



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**Análise do escoamento de Couette-Poiseuille  
em um canal retangular com dimensões finitas**

**George Harrison Santos  
Rafael Araújo Melo**

**Brasília, Fevereiro de 2022**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**Análise do escoamento de Couette-Poiseuille  
em um canal retangular com dimensões finitas**

**George Harrison Santos**

**Rafael Araújo Melo**

*Projeto de Graduação 2 submetido ao Departamento de Engenharia  
Mecânica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro em Engenharia Mecânica*

Banca Examinadora

Prof. André von Borries Lopes, Dr., University of \_\_\_\_\_  
Manchester  
*Orientador*

Prof. Bráulio Gutierrez Pimenta, Dr., Universidade \_\_\_\_\_  
de Brasília  
*Examinador interno*

Prof. Edgar Amaral Silveira, Dr., Universidade de \_\_\_\_\_  
Brasília e Université de Lorraine  
*Examinador interno*

## FICHA CATALOGRÁFICA

SANTOS, GEORGE HARRISON E MELO, RAFAEL ARAÚJO

Análise do escoamento de Couette-Poiseuille em um canal retangular com dimensões finitas [Distrito Federal] 2022.

xvi, 142 p., 210 x 297 mm (EFL/FT/UnB, Engenheiro, Engenharia Mecânica, 2022).

Projeto de Graduação 2 - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica

- |                                     |                                  |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1. Escoamento de Couette-Poiseuille | 2. Fluido Newtoniano             |
| 3. Transferência de calor           | 4. Canal retangular              |
| 5. Solução numérica                 | 6. Método das diferenças finitas |
| I. ENM/FT/UnB                       |                                  |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SANTOS, G.H. E MELO, R.A. (2022). *Análise do escoamento de Couette-Poiseuille em um canal retangular com dimensões finitas*. Projeto de Graduação 2, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 142 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: George Harrison Santos & Rafael Araújo Melo

TÍTULO: Análise do escoamento de Couette-Poiseuille em um canal retangular com dimensões finitas.

GRAU: Engenheiro em Engenharia Mecânica ANO: 2022

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Projeto Final de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Projeto Final de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

George Harrison Santos e Rafael Araújo Melo

Depto. de Engenharia Mecânica (ENM) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

## Agradecimentos

*“Tudo o que temos que decidir é o que fazer com o tempo que nos é dado”. Começo os agradecimentos com a ilustre frase proferida por Gandalf - O cinzento na sociedade do anel. Esse trabalho representa minhas decisões, é o resumo daquilo que escolhi empregar meus últimos anos em uma árdua missão de me tornar um engenheiro mecânico. Todos os sacrifícios, toda a dedicação, o esforço e perseverança são créditos meus e meus somente, mas há aqueles que me ajudaram a manter o foco e acreditar no meu potencial para que eu pudesse finalizar essa longa jornada. Primeiro, quero agradecer a minha mãe Kilza Cristina, uma mulher maravilhosa que sempre tenta me mostrar o que há de melhor em mim. A minha avó Marlene Ferreira, que sempre acreditou em mim e fomentou os meus sonhos. A minha irmã, que nunca duvidou de mim. A minha namorada Amanda Drumond, uma mulher incrível que sempre me colocou para cima quando eu estava para baixo e me fez acreditar que eu sou capaz de qualquer coisa. Aos meus sogros por todo o apoio. As minhas cunhadas, por todo o incentivo. Ao meu grande amigo Rafael Melo, por toda experiência que compartilhamos e toda a ajuda que ele me deu nos momentos difíceis da faculdade. A todos os meus colegas e a amigos que compartilharam uma parcela dessa jornada. Nesse tempo, tive alguns professores incríveis e que merecem destaque. Ao primeiro deles, o professor Taygoara Felamingo, que sempre foi uma inspiração dentro do departamento por todo o seu conhecimento, dedicação e paixão pelo ensino, não só de engenharia mecânica, mas também de poesia. O segundo, aquele que me faltam palavras para expressar gratidão, meu orientador e professor André von Borries, que durante muito tempo foi um ótimo orientador, assim como um grande amigo, professor dedicado e que não mediu esforços para nos ajudar em quaisquer dificuldades. Agradeço também aos meus supervisores de estágio, Sérgio Neto, Rafael Carvalho e Artur Delabio por todo o suporte prestado, por todos os ensinamentos, por todo auxílio, compreensão e acolhimento. Por fim, agradeço também a banda de rock que esteve comigo durante um grande período da minha vida, mas especialmente nas 4 semanas que precederam o final dessa jornada, meus sinceros agradecimentos ao Red Hot Chilli Peppers por suas canções que agraciaram meus ouvidos enquanto eu escrevia as últimas etapas desse trabalho.*

*George Harrison Santos*

*Quando se pensa no seu futuro é difícil até imaginar as coisas que podem acontecer e os lugares que você pode chegar, mais difícil ainda ter certeza dessas mesmas coisas. Hoje eu posso dizer que superei muito mais do que sempre imaginei sobre mim, conquistei muito mais do que até sonhei. Tenho muito orgulho de me tornar, finalmente, um engenheiro mecânico. Foi um longo caminho, com vários desafios e várias dificuldades, mas que ficaram para trás. Gostaria primeiramente de agradecer a Deus, pois sem Ele eu nada sou, e não teria chegado até aqui, não teria tido forças para continuar em diversos momentos, portanto sou muito grato por essa e diversas conquistas que obtive ao longo da minha jornada acadêmica. A minha mãe, Ivone Dias, que sempre acreditou em mim e me incentivou a sempre dar o meu melhor e sempre buscar mais do que se era esperado. Ao meu pai, Odaril Geraldo, que sempre esteve do meu lado e que sempre me ensinou muito sobre a vida e até sobre a engenharia (mesmo sem ser engenheiro). A minha irmã Letícia de Araújo que sempre me apoiou em tudo, que me deu forças e sempre me fez acreditar que as coisas iriam dar certo. A minha namorada, Geovanna Diniz, que esteve junto comigo nessa longa caminhada desde o início, me apoiando, ajudando, incentivando, dando forças em momentos difíceis, e sempre acreditando que eu era capaz de tudo. Ao meu grande amigo George que também esteve comigo desde o início, nos momentos bons e ruins, e que se tornou um importante pilar na vida acadêmica e pessoal. Ao meu primo Marcelo Lopes que dividiu grande parte dessa jornada comigo, me ajudando em diversos momentos. A minha tia, Marli Alden, que também me deu suporte nessa jornada acadêmica. A todos meus amigos e colegas que tive o prazer de conhecer e que também me ajudaram. Ao meu primeiro professor por quem me encantei com sua forma de ensinar, Roberto Gandulfo, e que me deu uma oportunidade a qual jamais esperava e que mudou por completo vários aspectos da minha jornada acadêmica. Ao meu professor orientador André von Borries, sendo um excelente professor de umas das matérias mais difíceis do curso, que também acreditou no meu potencial e que estava sempre de braços abertos para me ajudar, e que se tornou também um grande amigo. Ao meu chefe Diogo Andrade, que desde o estágio compartilhou um pouco do seu vasto conhecimento ao longo de vários temas, incluindo engenharia, e que me deu muitas oportunidades, sempre me apoiando. Por fim, gostaria de agradecer a toda minha família que mesmo indiretamente contribuíram para que eu pudesse me tornar um engenheiro mecânico.*

*Rafael Araújo Melo*

---

## RESUMO

O presente trabalho tem como objeto de estudo os escoamentos de Couette, Poiseuille e Couette-Poiseuille. Partindo das equações governantes do problema, o estudo estende-se a uma análise numérica-computacional para o escoamento de Couette-Poiseuille dentro de um canal retangular de dimensões finitas utilizando as mesmas hipóteses simplificadoras presentes na classe dos escoamentos unidirecionais. Para tal, foi implementado na linguagem de programação Python as variáveis e equações governantes do problema em sua forma adimensional, discretizadas através do método numérico das diferenças finitas. Essa abordagem se inspira e baseia no estudo de escoamentos que acontecem dentro dos rasgos dos canais de uma extrusora durante processo de extrusão, amplamente abordado na literatura. No decorrer deste estudo foram obtidas as soluções analíticas da velocidade e da vazão segundo o modelo proposto por Rowell e Finlayson (1922). A solução numérica foi obtida através do método de diferenças finitas, utilizando resultados presentes na literatura para a validação. Com os resultados, obteve-se graficamente o campo de velocidade e propriedades relacionadas ao escoamento como velocidade média e fator de atrito de Fanning. Foi avaliado a resposta do escoamento à mudança das variáveis de controle e verificou-se a influência dos dois principais fatores que geram o escoamento: o gradiente de pressão e a combinação do mesmo com o movimento de uma superfície. Além dessas variações para o estudo, a alteração da razão de aspecto, isto é, diferentes dimensões dos comprimentos do canal, foi amplamente explorada. Durante a obtenção do campo de velocidade, foi determinado, através da equação da energia interna, o campo de temperatura seguindo as considerações do modelo proposto por Syrjälä (1996), onde as superfícies do canal são consideradas adiabáticas com fluxo de calor constante perifericamente e axialmente. Alterando as mesmas variáveis do escoamento, foi determinado graficamente o campo de temperatura, assim como número de Nusselt médio local para diferentes números de Couette, o que é algo inédito na literatura. Com os erros relativos determinados entre os resultados analíticos obtidos na literatura e os resultados obtidos numericamente foi percebido que o maior erro relativo foi inferior a 0,013%. Variáveis como a temperatura média e máxima também foram exploradas no intuito de enriquecer as análises. Além dos estudos, todos os modelos numéricos utilizados neste trabalho foram devidamente validados.

---

## ABSTRACT

The present work has as its object of study the Couette, Poiseuille and Couette-Poiseuille flows. Starting from the governing equations of the problem, the study extends to a numerical-computational analysis for the Couette-Poiseuille flow inside a rectangular channel of finite dimensions, using

the same simplifying assumptions present in the class of unidirectional flows. To this end, the variables and governing equations of the problem in their dimensionless form, discretized through the numerical method of finite differences, were implemented in the Python programming language. This approach is inspired by and based on the study of flows that occur within the slots of an extruder's channels during the extrusion process, widely discussed in the literature. In the course of this study, the analytical solutions of velocity and flow were obtained according to the model proposed by Rowell e Finlayson (1922). The numerical solution was obtained through the finite difference method, using results from the literature for validation. With the results, the velocity field and properties related to the flow such as average velocity and Fanning friction factor were graphically obtained. The flow response to the change of control variables was evaluated and the influence of the two main factors that generate the flow was verified: the pressure gradient and its combination with the movement of a surface. In addition to these variations for the study, the alteration of the aspect ratio, that is, different dimensions of the channel lengths, was widely explored. When obtaining the velocity field, the temperature field was determined through the internal energy equation, following the considerations of the model proposed by Syrjälä (1996), where the channel surfaces are considered adiabatic with constant heat flow peripherally and axially. Changing the same variables of the flow, the temperature field was graphically determined, as well as the local mean Nusselt number for different Couette numbers, which is unprecedented in the literature. With the relative errors determined between the analytical results obtained in the literature and the results obtained numerically, it was noticed that the largest relative error was lower than 0.013%. Variables such as average and maximum temperature were also explored in order to enrich the analyses. In addition to the studies, all numerical models used in this work were duly validated.



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	OBJETIVOS.....	2
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	3
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO ANALÍTICA</b> .....	<b>19</b>
3.1	EQUAÇÕES GOVERNANTES DO CAMPO DE VELOCIDADE .....	19
3.2	ESCOAMENTO ISOTÉRMICO UNIDIRECIONAL .....	19
3.3	ESCOAMENTO LAMINAR RETILÍNEO UNIDIMENSIONAL .....	21
3.4	ESCOAMENTO PLANO DE COUETTE .....	23
3.5	ESCOAMENTO PLANO DE POISEUILLE .....	25
3.6	ESCOAMENTO PLANO DE COUETTE-POISEUILLE .....	27
3.7	ESCOAMENTO ISOTÉRMICO UNIDIRECIONAL EM UM CANAL DE GEOMETRIA RETANGULAR .....	29
3.7.1	NÚMERO DE POISEUILLE - $fRe$ .....	36
3.8	INCLUSÃO DOS EFEITOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO ESCOAMENTO DENTRO DO CANAL RETANGULAR .....	36
3.8.1	NÚMERO DE NUSSELT - $Nu$ .....	38
3.9	ADIMENSIONALIZAÇÃO .....	39
3.9.1	ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES DO CAMPO DE VELOCIDADE .....	40
3.9.2	ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES DO CAMPO DE TEMPERATURA.....	43
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA</b> .....	<b>46</b>
4.1	SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES DO PROBLEMA ....	46
4.1.1	DIFERENÇAS FINITAS .....	46
4.1.2	APROXIMAÇÕES DAS INTEGRAIS POR MÉTODOS NUMÉRICOS .....	51
4.2	SOLUÇÃO COMPUTACIONAL .....	55
4.3	CONFIGURAÇÕES DE SOFTWARE E HARDWARE .....	56
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	<b>58</b>
5.1	ANÁLISE COMPARATIVA COM OS RESULTADOS OBTIDOS POR ROWELL & FYNLANSON .....	58
5.2	COMPARAÇÃO DAS PROPRIEDADES DO ESCOAMENTO COM DADOS DA LITERATURA.....	61
5.3	CAMPO DE VELOCIDADE .....	65

5.4	VARIAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADE COM O NÚMERO DE COUETTE ...	74
5.5	VAZÃO .....	76
5.6	NÚMERO DE POISEUILLE E A PERDA DE PRESSÃO.....	81
5.7	CAMPO DE TEMPERATURA .....	84
5.8	VARIAÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA COM O NÚMERO DE COUETTE .	93
5.9	NÚMERO DE NUSSELT .....	96
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>104</b>
6.1	ENCERRAMENTO .....	104
6.2	SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS.....	105
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>107</b>
	<b>APÊNDICES.....</b>	<b>110</b>
<b>I</b>	<b>REFERÊNCIAS MATEMÁTICAS .....</b>	<b>111</b>
I.1	SÉRIE DE FOURIER DA ONDA QUADRADA .....	111
I.2	DEDUÇÃO DA EDO DE SEGUNDA ORDEM .....	113
I.3	OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO DA VAZÃO.....	115
I.4	ADIMENSIONALIZAÇÃO DO VETOR VELOCIDADE .....	117
I.5	ADIMENSIONALIZAÇÃO DA VAZÃO .....	120
<b>II</b>	<b>RESULTADOS EXTRAS .....</b>	<b>123</b>
II.1	CAMPO DE VELOCIDADE .....	123
II.2	CAMPO DE TEMPERATURAS.....	123
<b>III</b>	<b>ROTINA COMPUTACIONAL.....</b>	<b>125</b>

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação gráfica de uma determinada seção do mecanismo de plasticização da extrusora monofuso. ....	1
2.1	Processo de extrusão desde a adição do material até a saída do material no molde: (a) admissão do material e aditivos (b) injeção de líquido e derretimento do material (c) adição de enchimentos e extração de gases (d) extrusão do material através do molde. ....	4
2.2	Representação gráfica no trabalho desenvolvido por Rowell e Finlayson: (a) modelo da Extrusora (b) perfil de velocidades entre placas paralelas para distintos valores de $\varphi$ (gradiente de pressão adimensional) para a placa superior se movendo com velocidade constante $U$ e a placa inferior estacionária.....	5
2.3	Representação em perspectiva do vetor velocidade $V$ e suas componentes transversais e binormais de um escoamento de um fluido aproximadamente Newtoniano em um canal retangular para: (a) escoamento livre no canal, (b) escoamento sob a existência de uma camada intermediária estacionária (c) escoamento em um canal fechado sem saída (d) representação, em perspectiva, do vetor velocidade no fuso da extrusora.....	6
2.4	Representação gráfica da vista das dimensões do perfil de velocidades de uma extrusora sob a perspectiva de (a) Carley e Strub (b) Griffith. ....	7
2.5	Representação gráfica do modelo desenvolvido por Liu e Chen (1987), sendo: (a) descrição do canal utilizado em uma das seções de estudo (b) seções dos canais que foram estudadas. ....	8
2.6	Variação da taxa de vazão volumétrica adimensional $Q_c$ por uma quantidade adimensional $E$ .....	9
2.7	Representação gráfica do modelo do extrusor e do rasgo do canal, conforme estudado por Kaiser e Smith (1969).....	9
2.8	Representação gráfica do modelo do extrusor e do rasgo do canal, conforme estudado por Tamura et al. (1993). ....	10
2.9	Representação gráfica (a) do perfil de velocidades para os casos em que o parafuso gira, e o cilindro, respectivamente (b) da pressão atuante no parafuso ao longo do tempo.....	10
2.10	Representação gráfica da (a) distribuição do perfil de velocidades gerado pelo arrasto do fluido na raiz do parafuso (b) distribuição do perfil de velocidades gerado pelo arrasto do fluido na superfície da rosca do parafuso. ....	11
2.11	Variação do fluxo do escoamento com o ângulo de hélice $\tau$ para diferentes valores de razão de aspecto $\gamma$ : (a) razão de curvatura da hélice $\kappa = 0,1$ (b) $\kappa = 0,2$ . ....	12
2.12	Representação gráfica das regiões em que o fluido não escoa em (a) canal quadrado (b) canal anular excêntrico.....	13

