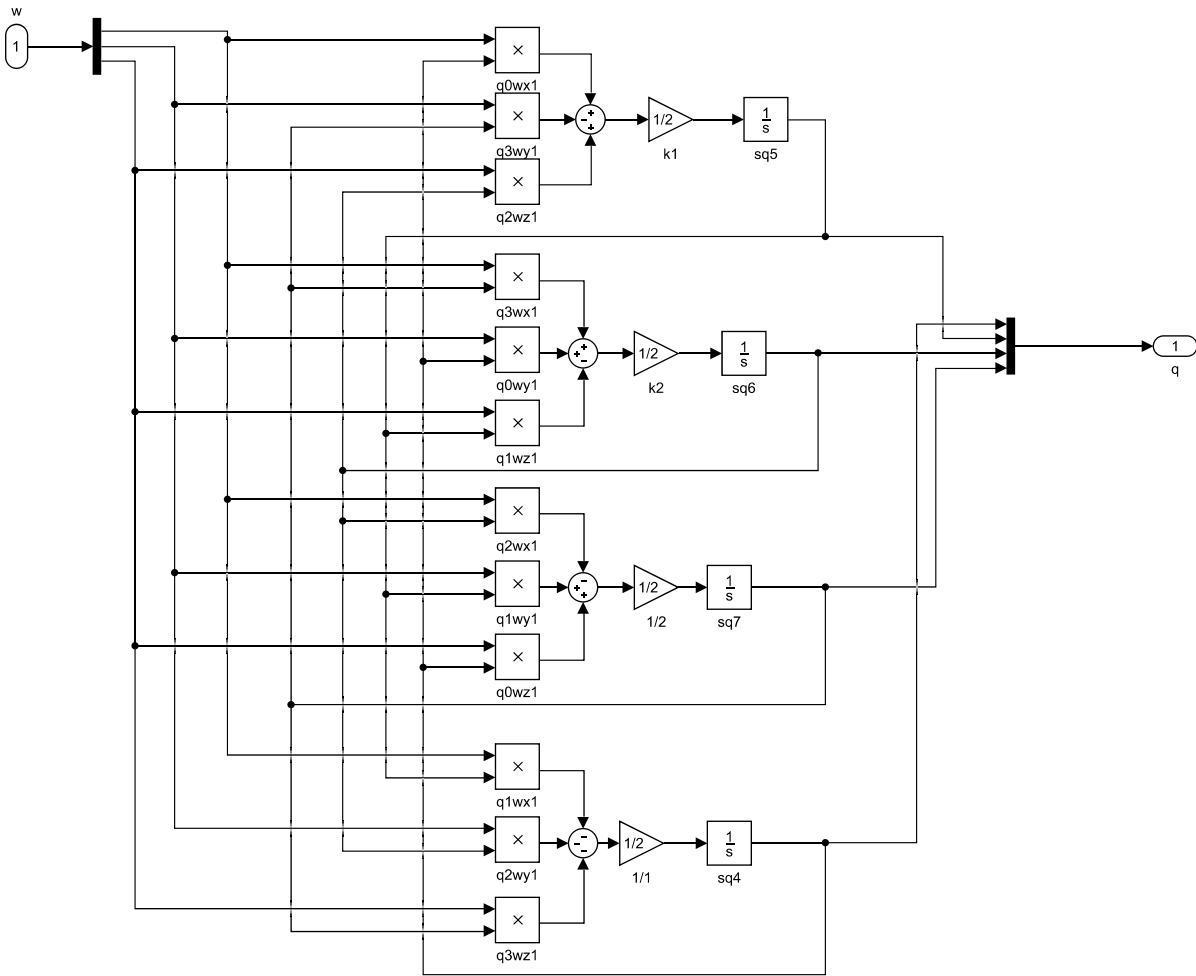


Figura 22 – Bloco de conversão de  $\omega$  para  $q$ . Fonte: Autor

## 6.5 Bloco dos Sensores

Para simular o ruído dos sensores, a fim de aplicar os estimadores para sua filtragem, os sinais medidos são retirados dos respectivos blocos. A velocidade angular do satélite é a saída do bloco de dinâmica, medida pelo giroscópio, e o vetor solar e magnético são saídas da cinemática, medidos pelos sensores de luminosidade e pelo magnetômetro. Por meio da adição de um ruído branco de média e variância de acordo com o *datasheet* dos sensores disponíveis, os processos estocásticos envolvidos na medição dos dados pelos sensores são simulados, como mostrado na figura 23. Por fim, a digitalização do sinal é feita de acordo com a quantidade de bits que o sensor utiliza para a medição.

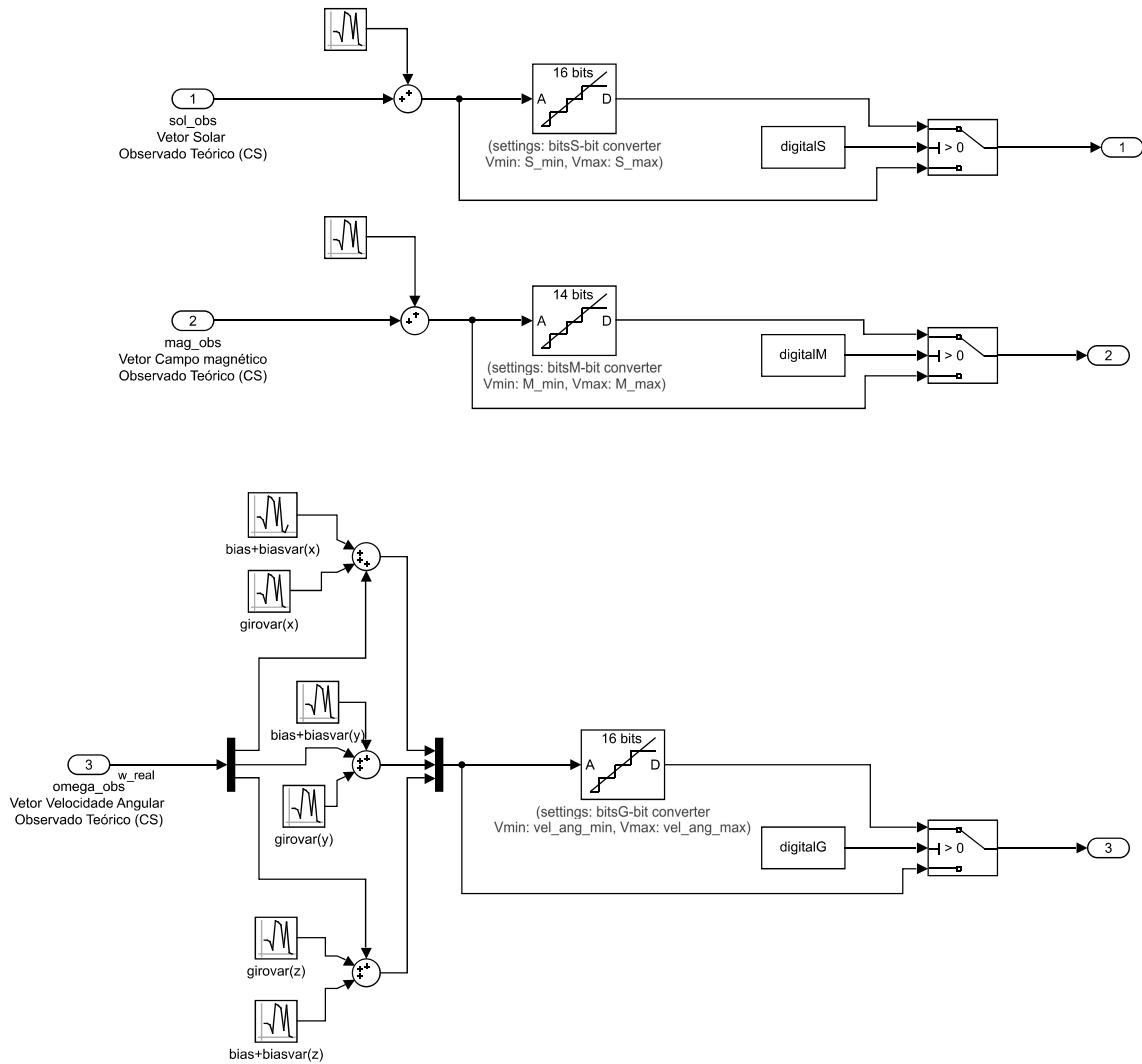


Figura 23 – Modelo dos Sensores. Fonte: Autor

### 6.5.1 Caracterização dos sensores disponíveis

Nesta seção não serão detalhados todos os parâmetros ou razões para seleção dos sensores, sendo o objetivo principal a caracterização do ruído dos sensores capazes de desempenhar a função desejada para o sistema de estimação. Apesar da possibilidade de simular os circuitos responsáveis pelas medições, esse nível de complexidade não é necessário para a comparação dos filtros, sendo suficiente a simulação dos efeitos estocásticos via adição de ruído, e os efeitos de digitalização no caso dos sensores digitais.

#### 6.5.1.1 Sensores de luminosidade

O sensor selecionado para o projeto do GAMASAT-1 foi o BH1750FVI, um sensor digital de 16 bits com protocolo de comunicação serial (I<sup>2</sup>C), sensível principalmente ao espectro visível (400 a 700 nm), com baixa sensibilidade para o infravermelho térmico, e capaz de medir luminosidades entre 0.11 100000 lx, e variação da medição de  $\pm 20\%$ , de acordo com o *datasheet* (ROHM CO, 2011).

Os outros sensores cogitados foram o ARD2-2062, sensível a faixa do ultra violeta (200 a 370 nm), com resolução de  $\pm 1$  índice UV de acordo com seu *datasheet* ([WILTRO-NICS RESEARCH PTY. LTD., 2006](#)), e o BPW21, sensível as faixas de 350 a 820 nm e com variância de 0.0005, com potência equivalente de ruído de  $0.0074 \text{ pWHz}^{-\frac{1}{2}}$ , de acordo com seu *datasheet* ([OSRAM OPTO SEMICONDUCTORS, 2016](#)).

Um fator relevante para a escolha final dos sensores é a faixa do espectro sensível não poluído pelos principais cumprimentos de onda albedo da Terra e da Lua, mas ainda na faixa de emissão do Sol. Outros fatores relevantes são as características direcionais do sensor, assim como sua resposta espectral, a fim de converter corretamente os valores de tensão dos sensores em medições de luminosidade.

Para os fins dessa simulação, convertendo-se os ruídos para as mesmas unidades, um desvio padrão entre 0.03 e 0.2 lx é razoável em condições ideais com sensores pequenos e acessíveis economicamente. Existem sensores mais precisos no mercado, porém maiores e/ou mais caros. Assim, um intervalo de variância entre 0.0005 e 0.04 será considerado na comparação dos filtros.

#### 6.5.1.2 Magnetômetro e giroscópio

Como mencionado anteriormente, convém o uso de módulos inerciais para medição do vetor magnético e da velocidade angular, devido a possibilidade de uso da correlação entre os sinais do acelerômetro, do giroscópio, e do magnetômetro para pré-filtragem dos sinais.

O módulo escolhido para o GAMASAT-1 foi o MPU-9250, que, de acordo com seu *datasheet* ([INVENSENSE INC., 2016](#)), é um sensor digital com protocolo de comunicação serial (I<sup>2</sup>C). Seu giroscópio mede a velocidade angular em 3 eixos ortogonais dextrogiros, podendo medir velocidades angulares nos intervalos de  $\pm 250^\circ/s$ ,  $\pm 500^\circ/s$ ,  $\pm 1000^\circ/s$ , ou  $\pm 2000^\circ/s$  nos seus 16 bits, com um ruído RMS de  $0.1^\circ/s$  RMS, e seu magnetômetro mede por efeito Hall o campo magnético nos mesmos 3 eixos, podendo medi-lo  $\pm 4800 \mu\text{T}$  com 14 bits, com resolução de  $0.6 \mu\text{T}/\text{LSB}$ .

Assim, será considerada uma variância entre 0.005 e  $0.015^\circ/s$  para o giroscópio, e de 0.01 a  $0.36 \mu\text{T}$  para o magnetômetro.

## 6.6 Bloco da TRIAD

A TRIAD é utilizada como uma referência para a atitude real, recebendo dados ideais, ou seja, não corrompidos pelo processo de medição, devido a sua simplicidade de implementação. Seu seu bloco para simulação está disposto na figura 24, e o código de implementação segue no anexo A.4. Seria possível comparar a estimação da TRIAD



aplicando o mesmo bloco com o recebimento de dados dos sinais de medição corrompidos, sendo esperado um desempenho pior que o do EKF e o do UKF com ruídos não desprezíveis.

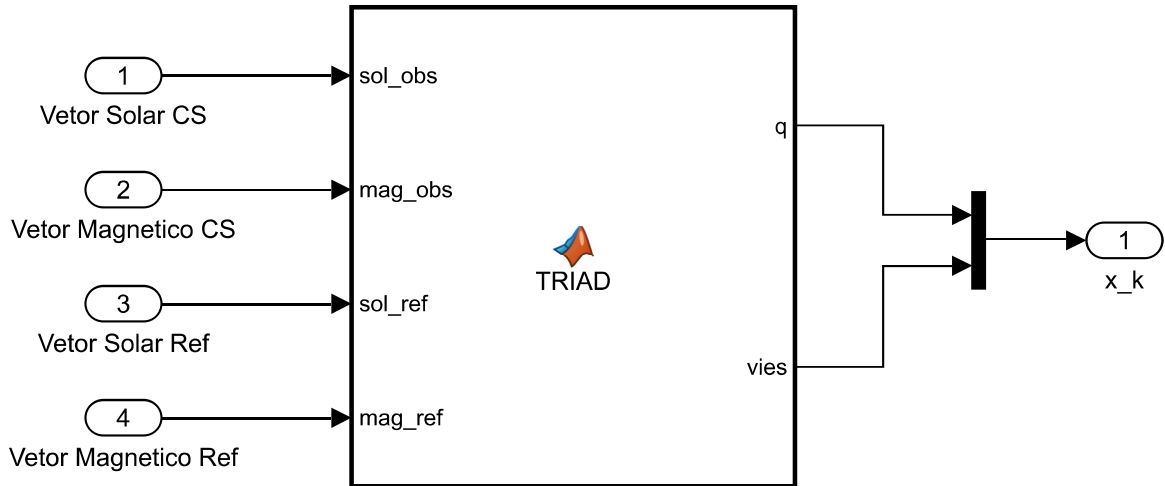


Figura 24 – Modelo da determinação de atitude via TRIAD. Fonte: Autor

## 6.7 Bloco do Filtro de Kalman Estendido

O filtro de Kalman Estendido recebe o vetor solar e o magnético, medidos no referencial do corpo e os conhecidos no LVLH (portas 2,3,4, e 5), assim como a velocidade angular do satélite (porta 1), o estado estimado no instante anterior ( $\hat{x}$ ), a covariância estimada no instante anterior ( $P_{est}$ ), assim como a matriz de ruído do processo de medição ( $R_k$ ) e do modelo do sistema ( $Q$ ), o período de amostragem ( $dt$ ), e a matriz de propagação do ruído do processo ( $G$ ), como pode ser visto na figura 25. Tendo como saída o estado estimado, e o vetor de medidas estimado, para se computar o resíduo.

O código referente ao bloco do EKF é apresentado no anexo A.5.

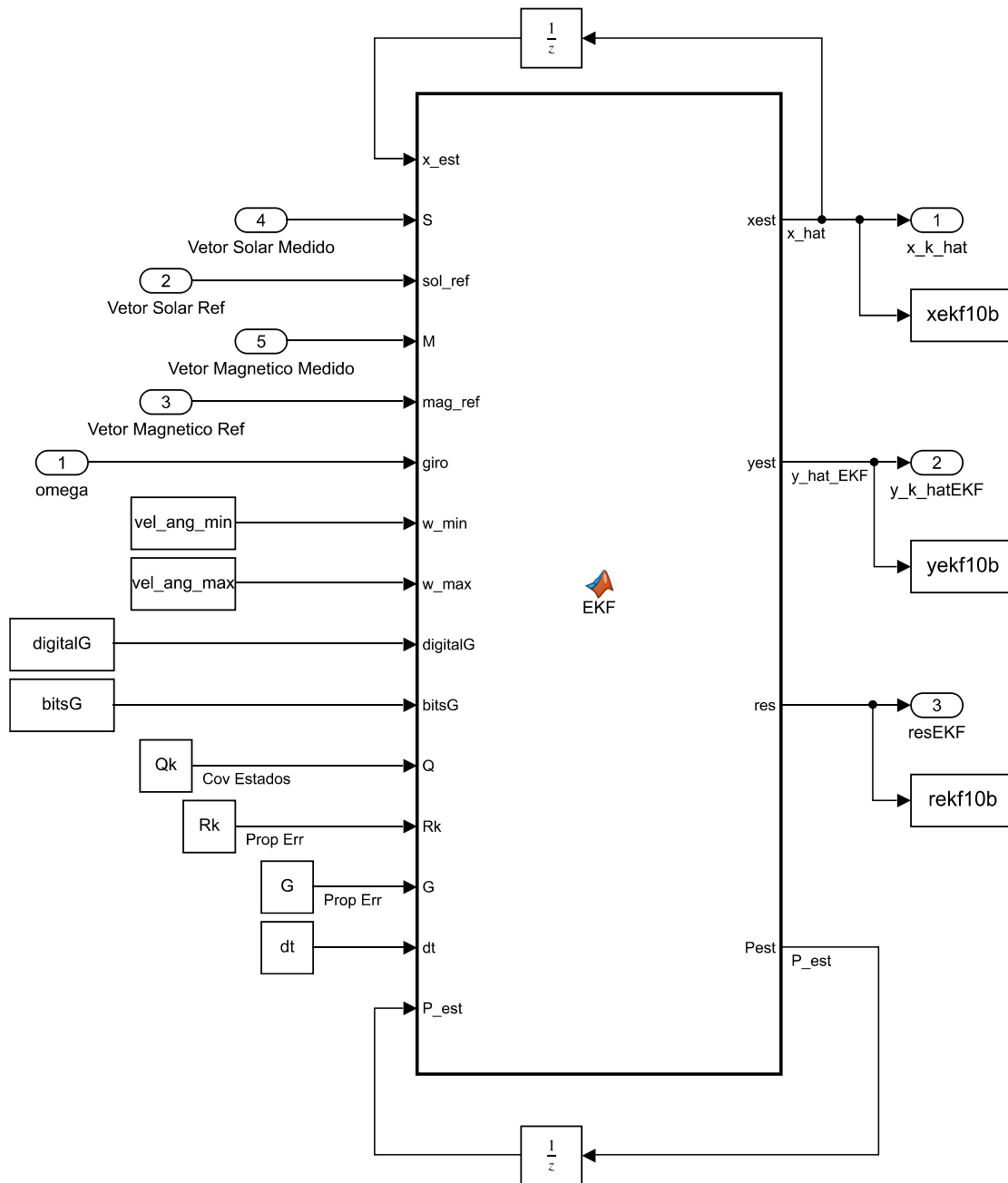


Figura 25 – Modelo da estimação de atitude pelo EKF. Fonte: Autor

## 6.8 Bloco do Filtro de Kalman *Unscented*

O filtro de Kalman *Unscented*, além das portas do EKF, possui outros parâmetros associados à transformação *unscented*, como os pesos para a média ponderada dos pontos sigma, o numero de estados para determinar a quantidade de pontos sigma, e o tamanho do vetor de medidas, como mostrado na figura 26.

O código referente ao bloco do UKF é apresentado no anexo A.6.