2.13	Resultados obtidos entre a razão da taxa de vazão volumétrica de um fluido viscoplástico e a taxa de vazão volumétrica para um fluido Newtoniano com a variação do número de (a) Hagen (b) Bingham. ....	13
2.14	Resultados obtidos para: (a) altura adimensional do canal versus velocidade descendente do canal para distintos valores do gradiente de pressão na direção descendente do canal (b) comparação dos resultados obtidos com os presentes na literatura para vazão adimensional versus o gradiente de pressão adimensional na direção descendente do canal. ....	14
2.15	Comparação dos resultados obtidos por Wolfgang & Marschik através da solução numérica proposta com soluções analíticas existentes na literatura. Para uma razão de aspecto $h/w = 0,01$ , $t/D_b = 1$ e $n = 1$ , plotaram (a) altura adimensional do canal versus velocidade transversal do canal (b) altura adimensional do canal versus velocidade descendente do canal. ....	15
2.16	Comparação entre os resultados obtidos numericamente com as soluções analíticas da literatura para um escoamento gerado pelo arrasto de uma placa dentro de uma cavidade. (a) altura adimensional do canal versus velocidade transversal (b) velocidade ascendente do canal. ....	15
2.17	Representação gráfica de uma seção do canal (a) e a folga entre o cilindro e a crista da rosca (b) representação ampliada da folga e do cilindro vista do primeiro diedro. ( $t$ é o passo do parafuso e $D_b$ é o diâmetro do parafuso). ....	16
2.18	Fluxo de vazão como função do gradiente de pressão tendo a influência do índice do Power law para (a) $t/D_b = 0,5$ (b) $t/D_b = 1,0$ . ....	16
2.19	Representação gráfica do modelo do extrusor, contendo a alocação do fluido no rasgo do canal ao longo do parafuso, conforme estudado por Wilczyński et al. (2019). ....	17
2.20	Modelagem feita utilizando o método de elementos finitos da distribuição de pressão e velocidade para os escoamentos viscoplásticos. ....	17
2.21	Resultados obtidos da análise feita para variação dos modelos do parafuso da extrusora incluindo a variação de pressão. ....	18
3.1	Escoamento unidirecional. ....	20
3.2	Escoamento plano de Couette. ....	23
3.3	Escoamento plano de Poiseuille. ....	25
3.4	Escoamento plano de Couette-Poiseuille. ....	27
3.5	Representação gráfica da geometria de um canal retangular com a superfície do topo se movimentando com velocidade constante $U$ . ....	29
3.6	Gráfico gerado para avaliar o comportamento da variável $A$ em relação a $\lambda$ na equação (3.80) quando essa assume diferentes valores. ....	35
3.7	Gráfico gerado para avaliar o comportamento da variável $B$ em relação a $\lambda$ na equação (3.80) quando essa assume diferentes valores. ....	35

4.1	Representação gráfica de uma placa retangular com dimensões equivalentes a $C$ e $D$ . .....	47
4.2	Discretização do domínio das dimensões da placa. ....	47
4.3	Aproximação da área de uma figura delimitada por uma função $f(x)$ utilizando geometria elementar.....	52
4.4	Interpretação gráfica da regra dos trapézios aplicada a um intervalo delimitado. ....	54
5.1	Comparação entre os resultados obtidos para a variável $A$ , velocidade média e máxima em função da razão de aspecto $b/a$ , (a) utilizando o método de diferenças finitas com o auxílio de um programa computacional para a solução, onde $\text{---}A = A$ , $\text{- - -}A = \lambda/2$ e $\text{.....}A = \lambda/2 - 0,3151\lambda^2$ (b) valores da literatura obtidos por Rowell e Finlayson, onde $\bullet A = A$ , $\blacktriangle A = \lambda/2$ e $\blacksquare A = \lambda/2 - 0,3151\lambda^2$ , (c) utilizando o método de diferenças finitas com o auxílio de um programa computacional para a solução, onde $\text{---}B = B$ , $\text{- - -}B = \lambda^3/12$ e $\text{.....}B = \lambda^3/12 - 0,05252\lambda^4$ (d) valores da literatura obtidos por Rowell e Finlayson, onde $\bullet B = B$ , $\blacktriangle B = \lambda^3/12$ e $\blacksquare B = \lambda^3/12 - 0,05252\lambda^4$ .....	59
5.2	Perfil de velocidades obtido para $Co = 0$ e variando a razão de aspecto $\lambda$ do canal, para: .....	66
5.3	Perfil de velocidades obtido para $Co = 0,07$ e variando a razão de aspecto $\lambda$ do canal, para: .....	69
5.4	Perfil de velocidades obtido para $Co = 4,0$ e variando a razão de aspecto $\lambda$ do canal, para: .....	72
5.5	Variação do campo de velocidade com a inclusão e aumento do número de Couette	75
5.6	Área transversal do canal retangular em função da razão de aspecto. ....	76
5.7	Vazão adimensional $\tilde{Q}$ e velocidade média $\tilde{u}_{med}$ em função da razão de aspecto $\lambda$ para número de Couette igual a: (a) $Co = 0,25$ (b) $Co = 1,0$ (c) $Co = 4,0$ . ....	78
5.8	Vazão adimensional $\tilde{Q}$ em função da razão de aspecto $\lambda$ para diferentes número de Couette. ....	81
5.9	Fator de atrito de Fanning $fRe$ para diferentes razões de aspecto $\lambda$ e para diferentes valores do número de Couette. ....	82
5.10	Valores da velocidade média $\tilde{u}_{med}$ para diferentes razões de aspecto $\lambda$ e para diferentes valores do número de Couette. ....	83
5.11	Valores da velocidade máxima $\tilde{u}_{max}$ para diferentes razões de aspecto $\lambda$ e para diferentes valores do número de Couette. ....	84
5.12	Perfil do campo de temperatura obtido para $Co = 0$ variando a razão de aspecto $\lambda$ do canal, para: (a) $\lambda = 0,1$ , (b) $\lambda = 0,3$ , (c) $\lambda = 0,5$ , (d) $\lambda = 0,7$ , (e) $\lambda = 0,9$ , (f) $\lambda = 1,0$ , (g) $\lambda = 1,5$ e (h) $\lambda = 2,0$ . ....	85
5.13	Perfil do campo de temperatura obtido para $Co = 0,07$ variando a razão de aspecto $\lambda$ do canal, para: (a) $\lambda = 0,1$ , (b) $\lambda = 0,3$ , (c) $\lambda = 0,5$ , (d) $\lambda = 0,7$ , (e) $\lambda = 0,9$ , (f) $\lambda = 1,0$ , (g) $\lambda = 1,5$ e (h) $\lambda = 2,0$ . ....	88

5.14	Perfil do campo de temperatura obtido para $Co = 4,0$ variando a razão de aspecto $\lambda$ do canal, para: (a) $\lambda = 0,1$ , (b) $\lambda = 0,3$ , (c) $\lambda = 0,5$ , (d) $\lambda = 0,7$ , (e) $\lambda = 0,9$ , (f) $\lambda = 1,0$ , (g) $\lambda = 1,5$ e (h) $\lambda = 2,0$ .	91
5.15	Varição do campo de temperatura com a inclusão e aumento do número de Couette	94
5.16	Valores do número de Nusselt para distintos valores de $Co$ e diferentes razões de aspecto $\lambda$ .	96
5.17	Valores do número de Nusselt $Nu$ para números de $Co$ maiores que 0,5 e $\lambda$ próximo de zero.	97
5.18	Parâmetro geral da variação do número de Nusselt $Nu$ para diferentes razões de aspecto $\lambda$ e para diferentes valores do número de Couette $Co$ .	98
5.19	Valores da temperatura média $\tilde{T}_{med}$ para distintos valores de $Co$ e diferentes razões de aspecto $\lambda$ .	99
5.20	Parâmetro geral da variação da temperatura média $\tilde{T}_{med}$ para diferentes razões de aspecto $\lambda$ e para diferentes valores do número de Couette $Co$ .	100
5.21	Valores da temperatura máxima $\tilde{T}_{máx}$ para distintos valores de $Co$ e diferentes razões de aspecto $\lambda$ .	101
5.22	Curva da rápida variação da temperatura máxima $\tilde{T}_{máx}$ para razões de aspecto entre $\lambda = 0$ e $\lambda = 0,01$ para alguns valores do número de Couette $Co$ .	101
5.23	Parâmetro geral da variação da temperatura máxima $\tilde{T}_{máx}$ para diferentes razões de aspecto $\lambda$ e para diferentes valores do número de Couette $Co$ .	102
I.1	Onda quadrada.	111
II.1	Resultados para o campo de velocidade para diversos números de $Co$ e uma razão de aspecto $\lambda = 5,0$	123
II.2	Resultados para o campo de temperatura para diversos números de $Co$ e uma razão de aspecto $\lambda = 5,0$	124

## LISTA DE TABELAS

5.1	Valores de $A$ , $B$ e $A/B$ para diferentes valores de $\lambda$ .....	60
5.2	Erro relativo entre os resultados numéricos e analíticos de $A$ , $B$ e $A/B$ . ....	60
5.3	$fRe$ para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto $\lambda$ em um canal retangular. ....	62
5.4	$fRe$ para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto $\lambda$ em um canal retangular. Os valores apresentados abaixo do trabalho de Ahmed (2006) são aproximações extraídas da Figura 5 de seu artigo, para $Ha = 0$ e $n = 1,0$	62
5.5	Razão das velocidades máximas e médias de acordo com a razão de aspecto em um escoamento laminar e totalmente desenvolvido. ....	63
5.6	Nusselt para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto $\lambda$ em um canal retangular. Os valores analíticos apresentados abaixo foram retirados do trabalho de Syrjälä (1996). ....	64
5.7	$Nu$ para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto $\lambda$ em um canal retangular. ....	64
5.8	Valores de $Nu$ para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto $\lambda$ e tamanho de malha $n$ . ....	65
5.9	Valores da área $A$ para diferentes valores de $\lambda$ . ....	77
5.10	Valores de $\tilde{Q}$ e $\tilde{u}_{med}$ para diferentes valores de $\lambda$ e $Co$ . ....	80
5.11	Valores de $Nu$ e $T_{med}$ para diferentes valores de $\lambda$ e $Co$ . ....	98
5.12	Valores de $Nu$ e $T_{med}$ para diferentes valores de $\lambda$ e $Co$ . ....	99
5.13	Valores de $\tilde{T}_{m\acute{a}x}$ determinado para distintos valores de $\lambda$ e vários números de $Co$ . ...	103

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$g$	Aceleração da gravidade	[m/s <sup>2</sup> ]
$p$	Campo de pressão	[Pa]
$c_p$	Calor específico a pressão constante	[J/kg]
$c_v$	Calor específico a volume constante	[J/kg]
$h$	Coefficiente de troca de calor por convecção	[W/m <sup>2</sup> K]
$u$	Componente do vetor velocidade na direção $x$	[m/s]
$v$	Componente do vetor velocidade na direção $y$	[m/s]
$w$	Componente do vetor velocidade na direção $z$	[m/s]
$d$	Comprimento da profundidade do canal	[m]
$b$	Comprimento de largura do canal	[m]
$C$	Comprimento vertical genérico	[m]
$D$	Comprimento transversal genérico	[m]
$D_h$	Diâmetro hidráulico	[m]
$x$	Eixo de coordenada longitudinal	[m]
$y$	Eixo de coordenada vertical	[m]
$z$	Eixo de coordenada transversal	[m]
$Y_n$	Função genérica de $y$	[m/s]
$Y_{2n}$	Função genérica par de $y$	[m/s]
$Y_m$	Função genérica ímpar de $y$	[m/s]
$\dot{Q}$	Geração interna de calor	[W/m <sup>2</sup> ]
$t$	Variável do tempo	[s]
$Q$	Vazão Volumétrica	[m <sup>3</sup> /s]
$U$	Velocidade constante arbitrária	[m/s]
$V$	Velocidade característica	[m/s]
$P$	Perímetro	[m]
$F$	Vetor força	[kg m/s <sup>2</sup> ]
$T$	Vetor temperatura	[K]
$u$	Vetor velocidade	[m/s]



## Símbolos Gregos

$\kappa_f$	Condutividade térmica	[W/m K]
$\alpha$	Difusividade térmica	[m <sup>2</sup> /s]
$\varrho$	Energia interna	[J]
$\nabla$	Gradiente	
$\infty$	Infinito	
$\nabla^2$	Laplaciano	
$\xi$	Magnitude da tolerância de convergência	
$\rho$	Massa específica	[kg/m <sup>3</sup> ]
d	Operador diferencial	
$\partial$	Operador diferencial parcial	
$\pi$	Pi	
$\lambda$	Razão de aspecto	
$\Sigma$	Somatório	
$\tau$	Tensão de cisalhamento	[N/m <sup>2</sup> ]
$\zeta$	Tensor de tensões viscoso	
$\Delta$	Varição entre duas grandezas similares	
$\mu$	Viscosidade dinâmica	[kg/m s]

## Grupos Adimensionais

$\tilde{d}$	Altura adimensional
$X_n$	Coefficiente da série de Fourier
$e$	Coefficientes do polinômio de Lagrange
$L$	Comprimento característico da série de Fourier
$c$	Constante arbitrária de integração
$A$	Constante de simplificação da equação
$B$	Constante de simplificação da equação
$\tilde{y}$	Comprimento adimensional da direção $y$
$\tilde{z}$	Comprimento adimensional da direção $z$
$f$	Fator de atrito
$J$	Função genérica
$f$	Função genérica
$h$	Função genérica da série de Fourier
$\tilde{b}$	Largura adimensional
$Co$	Número de Couette
$Nu$	Número de Nusselt
$Pr$	Número de Prandtl
$fRe$	Número de Poiseuille
$Re$	Número de Reynolds
$d$	Operador diferencial
$\mathcal{O}$	Ordem de grandeza
$P$	Polinômio de Lagrange
$R$	Resíduo da série ou Erro
$\tilde{T}$	Temperatura adimensional
$\tilde{T}_{med}$	Temperatura média adimensional
$l$	Varição entre dois pontos do eixo das abcissas para a variável $x$
$k$	Varição entre dois pontos do eixo das abcissas para a variável $y$
$n$	Variante do somatório para números reais e positivos
$m$	Variante do somatório para números reais, ímpares e positivos
$A_m$	Variável constante determinada pelas condições de contorno
$B_m$	Variável constante determinada pelas condições de contorno
$\beta$	Variável simplificadora
$\gamma$	Variável simplificadora
$\tilde{Q}$	Vazão adimensional
$\tilde{u}$	Velocidade adimensional
$\tilde{u}_{med}$	Velocidade média adimensional

## Subscritos

$x$	Direção $x$ do eixo de coordenadas
$y$	Direção $y$ do eixo de coordenadas
$z$	Direção $z$ do eixo de coordenadas
$i$	Índice de variação da propriedade na direção $x$
$j$	Índice de variação da propriedade na direção $y$
$k$	Índice de variação da propriedade na direção $z$
$yx$	Plano formado pelas coordenadas $yx$
max	Máximo
min	Mínimo
med	Médio
ot	Ótimo
parede	Superfície interna dos limites interiores do canal

## Sobrescritos

$\sim$	Indicador de variáveis adimensionais
ITER	Referenciação do passo de iteração

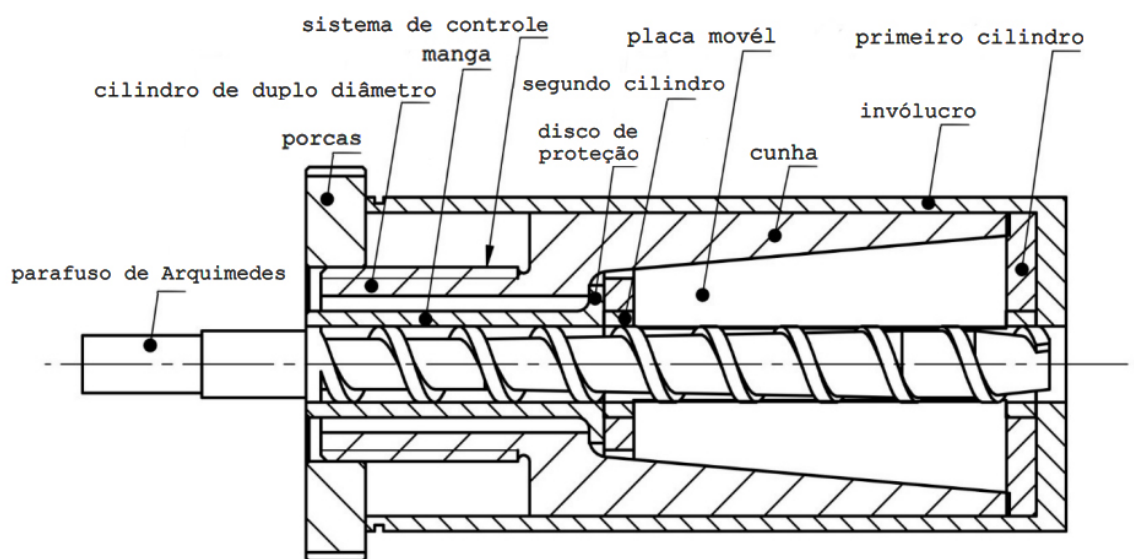
## Siglas

EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
SOR	Successive over-relaxation (Sobre-Relaxação Sucessiva)
cte	Constante

# 1 INTRODUÇÃO

A extrusora de parafuso (Figura 1.1) é um equipamento empregado no processamento de alimentos, materiais poliméricos e na indústria farmacêutica (Ferdynus, Sikora e Gaspar-Cunha, 2019). Na indústria alimentícia, por exemplo, alimentos pré-formados como cereais são feitos utilizando uma extrusora de alimentos que usam parâmetros controlados de temperatura e pressão para criar pedaços padronizados<sup>1</sup>. Já na indústria farmacêutica, as mesmas são utilizadas para misturar moléculas de medicamentos com polímeros bioativos, assim como na preparação de dosagens entéricas, dosagens de liberação sustentada e no mascaramento de sabor<sup>2</sup>. Em ambos os exemplos, após a alimentação da extrusora com o material a ser trabalhado, o funcionamento baseia-se na transportação do material através da rotação do parafuso até uma fieira, onde o fuso dentro do cilindro força o material atravessar um orifício ou molde (vide Figura 2.1). Em especial, este trabalho inspira-se na extrusora do tipo parafuso simples, composta por um cilindro oco com um único parafuso no centro, uma das extremidades abertas para alimentação do material a ser extrudado e na outra, uma abertura emoldurada na forma requerida para o material.