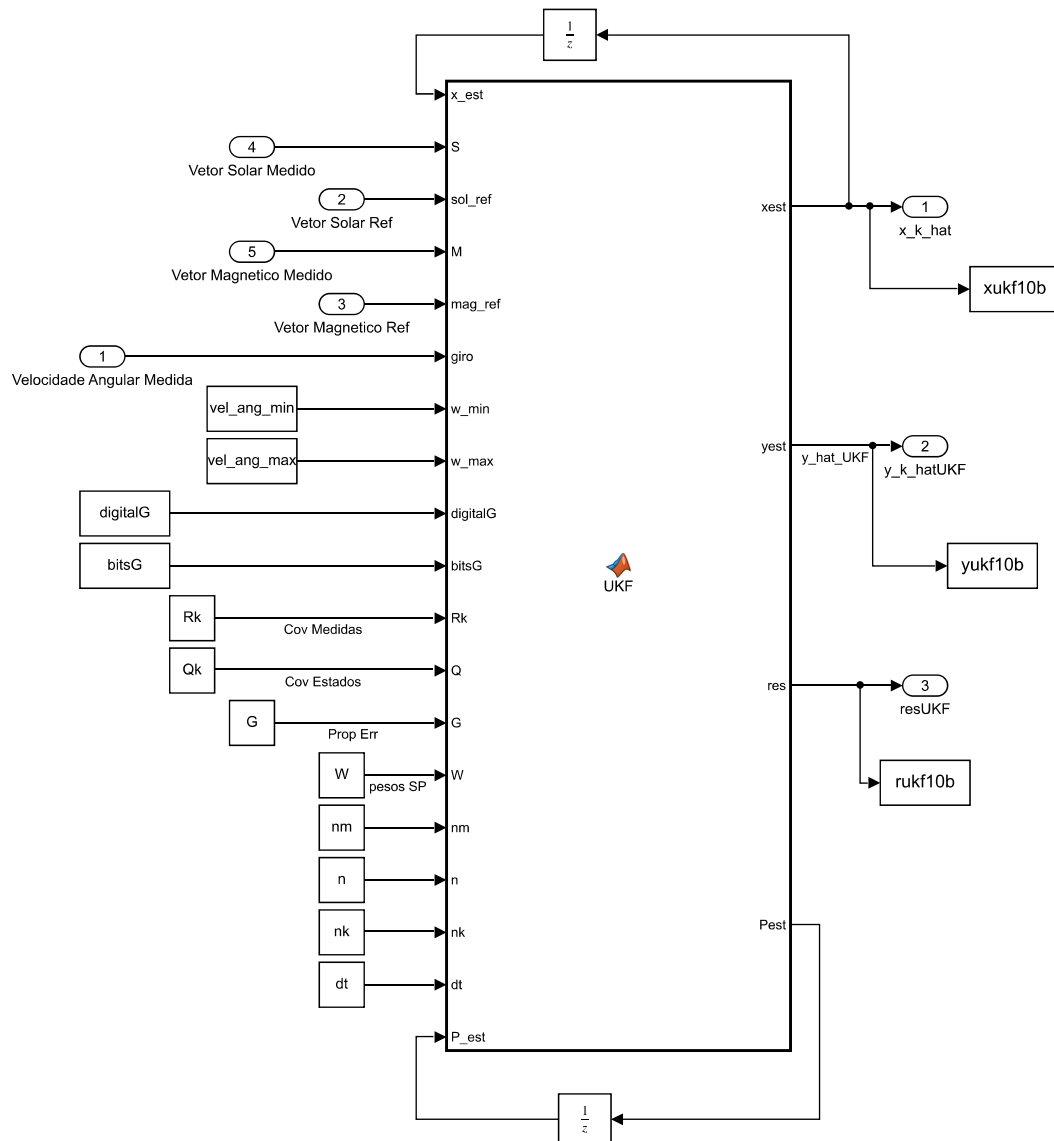


Figura 26 – Modelo de atitude pelo UKF. Fonte: Autor



## 7 Resultados

Foram separados 4 casos, de acordo com os intervalos de variância delimitados na seção 6.5.1, apresentados na tabela 1. Em que o cenário A representa o cenário correspondente ao valor superior do intervalo de variâncias para todos os sensores, e o D representa o valor inferior do intervalo. Como os dados do giroscópio são utilizados na fase de previsão do estado, e os dados do vetor de medidas (magnetômetro e sensores luminosos) são utilizados na atualização do estado, também é relevante ver o efeito da mudança da variância em ambos os filtros. Ambos foram inicializados com um erro de  $5^\circ$  na atitude e de 20% na inicialização da covariância, pois é esperado que devido a implementação da formulação aditiva dos filtros, uma inicialização ruim pode causar divergências. Então, o cenário de inicialização ruim será testado de forma independente.

Cenário	Variância dos sensores		
	Giroscópio ( $\sigma_G$ )	Vetor Solar ( $\sigma_S$ )	Vetor Magnético ( $\sigma_M$ )
A	0,15	0,2	0,6
B	0,07	0,2	0,6
C	0,15	0,02	0,1
D	0,07	0,02	0,1

Tabela 1 – Separação dos cenários simulados de acordo com os sensores. Fonte: Autor

Para todos os cenários, foram feitas 10 simulações, e por meio delas foram avaliados quatro fatores:

- Erro dos estados ( $\mathbf{Err}_x$ ): Definido como simplesmente a média da diferença entre o estado real, e por meio de seu módulo o erro RMS, e um erro médio RMS;
- Erro de estimação de atitude ( $\mathbf{Err}_{att}$ ): Diferentemente de ângulos de Euler, a diferença entre os quatérnions não possui um significado de erro de estimação de atitude. Para comparar o erro de estimação, foi utilizado o quatérnion de erro, em que suas primeiras 3 componentes definem o erro de estimação ao longo de cada eixo, definido no capítulo 4 pela equação 4.10. Para auxílio na visualização, ela relação ângulo-eixo de Euler, foi calculado o ângulo de Euler associado a rotação do quatérnion de erro pelo cosseno inverso da quarta componente do quatérnion;
- Erro de previsão do vetor de medidas ( $\mathbf{Err}_y$ ): Dado pela diferença entre o vetor de medidas real, e o vetor de medidas previsto pelo filtro.

- Resíduo do filtro (**Res**): De forma semelhante ao erro de previsão do vetor de medidas, é a diferença entre o vetor medido pelos sensores - agora com a adição de ruído - e o vetor de medição previsto.

Para **Err<sub>x</sub>** serão feitos 7 gráficos, com a diferença entre o estado real e o estimado pelos filtros, de forma que refletindo no eixo  $x$  as partes negativas do gráfico é possível se visualizar o erro RMS, e por meio de uma média ao longo do tempo do erro RMS é computado o erro médio dos filtros para cada estado.

Para **Err<sub>att</sub>** foram plotados 3 gráficos relativos ao erro de atitude, e um gráfico do ângulo de Euler. De forma semelhante ao **Err<sub>x</sub>**, o erro RMS pode ser visualizado por meio da reflexão dos valores negativos em torno do eixo  $x$ , e por meio da média ao longo do tempo é obtido o erro médio de atitude dos filtros, assim como o ângulo de Euler médio do erro. Esse erro foi calculado pois o erro de cada componente dos quatérnions não possui o significado físico de um erro de estimação de atitude.

**Err<sub>y</sub>** e **Res** são comparados para identificar o quanto a fase de atualização está corrigindo os estados comparado a real diferença entre o vetor de medidas real e sua previsão. Quanto mais o **Res** se aproximar do **Err<sub>y</sub>** somado de um ruído, melhor é a previsão da medição do filtro, e mais confiável o resíduo na fase de atualização.

Todos os gráficos apresentados seguirão o padrão de sobrepor os resultados de ambos os filtros no mesmo gráfico a fim de mais facilmente se comparar o desempenho dos filtros, com o resultado do UKF em azul e do EKF em laranja, com uso de escalas diferentes apenas nos resultados relativos a comparação do resíduo com o erro de previsão da medição, devido as diferentes ordens de magnitude dos resultados.

## 7.1 Cenário A - Variâncias máximas

### 7.1.1 Erro dos estados

Para o caso de variâncias máximas em todos os sensores com uma inicialização próxima ao estado real, os filtros se comportaram de forma muito semelhante na estimação de atitude. Analisando-se os gráficos da figura 27, é possível ver um desempenho ligeiramente melhor do EKF nos quatérnions e ligeiramente melhor do UKF no viés, que pode ser visto na tabela 2, com o erro de cada componente do estado estimado.

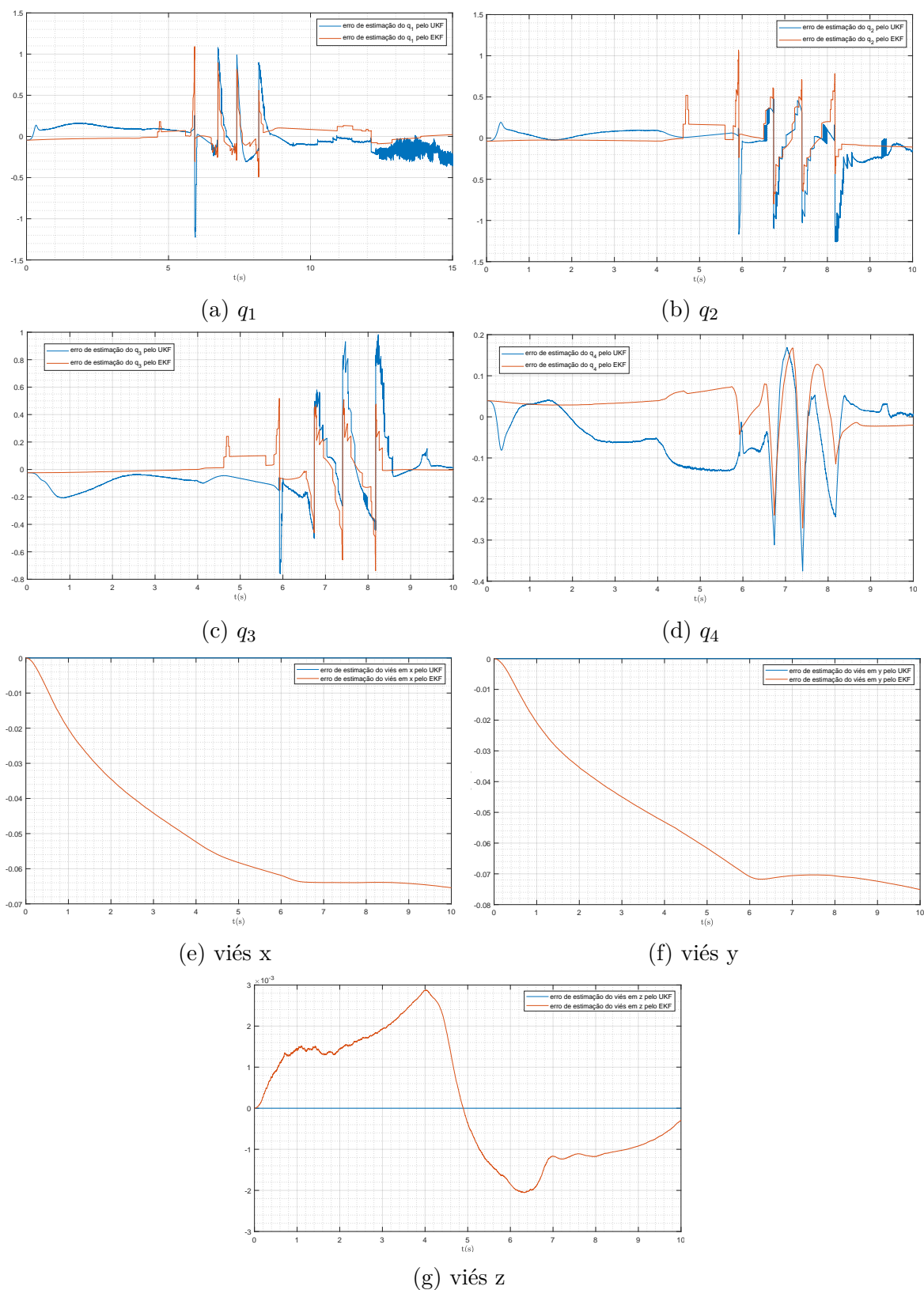


Figura 27 – Erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor

A	EKF	UKF
$q_1$	0,0676	0,1305
$q_2$	0,1300	0,1749
$q_3$	0,1228	0,2803
$q_4$	0,0417	0,0807
viés x [rad/s]	0,0572	0
viés y [rad/s]	0,0640	0
viés z [rad/s]	0,0011	0

Tabela 2 – Média ao longo do tempo do erro RMS dos filtros no cenário A. Fonte: Autor

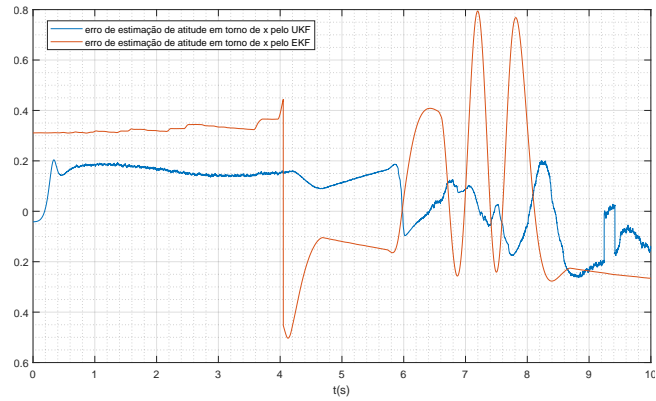
### 7.1.2 Erro de atitude

Apesar do erro inferior dos quatérnions pelo EKF mostrados na tabela 2, a métrica utilizada para o erro de estimação de atitude é mostrada na tabela 3. O ângulo de Euler do erro de estimação ( $\vartheta$ ) do UKF é muito inferior ao do EKF, como pode ser visto na figura 29, e o erro associado a cada um dos eixos ( $x, y$ , e  $z$ ) de ambos os filtros é bem próximo, como pode ser visto na figura 28 e na tabela 3, e a norma do erro em torno de cada eixo ( $r$ ) dá uma métrica de comparação mais simples para o erro de atitude.

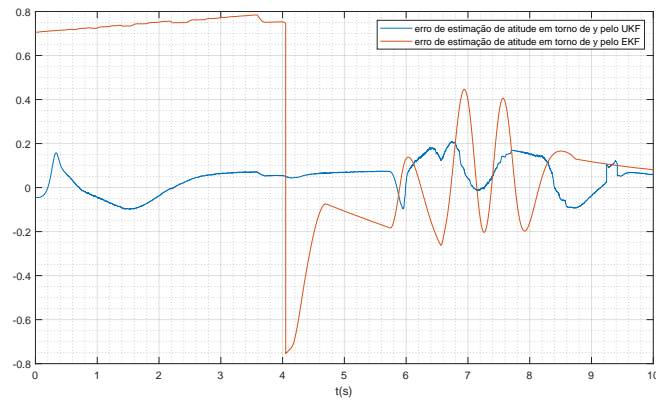
A	EKF	UKF
$x$	0,1122	0,1296
$y$	0,2900	0,0728
$z$	0,0338	0,0671
$r$	0,3128	0,1631
$\vartheta$ [°]	23,1169	7,8087

Tabela 3 – Média ao longo do tempo do erro de atitude RMS dos filtros no cenário A. Fonte: Autor

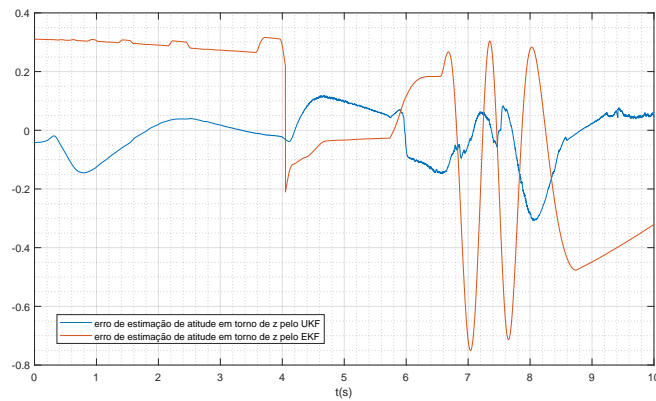




(a) Erro de estimação de atitude em torno do eixo x



(b) Erro de estimação de atitude em torno do eixo y



(c) Erro de estimação de atitude em torno do eixo z

Figura 28 – Erro de estimação de atitude dos filtros. Fonte: Autor

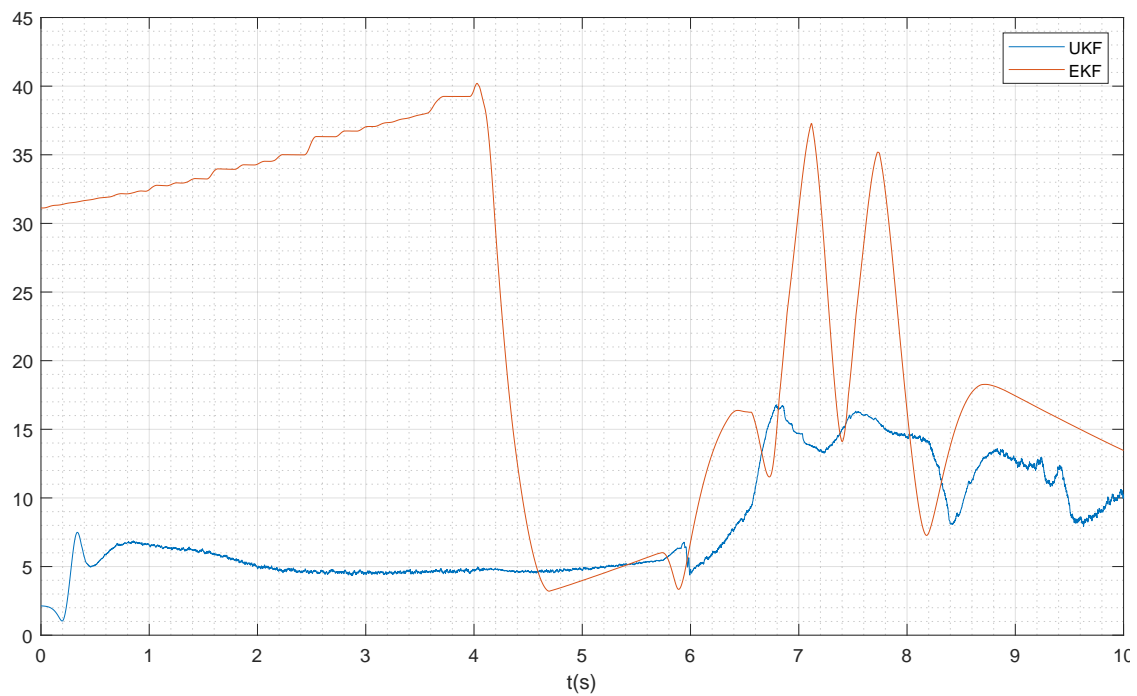


Figura 29 – ângulo de Euler do erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor

### 7.1.3 Erro de previsão do vetor de medidas e resíduos

O resíduo do EKF apresenta um perfil muito diferente do erro de previsão do vetor de medidas, como pode ser visto na figura 30 para o vetor solar e na figura 31 para o vetor magnético, indicando que o resíduo utilizado para atualização leva em conta uma porção maior do ruído em relação ao sinal. Em contraste, uma grande correlação entre o resíduo do UKF e seu erro de previsão do vetor de medidas pode ser observada, e é fácil ver que nos momentos em que o perfil do resíduo difere do erro do vetor de predição das medidas, o erro de estimação aumenta.

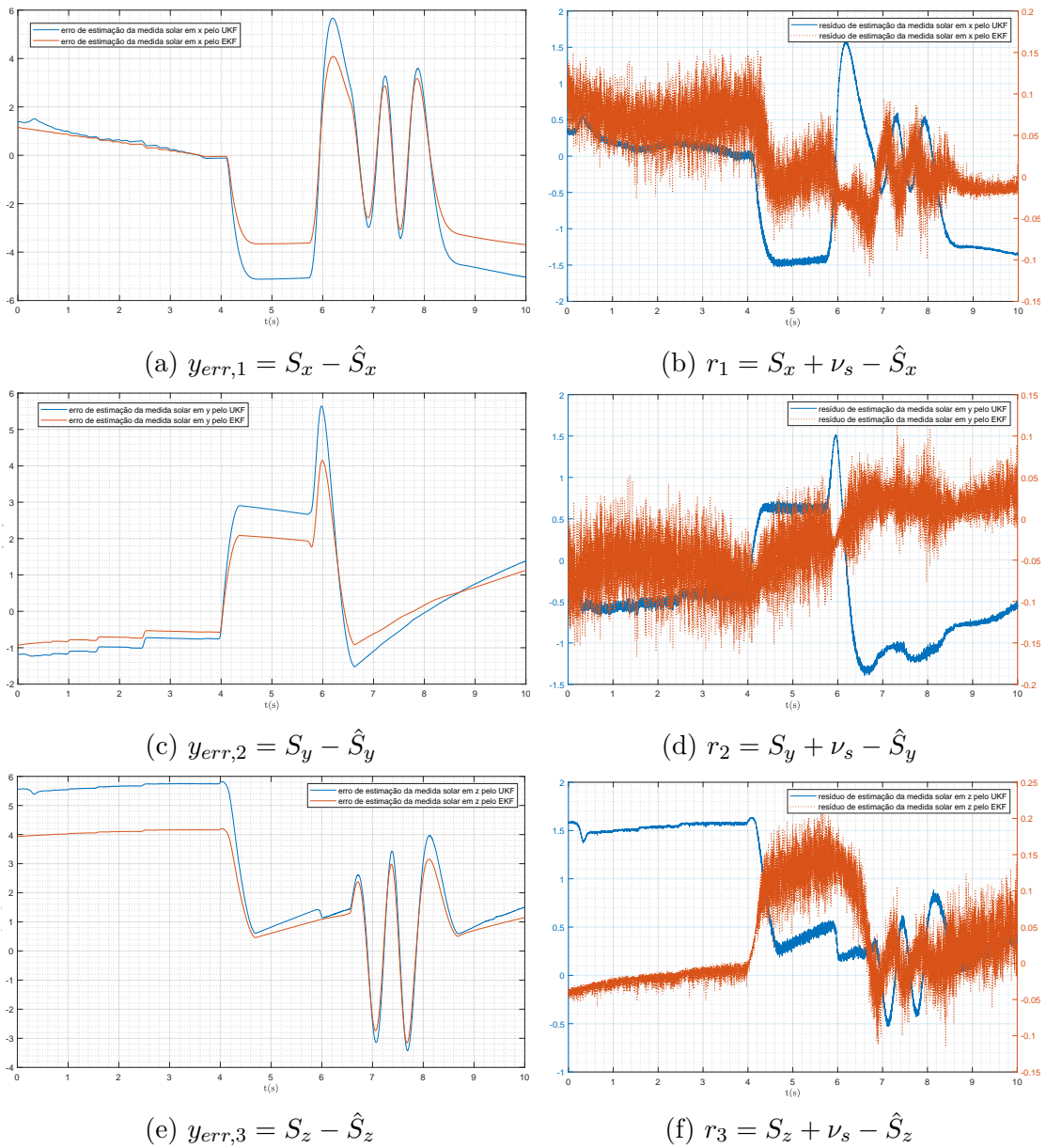


Figura 30 – Erro de estimação do vetor solar dos filtros. Fonte: Autor

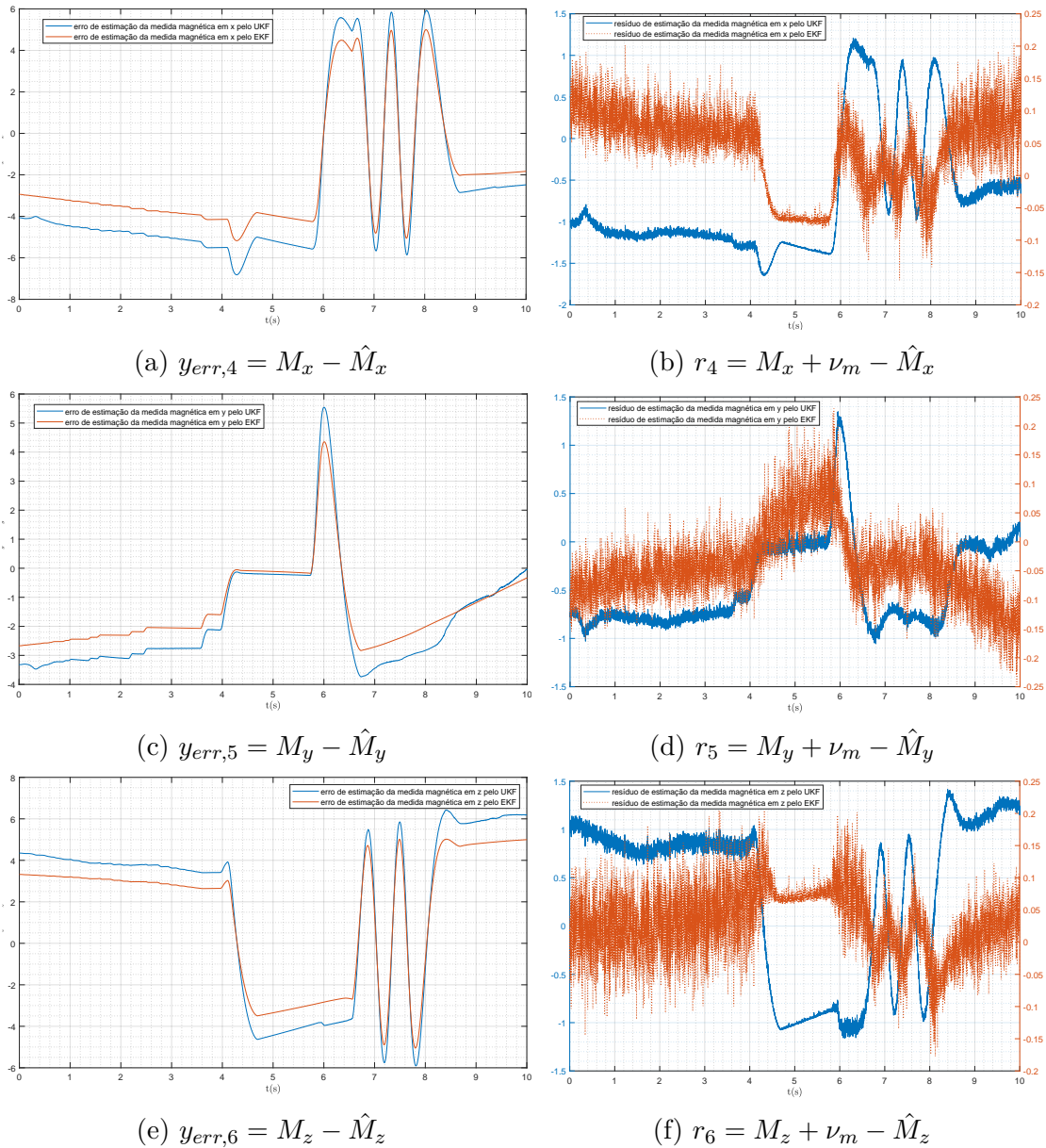


Figura 31 – Erro de estimação do vetor magnético dos filtros. Fonte: Autor

## 7.2 Cenário B - Variâncias máximas de atitude e mínima de giro

### 7.2.1 Erro dos estados

Assim como no cenário anterior, o erro do vetor de estados de ambos os filtros foi bem semelhante, como pode ser visto na figura 32, novamente o erro dos componentes do quatérnio do EKF possuem um erro médio RMS inferior em relação ao UKF (o que não necessariamente se traduz em um erro de estimação de atitude inferior), e o erro de estimação do viés do UKF foi mais uma vez inferior ao erro de estimação do viés feito pelo EKF, porém o uso de um giroscópio mais acurado possibilitou uma estimação mais acurada do viés, como pode ser visto comparando-se as tabelas 2 e 4.

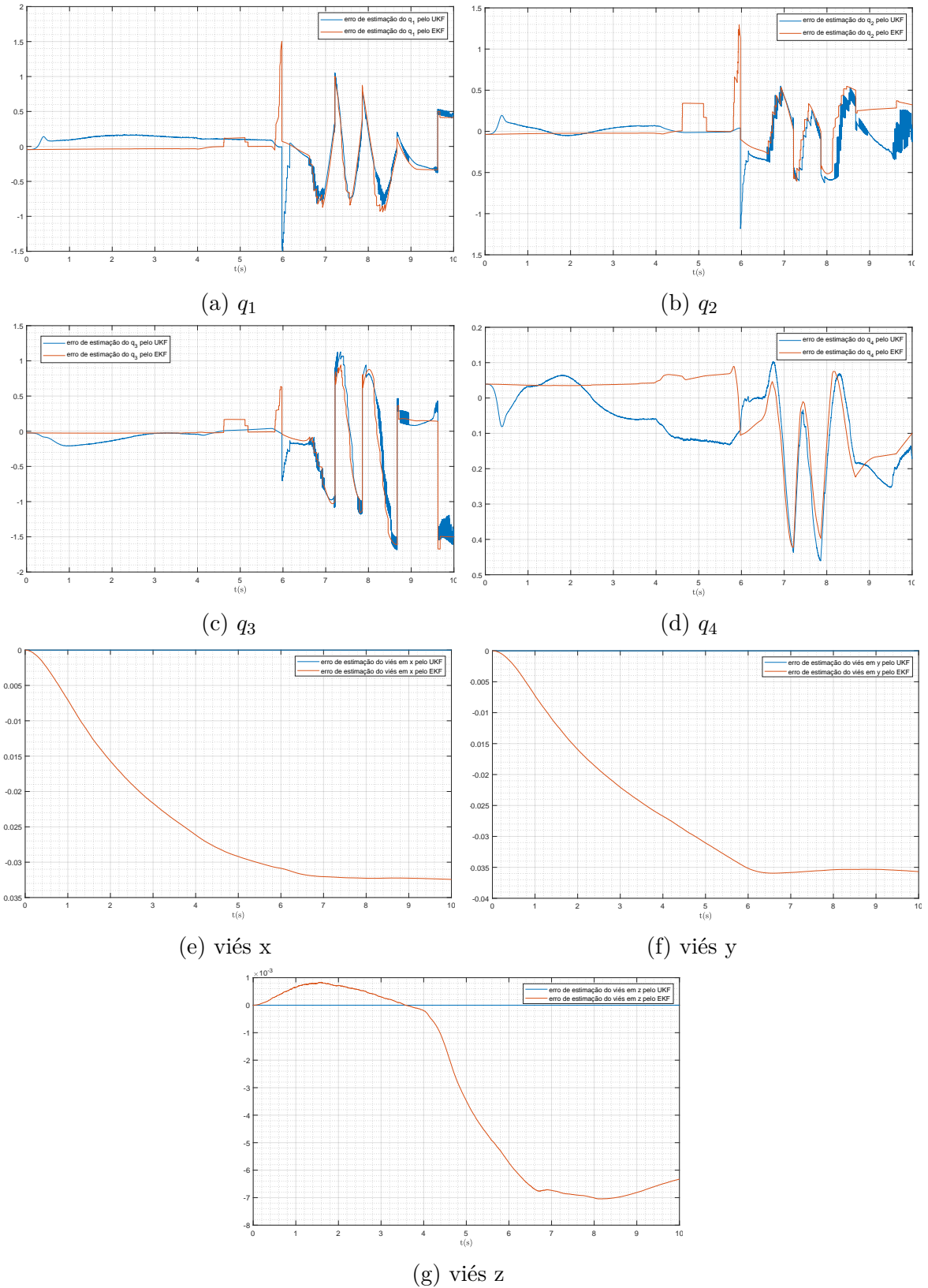


Figura 32 – Erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor

B	EKF	UKF
$q_1$	0,2335	0,2402
$q_2$	0,1977	0,2432
$q_3$	0,3420	0,3957
$q_4$	0,0774	0,0916
viés x [rad/s]	0,0275	0
viés y [rad/s]	0,0302	0
viés z [rad/s]	0,0047	0

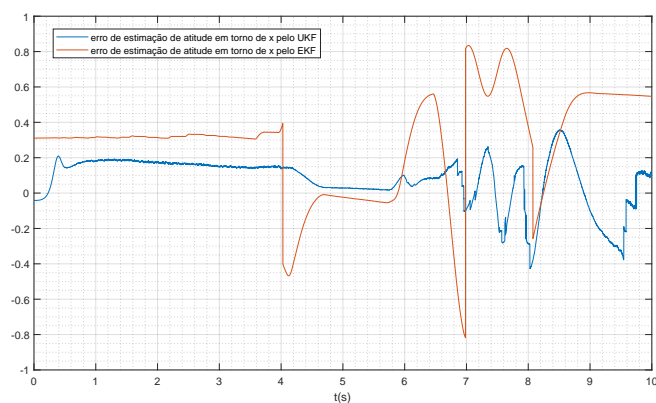
Tabela 4 – Média ao longo do tempo do erro RMS dos filtros no cenário B. Fonte: Autor

### 7.2.2 Erro de atitude

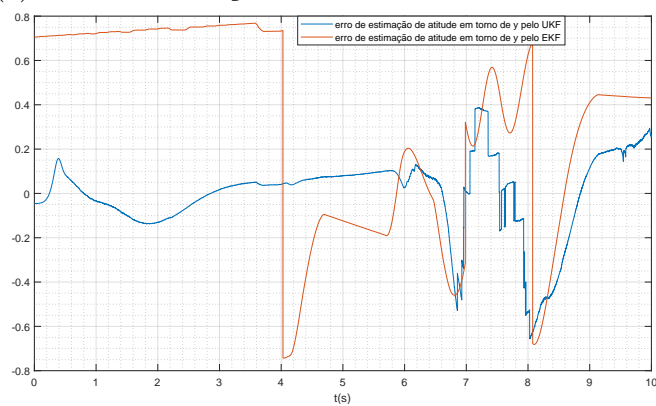
Novamente o erro de atitude do UKF foi inferior ao do EKF, como pode ser visto nas figuras 33 e 34, em grande parte devido a demora para a convergência da estimação do EKF. Analisando a tabela 5 é possível ver a influência da redução do ruído do giroscópio comparando-se com os resultados da tabela 3, não havendo grandes mudanças nos resultados, indicando que para o intervalo de variâncias viáveis para o giroscópio, não há grande influência na fase de atualização de ambos os filtros com apenas a melhoria do giroscópio.

B	EKF	UKF
$x$	0,3486	0,1346
$y$	0,4860	0,1263
$z$	0,2551	0,1318
$r$	0,2268	0,6502
$\vartheta$ [°]	24,7470	11,8233

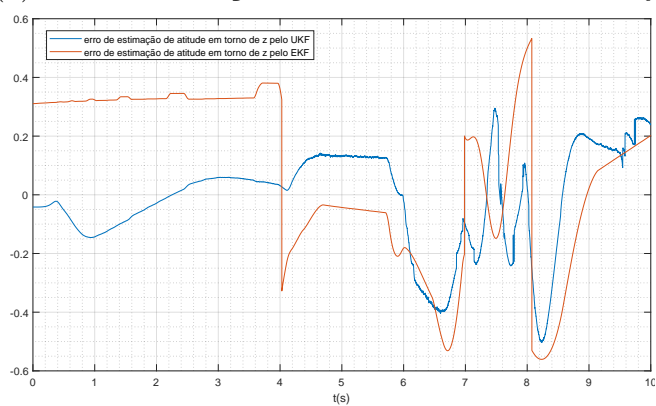
Tabela 5 – Média ao longo do tempo do erro de atitude RMS dos filtros no cenário B. Fonte: Autor



(a) Erro de estimação de atitude em torno do eixo x



(b) Erro de estimação de atitude em torno do eixo y



(c) Erro de estimação de atitude em torno do eixo z

Figura 33 – Erro de estimação de atitude dos filtros. Fonte: Autor

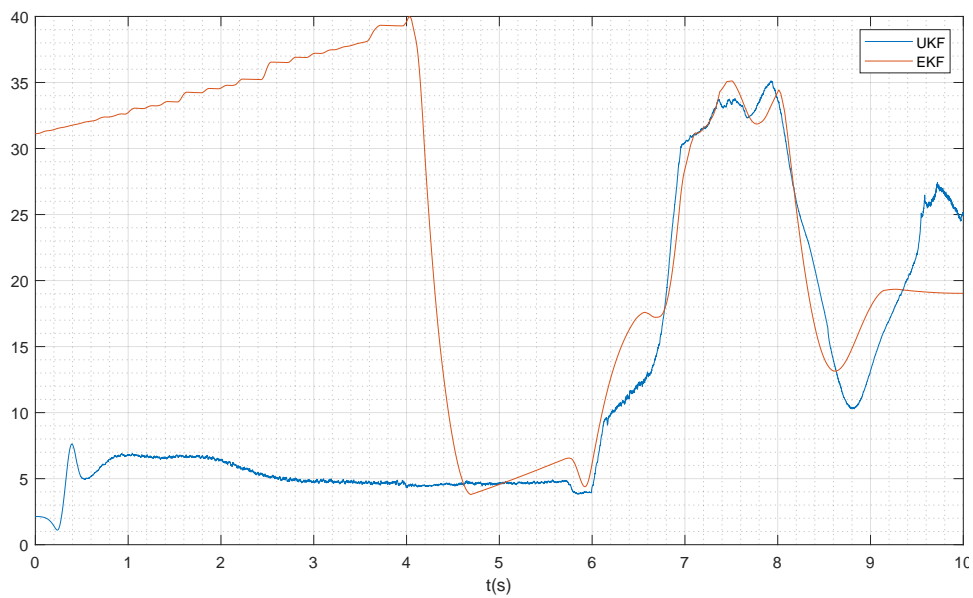


Figura 34 – ângulo de Euler do erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor



## 7.2.3 Erro de previsão do vetor de medidas e resíduos

Como era de se esperar, com os mesmos sensores de atitude utilizados, não houve mudanças significativas no comportamento do erro de previsão de medidas nem no resíduo em relação ao cenário A, como pode ser visto comparando-se as figuras 35 e 30 e as figuras 36 e 31.

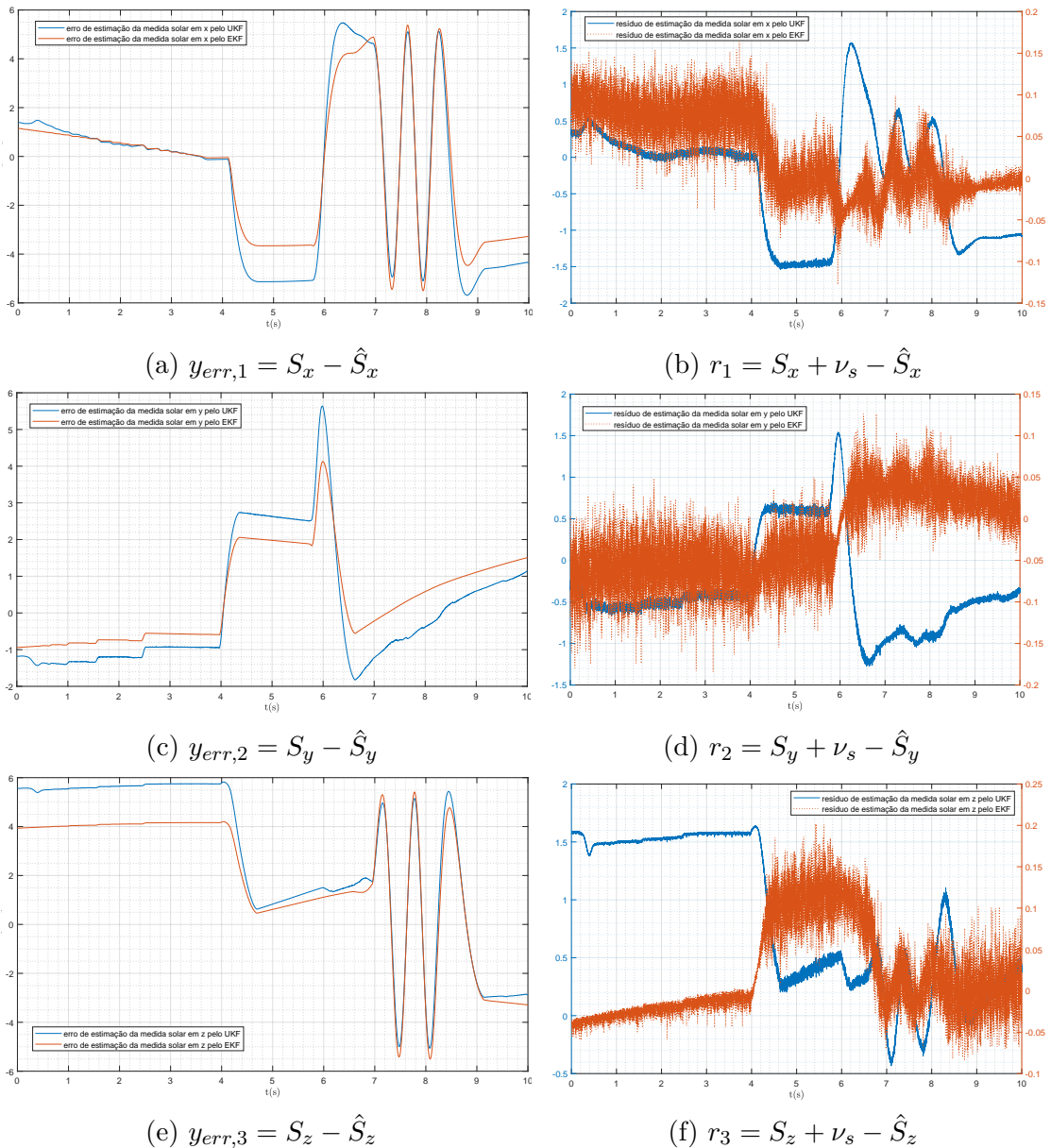


Figura 35 – Erro de estimação do vetor solar dos filtros. Fonte: Autor

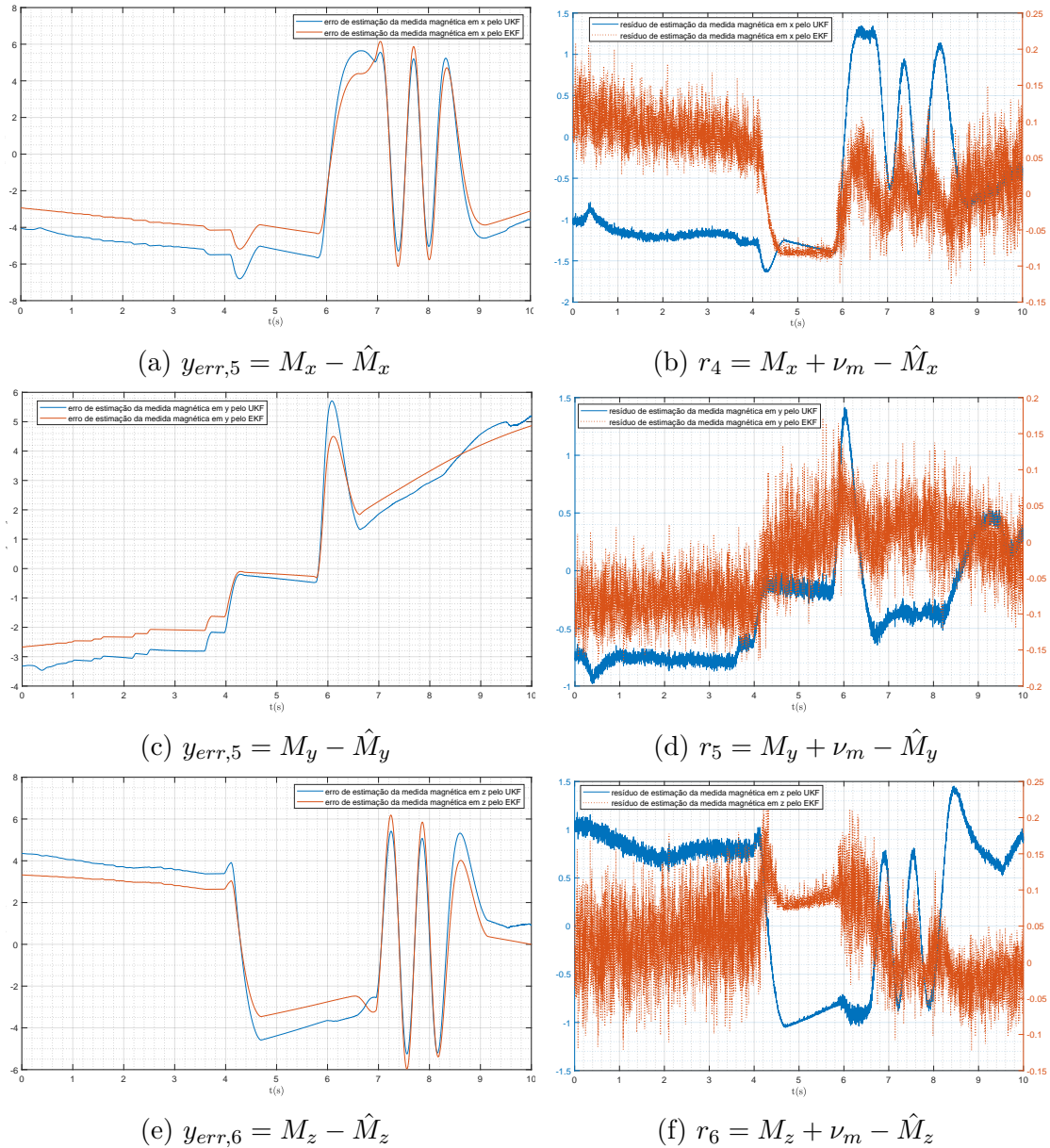


Figura 36 – Erro de estimação do vetor magnético dos filtros. Fonte: Autor

## 7.3 Cenário C - Variâncias máximas de giro e mínimas de atitude

### 7.3.1 Erro dos estados

Aqui pode ser vista a influência de medições mais acuradas para os vetores de determinação de atitude, que atuam na fase de atualização dos estados. Inesperadamente, o aumento da acurácia dos sensores de atitude não teve um grande efeito de melhoria da estimação de atitude para o EKF nem para o UKF. Porém, o erro do UKF foi inferior tanto para as componentes do quatérnion, quanto para o viés em relação ao EKF, como pode ser visualizado na figura 37, assim como na tabela 6.