Figura 1.1: Representação gráfica de uma determinada seção do mecanismo de plasticização da extrusora monofuso.



Fonte: Ferdynus, Sikora e Gaspar-Cunha, 2019

O grande problema de projetar extrusoras é a previsão do comportamento do fluido escoando dentro dos canais do fuso. Trata-se de um processo com uma certa complexidade, já que em certos casos o escoamento é tridimensional e o fluido de trabalho é compressível e não isotérmico,

<sup>1</sup> Aplicações de uma extrusora: <https://www.thebonnotco.com/what-is-an-extruder/>

<sup>2</sup> Aplicação da máquina extrusora na indústria farmacêutica: <<https://www.thermofisher.com/br/en/home/industrial/pharma-biopharma/drug-formulation-manufacturing.html>>

o que dificulta a solução das equações governantes. Porém, alguns estudos levam em consideração simplificações desse problema, que são bem aceitos para certos casos, e assim, diminuem a complexidade do mesmo. Ao longo dos últimos 100 anos diversas abordagens foram trabalhadas no tema o que permitiu uma evolução significativa na aplicação do problema. Uma simplificação usual é aproximar o rasgo do canal helicoidal do extrusor por um canal retangular, podendo dessa forma gerar soluções analíticas do escoamento a partir das simplificações empregadas na equação da continuidade e na equação de Navier-Stokes.

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é dar continuidade aos estudos daqueles que nos antecederam, aplicando suas teorias e abordagens direcionadas ao estudo do escoamento de Couette-Poiseuille de um fluido Newtoniano em um canal retangular de dimensões finitas. Todo escoamento é regido e controlado por equações características, baseadas em seu aspecto e estado “físico”. Neste trabalho, o escoamento em questão é considerado isotérmico, incompressível e laminar. Com essas hipóteses, as equações diferenciais parciais da continuidade e as três componentes da equação de Navier-Stokes, por serem acopladas, deverão ser resolvidas através do uso de métodos computacionais utilizando o método das diferenças finitas, para determinar numericamente o campo de velocidade desse escoamento assim como outros parâmetros físicos relevantes, como o produto do fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds ( $fRe$ ) e a vazão.

Deverá ser considerado também o caso em que o escoamento é não isotérmico. Na prática, teremos que lidar com mais uma equação governante e conseqüentemente, com mais uma variável a ser determinada, o campo de temperatura. O procedimento foi feito de maneira análoga ao campo de velocidade, utilizando o método de diferenças finitas e soluções computacionais. Através do campo de velocidade, sob as mesmas hipóteses adotadas somadas a consideração de um canal com superfícies adiabáticas e um escoamento com fluxo de calor axialmente uniforme e temperatura periféricamente uniforme, será determinado, através da equação da energia desconsiderando a dissipação viscosa, o campo de temperatura do escoamento para diferentes razões de aspecto e distintos números de Couette. Uma vez implementado, o programa deve ser validado para que então sejam gerados os resultados e os mesmos comparados com os resultados analíticos, já obtidos na literatura.

Os objetivos específicos são, portanto:

1. Obtenção da solução analítica para um escoamento unidirecional em um canal de geometria retangular
2. Adimensionalização das equações governantes do problema
3. Transformação das equações governantes do problema contínuo em contra-partes discretas utilizando o método das diferenças finitas

4. Implementação das equações discretizadas na solução computacional
5. Validação do programa computacional
6. Obtenção e análise dos resultados numéricos para o campo de velocidade e de temperatura
7. Análise das propriedades termo-físicas do escoamento

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O segundo capítulo apresenta uma contextualização histórica do tema, apresentando trabalhos considerados relevantes pelos autores, não somente pelo conteúdo apresentado, mas também pela importância de suas descobertas na evolução do assunto.

O terceiro capítulo começa com uma breve apresentação das considerações utilizadas para a resolução do nosso problema. Em seus tópicos, são abordadas as metodologias, hipóteses adotadas e as simplificações que essas hipóteses proporcionam. Nesse âmbito, são apresentadas a formulação matemática do problema, onde as equações governantes são exploradas e organizadas de acordo com as hipóteses simplificadores, que com o auxílio das condições de contorno, propiciam o estudo de uma classe específica de escoamentos: os escoamentos de Couette e Poiseuille, assim como a combinação dos dois. Assim, damos início a prerrogativa dos estudos, a obtenção do resultado analítico para o escoamento de um fluido Newtoniano dentro de um canal retangular com dimensões finitas e das equações adimensionalizadas que permitem a implementação dos resultados numéricos.

No quarto capítulo, abordamos dentro do trabalho a metodologia utilizada para a aproximação dos resultados, explanando o método numérico utilizado, a forma como foi implementada a rotina computacional assim como o princípio de seu funcionamento e as ferramentas necessárias para a aproximação da solução computacional a ser alcançada.

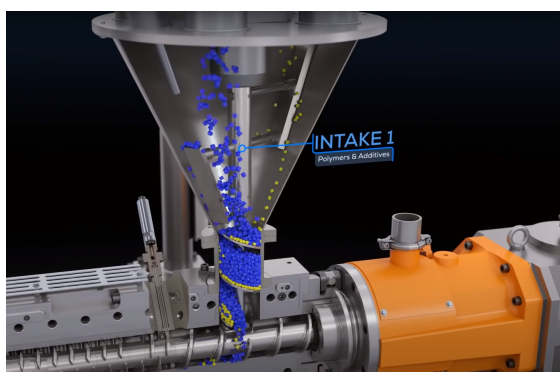
O quinto capítulo começa com a comparação dos resultados obtidos com problemas conhecidos da literatura para a validação do programa computacional. Em seguida há a apresentação dos resultados específicos obtidos para o problema através da metodologia utilizada, onde são apresentados gráficos que revelam o comportamento característico do escoamento e do campo de temperatura estudado para diferentes parâmetros.

Por fim, a conclusão encerra o último capítulo, seguido pelos apêndices do trabalho com o intuito de elucidar ou complementar, de alguma forma, o conteúdo anteriormente apresentado. Nos apêndices, temos de forma mais detalhada algumas abordagens matemáticas, como a série quadrada de Fourier e a adimensionalização realizada nas equações governantes. São apresentados, também, o código computacional elaborado para a resolução dos problemas do formato em que o mesmo é utilizado dentro do ambiente de execução e alguns resultados extras que buscam complementar o conteúdo apresentado no quinto capítulo.

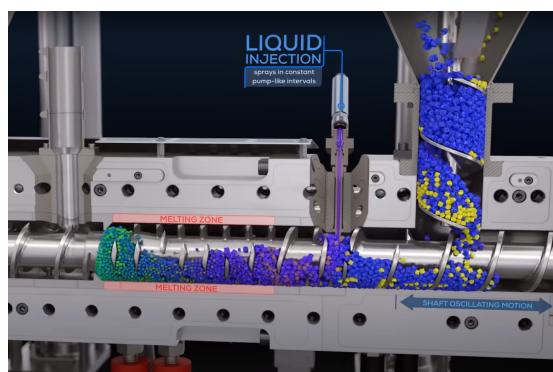
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em 1922, Rowell e Finlayson propuseram um modelo físico-matemático, baseado em uma bomba de fluidos viscosos de Sir John Dewrance (Figura 2.2). Com a hipótese do cilindro mover-se ao redor do parafuso, que permanece estacionário, ao ser criado um volume de controle em um único canal do fuso, temos uma geometria retangular com dimensões definidas, preenchida com óleo e coberto por uma placa plana em movimento constante. Com as hipóteses de fluido incompressível, isotérmico, Newtoniano e em regime permanente, Rowell e Finlayson (1922, 1928) desenvolveram um modelo analítico que descreve aproximadamente o escoamento unidirecional dentro de um canal retangular considerando os efeitos de parede. Na Figura 2.2, vemos o perfil de velocidades traçado entre duas placas paralelas para distintos valores de gradiente de pressão ao longo da distância entre as placas.

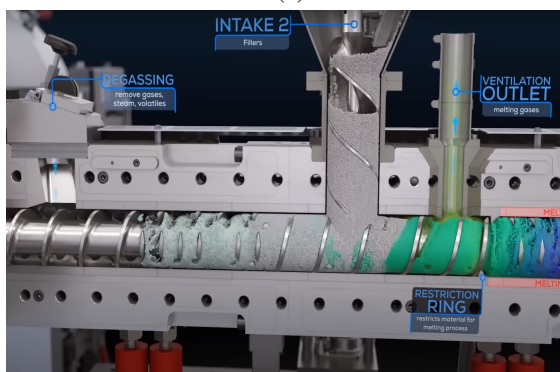
Figura 2.1: Processo de extrusão desde a adição do material até a saída do material no molde: (a) admissão do material e aditivos (b) injeção de líquido e derretimento do material (c) adição de enchimentos e extração de gases (d) extrusão do material através do molde.



(a)



(b)



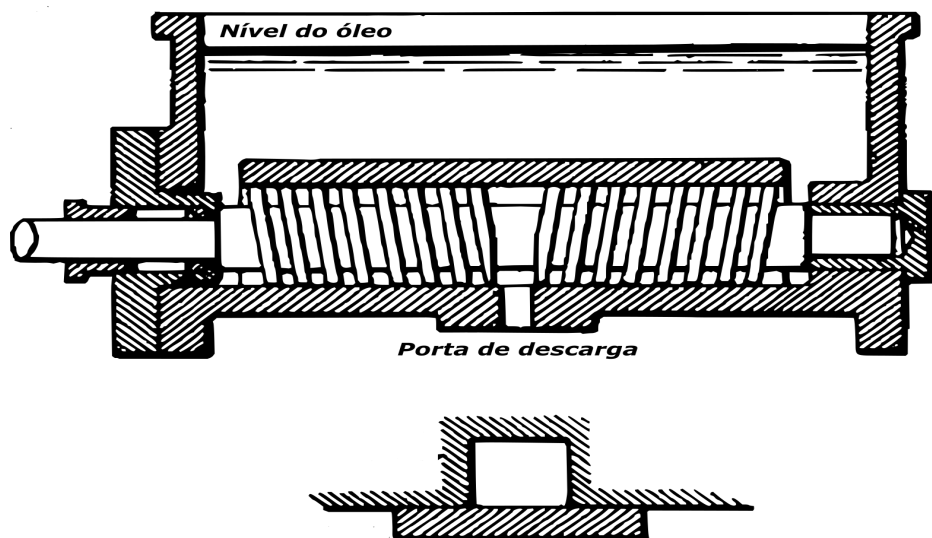
(c)



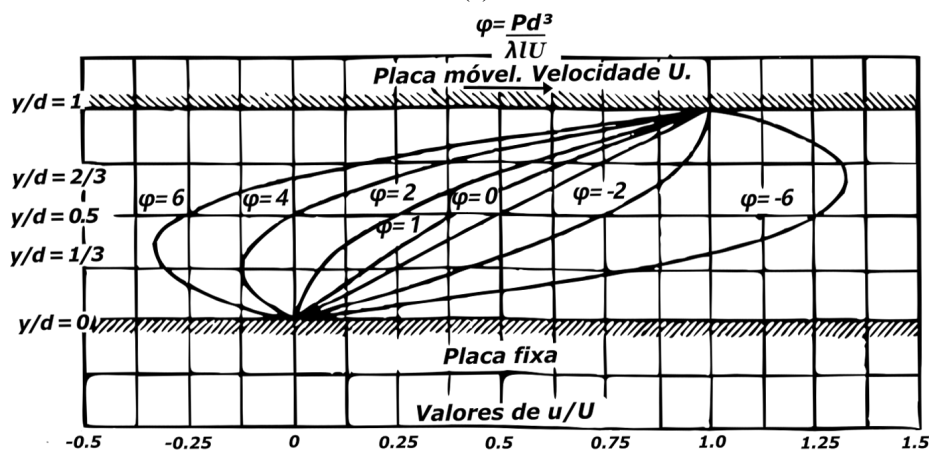
(d)

Fonte: BUSS Kneader Technology. <<https://www.youtube.com/watch?v=5zNhneCMbOI>> Acesso em: 23 de abril de 2022

Figura 2.2: Representação gráfica no trabalho desenvolvido por Rowell e Finlayson: (a) modelo da Extrusora (b) perfil de velocidades entre placas paralelas para distintos valores de  $\varphi$  (gradiente de pressão adimensional) para a placa superior se movendo com velocidade constante  $U$  e a placa inferior estacionária.



(a)



(b)

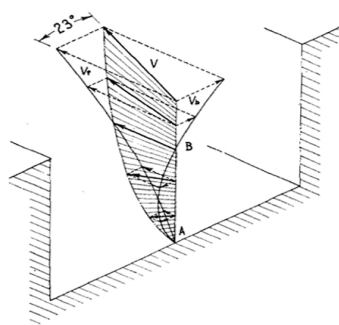
Fonte: Adaptado de Rowell e Finlayson: (a)1922 (b)1928

Posteriormente, o modelo proposto por Rowell e Finlayson foi refinado por Carley, Mallouk e McKelvey (1953). Nesse trabalho foi considerado a direção da hélice, o que implica em uma nova componente não nula de velocidade, a velocidade transversal. Ademais, sua análise levou em conta o molde da extrusão além de otimizar as dimensões do canal de modo a maximizar a capacidade do dispositivo. Complementando o trabalho de Carley, Mallouk e McKelvey, Eccher e Valentinotti (1958) assim como Mohr, Saxton e Jepson (1957) contribuíram para elucidar soluções analíticas exatas para os escoamentos transversais e ao longo do canal. Como até o momento muitos dos trabalhos desenvolvidos eram, em sua grande maioria, de aspecto teórico e matemático, através de resultados experimentais, Eccher e Valentinotti buscaram investigar as

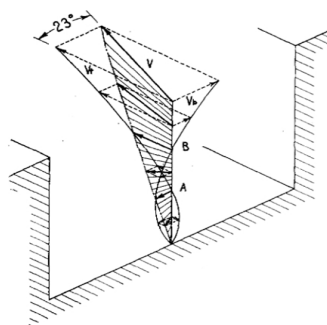


hipóteses adotadas por Rowell e Finlayson, Carley, Mallouk e McKelvey afim de determinar experimentalmente a distribuição de velocidades dentro de um canal retangular. Com seu experimento constataram que a adoção do escoamento como laminar, não só pelo movimento da parede que induz o escoamento através da força de atrito, mas também pelo baixo escorregamento causado pela adesão do escoamento nas paredes do canal, é válida. Além disso, de acordo com os resultados experimentais, as linhas de isovelocidades consideradas teoricamente no trabalho de Carley e Strub (1953) eram boas aproximações. Perceberam também que em modelos reais a melhor maneira de representar esse escoamento é através de representações tridimensionais devido a existência de uma componente binormal de velocidade, criada a partir das condições de saídas do material no orifício de extrusão (vide Figura 2.3). Mohr, Saxton e Jepson (1957) focaram nos efeitos de saída da extrusora, determinando a tensão de cisalhamento de uma partícula fluida como função de sua posição no canal, dimensões e razão de aspecto do canal e tempo de permanência médio no molde.

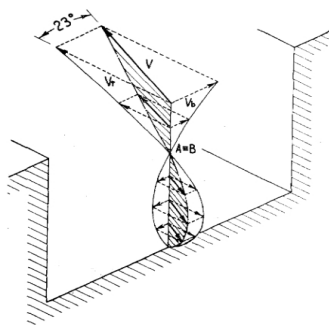
Figura 2.3: Representação em perspectiva do vetor velocidade  $V$  e suas componentes transversais e binormais de um escoamento de um fluido aproximadamente Newtoniano em um canal retangular para: (a) escoamento livre no canal, (b) escoamento sob a existência de uma camada intermediária estacionária (c) escoamento em um canal fechado sem saída (d) representação, em perspectiva, do vetor velocidade no fuso da extrusora.