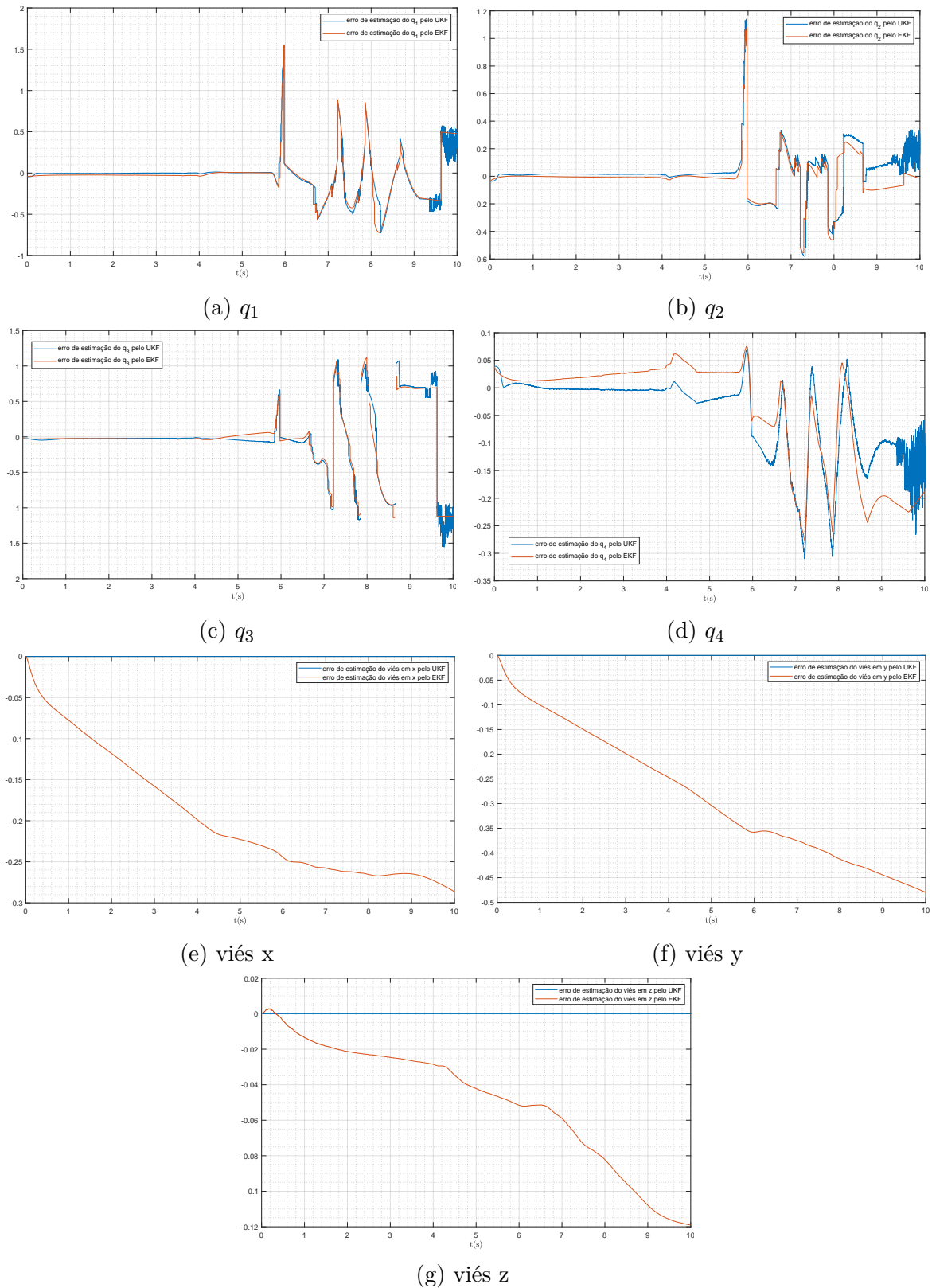


Figura 37 – Erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor

C	EKF	UKF
$q_1$	0,2589	0,2509
$q_2$	0,1047	0,1479
$q_3$	0,3408	0,3245
$q_4$	0,0831	0,0541
viés x [rad/s]	0,2555	0
viés y [rad/s]	0,3829	0
viés z [rad/s]	0,0749	0

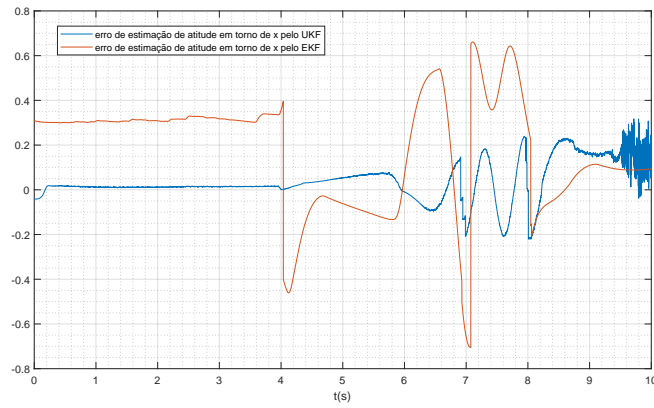
Tabela 6 – Média ao longo do tempo do erro RMS dos filtros no cenário C. Fonte: Autor

### 7.3.2 Erro de atitude

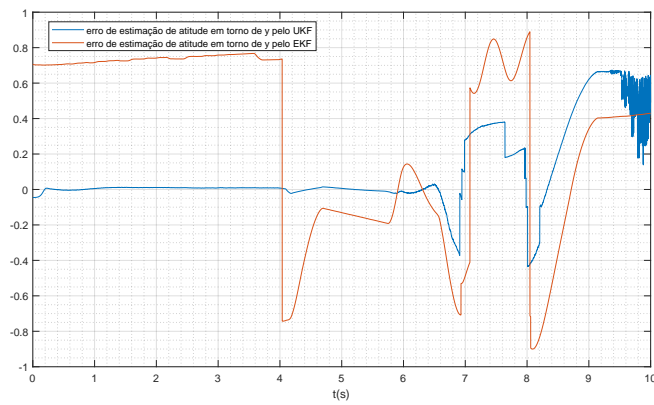
O erro de atitude foi inferior para ambos os filtros se comparados ao cenário B, como pode ser visto ao comparar-se as tabelas 7 e 7, assim como as figuras 38 e 33, e as figuras 39 e 34, indicando uma influência maior da redução do ruído de atitude, sugerindo que a fase de atualização é mais sensível ao ruído que a fase de atualização no intervalo estipulado de variâncias, especialmente no caso do UKF, cuja melhoria dos resultados em relação ao cenário B foi mais pronunciada.

C	EKF	UKF
$x$	0,2586	0,0662
$y$	0,5245	0,1337
$z$	0,2555	0,0780
$r$	0,1684	0,6381
$\vartheta$ [°]	24,2616	8,8893

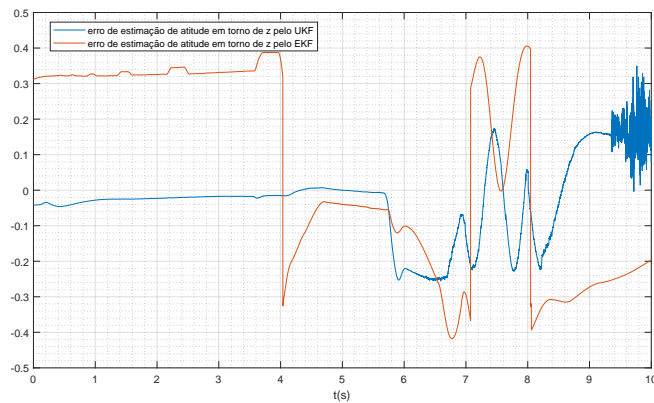
Tabela 7 – Média ao longo do tempo do erro de atitude RMS dos filtros no cenário C. Fonte: Autor



(a) Erro de estimação de atitude em torno do eixo x



(b) Erro de estimação de atitude em torno do eixo y



(c) Erro de estimação de atitude em torno do eixo z

Figura 38 – Erro de estimação de atitude dos filtros. Fonte: Autor

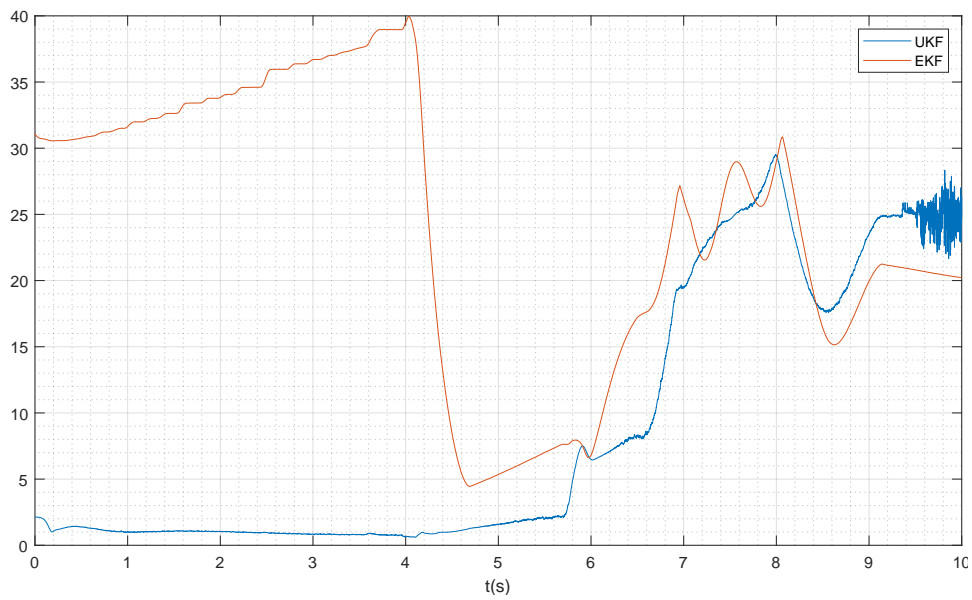


Figura 39 – ângulo de Euler do erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor



### 7.3.3 Erro de previsão do vetor de medidas e resíduos

Com a melhoria dos sensores de atitude do cenário C em relação ao cenário A, a correlação entre o resíduo do EKF e seu erro de previsão do vetor de medidas aumentou, como pode ser visto na figura 40 comparada a figura 30 e na na figura 41 comparada a figura 31.

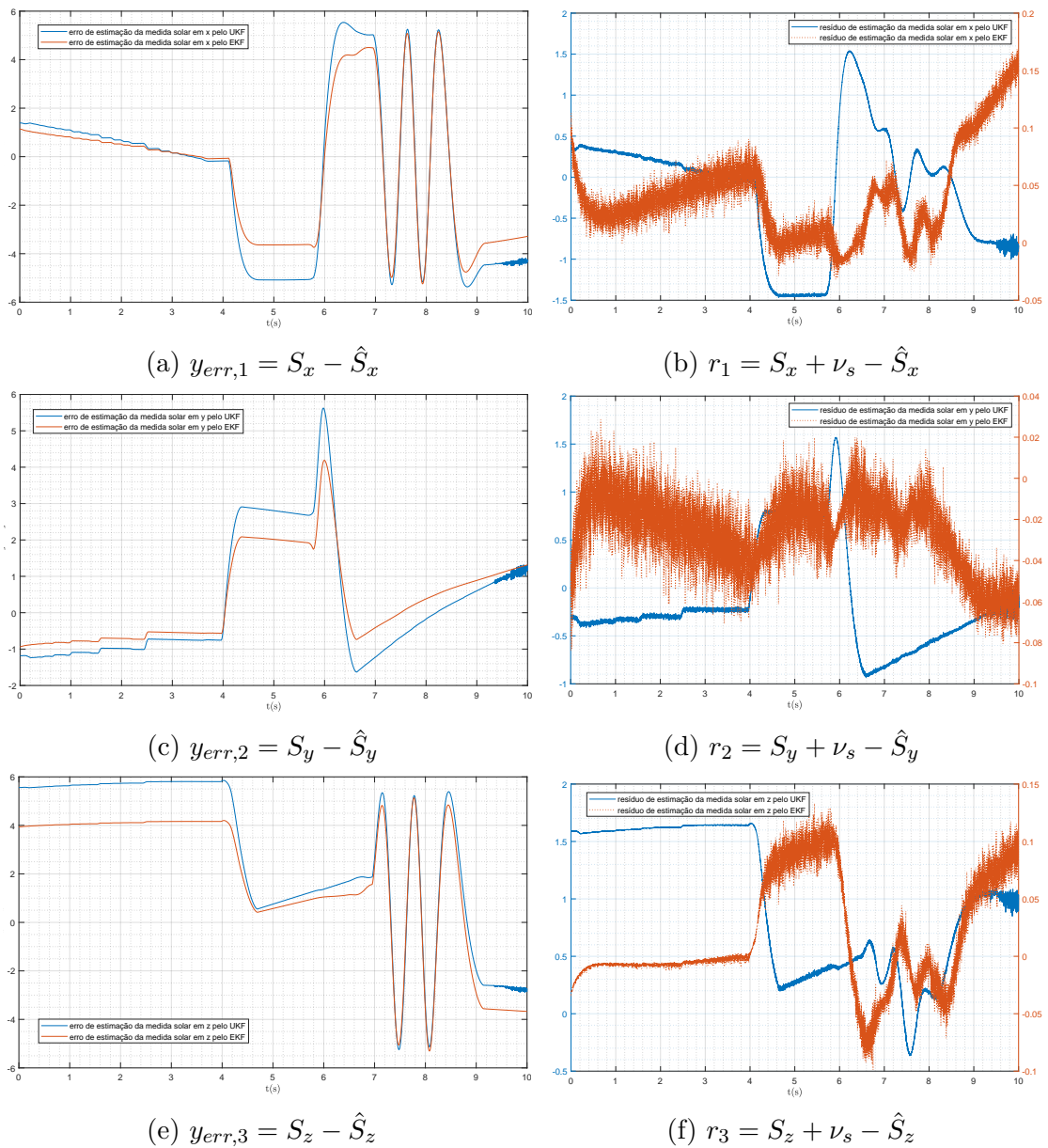


Figura 40 – Erro de estimação do vetos solar dos filtros. Fonte: Autor

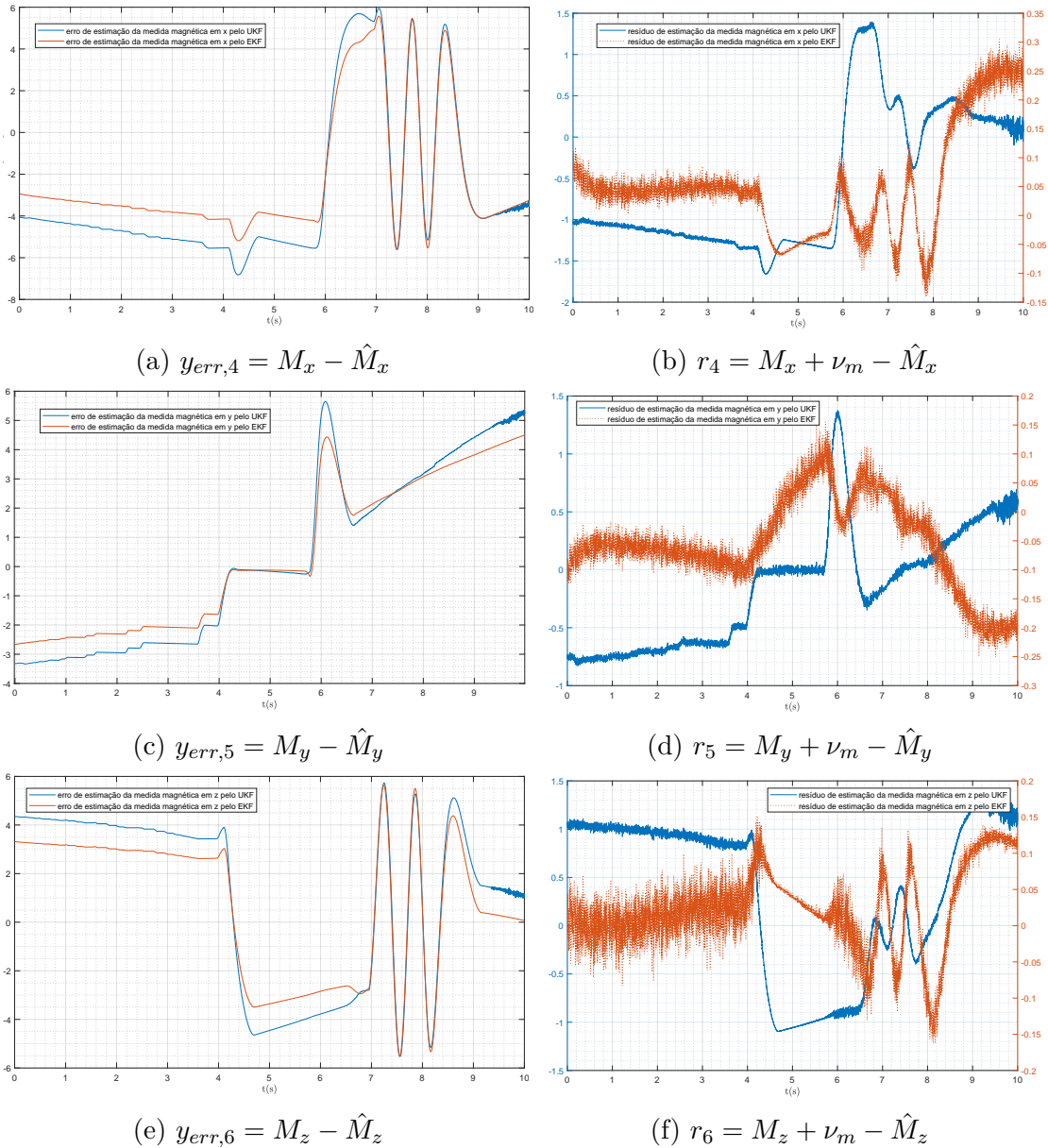


Figura 41 – Erro de estimação do vetor magnético dos filtros. Fonte: Autor

## 7.4 Cenário D - Variâncias máximas de giro e mínimas de atitude

### 7.4.1 Erro dos estados

Com uma redução da variância de todos os sensores, a estimação de ambos os filtros melhorou em diversos aspectos. O erro do EKF no cenário D foi inferior ao erro tanto no cenário B quanto no cenário C, visível comparando-se a tabela 9 com as tabelas 5, e 7, porém diferentemente do esperado, o erro de estimação dos estados não foi significativamente inferior ao erro do cenário A, como pode ser visto comparando-se as tabelas 43 e 28. O mesmo pode ser concluído comparando-se os gráficos 42 com 32, e 37, e os gráficos 42 e 27.



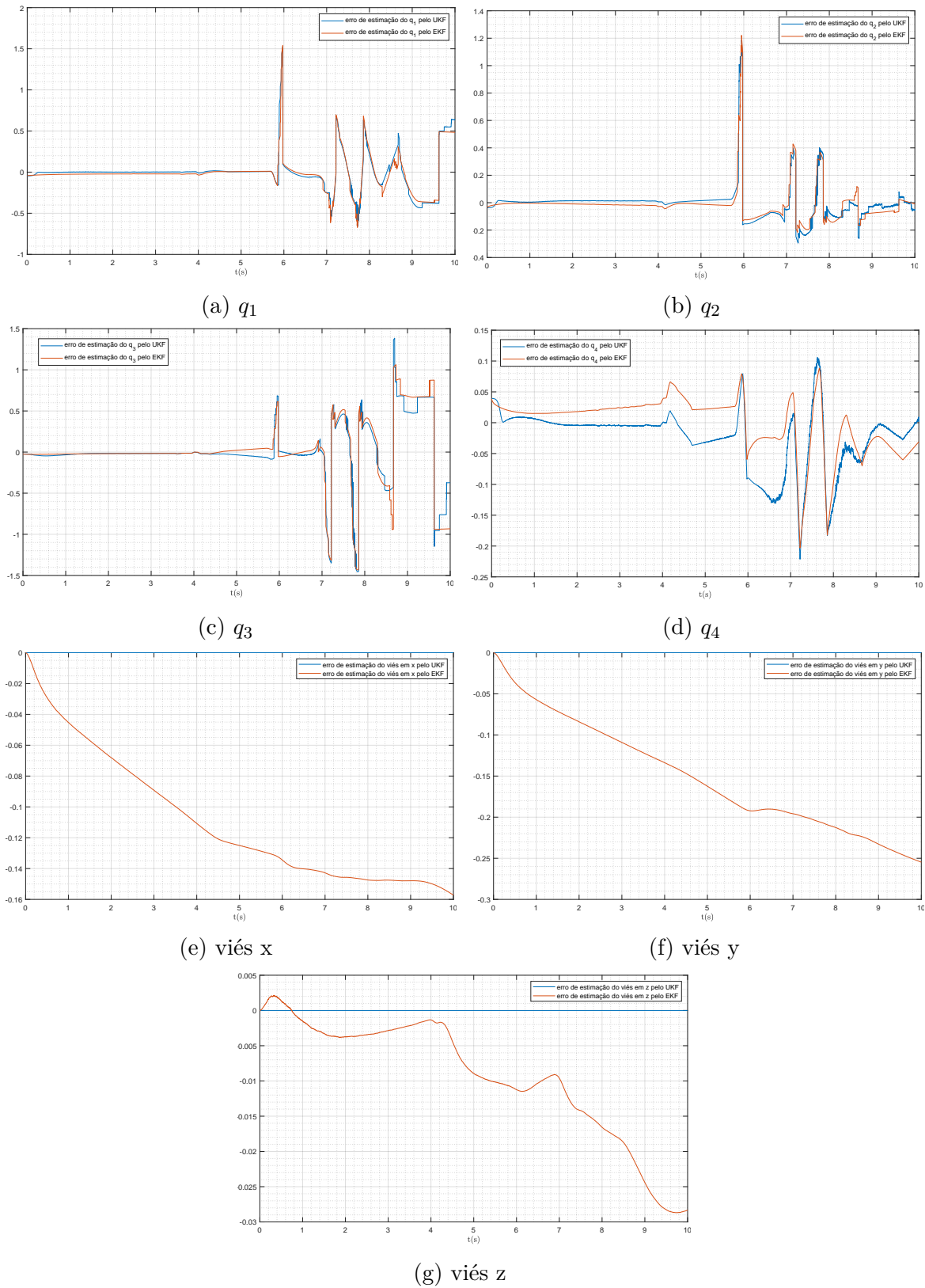


Figura 42 – Erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor

D	EKF	UKF
$q_1$	0,2414	0,2527
$q_2$	0,0510	0,0807
$q_3$	0,2375	0,2068
$q_4$	0,0692	0,0601
viés x [rad/s]	0,1426	0
viés y [rad/s]	0,2026	0
viés z [rad/s]	0,0126	0

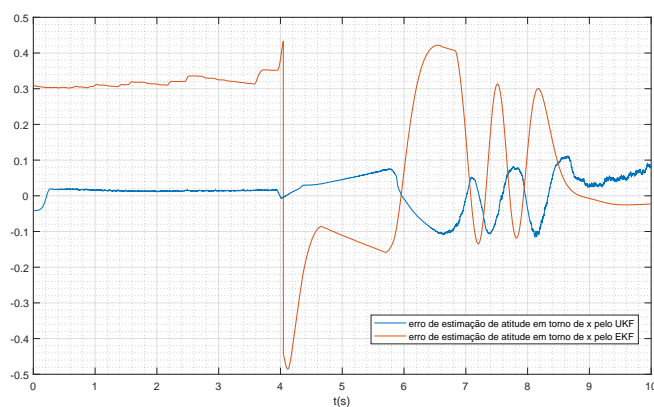
Tabela 8 – Média ao longo do tempo do erro RMS dos filtros no cenário D. Fonte: Autor

### 7.4.2 Erro de atitude

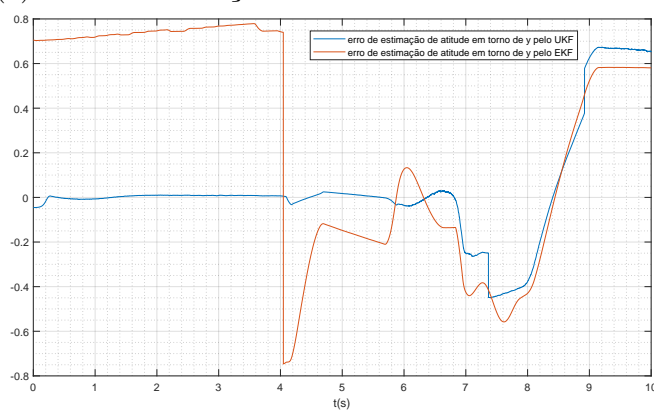
O erro de atitude do UKF foi inferior ao do EKF, como pode ser visto nas figuras 43 e 44. Ao contrario do previsto, o benefício da redução do ruído beneficiou mais significativamente o UKF do que o EKF.

D	EKF	UKF
$x$	0,2220	0,0390
$y$	0,4913	0,1357
$z$	0,1809	0,0459
$r$	0,1484	0,5687
$\vartheta$ [°]	22,4136	6,5751

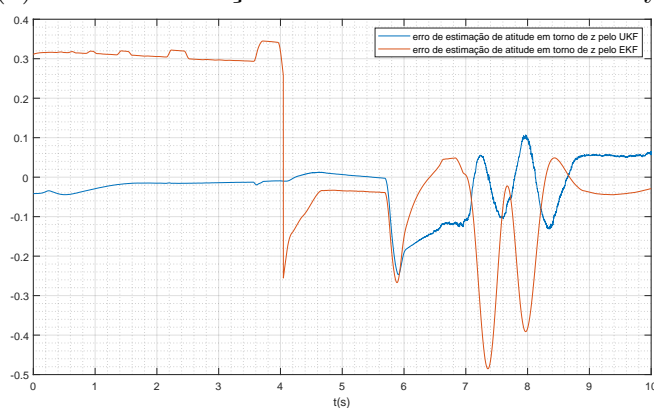
Tabela 9 – Média ao longo do tempo do erro de atitude RMS dos filtros no cenário D. Fonte: Autor



(a) Erro de estimação de atitude em torno do eixo x



(b) Erro de estimação de atitude em torno do eixo y



(c) Erro de estimação de atitude em torno do eixo z

Figura 43 – Erro de estimação de atitude dos filtros. Fonte: Autor

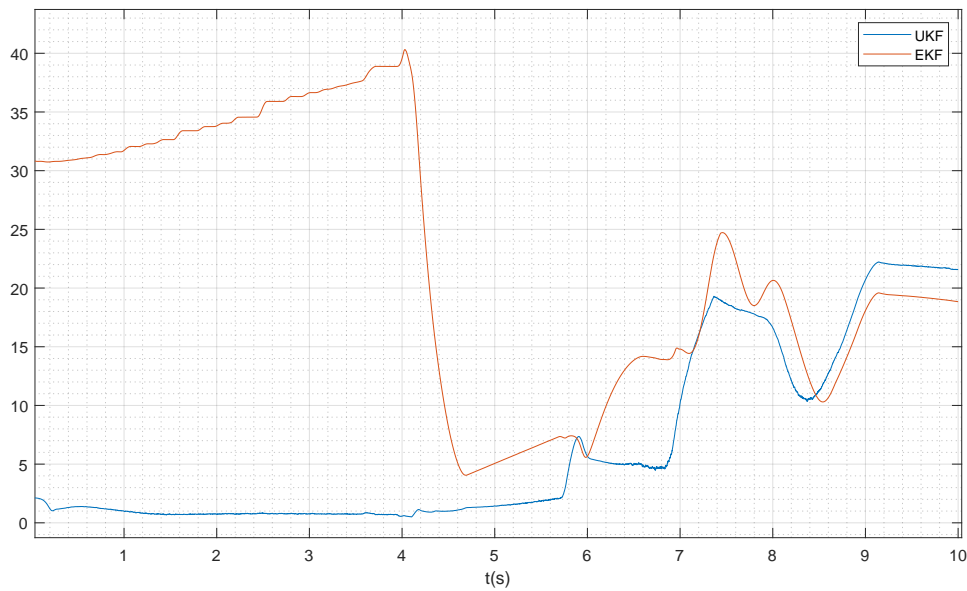


Figura 44 – ângulo de Euler do erro de estimação dos filtros. Fonte: Autor

### 7.4.3 Erro de previsão do vetor de medidas e resíduos

Com a redução do ruído tanto na fase de previsão quanto na de atualização, foi possível observar uma melhora na correlação entre o resíduo e o erro de previsão do vetor de medidas, devido principalmente a redução do ruído de atitude, como pode ser visto comparando-se a correlação entre o  $\mathbf{y}_{err}$  e o  $\mathbf{r}$  do cenário D (figuras 45 e 46) com a do cenário C (figuras 40 e 41) e a do cenário B (figuras 35 e 36).

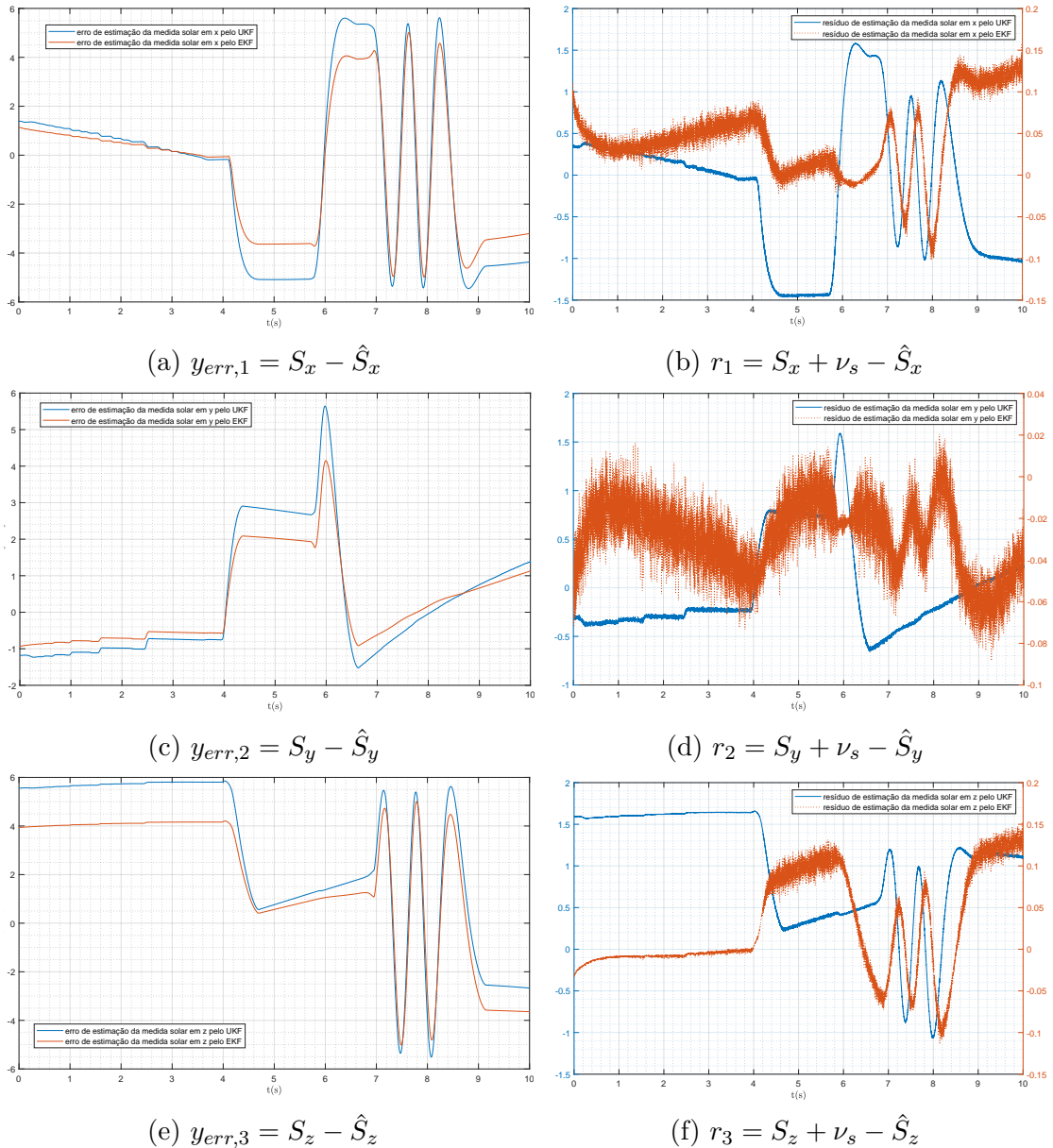


Figura 45 – Erro de estimação do vetor solar dos filtros. Fonte: Autor

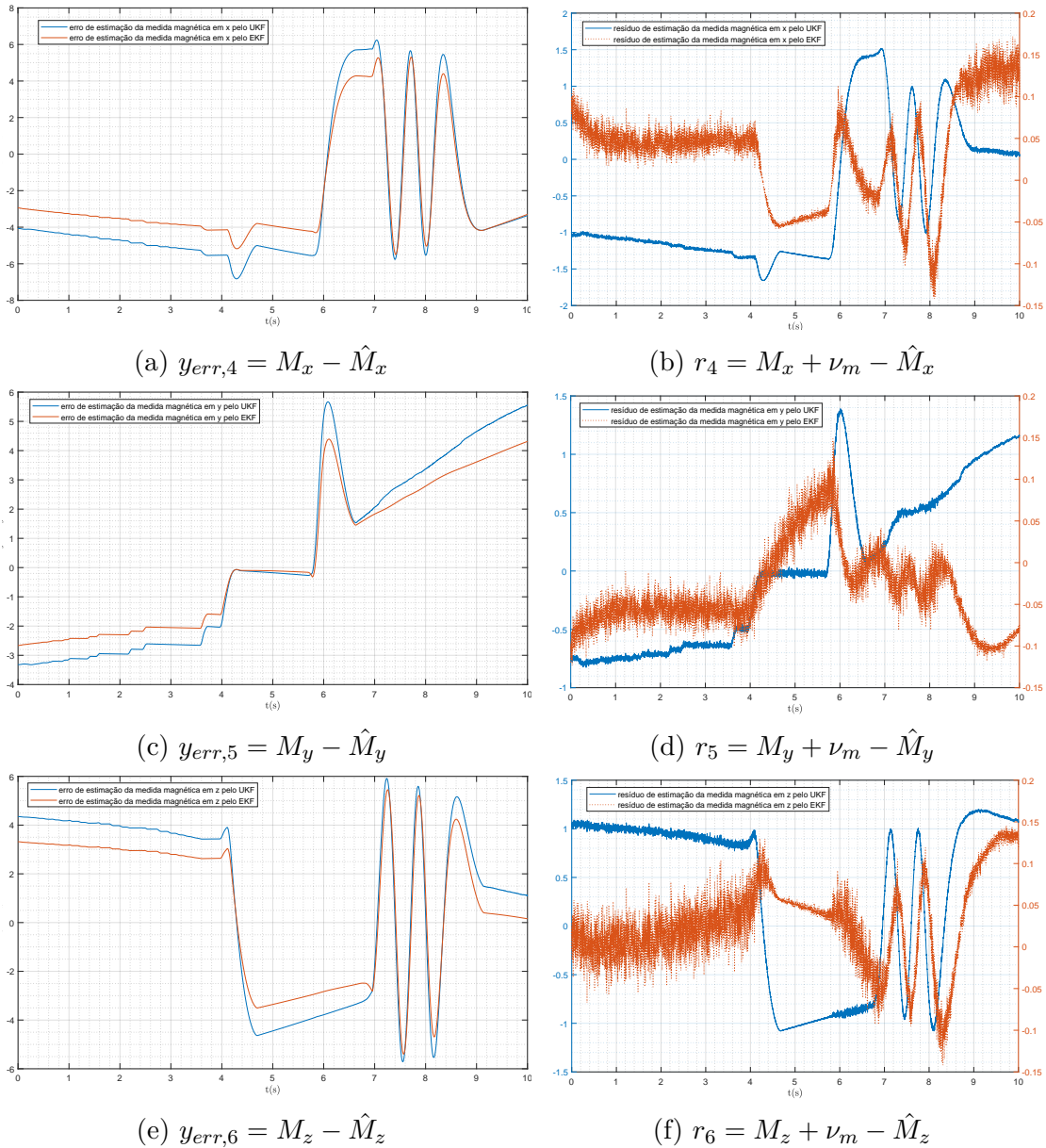


Figura 46 – Erro de estimação do vetor magnético dos filtros. Fonte: Autor

## 7.5 Carga computacional

Por meio da ferramenta de perfil de performance do Simulink foi possível analisar o tempo de processamento, o tempo por chamada, e o número de chamadas de cada função utilizada. Seguem nas figuras 47 e 48 as estatísticas associadas. Essa ferramenta possibilita a aquisição de dados mais acurada que o uso de funções como *tic-toc* no código dos filtros, porém, devido ao tamanho da simulação, ao utilizar se fazer uma análise da performance de todos os blocos, a simulação leva consideravelmente mais tempo, assim a comparação relativa foi feita apenas para o cenário A, sendo esperada uma performance relativa semelhante para todos os cenários.

Como era esperado o EKF é mais leve computacionalmente que o UKF. Havendo

ADCS/EKF/MATLAB Function (StateflowChild.Outputs.Major) [ADCS/EKF/MATLAB Function](#)  
 Time: 0.21875000 s (0.0%)  
 Calls: 15001  
 Self time: 0.21875000 s (0.0%)

Function:	Time	Calls	Time/call
<a href="#">ADCS/EKF/MATLAB Function (StateflowChild.Outputs.Major)</a>	0.21875000	15001	0.0000145823611759
<b>Parent functions:</b>			
<a href="#">ADCS/EKF/MATLAB Function (AtomicMATLABFunctionSubSystem.Outputs.Major)</a>		15001	
<b>Child functions:</b>			
none			

ADCS/EKF/MATLAB Function (AtomicMATLABFunctionSubSystem.Outputs.Major) [ADCS/EKF/MATLAB Function](#)  
 Time: 0.31250000 s (0.0%)  
 Calls: 15001  
 Self time: 0.09375000 s (0.0%)

Function:	Time	Calls	Time/call
<a href="#">ADCS/EKF/MATLAB Function (AtomicMATLABFunctionSubSystem.Outputs.Major)</a>	0.31250000	15001	0.0000208319445370
<b>Parent functions:</b>			
<a href="#">ADCS.Outputs.Major</a>		15001	
<b>Child functions:</b>			
<a href="#">ADCS/EKF/MATLAB Function (StateflowChild.Outputs.Major)</a>	0.21875000	70.0%	15001 0.0000145823611759

Figura 47 – Tempo de processamento do EKF. Fonte: Autor

uma ordem de magnitude de diferença, com o UKF demorando aproximadamente 30 vezes o tempo do EKF por chamada.

ADCS/UKF/MATLAB Function (StateflowChild.Outputs.Minor) [ADCS/UKF/MATLAB Function](#)  
Time: 1841.92187500 s (6.9%)  
Calls: 12032150  
Self time: 1841.92187500 s (6.9%)

Function:	Time	Calls	Time/call
ADCS/UKF/MATLAB Function (StateflowChild.Outputs.Minor)	1841.92187500	12032150	0.0001530833537647
<b>Parent functions:</b>			
ADCS/UKF/MATLAB Function (AtomicMATLABFunctionSubSystem.Outputs.Minor)		12032150	
<b>Child functions:</b>			
none			

ADCS/UKF/MATLAB Function (AtomicMATLABFunctionSubSystem.Outputs.Minor) [ADCS/UKF/MATLAB Function](#)  
Time: 1909.04687500 s (7.2%)  
Calls: 12032150  
Self time: 67.12500000 s (7.2%)

Function:	Time	Calls	Time/call
ADCS/UKF/MATLAB Function (AtomicMATLABFunctionSubSystem.Outputs.Minor)	1909.04687500	12032150	0.0001586621572204
<b>Parent functions:</b>			
ADCS.Outputs.Minor		12032150	
<b>Child functions:</b>			
ADCS/UKF/MATLAB Function (StateflowChild.Outputs.Minor)	1841.92187500	96.5%	12032150
			0.0001530833537647

ADCS/UKF/MATLAB Function (StateflowChild.Outputs.Major) [ADCS/UKF/MATLAB Function](#)  
Time: 112.37500000 s (0.4%)  
Calls: 1065062  
Self time: 112.37500000 s (0.4%)

Function:	Time	Calls	Time/call
ADCS/UKF/MATLAB Function (StateflowChild.Outputs.Major)	112.37500000	1065062	0.0001055102895418
<b>Parent functions:</b>			
ADCS/UKF/MATLAB Function (AtomicMATLABFunctionSubSystem.Outputs.Major)		1065062	
<b>Child functions:</b>			
none			

Figura 48 – Tempo de processamento do UKF. Fonte: Autor

## 7.6 Sensibilidade à inicialização

Era esperado que com altos erros de inicialização o EKF divergisse, realizando estimações muito diferentes do real estado do sistema. Para testar isso, foi realizada uma inicialização com um erro de 90 graus em torno de cada eixo em uma rotação 3-2-1, com os resultados mostrados na figura 49 para a atitude em quatérnions, e na figura 50 para o viés, com curva azul representando o estado real, e as outras curvas representando o estado estimado em 3 diferentes simulações para o UKF na esquerda e para o EKF na direita. E como pode ser visto, o comportamento seguiu de acordo com o esperado, com o UKF convergindo em cerca de 4 segundos seguindo uma curva próxima do estado real, e o EKF seguindo uma dinâmica bem diferente da real, apesar de relativamente consistente entre as iterações da simulação.