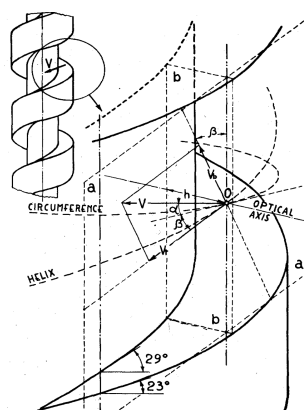
(a): Escoamento máximo



(b): Escoamento intermediário



(c): Escoamento sem saída

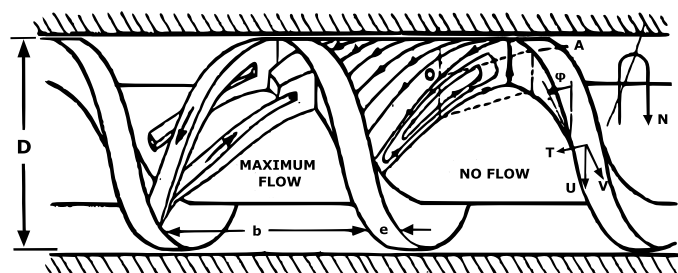


(d): Canal da extrusora sob perspectiva do vetor velocidade  $V$

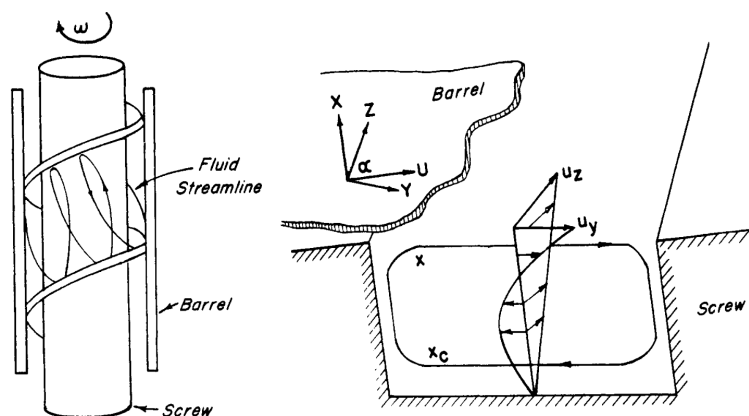
Fonte: Eccher e Valentinotti, 1958

Se mudarmos a característica do fluido de trabalho e esse passar a ser não Newtoniano, aumentamos a complexidade matemática do problema. Considerando um canal suficientemente largo, de modo que o efeito das paredes laterais possa ser desprezado, Griffith (1962) utilizou um modelo de *Power law* (Lei de Potência) para determinar as propriedades do escoamento. A concepção do modelo por eles imaginado pode ser visto na Figura 2.4. Aliado a métodos numéricos iterativos e implícitos, determinou o campo de velocidade para o escoamento de um fluido incompressível e isotérmico. Com a hipótese de constantes em uma linha de corrente, o campo de temperatura foi determinado utilizando a mesma metodologia. Seus resultados experimentais comprovaram que sua teoria era válida e os erros relativos obtidos eram aceitáveis com a metodologia computacional adotada. Em 1965, Middleman abordou em seus estudos a mecânica dos fluidos a um extrusor para transportar um fluido a uma matriz, sendo alimentada por um polímero fundido considerando-o como um fluido isotérmico, em um escoamento laminar e em regime permanente. O escoamento previsto pode ser tido como uma combinação de dois casos: o escoamento gerado pelo gradiente de pressão criado pela resistência gerada pela matriz, e pelo arrasto gerado pelo movimento do parafuso. Neste estudo Middleman aproxima o rasgo do canal da extrusora, assim como os outros, à um canal retangular, e considerando um fluido *Power law*, obteve a solução numérica desse escoamento (campo de velocidade e vazão volumétrica) utilizando o método de diferenças finitas.

Figura 2.4: Representação gráfica da vista das dimensões do perfil de velocidades de uma extrusora sob a perspectiva de (a) Carley e Strub (b) Griffith.



(a)



(b)

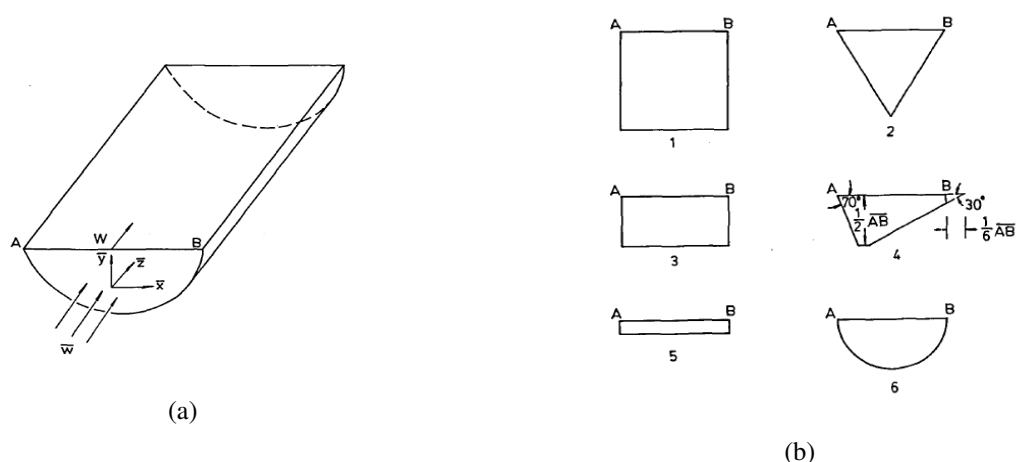
Fonte: Adaptado de (a) Carley e Strub, 1953 & (b) Griffith, 1962

Em 1966, Ikryannikov também considerou os efeitos da temperatura ao longo do escoamento, ou seja, o caso em que o escoamento é não isotérmico. O escoamento em questão é um escoamento laminar, em uma seção retangular, para um fluido incompressível, com propriedades físicas constantes (independentes da temperatura), e sem considerar os efeitos gravitacionais. Ikryannikov (1966) encontra a solução analítica desse modelo a partir de algumas manipulações matemáticas que o auxilia no desenvolvimento da equação governante (equação da energia).

Através de seu livro publicado em 1978, Shah e London apresentaram conceitos de transferência de calor aplicados a escoamentos laminares forçados em dutos de distintas seções e formatos, compilando informações como distintas condições de contorno aplicadas a problemas que podem ser aproximados por problemas reais, além de desenvolver equações analíticas para o estudo do campo de temperatura e número de Nusselt para as mais diversas seções.

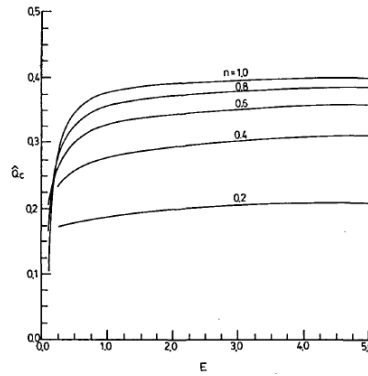
Observando apenas o escoamento presente no processo de extrusão, ou seja, sem levar em consideração o processo em si, é possível fazer algumas análises dos tipos de escoamentos presentes no mesmo. Liu e Chen (1987) propuseram uma análise dos escoamentos de Couette e Poiseuille, tanto separadamente, quanto o escoamento resultante da combinação dos dois, o escoamento de Couette-Poiseuille, sendo o modelo do canal ilustrado na Figura 2.5(a). Para tal estudo, os escoamentos são definidos como isotérmicos, incompressíveis, em regime laminar para um fluido Power law. Liu e Chen realizaram o estudo desses escoamentos em diferentes seções (quadrada, triangular, retangular, semicircular, e algumas outras variações) como mostra a Figura 2.5. Liu e Chen fizeram a análise da vazão volumétrica (vide Figura 2.6), e também da velocidade do escoamento para cada uma das seções para os três tipos de escoamento, podendo haver uma comparação do comportamento desses parâmetros com tais variáveis. As seções utilizadas, são de modelos reais que são encontrados em indústrias e nos dá uma visão comparativa de cada um deles.

Figura 2.5: Representação gráfica do modelo desenvolvido por Liu e Chen (1987), sendo: (a) descrição do canal utilizado em uma das seções de estudo (b) seções dos canais que foram estudadas.



Fonte: Liu e Chen, 1987

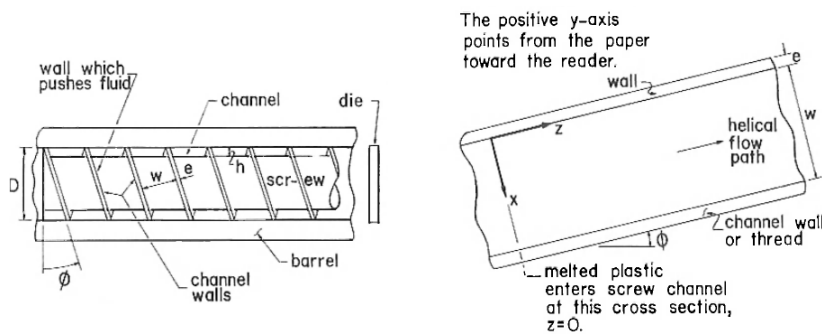
Figura 2.6: Variação da taxa de vazão volumétrica adimensional  $Q_c$  por uma quantidade adimensional  $E$ .



Liu e Chen, 1987

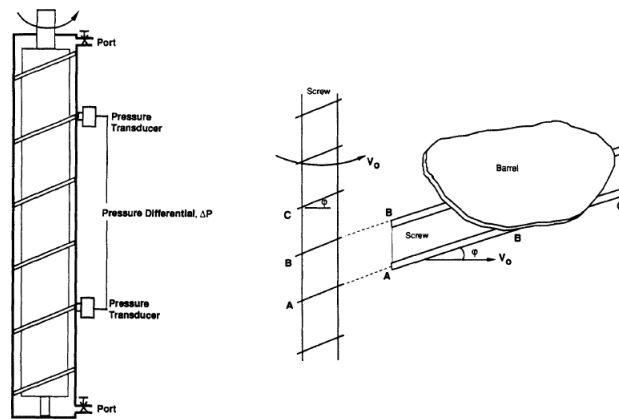
Se os efeitos dos ângulos de hélice forem incluídos na matemática do problema, a solução para o escoamento é redefinida. Kaiser e Smith em 1969 utilizaram esse modelo (Figura 2.7), buscando uma solução para prever o aumento da pressão e da temperatura durante o escoamento de um plástico derretido bombeado por uma extrusora com ângulos de hélices diferentes de zero. Os resultados obtidos foram comparados com dados obtidos experimentalmente. Assim também Tamura et al. (1993) o fez, considerando o ângulo de hélice do parafuso (Figura 2.8), analisando o perfil de velocidade (resultado descrito na Figura 2.9) e a vazão dos escoamentos presentes no processo de extrusão. Na análise, foram considerados os escoamentos de Poiseuille, Couette e Couette-Poiseuille, tanto para fluidos Newtonianos, quanto para fluidos não Newtonianos em uma modelagem Power law em coordenadas cilíndricas e retangulares. Outros objetos de análise foram a pressão atuando no cilindro externo (resultado descrito na Figura 2.9), e a taxa de cisalhamento atuando ao longo do rasgo do canal. Em sua análise, Tamura et al. fazem menção ao resultado do perfil da velocidade obtido quando alterado a escolha do elemento que terá rotação e a variação de resultados quanto à origem do observador sistema.

Figura 2.7: Representação gráfica do modelo do extrusor e do rasgo do canal, conforme estudado por Kaiser e Smith (1969).



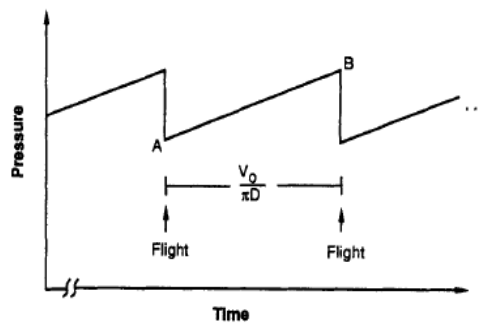
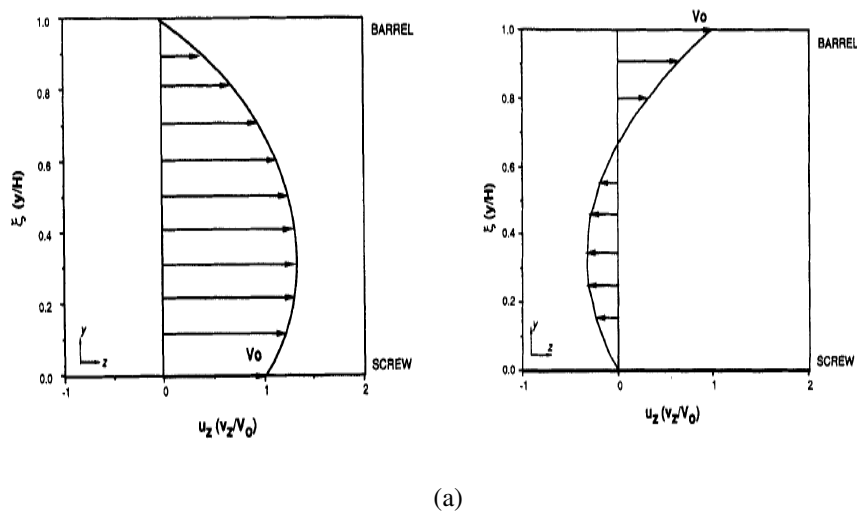
Fonte: Kaiser e Smith, 1969

Figura 2.8: Representação gráfica do modelo do extrusor e do rasgo do canal, conforme estudado por Tamura et al. (1993).



Fonte: Tamura et al., 1993

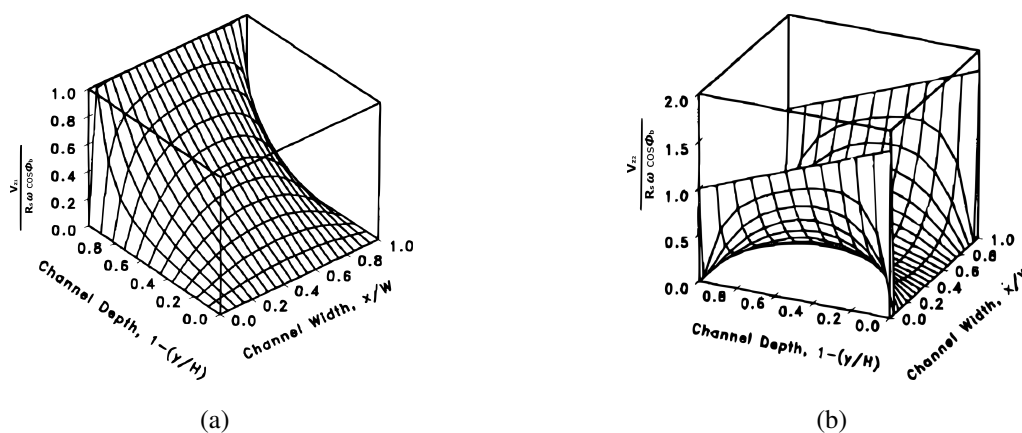
Figura 2.9: Representação gráfica (a) do perfil de velocidades para os casos em que o parafuso gira, e o cilindro, respectivamente (b) da pressão atuante no parafuso ao longo do tempo.



Fonte: Tamura et al., 1993

Com a hipótese de canal infinitamente largo e com altura finita, afastamos os resultados obtidos analiticamente do problema real. Portanto, ao ser aplicada, tal hipótese apresenta resultados que não possuem exatidão suficiente para simulação e design de extrusoras, e acabamos por aplicá-la em situações nas quais tais suposições são inválidas. Por mais que o trabalho de Rowell e Finlayson (1922, 1928) lide com dimensões finitas do canal, a solução acaba se tornando incompleta, dada a maneira como as condições de contorno são dispostas. Ao considerarmos que o cilindro se move enquanto o parafuso permanece parado, o movimento das laterais do filete da rosca do parafuso não é considerado e, com isso, não contabilizamos as componentes da velocidade na direção transversal e binormal do escoamento, abordando o problema de maneira similar a conclusão de Tamura et al. (1993). Devido a isso, Li e Hsieh (1996) propuseram a inclusão desses efeitos assim como a correção da velocidade do fluido na superfície do cilindro, antes considerada por Rowell como sendo igual a da ponta da rosca, quando na verdade é igual a velocidade da raiz do parafuso (Li e Hsieh, 1994). Com a hipótese de fluido Newtoniano, foi desenvolvido uma solução analítica com as condições de contorno reais. O perfil de velocidades constituído no problema deles pode ser visto na Figura 2.10. Utilizando resultados experimentais, os autores conseguiram comprovar que a solução analítica obtida para os fluxos de arrasto estava correta além de confirmarem suas hipóteses de que haviam erros nas soluções dos trabalhos dos autores que os antecederam: Rowell e Finlayson, 1922 e 1928; McKelvey, 1953; Middleman, 1977; Griffith, 1962; Choo, Neelakantan e Pittman, 1980; Campbell, Sweeney e Felton, 1992.

Figura 2.10: Representação gráfica da (a) distribuição do perfil de velocidades gerado pelo arrasto do fluido na raiz do parafuso (b) distribuição do perfil de velocidades gerado pelo arrasto do fluido na superfície da rosca do parafuso.



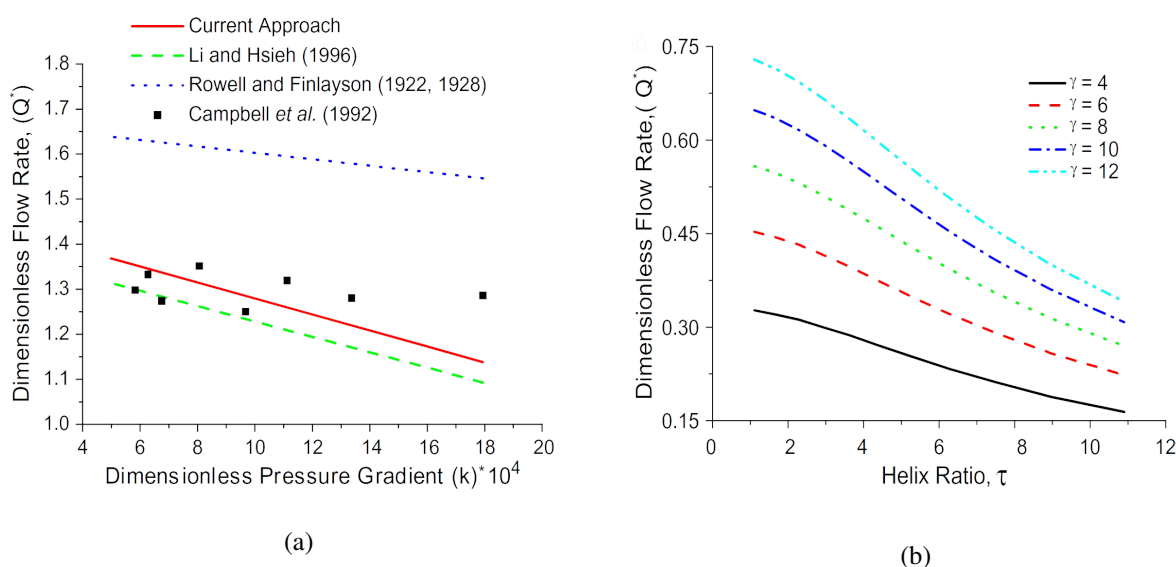
Fonte: Adaptado de Li e Hsieh, 1996

Em 1996, Syrjälä estudou um escoamento hidrodinamicamente e termicamente confinado em um duto de seção retangular sob os efeitos das condições de contorno H1 (fluxo de calor constante na parede axialmente e temperatura periféricamente constante na parede) e T (temperatura constante na parede periféricamente e axialmente) através de elementos finitos. Em seu trabalho, foram apresentadas expressões para o cálculo do campo de temperatura, temperatura média e número de Nusselt.