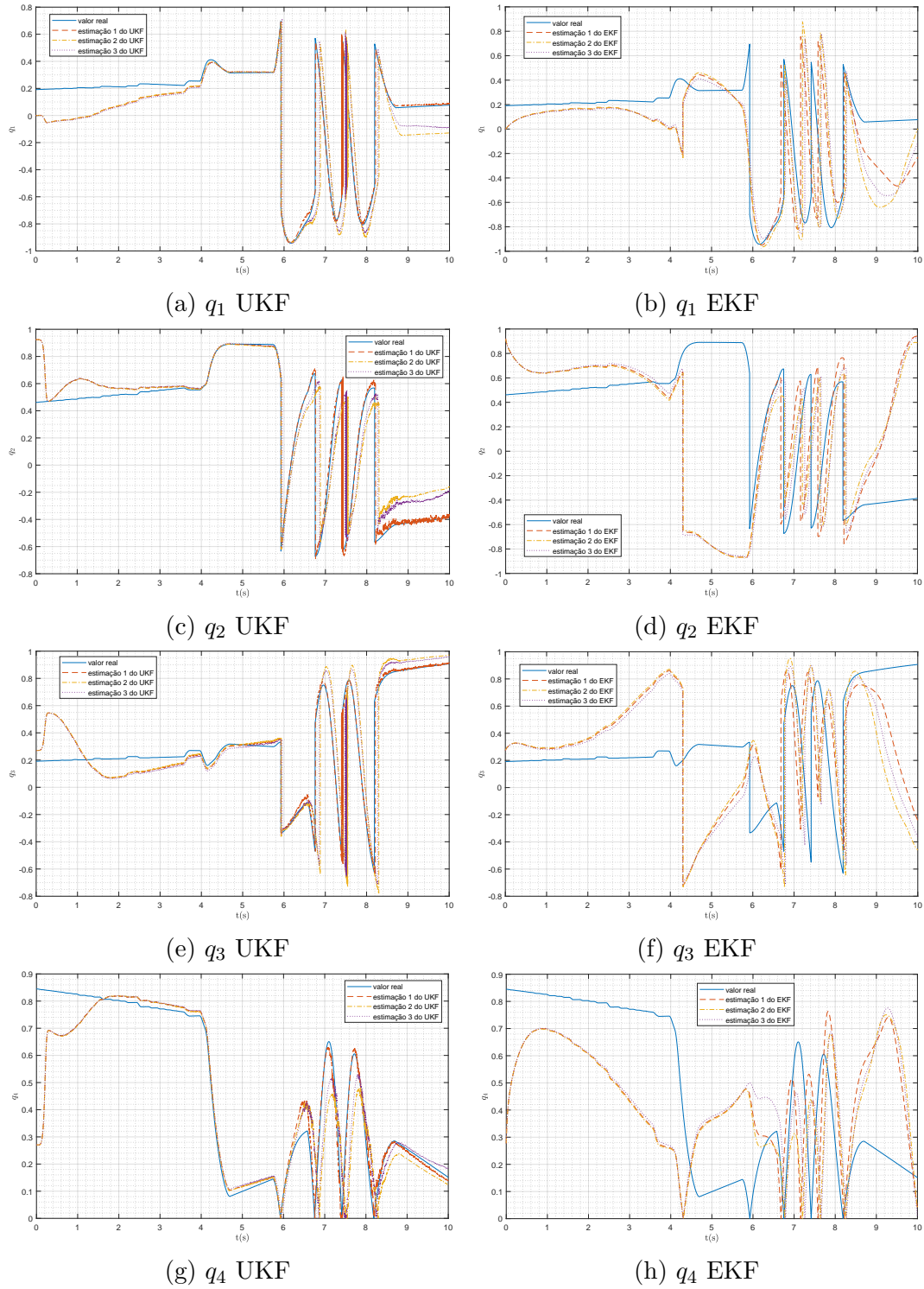
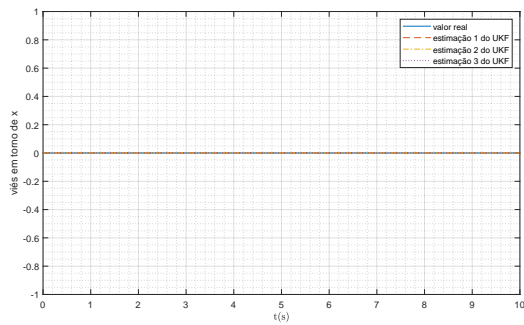
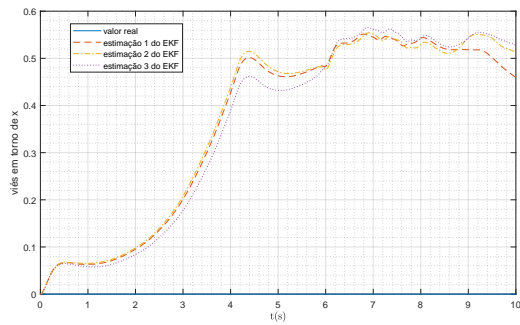


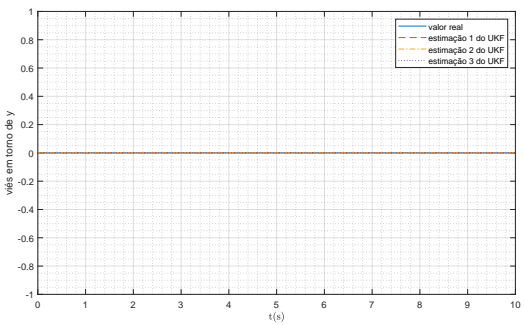
Figura 49 – Estimação dos filtros da atitude. Fonte: Autor



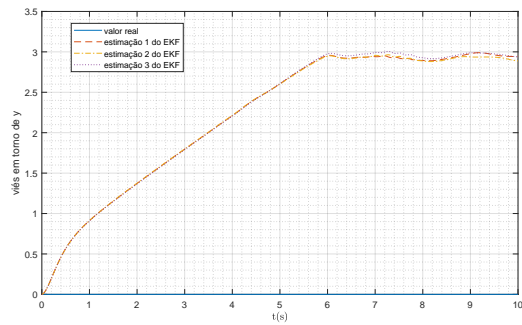
(a) viés x UKF



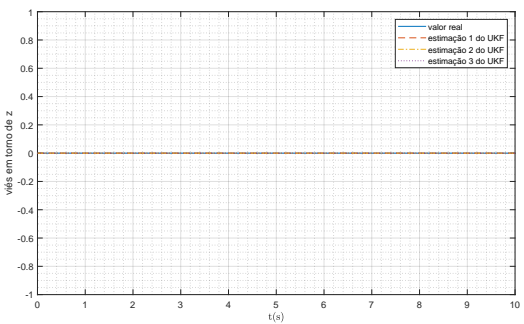
(b) viés x EKF



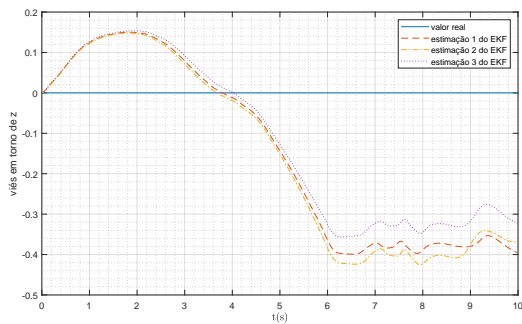
(c) viés y UKF



(d) viés y EKF



(e) viés z UKF



(f) viés z EKF

Figura 50 – Estimação dos filtros do viés. Fonte: Autor

## 7.7 Efeito da integração do estimador no controlador

O controlador não foi otimizado para uma missão espacial, pois o projeto de um controlador ótimo foge ao escopo desse trabalho. Assim, foi implementado um controlador PID, cuja performance não seria satisfatória para diversas missões, porém é suficiente como referência para entender como a estimação dos filtros pode influenciar no comportamento do filtro, como por exemplo na estimação consistentemente ruim do viés pelo EKF, comparado ao UKF, que deve influenciar no resultado da derivada do erro devido ao uso da velocidade angular corrigida pelo viés.

Para comparar o efeito dos filtros no controlador serão realizadas 3 simulações para cada filtro em que o controlador utiliza sua estimação, que serão comparadas com uma simulação determinística, desconsiderando os ruídos e realizando a determinação exata de atitude. Para essa comparação serão apresentados gráficos dos estados, assim como do erro de atitude tanto em ângulos de Euler quanto pela componente vetorial do quatérnio de erro.

### 7.7.1 Atitude

Como pode ser visto na figura 51, ambos os estimadores tem uma grande influência no comportamento do controlador. No primeiro meio segundo se simulação o comportamento é bastante semelhante ao controlador projetado para o sistema determinístico, porém após essa marca o comportamento do sistema muda bastante com relação ao comportamento original. Dessa forma, apesar de se projetar o estimador e o controlador de forma independente, é importante haver uma fase de ajuste do controlador após a integração dos sistemas, sendo recomendados métodos de controle ajustáveis, como o PID, ou LQR a fim de atingir os requisitos de controle desejados.

Além da diferença entre o comportamento do sistema determinístico e com uso dos filtros, outro comportamento relevante é a consistências dos filtros. Comparando-se as diferentes iterações do mesmo filtro é possível observar um comportamento mais consistente do UKF comparado ao EKF, o que era esperado devido a pior estimação do viés feita pelo EKF, que permite a passagem parcial do ruído para a estimação da velocidade angular utilizada pelo controlador.

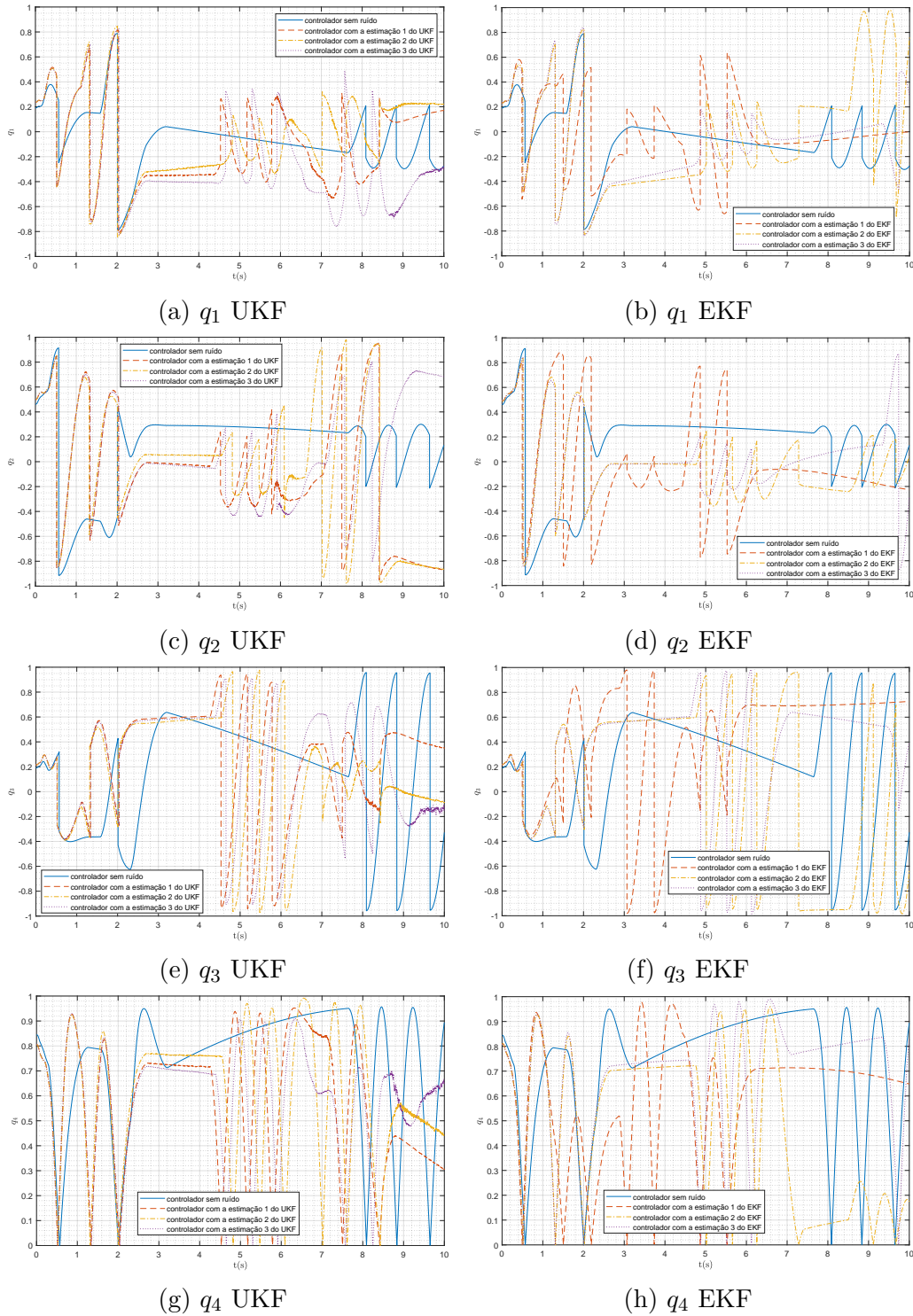


Figura 51 – Estimação dos filtros da atitude. Fonte: Autor

### 7.7.2 Erro de atitude em ângulos de Euler

Como observado anteriormente, os filtros causaram uma mudança na dinâmica do sistema, que teve como efeito um aumento do erro de atitude, que pode ser observado na figura 52 em radianos por ângulos de Euler pela conversão de quatérnios para ângulos de Euler usando a sequência de rotação 3-2-1.

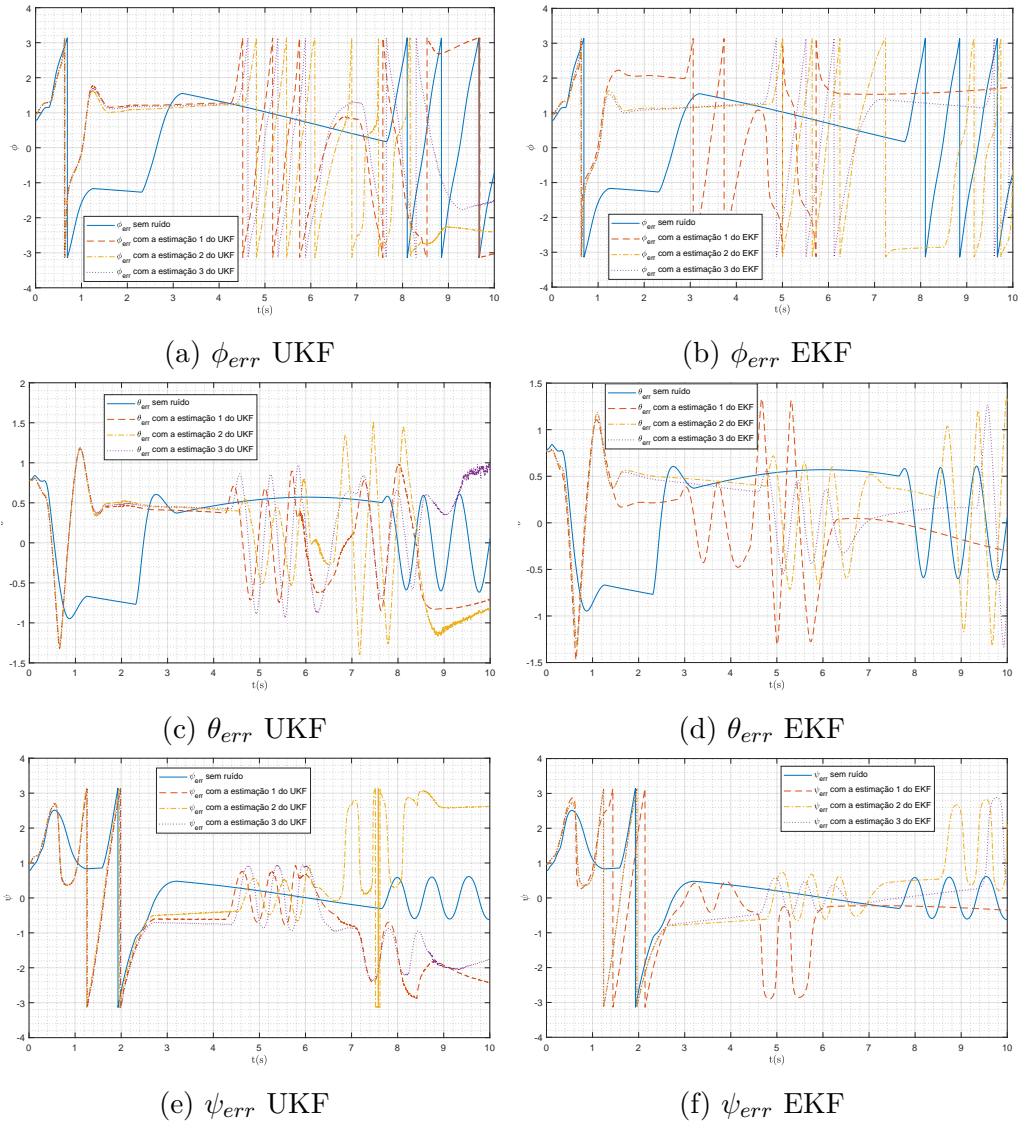


Figura 52 – Erro de atitude em ângulos de Euler. Fonte: Autor

### 7.7.3 Erro de atitude pela parte vetorial do quatérnio de erro

A representação do erro de atitude pelas componentes do quatérnio de erro mostra o paralelo entre as representações de erro de atitude usual em ângulos de Euler e a apresentada no capítulo 4. Comparando-se as figuras 52 e 53, é possível ver um comportamento muito semelhante do erro em ambas as representações comparando-se as curvas em azul. Por fim, a mesma conclusão é tirada dessa formulação do erro comparando-se a estimação dos filtros em cada simulação: o UKF é se mostrou mais consistente que o EKF, apesar de ambos os filtros causarem uma mudança considerável do comportamento do sistema comparado à simulação sem ruído.



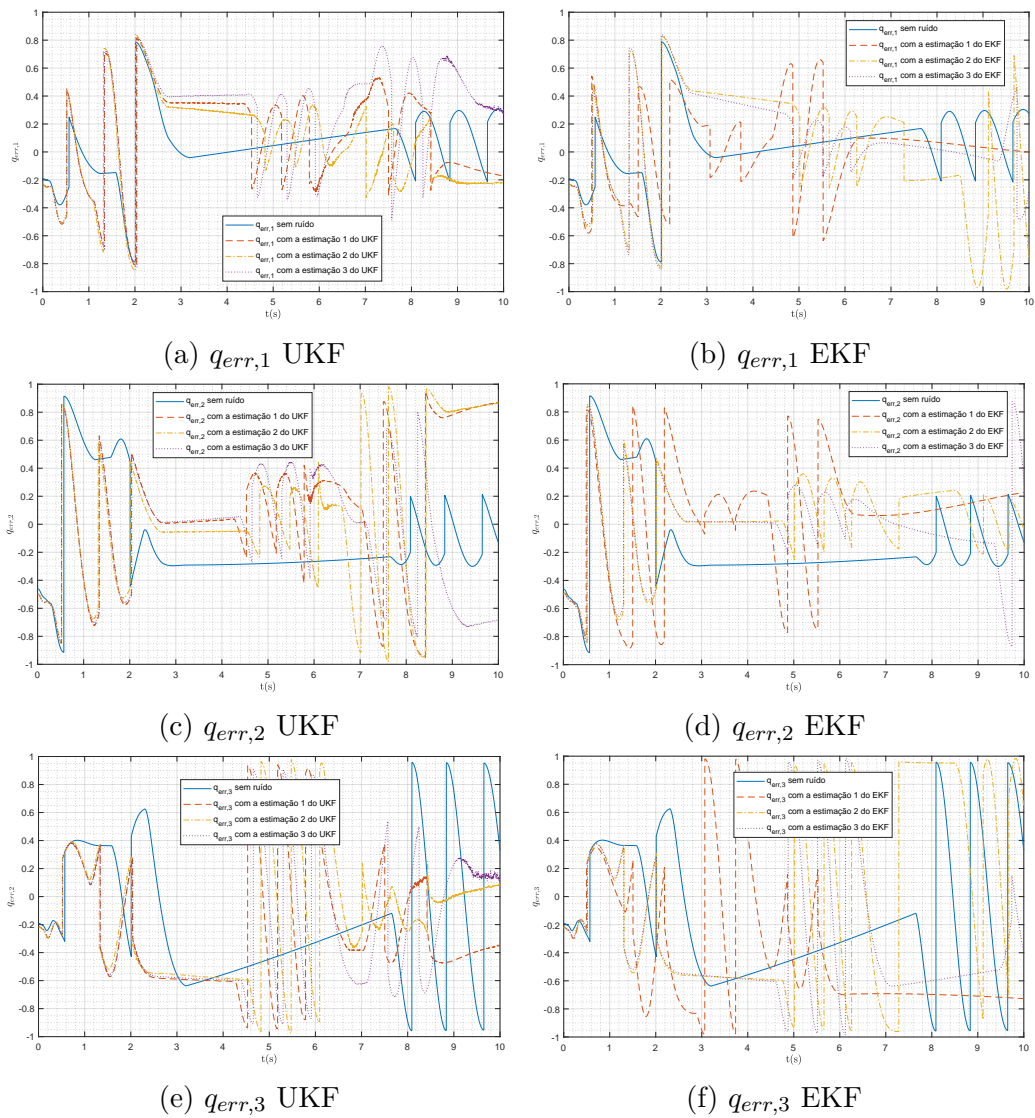


Figura 53 – Componente vetorial do quatérnio de erro. Fonte: Autor

## 8 Discussão

### 8.1 Estimação de atitude

Uma métrica relevante para comparação da performance é o erro RMS, com sua média ao longo do tempo dando um valor que representa o quão correto o filtro esteve ao longo da simulação. Assim, as informações das tabelas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9 foram compiladas na tabela 10 a fim de facilitar as comparações. Vale ressaltar que o uso da média ao longo do tempo do erro RMS favorece uma convergência mais veloz, que é esperada do UKF comparada ao EKF. Por isso os gráficos do erro continuam relevantes na comparação para a análise do erro após a convergência, apesar do erro pequeno de inicialização.