Depois, Alves, Jr e Prata (2009) incluíram aos resultados obtidos por Li e Hsieh uma rela-

ção algébrica para a velocidade descendente do canal para qualquer valor de razão de aspecto. O resultado foi obtido utilizando a técnica da transformada integral generalizada (GITT - *Generalized Integral Transform Technique*), dada sua rápida convergência para a discretização das equações, e relacionado a resultados previamente obtidos por outros autores (Figura 2.11). Outros métodos numéricos foram aplicados nas equações do problema por diferentes autores. Em sua essência, apesar de distintos os métodos, os resultados são muito parecidos dentro de suas limitações. Outras discretizações podem ser encontradas em Versteeg e Malalasekera (2007) que utilizou o método de volumes finitos, ou em Anderson et al. (2020) que aplicou o método das diferenças finitas, ou em Hughes (2012) que resolveu o problema utilizando elementos finitos.

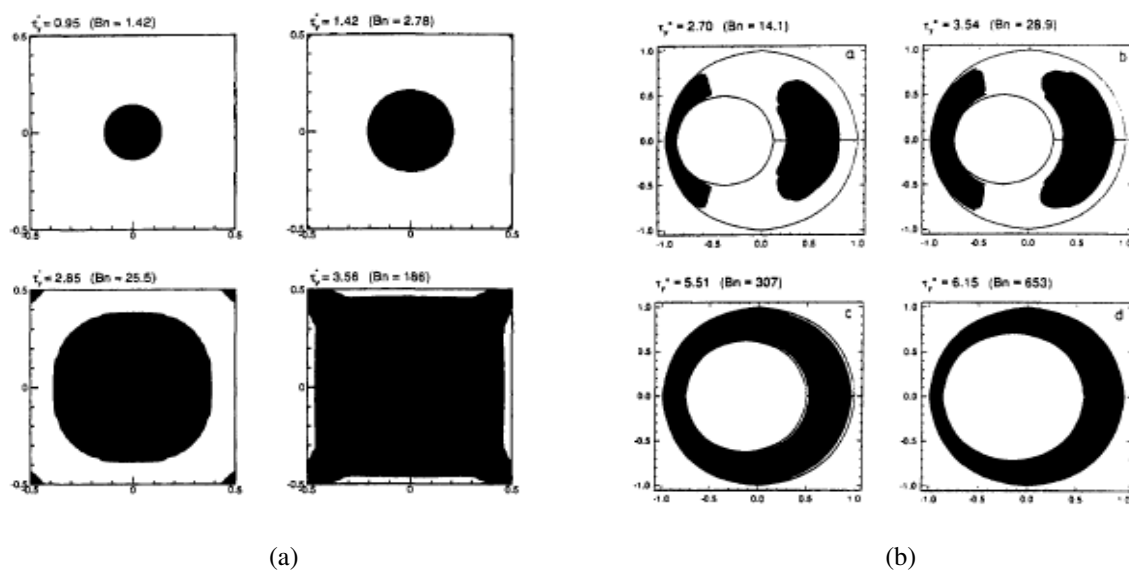
Figura 2.11: Variação do fluxo do escoamento com o ângulo de hélice  $\tau$  para diferentes valores de razão de aspecto  $\gamma$ : (a) razão de curvatura da hélice  $\kappa = 0,1$  (b)  $\kappa = 0,2$ .



Fonte: Alves, Jr e Prata, 2009

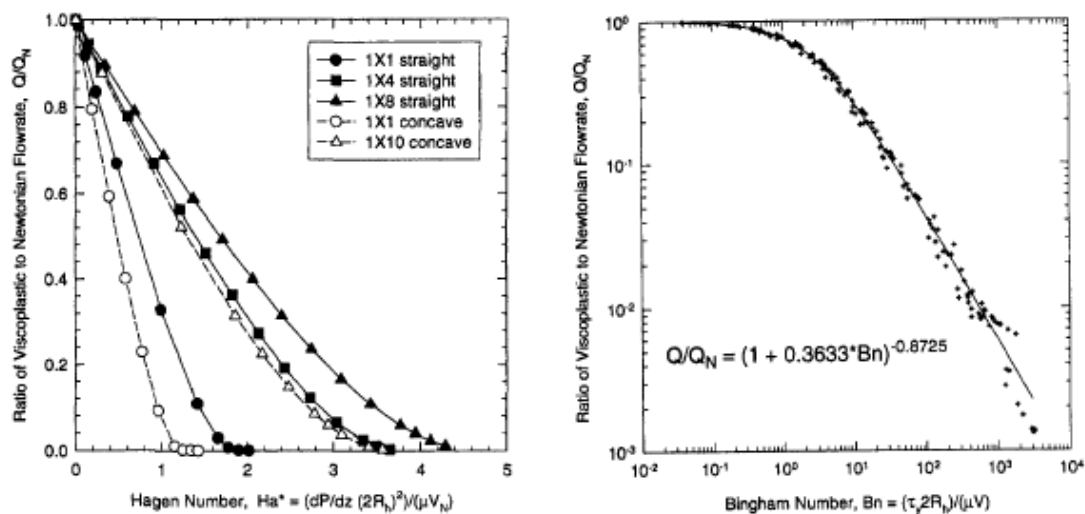
O processo de extrusão está diretamente atrelado ao material e as propriedades físicas do mesmo. É comum que vejamos a inclusão de outros tipos de fluidos e polímeros. Pham e Mitsoulis (1998) fizeram a inclusão do plástico de Bingham, estudando diferentes seções do rasgo do canal para diferentes seções, sendo elas: quadradas, retangulares, e anular excêntrico. No artigo é introduzido duas importantes propriedades: o número de Bingham, que avalia o caráter viscoplástico do escoamento, e o número de Hagen definido como o gradiente de pressão adimensional. Considerando o escoamento como unidirecional e em regime permanente, Pham e Mitsoulis realizaram uma análise da vazão para as diferentes seções, com as variações dos números de Hagen e Bingham (Figura 2.13), assim como uma análise das regiões em que a tensão de cisalhamento mínima não é atingida, ou seja, não há o escoamento do fluido (nessas regiões), mostrando o efeito da variações do número de Bingham para essa situação. Tal efeito está descrito na Figura 2.12(a) para o canal quadrado, e na Figura 2.12(b) para o canal anular excêntrico.

Figura 2.12: Representação gráfica das regiões em que o fluido não escoou em (a) canal quadrado (b) canal anular excêntrico.



Fonte: Pham e Mitsoulis, 1998

Figura 2.13: Resultados obtidos entre a razão da taxa de vazão volumétrica de um fluido viscoplástico e a taxa de vazão volumétrica para um fluido Newtoniano com a variação do número de (a) Hagen (b) Bingham.



Fonte: Pham e Mitsoulis, 1998

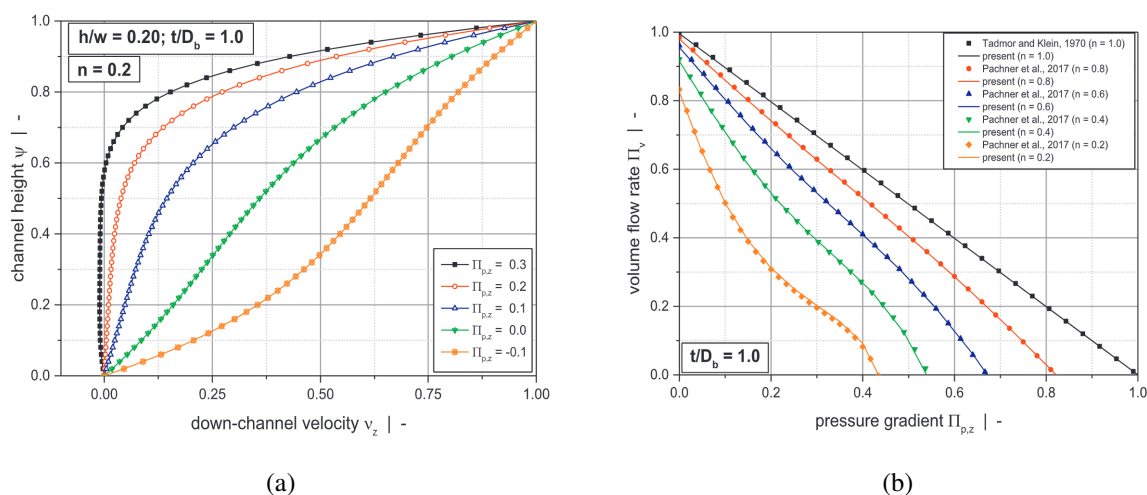
Apesar de excelentes resultados, os estudos não pararam no trabalho de Li e Hsieh e continuam relevantes até os dias de hoje. Ao modelarmos o problema considerando o escoamento de um fluido dentro de uma cavidade de um fuso, aproximado por um canal retangular e inspirado no funcionamento das máquinas de extrusão, apesar de nos aproximarmos muito, não estaremos representando o escoamento real. Nesses dispositivos, é muito comum o trabalho com fluidos poliméricos que são, por natureza, não Newtonianos. A desconsideração do comportamento de



um fluido não Newtoniano durante o bombeamento deixa uma lacuna na solução do problema. Porém, ao ser levado em consideração, introduzimos no problema uma nova dificuldade, já que a equação governante se torna não linear devido a dependência da viscosidade com a taxa de cisalhamento do fluido.

Alguns autores, apesar de poucos, propuseram métodos de aproximações analíticas para esse problema. Dentre eles, citamos o trabalho de Marschik et al. (2017). A fim de reduzir custos computacionais, esse trabalho não utilizou métodos numéricos para a solução do problema. Utilizando uma metodologia de similaridade para reescrever as equações de forma adimensional, aplicou um método heurístico generalizado<sup>1</sup> através de uma regressão simbólica<sup>2</sup> baseada em programação genética para prever o transporte do fluido dentro do canal da extrusora, levando em consideração as capacidades de geração e redução de pressão assim como a dependência entre as velocidades transversais ao longo do canal. Os resultados obtidos por eles podem ser vistos na Figura 2.14, onde foram obtidos os valores de velocidade e vazão para diferentes valores de gradiente de pressão. Os resultados foram comparados a outros contidos na literaturas, e estão presentes nas Figuras 2.15 e 2.16 para os escoamentos de arrasto de pressão. Em 2019, Marschik, Roland e Miethlinger com base nos resultados numéricos, desenvolveram modelos de aproximação utilizando a mesma metodologia adotada anteriormente tendo como objeto de estudo a dissipação viscosa. Após validado, a solução encontrada mostrou que os modelos propostos aproximam os resultados numéricos com precisão.

Figura 2.14: Resultados obtidos para: (a) altura adimensional do canal versus velocidade descendente do canal para distintos valores do gradiente de pressão na direção descendente do canal (b) comparação dos resultados obtidos com os presentes na literatura para vazão adimensional versus o gradiente de pressão adimensional na direção descendente do canal.

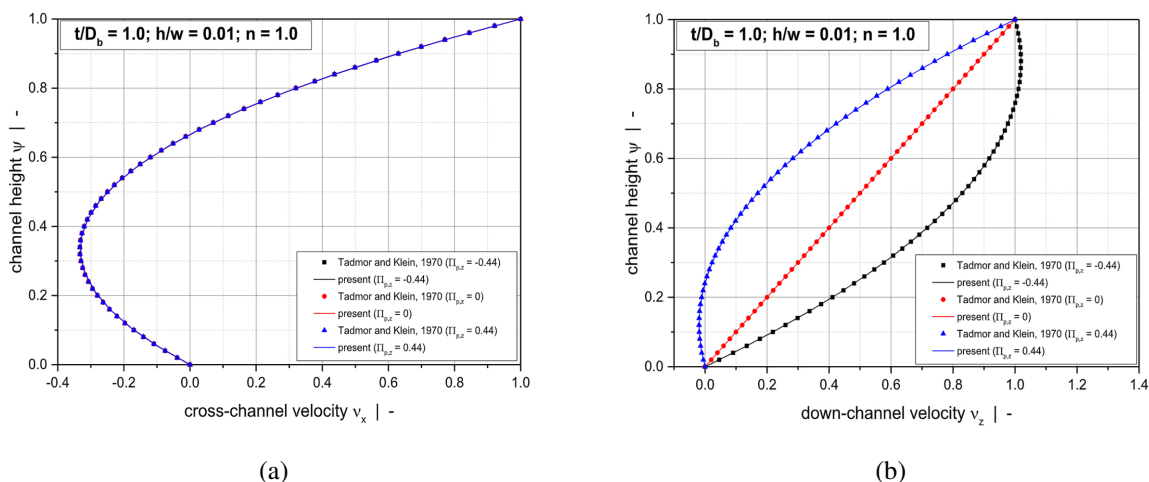


Fonte: Marschik et al., 2017

<sup>1</sup>heurística: é uma técnica que soluciona problemas com base em alternativas classificadas em algoritmos de pesquisas, seguindo para a próxima etapa da solução a partir das informações conhecidas.

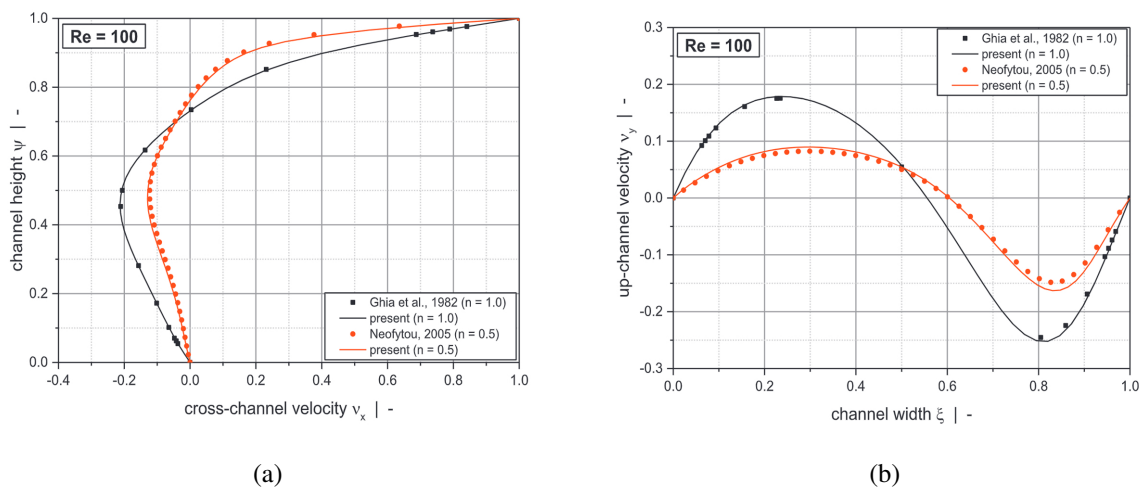
<sup>2</sup>Regressão simbólica: consiste em encontrar uma função que se ajuste ao conjunto de dados observados, sem que qualquer suposição sobre a forma da função precise ser feita, encontrando não apenas os coeficientes de uma função, mas a própria função. Morgon e Pereira, 2015

Figura 2.15: Comparação dos resultados obtidos por Wolfgang & Marschik através da solução numérica proposta com soluções analíticas existentes na literatura. Para uma razão de aspecto  $h/w = 0,01$ ,  $t/D_b = 1$  e  $n = 1$ , plotaram (a) altura adimensional do canal versus velocidade transversal do canal (b) altura adimensional do canal versus velocidade descendente do canal.



Fonte: Marschik et al., 2017

Figura 2.16: Comparação entre os resultados obtidos numericamente com as soluções analíticas da literatura para um escoamento gerado pelo arrasto de uma placa dentro de uma cavidade. (a) altura adimensional do canal versus velocidade transversal (b) velocidade ascendente do canal.

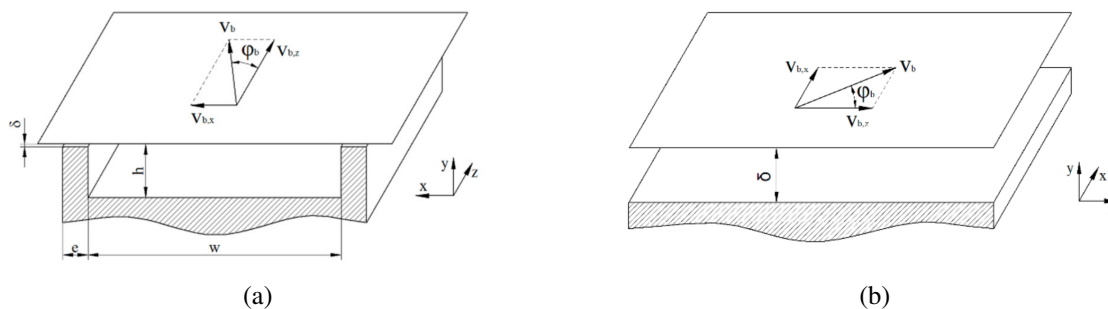


Fonte: Marschik et al., 2017

Outra simplificação comumente realizada é desprezar o efeito de vazamento na crista da rosca do parafuso. Apesar de, quando comparadas as vazões de vazamento com as empregadas dentro do canal, serem muito menores, para designs mais avançados de extrusoras essa desconsideração leva a resultados errôneos. Partindo desse problema, Marschik et al. (2021) propuseram um modelo que avalia, localmente, o escoamento desenvolvido pelo cisalhamento e a pressão desenvolvidos na região da folga entre o cilindro e a crista da rosca (vide Figura 2.17). O modelo proposto utiliza métodos híbridos de solução (soluções analíticas, numéricas e técnicas de modelação de data-base) para construção de rápidas e precisas regressões para determinar as vazões

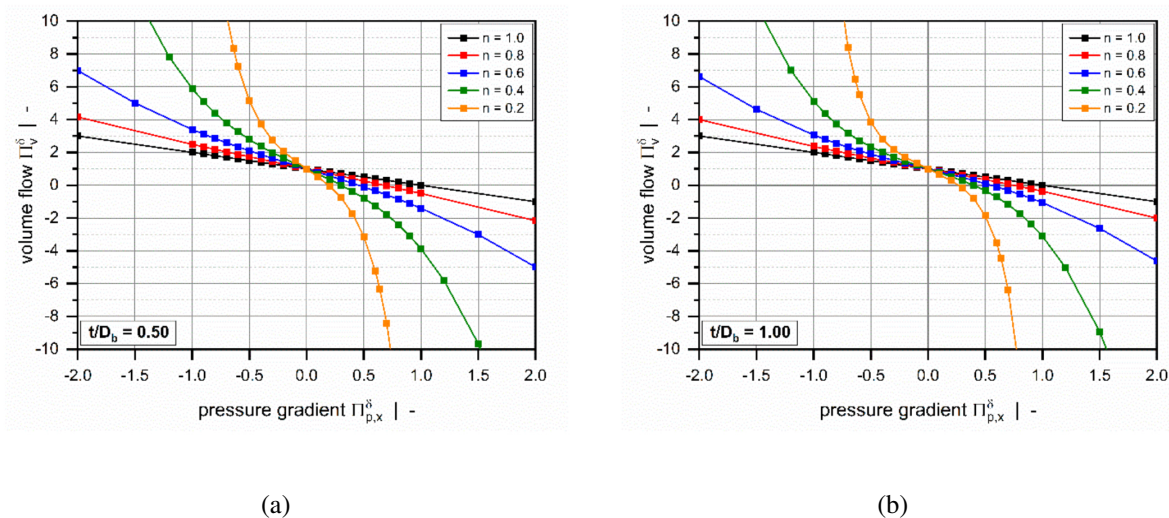
nos vazamentos. Os valores de vazão para distintos valores de gradientes de pressão avaliados para diferentes índices de comportamento do escoamento podem ser vistos na Figura 2.18.

Figura 2.17: Representação gráfica de uma seção do canal (a) e a folga entre o cilindro e a crista da rosca (b) representação ampliificada da folga e do cilindro vista do primeiro diedro. ( $t$  é o passo do parafuso e  $D_b$  é o diâmetro do parafuso).



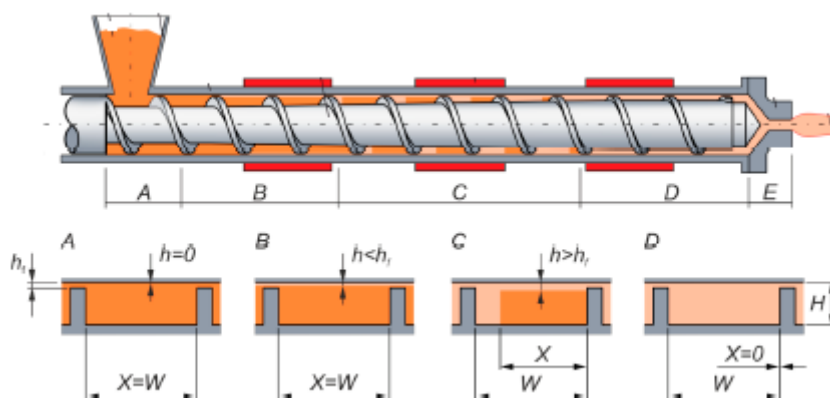
Fonte: Marschik et al., 2021

Figura 2.18: Fluxo de vazão como função do gradiente de pressão tendo a influência do índice do Power law para (a)  $t/D_b = 0,5$  (b)  $t/D_b = 1,0$ .



Fonte: Marschik et al., 2021

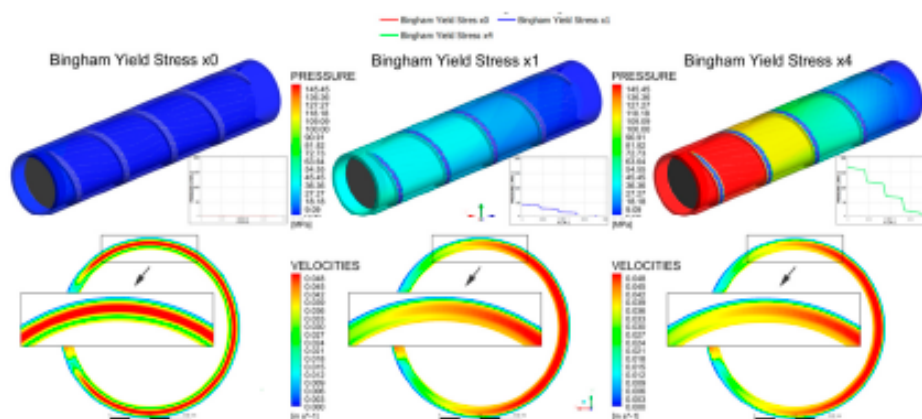
Figura 2.19: Representação gráfica do modelo do extrusor, contendo a alocação do fluido no rasgo do canal ao longo do parafuso, conforme estudado por Wilczyński et al. (2019).



Fonte: Wilczyński et al., 2019

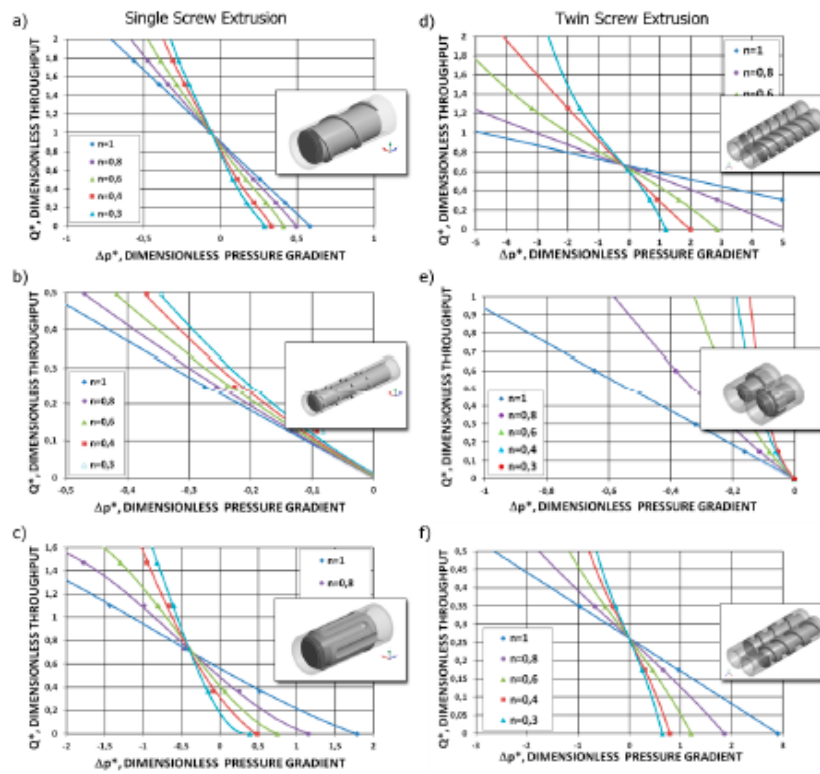
Pode-se além de analisar o escoamento, fazer um estudo do parafuso do extrusor, visualizando os efeitos do processo de extrusão para variação das hélices (organização e formato), assim também como o efeito da velocidade e pressão no mesmo. Assim, Wilczyński et al. (2019) fizeram ao analisar a modelagem do parafuso do extrusor (modelo do extrusor representado na Figura 2.19), realizando simulações no parafuso utilizando o métodos de diferenças finitas (Figura 2.20), considerando as seções do mesmo, separando as seções que transportam sólido; polímero pré-fundido; polímero fundido. No artigo são estudados alguns modelos de hélice do parafuso, verificando a pressão atuante, em cada seção assim também como a velocidade (Figura 2.21). Wilczyński et al. (2019) também definiram um modelo global que se baseia em modelos separados para cada seção do parafuso (sólido, pre-fundição, fundido), sendo essa abordagem relativamente recente, e com um amplo caminho para abordagem.

Figura 2.20: Modelagem feita utilizando o método de elementos finitos da distribuição de pressão e velocidade para os escoamentos viscoplásticos.



Fonte: Wilczyński et al., 2019

Figura 2.21: Resultados obtidos da análise feita para variação dos modelos do parafuso da extrusora incluindo a variação de pressão.



Fonte: Wilczyński et al., 2019

# 3 FORMULAÇÃO ANALÍTICA

## 3.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES DO CAMPO DE VELOCIDADE

Neste presente capítulo o escoamento em questão é considerado *isotérmico*, *incompressível* e *laminar*, o que torna possível a descoberta de soluções analíticas para alguns tipos de escoamento. Com essas hipóteses, as equações que governam esse escoamento fazem parte de um sistema de quatro equações diferenciais parciais, sendo elas a equação da continuidade e as três componentes da equação de Navier-Stokes:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (3.2)$$

que, na forma cartesiana  $(x, y, z)$ , podem ser escritas como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.6)$$

Nas equações apresentadas,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$  simboliza o vetor velocidade, sendo  $u = u(x, y, z, t)$ ,  $v = v(x, y, z, t)$  e  $w = w(x, y, z, t)$  a suas componente na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Nas mesmas equações  $p = p(x, y, z, t)$  denota o campo de pressão,  $\rho$ ,  $\mu$  e  $t$  são, respectivamente, a massa específica, a viscosidade dinâmica do fluido, e o tempo e, por fim,  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x, y, z)$  é o vetor aceleração da gravidade, sendo  $g_x$ ,  $g_y$  e  $g_z$  as suas componentes nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Nos vetores e campos acima  $t$  representa o tempo.

## 3.2 ESCOAMENTO ISOTÉRMICO UNIDIRECIONAL

Na classe dos fluidos que podem ser considerados incompressíveis, o que nos interessa são os escoamentos isotérmicos caracterizados como *unidirecionais*, isto é, escoamentos nos quais

existem uma única componente não-nula da velocidade. Conseqüentemente, a quantidade de termos não conhecidos na equação de Navier-Stokes (3.2) é reduzida para dois, sendo eles a componente da velocidade na direção do escoamento e o campo pressão.

Escoamentos laminares e unidimensionais são caracterizados pela quantidade de variáveis independentes, a qual se reduz a apenas uma. A equação que governa a componente não-nula da velocidade nesses escoamentos é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem linear, que pode ser resolvida através de simples ferramentas do cálculo.

Inicialmente, serão abordados os casos em que as linhas de corrente são linhas retas, ou seja, são escoamentos retilíneos. Normalmente, esses escoamentos são descritos usando coordenadas cartesianas, com um dos eixos paralelos a direção do escoamento, que nesse caso, usaremos a direção  $x$  como indicado na Figura (3.1) e, assim sendo,

$$v = w = 0. \quad (3.7)$$

Figura 3.1: Escoamento unidirecional.



Fonte: Próprios autores, 2021

A partir da equação da continuidade (3.1) para fluidos incompressíveis

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.9)$$

indicando que a componente  $x$  da velocidade,  $u$ , não muda com a alteração da direção do escoamento, ou seja,  $u$  é independente de  $x$ .

Para a simplificação desse estudo, os efeitos gravitacionais serão desprezados, sabendo que eles contribuem somente para a componente da pressão hidrostática. Como as velocidades  $v$  e  $w$

são nulas, a equação de Navier-Stokes (3.4) se reduz a

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (3.10)$$

Em regime permanente, no qual os campos de velocidade e pressão independem do tempo, a equação (3.10) pode ser simplificada ainda mais:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.11)$$

As componentes  $y$  e  $z$  de Navier-Stokes não envolvem a velocidade  $u$  e, já que  $v = w = 0$ , temos que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (3.13)$$

portanto,  $p = p(x)$ .

Analisando a equação (3.11), podemos observar que o lado esquerdo da igualdade depende das variáveis  $y$  e  $z$ , enquanto o lado direito depende apenas de  $x$ . Logo, podemos concluir que essa igualdade só será verdadeira se ambos os lados forem iguais a uma constante. Assim,

$$\frac{dp}{dx} = \text{constante}, \quad (3.14)$$

e a equação (3.11) se torna uma *equação de Poisson*. Além disso, podemos notar que a parte que representa os termos de inércia na equação de Navier-Stokes é nula, ou seja, o escoamento é *lento*<sup>1</sup>. Essa é uma consequência direta da unidirecionalidade, e significa que cada elemento de fluido conserva sua velocidade ao longo do escoamento (não há aceleração).

### 3.3 ESCOAMENTO LAMINAR RETILÍNEO UNIDIMENSIONAL

A equação (3.11) descreve um escoamento permanente, retilíneo e bidimensional. Se, além disso,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.15)$$

então o escoamento passa a ser unidimensional, e o termo da velocidade pode ser tratado como função de uma única variável, isto é,

---

<sup>1</sup>Escoamento com efeitos inerciais desprezíveis e dominado por efeitos viscosos



$$u = u(y) \quad (3.16)$$

Com essa hipótese adicional, a componente  $x$  da equação de Navier-Stokes (3.10) se reduz a

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (3.17)$$

Consequentemente, a única componente não-nula do tensor das tensões viscosas restante é a tensão cisalhante  $\tau_{yx}$ ,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}. \quad (3.18)$$

A equação (3.17) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem linear que, naturalmente, pode ser integrada de forma direta. Como a pressão é constante, ao resolvermos a equação (3.17) para a velocidade, temos que

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) y^2 + c_1 y + c_2. \quad (3.19)$$

Portanto, o perfil de velocidade é uma parábola e envolve duas constantes de integração,  $c_1$  e  $c_2$ , que podem ser determinadas ao aplicarmos condições de contorno apropriadas para o escoamento em particular. A tensão cisalhante,  $\tau_{yx}$  é linear, ou seja,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} = \frac{dp}{dx} y + \mu c_1. \quad (3.20)$$

Como a única componente não nula da pressão atua em  $x$ , a partir de (3.14) podemos escrever a pressão como

$$\int dp = \int \frac{dp}{dx} dx, \quad (3.21)$$

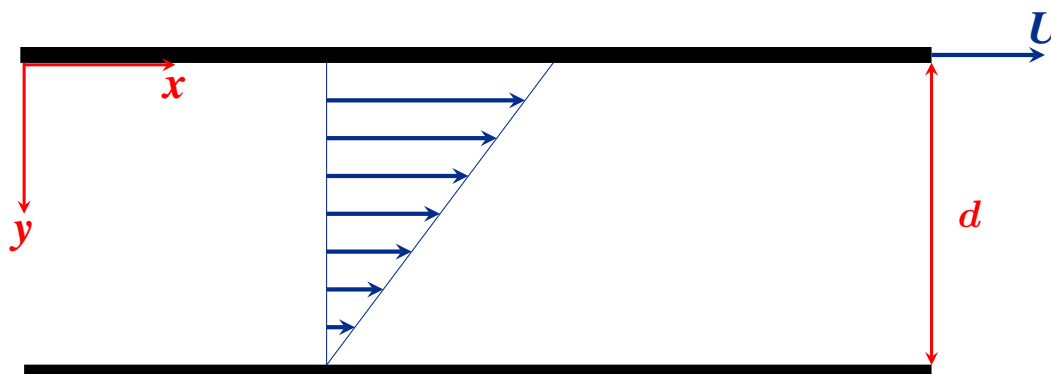
$$p = \frac{dp}{dx} x + c_3,$$

onde  $c_3$  é uma constante de integração que pode ser determinada para qualquer escoamento específico apenas discriminando o valor da pressão no ponto. Nas seções seguintes serão abordados 3 casos nos quais essas equações são válidas, a saber: escoamento plano de Couette, escoamento plano de Poiseuille, e escoamento plano de Couette-Poiseuille.

### 3.4 ESCOAMENTO PLANO DE COUETTE

O escoamento viscoso, plenamente desenvolvido, escoando entre duas placas muito largas e muito longas distanciadas entre si por uma altura  $d$ , com uma das placas se movendo com uma velocidade constante  $U$  em relação à outra placa é conhecido como *escoamento plano de Couette*.

Figura 3.2: Escoamento plano de Couette.



Fonte: Próprios autores, 2021

Da equação geral para escoamentos retilíneos unidimensionais (3.19), considerando o gradiente de pressão igual a zero, temos então que

$$u = c_1 y + c_2 . \quad (3.22)$$

Dada a geometria ilustrada na Figura (3.2), pela condição de não escorregamento, as partículas fluidas que entram em contato com as interfaces sólidas terão velocidade, relativa a elas, nula. Assim, o fluido em contato com a placa superior assume a velocidade  $U$  da placa, e o fluido adjacente a placa inferior, cujo o estado é estacionário, tem velocidade nula. As condições acima formam as condições de contorno do problema e, matematicamente, são dadas por

$$u(0) = U \quad (3.23)$$

e

$$u(d) = 0 . \quad (3.24)$$

Aplicando as condições de contorno (3.23) e (3.24) na equação (3.22), encontramos os valores de das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , sendo elas

$$c_1 = -\frac{U}{d} \quad (3.25)$$

e

$$c_2 = U . \quad (3.26)$$

Assim, a substituição das constantes na equação (3.22) resulta em

$$u(y) = -\frac{U}{d}y + U, \quad (3.27)$$

ou seja, a velocidade  $u$  varia de maneira linear através da abertura das placas, o que indica que a tensão cisalhante é constante de acordo com a equação (3.20), e vale

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{U}{d}. \quad (3.28)$$

Podemos observar pela equação (3.27) que o escoamento de Couette é dependente do movimento da placa, já que com ausência do gradiente de pressão, essa é a única propriedade física responsável pela geração desse escoamento. Portanto, sem tal movimento a velocidade do escoamento seria nula.