Analisando-se a tabela 10, um comportamento curioso que pode ser observado é que a redução da variância apenas do giroscópio ou apenas dos sensores de atitude causou um pequeno aumento do erro ao longo da maioria dos parâmetros avaliados, e a redução de ambas as variâncias teve um efeito pequeno na estimação. Uma possível razão para isso é que a inicialização da covariância de ambos os filtros quanto ao erro de atitude do modelo foi testada para o caso de maior variância, e esse mesmo valor foi utilizado para os outros casos. Ajustes finos na inicialização da covariância para os diferentes casos poderia melhorar os resultados.

Cenário	A: $\sigma_G \uparrow, \sigma_A \uparrow$	B: $\sigma_G \downarrow, \sigma_A \uparrow$	C: $\sigma_G \uparrow, \sigma_A \downarrow$	D: $\sigma_G \downarrow, \sigma_A \downarrow$				
Filtros	EKF	UKF	EKF	UKF	EKF	UKF	EKF	UKF
$q_1$	0,0676	0,1305	0,2335	0,2402	0,2589	0,2509	0,2414	0,2527
$q_2$	0,1300	0,1749	0,1977	0,2432	0,1047	0,1479	0,0510	0,0807
$q_3$	0,1228	0,2803	0,3420	0,3957	0,3408	0,3245	0,2375	0,2068
$q_4$	0,0417	0,0807	0,0774	0,0916	0,0831	0,0541	0,0692	0,0601
viés x	0,0572	0	0,0275	0	0,2555	0	0,1426	0
viés y	0,0640	0	0,0302	0	0,3829	0	0,2026	0
viés z	0,0011	0	0,0047	0	0,0749	0	0,0126	0
$x$	0,1122	0,1296	0,3486	0,1346	0,2586	0,0662	0,2220	0,0390
$y$	0,2900	0,0728	0,4860	0,1263	0,5245	0,1337	0,4913	0,1357
$z$	0,0338	0,0671	0,2551	0,1318	0,2555	0,0780	0,1809	0,0459
$r$	0,3128	0,1631	0,6502	0,2268	0,6381	0,1684	0,5687	0,1484
$\vartheta$	23,1169	7,8087	24,7470	11,8233	24,2616	8,8893	22,4136	6,5751

Tabela 10 – Comparação das médias ao longo do tempo do erro RMS dos filtros nos 4 cenários. Fonte: Autor

Analisando-se o erro de atitude apenas nos últimos segundos, após a convergência lenta do EKF, com uma boa inicialização, o erro de atitude de ambos os filtros é bem

mais próximo, como pode ser visto pelas figuras do erro de estimação (28, 29, 33, 34, 38, 39, 43, 44).

## 8.2 Controlador

Inicialmente foi implementado o controlador  $P^2$ , não sendo obtido sucesso em atender os requisitos levantados por meio da variação das constantes. Porém, devido a facilidade de se computar a derivada do quatérnio de erro, um controlador PD foi utilizado, o que melhorou a resposta, porém não foi suficiente para atender os requisitos de controle. Por fim, foi implementado um controlador PID com a integração numérica do erro.

Apesar da versatilidade do controlador PID por poder ser ajustado para se obter o comportamento desejado, nesse sistema não linear o cálculo teórico das constantes não é viável. Assim, as constantes devem ser ajustadas gradualmente de acordo com as mudanças desejadas no comportamento do filtro. Esse processo leva um tempo proporcional ao tempo de simulação, por tentativa e erro, até o comportamento desejado ser obtido. Não foi possível implementar um controlador PD capaz de atender os requisitos mínimos levantados, e mesmo após a adaptação do controlador para um PID pela integração numérica do erro, o comportamento do controlador não atingiu um desempenho satisfatório.

O controlador não chegou a um regime permanente a fim de se computar o erro em regime permanente, nem o tempo de acomodação, em certos momentos o sobressinal é superior a uma rotação completa, assim, a análise do sistema no contexto do controlador foi restrita a mudança da dinâmica.

Uma possibilidade para esse comportamento está associada ao desenvolvimento desse método de controle no contexto de um drone, um sistema com uma dinâmica e um comportamento diferentes do sistema de um satélite. Outra alternativa é o uso de constantes inadequadas no processo iterativo, sendo necessário uma relação completamente diferente entre as constantes.



## 9 Conclusão

Como era de se esperar comparando-se os algoritmos para se computar o EKF e o UKF, o UKF é computacionalmente mais pesado. O UKF foi inicialmente estimado como pelo menos 15 vezes mais pesado computacionalmente, por realizar a propagação de todos os 15 pontos sigma pela cinemática e pelo modelo de medidas. Além disso, o UKF possui mais cálculos que o EKF, como a decomposição de Cholesky da matriz de covariância reduzida, o cálculo dos pontos sigma, a média dos valores propagados, e o cálculo da covariância da propagação dos pontos sigma pela cinemática do sistema e pelo modelo de medidas, o que adiciona ainda mais tempo para a computação do UKF. O custo computacional obtido via simulação do UKF em relação ao EKF foi de cerca de 30 vezes mais pesado, estando dentro da margem esperada teoricamente.

Apesar do custo computacional superior do UKF, ambos os filtros podem ser viáveis dependendo da missão, afinal, o tempo de execução de uma iteração do UKF ainda foi da ordem de 1 ms. Os benefícios do uso do UKF em relação ao EKF são pequenos comparando-se a operação após convergência do filtro. A maior vantagem do UKF é a rápida convergência, e a capacidade de se recuperar de uma inicialização ruim mesmo utilizando a formulação aditiva sem o uso de matrizes reduzidas. Porém, observando-se as figuras relativas ao ângulo de Euler do erro RMS de estimação de atitude (figuras 29, 34, 39, e 44), foi possível observar uma redução da qualidade de estimação tanto do UKF quanto do EKF consistentemente após a faixa de 6 segundos. Uma razão para isso seria o uso da formulação aditiva dos filtros de Kalman, sendo esperado um desempenho mais estável caso uma formulação aditiva seja utilizada.

Comparando-se os resultados teóricos e experimentais, é possível concluir que a aproximação mais acurada da covariância feita pelo UKF traz benefícios marginais pois a propagação do ruído de sensores comercialmente viáveis é relativamente bem aproximada pela dinâmica linearizada do EKF. Dessa forma, outro fator relevante de se considerar além do avanço dos microprocessadores para a aplicação de filtros mais sofisticados, é o avanço dos próprios sensores, uma vez que variâncias pequenas propagadas pela dinâmica não linear do sistema terão uma influência pequena na estimação, favorecendo a aproximação linear do EKF.

Outro ponto que deve ser ressaltado quanto aos estimadores é a sensibilidade do EKF a inicialização, e sua relativa demora para convergência. Uma possível alternativa é o uso do UKF nos instantes iniciais, em que há maior incerteza da posição, e após alguns segundos de estimação do UKF pode-se economizar processamento e energia com o uso do EKF, inicializando-o pela estimação anterior do UKF, que por sua vez pode ser

inicializado como um valor esperado, ou por uma estimação inicial grosseira, como por exemplo com o uso do TRIAD.

Quanto a influência do estimador no sistema de controle, os ruídos não filtrados são observados no comportamento do sistema, e a estimação consistentemente errada do viés pelo EKF torna seu comportamento inconsistente comparando-se simulações com as mesmas condições iniciais. Em contraste, o UKF se comporta de forma mais consistente, tendo resultados semelhantes sendo inicializado da mesma forma, porém mantendo uma resposta muito diferente da apresentada pelo sistema desconsiderando efeitos estocásticos.

A escolha do controlador se mostrou inadequada para o sistema, com tanto o  $P^2$ , quanto o PD, e o PID incapazes de atender os requisitos de controle. O método apresentado para o controlador  $P^2$  em quatérnions apresentado por [FRESK; NIKOLAKOPOULOS \(2013\)](#) foi desenvolvido no contexto de drones, e parece não se aplicar no contexto de controle de atitude em satélites. Algumas mudanças que podem ser testadas para a aplicação desse método seria o uso de constantes diferentes para cada eixo, havendo um total de 9 constantes para se ajustar no PID, e 6 para o  $P^2$  e o PD, porém esse ajuste causaria um aumento drástico do tempo para o refinamento do controlador, especialmente após ser mostrado que o estimador muda a dinâmica de controle, sendo necessário o projeto de um controlador para cada filtro a fim de comparar o comportamento de forma adequada.

## Referências

- AGUIAR, A. L. S. et al. Educational attitude determination control system prototype for cubesats. *COBEM*, 07 2021. Citado 3 vezes nas páginas 29, 50 e 84.
- ANDREWS, A. Spacecraft attitude determination and control. *Aiaa Journal - AIAA J*, v. 6, p. 1165–1166, 06 1968. Citado na página 62.
- CARMI, A.; OSHMAN, Y. Asymptotic behavior of the estimation error covariance of quaternion estimators. *Journal of Guidance Control and Dynamics - J GUID CONTROL DYNAM*, v. 31, p. 1665–1676, 11 2008. Citado na página 63.
- CORDEIRO, T. *Fusão descentralizada com filtragem de Kalman estendida para estimação de atitude e deriva com rede de sensores inerciais e magnetômetro de baixo custo*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 64.
- CRASSIDIS, J. L.; JUNKINS, J. L. *Optimal estimation of dynamic systems*. [S.l.: s.n.], 2014. Citado 6 vezes nas páginas 13, 36, 39, 40, 42 e 56.
- CUBEDESIGN Virtual 2020. 2020. <<http://www.inpe.br/cubedesign/2020/>>. Acesso: 2022-10-31. Citado na página 35.
- FRESK, E.; NIKOLAKOPOULOS, G. Full quaternion based attitude control for a quadrotor. In: . [S.l.: s.n.], 2013. p. 3864–3869. Citado 3 vezes nas páginas 29, 55 e 130.
- GONÇALVES, A.; TORRES, S. Projeto mecânico de um nanossatélite padrão cubesat. Brasília, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 13, 33 e 34.
- INVENSENSE INC. *MPU-9250 Product Specification Revision*. [S.l.], 2016. Rev. 1.1. Citado na página 88.
- IYER, R. et al. Advances in microprocessor cache architectures over the last 25 years. *IEEE Micro*, v. 41, n. 6, p. 78–88, 2021. Citado na página 27.
- Kök, I. *Comparison and Analysis of Attitude Control Systems of a Satellite Using Reaction Wheel Actuators*. Tese (Doutorado) — Luleå University of Technology, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 13, 51 e 52.
- LEFFERTS, E.; MARKLEY, L.; SHUSTER, M. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. In: . [S.l.: s.n.], 1982. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 64.
- OSRAM OPTO SEMICONDUCTORS. *Silicon Photodiode for the Visible Spectral Range*. [S.l.], 2016. Rev. 1.3. Citado na página 88.
- ROHM CO. *Digital 16bit Serial Output Type Ambient Light Sensor IC*. [S.l.], 2011. Rev. D. Citado na página 87.
- SCHUCH, N. J. et al. The nanosatc-br, cubesat development program - a joint cubesat program developed by ufsm and inpe/mctic - space geophysics mission payloads and first results. *Brazilian Journal of Geophysics*, v. 37, n. 1, p. 95–103, 2019. ISSN 2764-8044.

Disponível em: <<https://sbgf.org.br/revista/index.php/rbgf/article/view/1992>>. Citado na página 27.

SILVA, W. *Filtro H Infinito Estendido de Segunda Ordem e Filtro de Partículas Regularizado com "Roughening" Aplicados na Estimção de Atitude de Satélites Artificiais*. Tese (Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 01 2016. Citado 4 vezes nas páginas 13, 29, 38 e 76.

SILVA, W. et al. Rao-blackwellized particle filter for the cbers-4 attitude and gyros bias estimation. *Acta Astronautica*, v. 193, p. 679–690, 2022. ISSN 0094-5765. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576521004148>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 40.

SIMON, D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. USA: Wiley-Interscience, 2006. ISBN 0471708585. Citado 5 vezes nas páginas 27, 28, 59, 67 e 72.

Norm, SPACE systems — Design qualification and acceptance tests of small spacecraft and units. Geneva, CH: [s.n.], 2017. Citado na página 38.

WERTZ, J. R. *Spacecraft attitude determination and control*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 44.

WILTRONICS RESEARCH PTY. LTD. *ARD2 Arduino Compatibles*. [S.l.], 2006. Citado na página 88.

# Anexos



# ANEXO A – Funções do Matlab utilizadas

## A.1 Inicialização

```

1 clear;
2 open('ADCS.slx');
3 %% Dados do sistema V2
4
5 %Momento de Inercia roda de reacao do Cubesat
6 Jr = 3e-6; %Kg m4
7
8 %Momento de Inercia total satelite
9 massa_sat = 1.3; %Kg
10 d = 0.1; %lado do cubesat em m
11 % J = eye(3)*((massa_sat*((d^2)/6))
12 J = eye(3)*((massa_sat*((d^2)/6))+3*Jr);
13
14 %Constantes do controlador
15 P_q = 0.15;
16 P_w = 0.21;
17 P_i = 0.09;
18
19 % Transformacoes de unidades:
20 pi = 3.1415926535898;
21 rad=pi/180;
22 deg=180/pi;
23
24 %Dados dos sensores
25
26     %giroscopio
27     %[0.07 - 0.15]
28     SigGx=0.07*rad;%variancia do eixo x do giroscopio
29     SigGy=0.07*rad;%variancia do eixo y do giroscopio
30     SigGz=0.07*rad;%variancia do eixo z do giroscopio
31
32     bias_x=0;%vies do eixo x do giroscopio
33     bias_y=0;%vies do eixo y do giroscopio

```

```

34 bias_z=0;%vies do eixo z do giroscopio
35 SigBiasx=0.0001*rad;%variancia do bias do eixo x do
    giroscopio
36 SigBiasy=0.0001*rad;%variancia do bias do eixo y do
    giroscopio
37 SigBiasz=0.0001*rad;%variancia do bias do eixo z do
    giroscopio
38
39 fbiasG = 2*pi/60^2;%valor esperado da frequencia do bias
40 tbiasG = 1/fbiasG;
41
42 digitalG = 0;%DigitalG=1, giroscopio dig/DigitalG=0, analog
43
44 %se o sensor for digital
45 vel_ang_max = 1000*rad;%velocidade angular max que pode
    ser medida
46 vel_ang_min = -1000*rad;%velocidade angular min que pode
    ser medida
47 bitsG = 16;%quantidade de bits do sensor digital
48 fG = 8000;%Output Data Rate (Hz)
49 tG = 1/fG*bitsG;%(s)
50
51 %Sensores luminosos
52 SigS=0.02;%[0.02 - 0.2]
53 digitalS=0;%DigitalS=1, sensor de luminosidade dig/DigitalS
    =0, analog
54 %Se o sensor for digital
55 S_max = 5.2;%luminosidade max (mag do vetor solar)
56 S_min = -5.2;%luminosidade min (-mag do vetor solar)
57 bitsS = 16;%qtd de bits do sensor de luminosidade
58 fS = 400000;%Output Data Rate per bit/16 bit string
59 tS = 1/fS*bitsS;%(s) time to send 1 bit * quantity of
    bits per measurement
60
61 %Sensores magneticos(MPU9250)
62 SigM=0.1;%[0.1 - 0.6]
63 digitalM=0;%DigitalM=1, magnetometro dig/DigitalM=0, analog
64 %se o sensor for digital
65 M_max = 6.2;%campo magnetico max (mag do vetor magnetico

```



```

    )
66     M_min = -6.2;%campo magnetico min (-mag do vetor
        magnetico)
67     bitsM = 14;%qtd de bits do magnetometro
68     fM = 8000;%Output Data Rate (Hz)
69     tM = 1/fM*bitsM;%(s)
70
71
72 %periodo de amostragem utilizado
73 dt = 0.001;
74
75 %orientacao desejada em euler
76 fi_r=0;
77 theta_r=0;
78 psi_r=0;
79 %orientacao desejada em quaternions
80 q_r=convetEuler_Q(fi_r , theta_r , psi_r );
81
82 %% Condicoes iniciais
83 vel_ang_inicial = [0 0 0]';%velocidade angular inicial
84
85 mag_ref = [2 -5 3]';%vetor magnetico no LVLH
86 sol_ref = [5 -1 1]';%vetor solar no LVLH
87
88 %orientacao inicial em euler
89 fi0=pi/4;
90 theta0=pi/4;
91 psi0=pi/4;
92 %orientacao inicial em quaternions
93 q0=convetEuler_Q(fi0 , theta0 , psi0);
94
95 %% Inicializacao dos filtros de Kalman
96
97 %inicializacao do estado
98 %erro de inicializacao em angulos de Euler (3-2-1)
99 fi_err=5*rad;
100 theta_err=5*rad;
101 psi_err=5*rad;
102 qd = convetEuler_Q(fi_err , theta_err , psi_err);%quaternion de erro

```

```

    de inicializacao
103 %[Psi(qd) qd]
104 q_dX = [qd(4)   qd(3) -qd(2)  qd(1)
105          -qd(3)  qd(4)   qd(1)  qd(2)
106           qd(2) -qd(1)   qd(4)  qd(3)
107          -qd(1) -qd(2) -qd(3)  qd(4) ];
108
109 %quaternion de inicializacao rotacionado pelo quaternion de erro
    de inicializacao
110 q_init = q_dX * q0;
111 x0= [q_init; bias_x; bias_y; bias_z];
112
113 %Inicializacao da matriz de ruído das medidas (R):
114 Rk=diag ([ SigS^2; SigS^2; SigS^2; SigM^2; SigM^2; SigM^2] );
115 Qk=diag ([ SigGx^2; SigGy^2; SigGz^2; SigBiasx^2; SigBiasy^2; SigBiasz
    ^2] );
116
117 % Matriz G reduzida:
118 G=[-(1/2)*eye(3)   zeros(3,3);
119     zeros(3,3)     eye(3) ];
120
121 %Calculo da Matriz S para reducao
122 sol_refn = sol_ref/norm(sol_ref);
123 mag_refn = mag_ref/norm(mag_ref);
124 S_xs=sol_refn(1);
125 S_ys=sol_refn(2);
126 S_zs=sol_refn(3);
127 S_xm=mag_refn(1);
128 S_ym=mag_refn(2);
129 S_zm=mag_refn(3);
130 q01=q0(1);
131 q02=q0(2);
132 q03=q0(3);
133 q04=q0(4);
134 Hq=2*[S_xs*q01+S_ys*q02+S_zs*q03   S_ys*q01-S_xs*q02-S_zs*q04
    S_zs*q01+S_xs*q03+S_ys*q04 -S_zs*q02+S_ys*q03+S_xs*q04
135   -S_ys*q01+S_xs*q02+S_zs*q04   S_xs*q01+S_ys*q02+S_zs*q03
    S_zs*q02-S_ys*q03-S_xs*q04   S_zs*q01-S_xs*q03+S_ys*q04
136   -S_zs*q01+S_xs*q03-S_ys*q04 -S_zs*q02+S_ys*q03+S_xs*q04

```

```

137     S_xs*q01+S_ys*q02+S_zs*q03  -S_ys*q01+S_xs*q02+S_zs*q04
        S_xm*q01+S_ym*q02+S_zm*q03  S_ym*q01-S_xm*q02-S_zm*q04
138     S_zm*q01+S_xm*q03+S_ym*q04  -S_zm*q02+S_ym*q03+S_xm*q04
        -S_ym*q01+S_xm*q02+S_zm*q04  S_xm*q01+S_ym*q02+S_zm*q03
        S_zm*q02-S_ym*q03-S_xm*q04  S_zm*q01-S_xm*q03+S_ym*q04
139     -S_zm*q01+S_xm*q03-S_ym*q04  -S_zm*q02+S_ym*q03+S_xm*q04
        S_xm*q01+S_ym*q02+S_zm*q03  -S_ym*q01+S_xm*q02+S_zm*q04 ] ;
140   Qsi0 = [ q04  -q03   q02
141           q03   q04  -q01
142          -q02   q01   q04
143          -q01  -q02  -q03 ] ;
144   Sq0=[Qsi0      zeros(4,3);
145        zeros(3,3) eye(3)];
146   %erro de inicializacao da covariancia
147   cov_err=0.2;%20%
148
149   % Matriz P reduzida inicial EKF
150   Sigel=0.025*rad;
151   Sigel2=0.025*rad;
152   Sigel3=0.025*rad;
153
154   P0e=zeros(6,6);
155   P0e(1,1)=(Sigel)^2;
156   P0e(2,2)=(Sigel2)^2;
157   P0e(3,3)=(Sigel3)^2;
158   P0e(4,4)=(SigGx)^2;
159   P0e(5,5)=(SigGy)^2;
160   P0e(6,6)=(SigGz)^2;
161   %adicao de Erro de inicializacao da covariancia
162   P0e = (2+cov_err)*P0e;
163
164
165   % Matriz P reduzida inicial UKF
166   Sigul=0.0025*rad;
167   Sigul2=0.0025*rad;
168   Sigul3=0.0025*rad;
169
170   P0u=zeros(6,6);
171   P0u(1,1)=(Sigul)^2;

```

```

172 P0u(2,2)=(Sigu2)^2;
173 P0u(3,3)=(Sigu3)^2;
174 P0u(4,4)=(SigGx)^2;
175 P0u(5,5)=(SigGy)^2;
176 P0u(6,6)=(SigGz)^2;
177
178 %adicao de Erro de inicializacao da covariancia
179 P0u = (2+cov_err)*P0u;
180
181
182 %parametros do UKF
183 nm=6; %Numero de medidas
184 n=7; %Numero de estados medidos
185 nk=3; %Valor de (n+kapa)
186 %Inicializa pesos
187 kappa = nk-n;
188 W = zeros(1,2*n+1);
189 W(1:2*n) = 0.5/nk; % Peso associado aos demais SP;
190 W(2*n+1) = kappa/nk; % Peso associado a SP(:,2*n+1)

```

## A.2 Conversão de ângulos de Euler para quatérnions

```

1 %====Converte a atitude de====
2 %====Angulos de Euler para Quaternions====
3
4 % Entradas.....
5 % fi , teta , psi => atitude
6 %
7 % Saidas.....
8 % q => quaternions de atitude (q1,q2,q3,q4)
9 %
10 %====
11 % Author: Roberta Veloso Garcia
12 % review: 13/01/2011
13 %====
14
15 function [ q ] = convetEuler_Q(fi , teta , psi)
16
17
18 % Componentes da matriz de atitude (Tbo-321):

```

```

19
20 t11=cos(teta)*cos(psi);
21 t12=cos(teta)*sin(psi);
22 t13=-sin(teta);
23
24 t21=sin(fi)*sin(teta)*cos(psi)-sin(psi)*cos(fi);
25 t22=sin(fi)*sin(teta)*sin(psi)+cos(fi)*cos(psi);
26 t23=sin(fi)*cos(teta);
27
28 t31=cos(fi)*sin(teta)*cos(psi)+sin(fi)*sin(psi);
29 t32=cos(fi)*sin(teta)*sin(psi)-sin(fi)*cos(psi);
30 t33=cos(fi)*cos(teta);
31
32
33 % q=[q1 q2 q3 q4] '..... parcela vetorial(q1, q2, q3)
34 %                               parcela escalar (q4)
35
36 q4=sqrt(1+t11+t22+t33)/2;
37 q1=-(t32-t23)/(4*q4);
38 q2=-(t13-t31)/(4*q4);
39 q3=-(t21-t12)/(4*q4);
40
41
42
43 q=[q1 q2 q3 q4]';
44
45 end

```

### A.3 Controlador

```

1 function [T_c, Err, intErr] = controlador(dt, q_r, q_m, v_angular,
      P_q, P_w, P_i, Err_, intErr_)
2 %Erro multiplicativo
3 %q_err = q_r x q_m* = [q_r x] q_m* = [Psi(q_r) q_r] q_m*
4
5 %[Psi(q) q]
6 q_rX = [q_r(4)  q_r(3)  -q_r(2)  q_r(1)
7         -q_r(3)  q_r(4)  q_r(1)  q_r(2)
8         q_r(2)  -q_r(1)  q_r(4)  q_r(3)
9         -q_r(1)  -q_r(2)  -q_r(3)  q_r(4)];

```

```

10 %q_m*
11 q_conj = [-q_m(1);-q_m(2);-q_m(3);q_m(4)];
12
13 %Quaternions de erro
14 q_err = q_rX * q_conj;
15 q_err = q_err/norm(q_err);%nomalizacao por precaucão
16
17 Err = q_err(1:3);%erro em torno de cada eixo
18
19 %derivada do quaternion de erro
20 wx=v_angular(1);
21 wy=v_angular(2);
22 wz=v_angular(3);
23
24 Omega = [0    wz -wy wx
25          -wz  0   wx wy
26           wy -wx  0   wz
27          -wx -wy -wz  0];
28
29 dotq_err =Omega*q_err/2;
30 dotErr = dotq_err(1:3);%derivada do erro em torno de cada eixo
31
32 if q_err(4)<0
33     Err = -Err;
34     dotErr = -dotErr;
35 end
36
37 %integral numerica do erro (metodo do trapezio)
38 intErr = intErr_+(Err+Err_)*dt/2;
39
40 T_c=-P_q*Err-P_w*dotErr-P_i*intErr;%controlador PID

```

## A.4 TRIAD

```

1 function [q, vies] = TRIAD(sol_obs, mag_obs, sol_ref, mag_ref)
2 %vetores solar e magnetico normalizados no LVLH
3 r1 = sol_ref;
4 r2 = mag_ref;
5 dotr1r2 = dot(r1, r2);
6

```

```

7 %vetores solar e magnetico normalizados no satelite
8 b1 = sol_obs;
9 b2 = mag_obs;
10 dotb1b2 = dot(b1,b2);
11
12 %triad ortonormal no LVLH a partir de r1 e r2
13 v1 = r1;
14 v2 = cross(r1,r2)/norm(cross(r1,r2));
15 v3 = cross(v1,v2)/norm(cross(v1,v2));
16
17 %triad ortonormal no satelite a partir de b1 e b2
18 w1 = b1;
19 w2 = cross(b1,b2)/norm(cross(b1,b2));
20 w3 = cross(w1,w2)/norm(cross(w1,w2));
21
22 %Matriz de direcao de cossenos – Matriz de atitude (rotacao da
    triad do LVLH pra do satelite)
23 A = w1 * v1' + w2 * v2' + w3 * v3';
24
25 %crassidis eq 2_135 – quaternions pela matriz de atitude
26 q4q_ = zeros(4,4);
27 q4q_(:,1) = [1+2*A(1,1)-trace(A); A(1,2)+A(2,1); A(1,3)+A(3,1);
    A(2,3)-A(3,2)];
28 q4q_(:,2) = [A(2,1)+A(1,2); 1+2*A(2,2)-trace(A); A(2,3)+A(3,2);
    A(3,1)-A(1,3)];
29 q4q_(:,3) = [A(3,1)+A(1,3); A(3,2)+A(2,3); 1+2*A(3,3)-trace(A);
    A(1,2)-A(2,1)];
30 q4q_(:,4) = [A(2,3)-A(3,2); A(3,1)-A(1,3); A(1,2)-A(2,1); 1+
    trace(A)];
31
32 norms_q = [norm(q4q_(:,1)); norm(q4q_(:,2)); norm(q4q_(:,3));
    norm(q4q_(:,4))];
33
34 max_norm_index = 1;
35 for i=1:3
36     biggest=1;
37     for j=i+1:4
38         if norms_q(i)<norms_q(j)
39             max_norm_index = j;

```

```

40         biggest=0;
41     end
42 end
43 if biggest
44     break%caso qi seja maior que todos os qj, biggest
        continua como 1 e o max foi encontrado
45 end
46 end
47
48 q_max_norm = q4q_(:,max_norm_index);
49
50 q = q_max_norm/norms_q(max_norm_index);
51
52 if q(4)<0
53     q=-q;
54 end
55
56 vies = zeros(3,1);
57 end

```

## A.5 EKF

```

1 function [xest ,yest ,res ,Pest] = EKF(x_est ,S ,sol_ref ,M ,mag_ref ,
    giro ,w_min ,w_max ,digitalG ,bitsG ,Q ,Rk ,G ,dt ,P_est)
2
3 %medida do giroscopio
4 if digitalG
5     Wgyro = w_min + (double(giro)-1)*(w_max-w_min)/(2^bitsG-2);
6 else
7     Wgyro = double(giro);
8 end
9
10 % Propagacao o estado em quaternions (ODE45):
11
12
13 %Estimacao da velocidade angular
14 West = Wgyro + x_est(5:7);
15
16 % propagacao dos estados usando a matriz de transicao
17 q_estn = x_est(1:4);

```



```

18 bias = x_est(5:7);
19
20 OMEGA = [0      West(3)  -West(2)  West(1);
21          -West(3)  0      West(1)  West(2);
22          West(2)  -West(1)  0      West(3);
23          -West(1) -West(2)  -West(3)  0];
24
25 Aq = eye(4)*cos(norm(West)*dt/2)+OMEGA*sin(norm(West)*dt/2)/
      norm(West);
26
27 q_prop = Aq * q_estn;
28 q_propn = q_prop/norm(q_prop);
29
30 b_prop = bias;
31
32 x_prop = [q_propn; b_prop];%estado propagado
33
34 % Propagacao da covariancia reduzida:
35 Qsi_est = [q_estn(4) -q_estn(3)  q_estn(2);
36            q_estn(3)  q_estn(4) -q_estn(1);
37            -q_estn(2)  q_estn(1)  q_estn(4);
38            -q_estn(1) -q_estn(2) -q_estn(3)];
39
40 Qsiprop = [q_propn(4) -q_propn(3)  q_propn(2);
41            q_propn(3)  q_propn(4) -q_propn(1);
42            -q_propn(2)  q_propn(1)  q_propn(4);
43            -q_propn(1) -q_propn(2) -q_propn(3)];
44
45 DEL = Qsiprop' * Aq * Qsi_est;
46
47 MK = -(1/2) * DEL * dt;
48
49 Fi=[DEL      MK;
50     zeros(3,3) eye(3)];
51
52 P_prop = Fi*P_est*Fi'+(Fi*G*Q*G'*Fi')*dt;
53
54 % Medidas
55

```

```

56 % Vetores medidos normalizados
57 S0 = double(S)/norm(double(S));
58 M0 = double(M)/norm(double(M));
59 y_m = [S0;M0];
60
61 % Sensores (solar & magnetico) previstos:
62 q1 = q_propn(1);
63 q2 = q_propn(2);
64 q3 = q_propn(3);
65 q4 = q_propn(4);
66 Dq = [q1^2-q2^2-q3^2+q4^2 2*(q1*q2+q3*q4) 2*(q1*q3-q2*q4)
67        2*(q1*q2-q3*q4) -q1^2+q2^2-q3^2+q4^2 2*(q2*q3+q1*q4)
68        2*(q1*q3+q2*q4) 2*(q2*q3-q1*q4) -q1^2-q2^2+q3^2+q4^2];
69 S_b = Dq * sol_ref/norm(sol_ref);
70 S_b = S_b/norm(S_b);
71 M_b = Dq * mag_ref/norm(mag_ref);
72 M_b = M_b/norm(M_b);
73
74 % vetor de predicao das medidas
75 yest = [S_b; M_b];
76
77 %residuo do EKF
78 res = y_m - yest;
79
80 %Ganho de Kalman
81
82 % Jacobiana H
83 S_xs=sol_ref(1);
84 S_ys=sol_ref(2);
85 S_zs=sol_ref(2);
86 S_xm=mag_ref(1);
87 S_ym=mag_ref(2);
88 S_zm=mag_ref(3);
89 Hq=2*[S_xs*q1+S_ys*q2+S_zs*q3 S_ys*q1-S_xs*q2-S_zs*q4
90        S_zs*q1+S_xs*q3+S_ys*q4 -S_zs*q2+S_ys*q3+S_xs*q4
91        -S_ys*q1+S_xs*q2+S_zs*q4 S_xs*q1+S_ys*q2+S_zs*q3
92        S_zs*q2-S_ys*q3-S_xs*q4 S_zs*q1-S_xs*q3+S_ys*q4
93        -S_zs*q1+S_xs*q3-S_ys*q4 -S_zs*q2+S_ys*q3+S_xs*q4
94        S_xs*q1+S_ys*q2+S_zs*q3 -S_ys*q1+S_xs*q2+S_zs*q4

```

```

92         S_xm*q1+S_ym*q2+S_zm*q3  S_ym*q1-S_xm*q2-S_zm*q4
          S_zm*q1+S_xm*q3+S_ym*q4  -S_zm*q2+S_ym*q3+S_xm*
          q4
93         -S_ym*q1+S_xm*q2+S_zm*q4  S_xm*q1+S_ym*q2+S_zm*q3
          S_zm*q2-S_ym*q3-S_xm*q4  S_zm*q1-S_xm*q3+S_ym*q4
94         -S_zm*q1+S_xm*q3-S_ym*q4  -S_zm*q2+S_ym*q3+S_xm*q4
          S_xm*q1+S_ym*q2+S_zm*q3  -S_ym*q1+S_xm*q2+S_zm*q4
          ];
95     H=[Hq zeros(6,3)];
96
97
98     Qsi_propn = [q_propn(4) -q_propn(3)  q_propn(2);
99                 q_propn(3)  q_propn(4) -q_propn(1);
100                -q_propn(2)  q_propn(1)  q_propn(4);
101                -q_propn(1) -q_propn(2) -q_propn(3)];
102     Sq=[Qsi_propn  zeros(4,3);
103         zeros(3,3) eye(3)];
104
105     Htil = H*Sq;
106
107     Ktil = P_prop*Htil'/(Htil*P_prop*Htil'+Rk);
108     K = Sq*Ktil;
109
110 %Atualizacao
111     Pest = (eye(6) - Ktil*Htil)*P_prop;
112
113     xest = x_prop + K*res;
114
115 % Normaliza o quaternion atualizado:
116     q_estn = xest(1:4)/norm(xest(1:4));
117     if q_estn(4)<0
118         q_estn=-q_estn;
119     end
120
121 % Reconstitui o estado estimado em quaternions normalizados:
122     xest = [q_estn; xest(5:7)];
123 end

```

## A.6 UKF

```

1 function [xest ,yest ,res ,Pest] = UKF(x_est ,S ,sol_ref ,M ,mag_ref ,
    giro ,w_min ,w_max ,digitalG ,bitsG ,Rk ,Q ,G ,W ,nm ,n ,nk ,dt ,P_est)
2 sqnk = sqrt(nk); %Raiz quadrada de (n+kapa)
3
4 %Propagacao do estado estimado
5 q_estn = x_est(1:4);
6 bias = x_est(5:7);
7
8 %medida do giro
9 if digitalG
10     Wgyro = w_min + (double(giro)-1)*(w_max-w_min)/(2^bitsG
        -2);
11 else
12     Wgyro = double(giro);
13 end
14 West = Wgyro + bias;
15
16 OMEGA = [0      West(3)  -West(2)  West(1);
17         -West(3)  0      West(1)  West(2);
18         West(2)  -West(1)  0      West(3);
19         -West(1)  -West(2)  -West(3)  0];
20
21 Aq = eye(4)*cos(norm(West)*dt/2)+OMEGA*sin(norm(West)*dt/2)/
    norm(West);
22
23 q_prop = Aq * q_estn;
24 q_propn = q_prop/norm(q_prop);
25
26 b_prop = bias;
27
28 x_prop = [q_propn; b_prop];%estado propagado
29
30 % Propagacao da covariancia reduzida:
31 Qsi_est = [q_estn(4) -q_estn(3)  q_estn(2);
32           q_estn(3)  q_estn(4) -q_estn(1);
33           -q_estn(2)  q_estn(1)  q_estn(4);
34           -q_estn(1) -q_estn(2) -q_estn(3)];
35
36 Qsiprop = [q_propn(4) -q_propn(3)  q_propn(2);

```

```

37         q_propn(3)  q_propn(4) -q_propn(1);
38         -q_propn(2)  q_propn(1)  q_propn(4);
39         -q_propn(1) -q_propn(2) -q_propn(3)];
40
41     DEL = Qsiprop' * Aq * Qsi_est;
42
43     MK = -(1/2) * DEL * dt;
44
45     Fi=[DEL          MK;
46         zeros(3,3) eye(3)];
47
48
49
50     P_prop=Fi*P_est*Fi'+(Fi*G*Q*G'*Fi')*dt;
51
52     % Para evitar singularidades no calculo de Cholesky,
53     % calcularemos com a matriz reduzida:
54
55     %Decomposicao de Cholesky
56     r = zeros(6);
57     p=P_prop;
58     for j = 6:-1:2
59         ujj = sqrt(abs(p(j,j)));
60         r(j,j) = ujj;
61         alfa = 1/ujj;
62         for k=1:j-1
63             beta = alfa * p(k,j);
64             r(k,j) = beta; % Triangular superior
65             for i=1:k
66                 p(i,k) = p(i,k) - beta*r(i,j);
67             end
68         end
69     end
70     r(1,1) = sqrt(abs(p(1,1)));
71
72     sqp_prop = r;
73
74     %=====Sigmas-Ponto

```

---

```

74 %Matriz de covariancia aumentada (7x7)
75 MS=[Qsiprop      zeros(4,3);
76      zeros(3,3) eye(3)];
77
78 Px = MS*P_prop*MS';
79
80 % Matriz de Cholesky aumentada
81 sqp = MS*sqp_prop*MS';
82
83 Sp = zeros(n,2*n+1);
84 Sp(1:n,2*n+1) = x_prop(1:n) ;           %A ultima coluna eh
      xprop
85
86     for j=1:n
87         Sp(1:n,j)=x_prop(1:n);
88         Sp(1:n,n+j)=x_prop(1:n);
89         for i=1:j
90             Sp(i,j) = Sp(i,j) + sqnk*sqp(i,j);
91             Sp(i,n+j)= Sp(i,n+j) - sqnk*sqp(i,j);
92         end
93     end
94
95     for j=1:(2*n+1)
96         Sp(1:4,j)=Sp(1:4,j)/norm(Sp(1:4,j));
97     end
98
99     x_prop = Sp * W;
100
101     b_prop = x_prop(5:7);
102     q_prop = x_prop(1:4);
103     q_propn = q_prop/norm(q_prop);
104
105     x_propn = [q_propn; b_prop];
106
107 %Vetores de observacao medidos
108     % Calculo do vetor solar unitario no sistema orbital (xo
      ,yo,zo)
109     S0 = double(S)/norm(double(S));
110     % Calculo do vetor magnetico unitario no sistema orbital

```

```

        (xo,yo,zo)
111     M0 = double(M)/norm(double(M));
112     % Vetor de observacao medido
113     y_m = [S0;M0];
114
115     % Sensores (Luminosidade e Magnetometro): transformacao das
        colunas do SP por meio da funcao de medidas h(.)
116     S_b = zeros(3,15);
117     M_b = zeros(3,15);
118     for j=1:(2*n+1)
119         q1 = Sp(1,j);
120         q2 = Sp(2,j);
121         q3 = Sp(3,j);
122         q4 = Sp(4,j);
123         Dq = [q1^2-q2^2-q3^2+q4^2  2*(q1*q2+q3*q4)  2*(q1*q3-q2*q4
        )
124               2*(q1*q2-q3*q4)  -q1^2+q2^2-q3^2+q4^2  2*(q2*q3+q1*
        q4)
125               2*(q1*q3+q2*q4)  2*(q2*q3-q1*q4)  -q1^2-q2^2+q3^2+q4
        ^2];
126         S_b(:,j) = Dq * sol_ref/norm(sol_ref);
127         S_b = S_b/norm(S_b);
128         M_b(:,j) = Dq * mag_ref/norm(mag_ref);
129         M_b = M_b/norm(M_b);
130     end
131
132     yp = [S_b; M_b];% matriz de observacao dos SP
133
134     % Media da matriz de observacao para obter o vetor de
        observacao predito
135     yest =yp * W;
136
137     res = y_m - yest;
138
139     % Covariancias cruzadas
140
141     pyy=zeros(nm,nm);
142     pxy=zeros(n,nm);
143

```

```

144     for i=1:2*n+1
145         pyy = pyy + W(i)*(yp(:,i)-yest)*(yp(:,i)-yest)';
146         pxy = pxy + W(i)*(Sp(:,i)-x_propn)*(yp(:,i)-yest)';
147     end
148
149     % Efeito dos ruidos das medidas
150     pyy = pyy + Rk;
151
152
153     %..... Fase de Atualizacao
154     .....
155
156     % Ganho de Kalman:
157     K = pxy/pyy;
158
159     % Estado estimado (x_est) e covariancia (P_est):
160     xest = [0;0;0;1;0;0;0];%inicializacao
161     xest = x_propn + K*res;
162
163     Px_est = Px - K*pyy*K';
164
165     % Normaliza o quaternion atualizado:
166     q_estn=xest(1:4)/norm(xest(1:4));
167     if q_estn(4)<0
168         q_estn=-q_estn;
169     end
170
171     Qsi_estn = [q_estn(4) -q_estn(3)  q_estn(2);
172                q_estn(3)  q_estn(4) -q_estn(1);
173                -q_estn(2)  q_estn(1)  q_estn(4);
174                -q_estn(1) -q_estn(2) -q_estn(3)];
175     MS=[Qsi_estn      zeros(4,3);
176         zeros(3,3) eye(3)];
177     Pest = MS'*Px_est*MS;
178
179     % Reconstitui o estado estimado com o quaternion
180     % normalizado
181     xest=[q_estn; x_est(5:7)];
182 end

```