A vazão pode ser obtida ao integrarmos a velocidade ao longo da abertura das placas. Como já desprezamos os termos da velocidade na direção  $z$ , ou seja, ao longo da largura  $b$  da placa, é conveniente determinarmos a vazão por unidade de comprimento de largura, ou seja,

$$\frac{Q}{b} = \int_0^d u \, dy. \quad (3.29)$$

Assim, substituindo a expressão de  $u$  descrita na equação (3.27) na equação (3.29), temos que

$$\frac{Q}{b} = \int_0^d U - \frac{U}{d}y \, dy, \quad (3.30)$$

ou seja,

$$\frac{Q}{b} = \frac{Ud}{2}. \quad (3.31)$$

Se quisermos saber a tensão de cisalhamento exercida pelo fluido na placa superior, basta tomarmos a tensão  $\tau_{yx}$  aplicada em  $y = 0$ .

$$\tau_{\text{parede}} = -\tau_{yx} \Big|_{y=0} = -\mu \frac{U}{d} \quad (3.32)$$

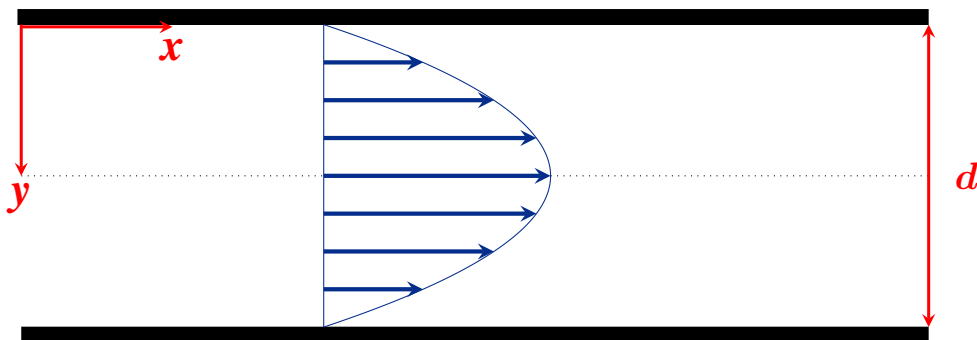
O sinal de menos indica que a tensão atua na superfície interna da placa superior, cuja a componente normal aponta na direção contrária à direção positiva do eixo de coordenadas. A força  $F$  necessária para mover a placa pode ser encontrada ao integrarmos a tensão ao longo de todo comprimento  $L$  da placa. Assim, a força por unidade de largura  $b$  da placa é

$$\frac{F}{b} = - \int_0^L \tau_{\text{parede}} \, dx = \mu \frac{U}{d} L. \quad (3.33)$$

### 3.5 ESCOAMENTO PLANO DE POISEUILLE

O escoamento plano de Poiseuille ocorre quando um líquido é forçado entre duas placas fixas distanciadas por uma distância  $d$ , dada a existência de um gradiente de pressão. Essa idealização não engloba as laterais do escoamento na exemplificação de placas infinitas, onde considera-se que as bordas não existem. Para escoamentos com geometrias restritivas e dimensões definidas, as laterais do escoamento deverão ser consideradas, e o escoamento para esse caso seria bidimensional, e não unidimensional como aqui estudado.

Figura 3.3: Escoamento plano de Poiseuille.



Fonte: Próprios autores, 2021

As placas são paralelas e com a origem do sistema de coordenadas fixada na extremidade esquerda da placa superior, assim como ilustra a Figura (3.3). A partir disso, temos que as condições de contorno são

$$u(d) = 0 \quad (3.34)$$

e

$$\tau_{yx}\left(\frac{d}{2}\right) = \mu \frac{du\left(\frac{d}{2}\right)}{dy} = 0, \quad (3.35)$$

sendo a equação (3.34) dada pela condição de não escorregamento e a equação (3.35) dada pela simetria do problema. Aplicando as condições de contorno para  $y = \frac{d}{2}$  e  $y = d$ , encontramos,

$$c_2 = 0$$

e

$$c_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} d.$$

Note que a condição de contorno de não escorregamento ( $u = 0$  em  $y = 0$ ), poderia ter sido utilizada no lugar de qualquer uma das condições apresentadas.

Substituindo os valores das constantes na equação geral de escoamentos unidimensionais, a equação (3.19), obtemos o perfil parabólico de velocidade

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y (y - d) . \quad (3.36)$$

Portanto, se o gradiente de pressão for negativo, o escoamento ocorre na direção positiva do eixo.

Como pode ser visto na Figura (3.3), no caso de placas paralelas, a máxima velocidade do escoamento ocorre quando  $y = \frac{d}{2}$ , sendo

$$u_{\max} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dx} d^2 . \quad (3.37)$$

A vazão volumétrica pode ser obtida ao tomarmos a integral da velocidade ao longo das placas. A vazão por unidade de largura equivale então a

$$\frac{Q}{b} = \int_0^d u \, dy . \quad (3.38)$$

Assim, substituindo a expressão de  $u$  na equação (3.38), temos que

$$\frac{Q}{b} = \int_0^d \left[ -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (yd - y^2) \right] dy . \quad (3.39)$$

Portanto, a vazão obtida para esse problema é

$$Q = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} d^3 b . \quad (3.40)$$

A equação (3.40) demonstra que a vazão volumétrica  $Q$  é proporcional ao gradiente de pressão,  $\frac{dp}{dx}$ , e inversamente proporcional a viscosidade  $\mu$ . Isso significa dizer que quanto maior for o gradiente de pressão, assim como as dimensões da geometria, maior será a vazão do escoamento. Para a viscosidade, quanto maior essa for, menor será a vazão do escoamento. Perceba que para um fluido infinitamente viscoso, a vazão, como esperado, seria nula já que não haveria velocidade e impossibilitaria a existência do escoamento, demonstrando assim que escoamentos de Poiseuille se tornam possíveis somente quando existe um gradiente de pressão.

A distribuição de tensão cisalhante ao longo das placas de acordo com a equação (3.20) é dada por

$$\tau_{yx} = \frac{dp}{dx} y , \quad (3.41)$$

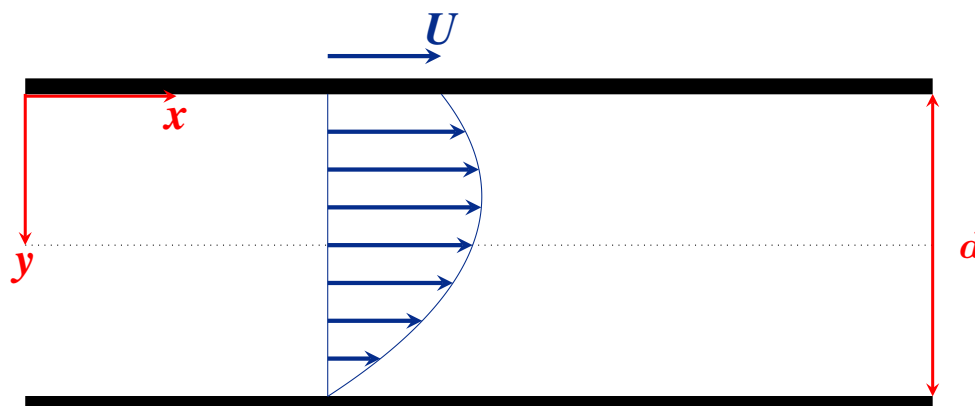
ou seja, varia linearmente de  $y = 0$  a  $y = d$ , sendo nulo na linha central do escoamento e atingindo seu máximo na placa. Na parede, a tensão cisalhante é

$$\tau_{\text{parede}} = -\tau_{yx}|_{y=d} = -\frac{dp}{dx}d. \quad (3.42)$$

### 3.6 ESCOAMENTO PLANO DE COUETTE-POISEUILLE

O *escoamento plano de Couette-Poiseuille* ocorre quando um fluido é forçado entre duas placas infinitamente longas e largas distanciadas por  $d$ , com um gradiente de pressão constante na direção  $x$  do escoamento, em que uma das placas se move com uma velocidade constante  $U$  enquanto a outra permanece estacionária. Este escoamento é uma combinação dos escoamentos de Couette e de Poiseuille.

Figura 3.4: Escoamento plano de Couette-Poiseuille.



Fonte: Próprios autores, 2021

Como vimos no caso de Poiseuille, o escoamento era simétrico e isso se dava pelas condições de contorno e pelo gradiente de pressão. Com o movimento de uma das placas, este escoamento acaba se tornando assimétrico em relação a linha central da geometria, já que na parte superior há um maior movimento das partículas fluidas.

As condições de contorno para o problema são dispostas abaixo,

$$u(0) = U \quad (3.43)$$

e

$$u(d) = 0. \quad (3.44)$$

Ambas as condições são dadas pela condição de não escorregamento. Portanto, aplicando as

condições de contorno na equação (3.19), temos que

$$c_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} d - \frac{U}{d},$$

e

$$c_2 = U.$$

Substituindo  $c_1$  e  $c_2$  em (3.19), obtemos a seguinte expressão para a velocidade

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - yd) - \frac{U}{d} y + U. \quad (3.45)$$

Note que quando a velocidade da placa superior é nula, ou seja,  $U = 0$ , a equação (3.45) se reduz a equação (3.36), que representa o perfil de velocidades obtido no escoamento de Poiseuille. Se ao invés disso o gradiente de pressão,  $\frac{dp}{dx}$ , for nulo, vemos que a (3.45) se reduz a (3.27), que é justamente o escoamento de Couette. A tensão de cisalhamento no escoamento pode ser obtida ao substituirmos  $u$  na equação (3.20),

$$\tau_{yx} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2y - d) - \mu \frac{U}{d}. \quad (3.46)$$

A velocidade máxima desse escoamento ocorre no ponto  $y_{ot}$ , onde a tensão cisalhante é nula. Igualando a equação (3.46) a zero, encontramos

$$y_{ot} = \frac{d}{2} + \frac{\mu U}{d \left( \frac{dp}{dx} \right)}. \quad (3.47)$$

A vazão por unidade de largura  $b$  (por conveniência) para esse problema é encontrada ao integrarmos a velocidade ao longo das placas, através de

$$\frac{Q}{b} = \int_0^d u \, dy. \quad (3.48)$$

Assim, substituindo a expressão de  $u$  na equação (3.48), temos que

$$\frac{Q}{b} = \int_0^d \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - yd) - \frac{U}{d} y + U \right] dy, \quad (3.49)$$

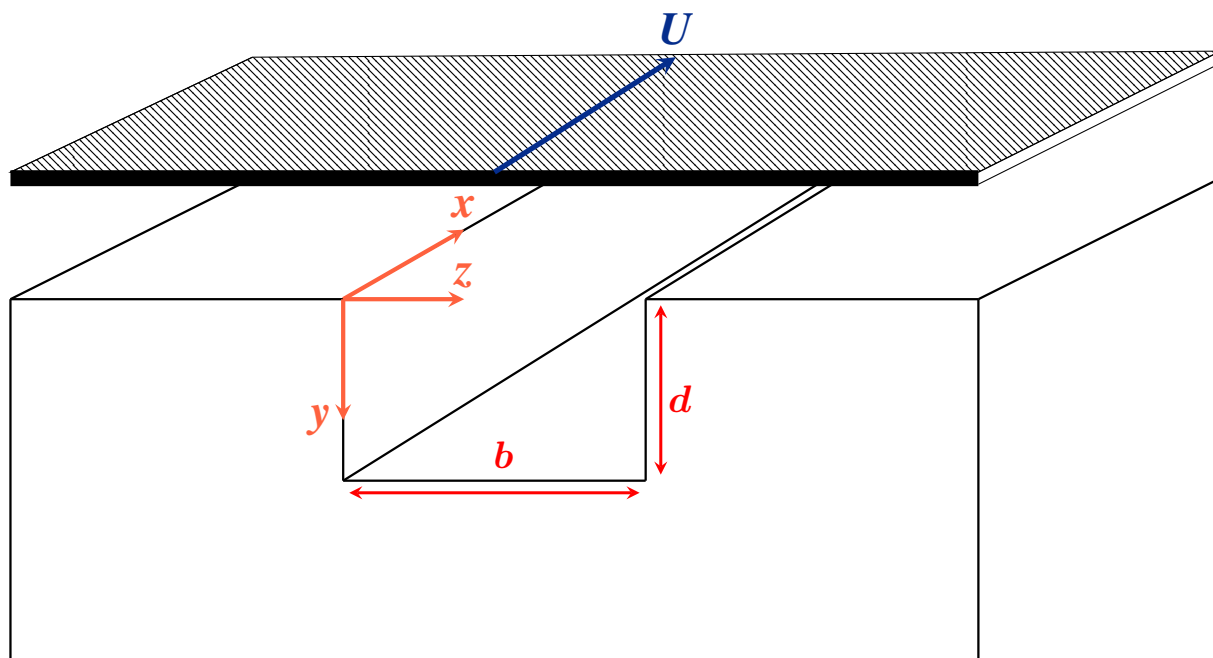
ou seja, a vazão no escoamento de Couette-Poiseuille é dada por

$$Q = -\frac{bd^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{U}{2} bd. \quad (3.50)$$

### 3.7 ESCOAMENTO ISOTÉRMICO UNIDIRECIONAL EM UM CANAL DE GEOMETRIA RETANGULAR

O estudo agora se baseia no escoamento dentro de um canal com geometria retangular, com comprimento finito na direção  $x$  da Figura 3.5, a largura  $b$  e altura  $d$ , que também pode ser tomada como profundidade  $d$ . Esse escoamento é um caso geral daqueles estudados anteriormente, porém com dimensões bem definidas. A partir dele é possível obter cada um dos casos anteriores, aplicando de forma devida a suas respectivas simplificações. Considere o escoamento em regime permanente, incompressível, de um fluido Newtoniano entre duas placas planas e paralelas confinadas lateralmente, em que uma se move com velocidade constante  $U$  como ilustrado na Figura (3.5).

Figura 3.5: Representação gráfica da geometria de um canal retangular com a superfície do topo se movimentando com velocidade constante  $U$ .



Fonte: Próprios autores, 2021

Partindo da equação (3.11) para escoamentos unidirecionais e bidimensionais em regime permanente, em que os efeitos gravitacionais são desprezados, temos a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.51)$$

O objetivo agora é resolver a equação (3.51) que está sujeita a diferentes condições de contorno para a velocidade. Com o sistema de coordenadas posicionado na extremidade superior esquerda do canal como exemplifica a Figura (3.5), pela condição de não escorregamento, sabe-



mos que a velocidade é nula nas laterais do canal, quando  $z = 0$  e  $z = b$ , assim como quando  $y = d$ . Quando  $y = 0$ , a velocidade  $u$  é igual a  $U$ , que é a velocidade de deslocamento da placa superior. Portanto, tem-se as seguintes condições de contorno

$$u(y, 0) = 0, \quad u(y, b) = 0, \quad 0 < y < d \quad (3.52)$$

e

$$u(0, z) = U, \quad u(d, z) = 0, \quad 0 < z < b \quad (3.53)$$

Seguindo o modelo sugerido por Rowell e Finlayson (1922), é proposta uma expressão para a velocidade  $u$  na forma separável

$$u(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi z}{b} Y_n, \quad (3.54)$$

onde  $Y_n$  é função de  $y$  apenas, ou seja,  $Y_n = Y_n(y)$  e as condições de contorno em (3.52) são automaticamente satisfeitas, já que, quando  $z = 0$  tem-se o seno de zero, que faz com que a velocidade  $u$  se anule nesse ponto, semelhantemente para  $z = b$ , em que tem-se o seno de  $n\pi$  que também é nulo para todo  $n$ .

Agora, substituiremos essa nova expressão de  $u$  na equação de Poisson (3.51), e verificaremos se é possível determinar  $Y_n$  de modo que as condições de contorno em (3.53) também sejam satisfeitas. Substituindo (3.54) em (3.51), temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi z}{b} \left( \frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} Y_n \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.55)$$

Pela relação de Leibniz para  $\pi$  (Apêndice I.1) aplicada para o estudo em questão, em que  $z \in [0, b]$ , temos que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \frac{m\pi z}{b}. \quad (3.56)$$

A partir de uma combinação entre as equações (3.55) e (3.56), é fácil notar que a equação (3.55) pode ser reescrito na forma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi z}{b} \left( \frac{d^2 Y_n}{dy^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} Y_n \right) = \frac{4}{\pi \mu} \frac{dp}{dx} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \frac{m\pi z}{b}. \quad (3.57)$$

Para colocar os somatórios de senos de ambos os lados da igualdade em evidência, eles devem ser iguais. Porém, no lado esquerdo da equação  $n$  assume todos os números inteiros a partir de um, e no lado direito,  $m$  assume apenas os números inteiros ímpares positivos. Para que em

ambos os lados da igualdade os termos do somatório sejam variados apenas nos números reais ímpares, positivos e maiores ou iguais a um, a seguinte consideração será feita

$$Y_{2n} = 0 \quad (3.58)$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$

Desta forma,

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{b} \left( \frac{d^2 Y_m}{dy^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2} Y_m \right) = \frac{4}{\pi \mu} \frac{dp}{dx} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{b}, \quad (3.59)$$

a equação (3.59), após algumas manipulações algébricas, pode ser escrita na forma

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{b} \left[ \frac{d^2 Y_m}{dy^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2} Y_m - \frac{4}{m\pi \mu} \frac{dp}{dx} \right] = 0. \quad (3.60)$$

A equação (3.60) é claramente satisfeita se

$$\frac{d^2 Y_m}{dy^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2} Y_m - \frac{4}{m\pi \mu} \frac{dp}{dx} = 0. \quad (3.61)$$

Sendo a equação (3.61) uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de segunda ordem não homogênea, tem-se uma solução particular e duas soluções independentes, sendo a solução geral a soma de todas elas. Assim, devemos encontrar cada solução, para se obter a expressão para  $Y_m$  (a dedução detalhada dessa solução encontra-se no Apêndice I.2).

No caso particular em que  $Y_m$  é uma constante, tem-se que  $\frac{d^2 Y_m}{dy^2} = 0$ , portanto esta solução particular da equação (3.61) se resume a

$$Y_m = -\frac{4b^2}{m^3 \pi^3 \mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.62)$$

Já as duas soluções independentes se referem a solução da EDO para a situação homogênea, ou seja, para a equação

$$\frac{d^2 Y_m}{dy^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2} Y_m = 0. \quad (3.63)$$

Com as ferramentas de solução para EDOs e a equação fundamental, é possível mostrar que as duas soluções independentes são

$$Y_m = A_m \cosh \left( \frac{m\pi y}{b} \right) \quad \text{e} \quad Y_m = B_m \operatorname{senh} \left( \frac{m\pi y}{b} \right), \quad (3.64)$$

onde  $A_m$  e  $B_m$  são constantes a serem determinadas com as respectivas condições de contorno de  $u$ . Portanto, a solução geral para  $Y_m$  é

$$Y_m = A_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + B_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{b}\right) - \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.65)$$

Substituindo (3.65) em (3.54), obtemos a equação geral para a determinação da velocidade de um fluido newtoniano escoando dentro de canal retangular com geometrias definidas

$$u = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi z}{b} \left[ A_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + B_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{b}\right) - \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right]. \quad (3.66)$$

Com duas condições de contorno (3.52) e (3.53), podemos encontrar as constantes  $A_m$  e  $B_m$ .

Aplicando as condições de contorno em (3.66), temos que  $u = U$  em  $y = 0$ , que resulta em

$$U = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \text{sen} \frac{m\pi z}{b} \left[ A_m - \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right]. \quad (3.67)$$

E novamente se usarmos a relação de Leibniz para  $\pi$  para reescrever  $U$  como

$$U = U \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \frac{m\pi z}{b}, \quad (3.68)$$

a equação (3.67) se torna

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{m\pi z}{b} \right) \left[ A_m - \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right] = U \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \left( \frac{m\pi z}{b} \right). \quad (3.69)$$

Dessa forma, agrupando os termos semelhantes e isolando  $A_m$ , a equação (3.69) se torna

$$A_m = \frac{4U}{\pi m} + \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.70)$$

Ao substituirmos a primeira condição de contorno para  $u = 0$  em  $y = d$ , na equação (3.19), temos que

$$0 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{m\pi z}{b} \right) \left[ A_m \cosh\left(\frac{m\pi d}{b}\right) + B_m \sinh\left(\frac{m\pi d}{b}\right) - \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right]. \quad (3.71)$$

A equação (3.71) é satisfeita se

$$A_m \cosh\left(\frac{m\pi d}{b}\right) + B_m \sinh\left(\frac{m\pi d}{b}\right) - \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} = 0. \quad (3.72)$$

Logo, isolando  $B_m$  e substituindo  $A_m$  pela equação (3.70), temos que

$$B_m = \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu \sinh\left(\frac{m\pi d}{b}\right)} \frac{dp}{dx} - \coth\left(\frac{m\pi d}{b}\right) \left[ \frac{4U}{m\pi} + \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right]. \quad (3.73)$$

Com os valores de  $A_m$  e  $B_m$ , podemos determinar a solução do problema e encontrar a expressão que descreve a velocidade no canal como sendo

$$u = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) \left\{ -\frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} + \cosh\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \left[ \frac{4U}{m\pi} + \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{4b^2}{\pi^3 m^3 \mu} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\sinh\left(\frac{m\pi d}{b}\right)} - \coth\left(\frac{m\pi d}{b}\right) \left[ \frac{4U}{m\pi} + \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right] \right] \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right\}. \quad (3.74)$$

Se olharmos atentamente para os termos das equações que complementam a expressão da velocidade para um escoamento de Couette-Poiseuille, (3.70) e (3.73), vemos que na ausência de um gradiente de pressão as constantes  $A_m$  e  $B_m$  resultam na mesma expressão a menos de uma cotangente hiperbólica, e a equação (3.74) seria estritamente dependente de uma força cisalhante externa causado no fluido, o que geraria um escoamento plano de Couette. Em uma situação contrária, ou seja, onde não existem forças externas atuando no escoamento e o mesmo é regido pelo gradiente de pressão, o escoamento de Poiseuille seria recuperado.

A velocidade média sintetiza uma propriedade do escoamento que contém informações sobre todas as partículas em movimento dentro do canal. Tal variável nos permite determinar parâmetros como a vazão, número de Reynolds e outras propriedades intrínsecas ao escoamento. Ela pode ser determinada através de

$$u_{\text{med}} = \frac{1}{bd} \int_0^b \int_0^d u(y, z) dy dz, \quad (3.75)$$

Note que a expressão da velocidade média é dividida pelo produto  $bd$ , que representa a área transversal do canal retangular. Note que ao multiplicarmos a equação (3.75) pela área, então temos a definição usual da vazão. Como temos um escoamento com componentes bidimensionais, a vazão  $Q$  desse problema é encontrada através da seguinte equação

$$Q = \int_0^d \int_0^b u dy dz. \quad (3.76)$$

Substituindo a equação (3.74) na equação (3.76), e resolvendo a integral, pode-se concluir que a vazão para este problema, conforme descrito de forma detalhada no Apêndice I.3, é dada por

$$Q = b^2 \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{8U}{m^3 \pi^3} \tanh\left(\frac{m\pi d}{2b}\right) + \frac{16}{m^5 \pi^5 \mu} \frac{dp}{dx} b^2 \tanh\left(\frac{m\pi d}{2b}\right) \right] - \frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} bd \right\}. \quad (3.77)$$

Para simplificar a equação, introduziremos duas constantes, assim como feito por Rowell e Finlayson (1922), sendo elas

$$A = \frac{8}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh\left(\frac{m\pi d}{2b}\right)}{m^3} \quad (3.78)$$

e

$$B = \frac{d}{12b} - \frac{16}{\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh\left(\frac{m\pi d}{2b}\right)}{m^5} \quad (3.79)$$

Por fim, podemos escrever a expressão da vazão como sendo

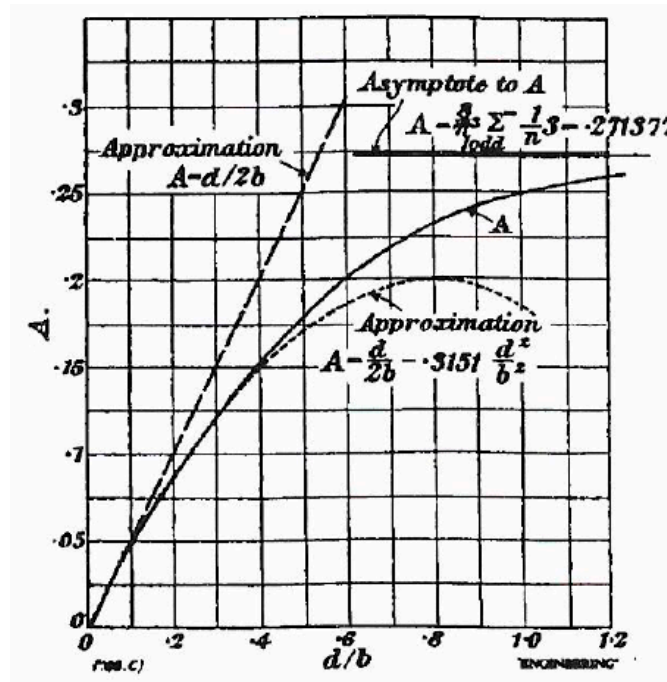
$$Q = b^2 \left( AU + B \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \right). \quad (3.80)$$

A expressão (3.80) deixa ainda mais claro a dependência do escoamento de Couette-Poiseuille com a existência de um gradiente de pressão e uma força externa ao escoamento atuando no mesmo. Perceba que a anulação de qualquer uma dessas variáveis faz com que o escoamento recupere a forma de Couette quando  $dp/dx = 0$ , ou a forma de Poiseuille quando  $U = 0$ .

Como forma de mostrar graficamente os resultados obtidos, Rowell e Finlayson (1928) criaram dois gráficos das variáveis  $A$  e  $B$  em função da razão de aspecto  $\lambda$ .

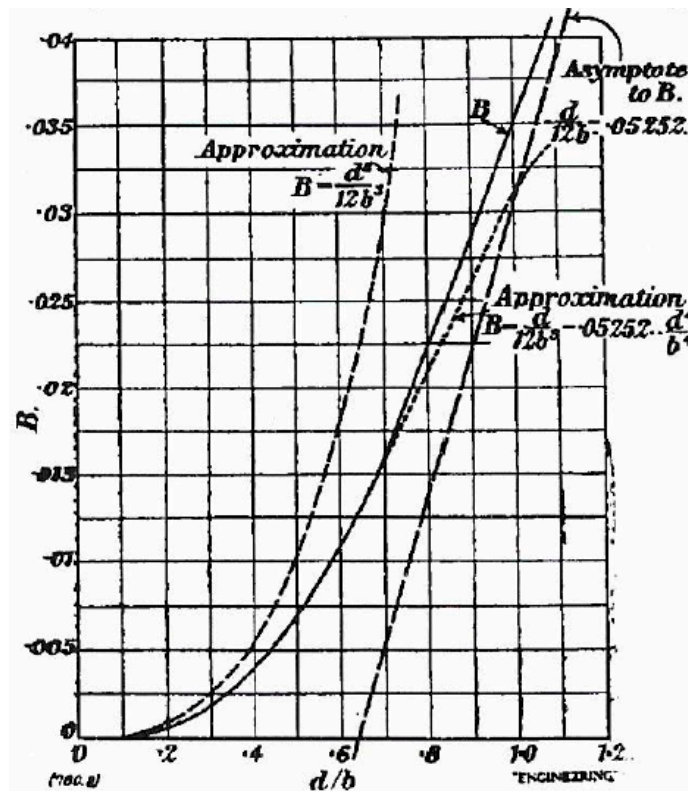
Tem-se as curvas obtidas por Rowel & Finlayson (1928):

Figura 3.6: Gráfico gerado para avaliar o comportamento da variável  $A$  em relação a  $\lambda$  na equação (3.80) quando essa assume diferentes valores.



Fonte: Rowell e Finlayson, 1928

Figura 3.7: Gráfico gerado para avaliar o comportamento da variável  $B$  em relação a  $\lambda$  na equação (3.80) quando essa assume diferentes valores.



Fonte: Rowell e Finlayson, 1928

### 3.7.1 Número de Poiseuille - $fRe$

O  $fRe$  é um número adimensional e determinado como a razão entre a tensão de cisalhamento local e a densidade de energia cinética do fluxo local. Usualmente, a relação entre o fluxo do escoamento e a queda de pressão ao longo do escoamento é expresso em termos do fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds generalizado

$$f = -\frac{dp}{dx} \left( \frac{D_h}{2\rho u_{med}^2} \right), \quad (3.81)$$

$$Re_g = \frac{\rho u_{med} D_h}{\mu}. \quad (3.82)$$

Nas equações acima  $\rho$  é a massa específica,  $u_{med}$  é a velocidade média do escoamento,  $D_h$  é o diâmetro hidráulico,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica e  $Re_g$  é o número de Reynolds generalizado que será representado apenas como  $Re$ .

Essas propriedades foram utilizadas para comparação com os resultados numéricos do programa utilizando um modelo aproximado por Shah e London (1978). A equação analítica para a determinação do produto entre o fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds para um escoamento totalmente desenvolvido em um duto retangular é

$$fRe = -\frac{dp}{dx} \left( \frac{D_h^2}{2u_{med}\mu} \right) \quad (3.83)$$

O modelo numérico proposto por Shah e London e utilizado para a determinação do número de Poiseuille é dado pela equação (3.84) e tem precisão de 7 dígitos.

$$fRe = 24(1 - 1,3553\lambda + 1,9467\lambda^2 - 1,7012\lambda^3 + 0,9564\lambda^4 - 0,2537\lambda^5) \quad (3.84)$$

## 3.8 INCLUSÃO DOS EFEITOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NO ESCOAMENTO DENTRO DO CANAL RETANGULAR

Para inclusão do campo de temperatura, foram mantidas as hipóteses adotadas para o escoamento em questão, porém, considerando o caso em que o escoamento é isotérmico dentro de um canal com superfícies adiabáticas (fluxo de calor constante e igual a zero) e temperatura da parede perifericamente constante, independentes do sistema de coordenadas como condições de contorno do problema. Nessas condições, a condutividade térmica da parede é considerada infinita perifericamente e nula axialmente. Na indústria essas condições de contorno são vistas no aquecimento por resistência elétrica, aquecimento nuclear, regenerador de turbina a gás, alguns trocadores de calor de contracorrente, todos com resistência térmica de parede normal insigni-

ficante (Shah e London, 1978). Para determinar o campo de temperatura, a equação da energia interna do fluido foi utilizada como ponto de partida. A equação da energia interna em sua forma vetorial é dada por (Pontes e Mangiacchi, 2016)

$$\frac{D\varrho}{Dt} = -\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\zeta:\nabla\mathbf{u} + \frac{k_f}{\rho}\nabla^2T + \frac{\dot{Q}}{\rho}. \quad (3.85)$$

Na equação apresentada,  $T$  é uma grandeza escalar que simboliza o campo de temperatura,  $\varrho$  a energia interna,  $\zeta$  o tensor de tensões viscoso,  $\rho$  a massa específica e  $k_f$  a condutividade térmica.

A energia interna dada como  $\varrho$ , pode ser reescrita utilizando a relação termodinâmica para um fluido incompressível (como apresentado em Bejan, 2013), em que  $\varrho = c_v T$ , e portanto a equação (3.85) ao ter seus termos reorganizados, obtêm-se

$$\frac{DT}{Dt} = -\frac{p}{\rho c_v}\nabla\cdot\mathbf{u} + \frac{1}{\rho c_v}\zeta:\nabla\mathbf{u} + \frac{k_f}{\rho c_v}\nabla^2T + \frac{\dot{Q}}{\rho c_v}. \quad (3.86)$$

Em que  $c_v$  é o calor específico a volume constante.

Se interpretarmos os termos da equação (3.86), temos uma parcela  $p\nabla\cdot\mathbf{u}$  que representa a variação da energia interna devido ao trabalho de compressão da partícula de fluido sob efeito da pressão e  $\zeta:\nabla\mathbf{u}$  representa a contribuição dos efeitos viscosos na variação da energia interna da partícula (Pontes e Mangiacchi, 2016).

A partir das propriedades da derivada material na equação (3.86), têm-se que

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T \quad (3.87)$$

Sabendo que trata-se de um processo adiabático ( $\dot{Q} = 0$ ), para um fluido incompressível ( $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ ), em regime permanente ( $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ), e ainda, sabendo que para fluidos incompressíveis o  $c_v$  se aproxima do calor específico a pressão constante  $c_p$ , a equação (3.86) se torna

$$\mathbf{u}\cdot\nabla T = \frac{1}{\rho c_p}\zeta:\nabla\mathbf{u} + \alpha\nabla^2T. \quad (3.88)$$

onde  $\alpha = k_f/\rho c_p$  é a difusividade térmica, propriedade específica do material responsável pela condução instável de calor e descrição de quão rapidamente um material reage à mudanças de temperatura. Com isso, sabemos que a mesma é função da temperatura, ou seja,  $\alpha = \alpha(T)$ . Porém, em nossa modelagem, consideraremos que a difusividade térmica é constante.

Ao ser desprezado o termo que diz respeito a dissipação viscosa, isto é, desconsiderar o ganho de energia do fluido gerado pela interação entre o fluido e as superfícies adjacentes devido a viscosidade, a equação que governa o campo de temperatura obtida através da equação da energia interna resume-se a (Syrjälä, 1996):



$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T. \quad (3.89)$$

Como já definido, o escoamento é unidirecional e, portanto,  $v = w = 0$ . Considerando que o fluxo de calor é invariável, isto é, a temperatura é constante na direção do escoamento e portanto  $\frac{\partial T}{\partial x} = \text{cte}$ , a equação (3.89) pode ser reescrita, em coordenadas cartesianas, como

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (3.90)$$

É importante ressaltar que a temperatura  $T$  tem uma importante condição de contorno, sendo ela

$$T(0, z) = T(d, z) = T(y, 0) = T(y, b) = T_{\text{parede}}. \quad (3.91)$$

Assim como para o campo de velocidade, a temperatura média fornece informações gerais de como a distribuição de temperatura afeta o escoamento dentro do canal. Para a determinação da temperatura média do escoamento, foi utilizada a seguinte expressão (Shah e London, 1978):

$$T_{\text{med}} = \frac{1}{bd u_{\text{med}}} \int_0^b \int_0^d T(y, z) u(y, z) dy dz, \quad (3.92)$$

onde  $b$  é dimensão do comprimento transversal do canal, onde  $d$  é dimensão da altura do canal e o produto entre as duas variáveis representa a área. A temperatura média do volume do fluido  $T_{\text{med}}$  também é algumas vezes referida como a *mixing cup* ou a temperatura “média de fluxo”. Conceitualmente,  $T_{\text{med}}$  é a temperatura que se mediria se o duto fosse cortado em uma seção e o fluido escapando fosse coletado e completamente misturado em um recipiente adiabático (Shah e London, 1978).

### 3.8.1 Número de Nusselt - $Nu$

Uma propriedade muito utilizada para determinar parâmetros do escoamento no que se refere a transferência de calor é o número de Nusselt representado por  $Nu$ , uma grandeza adimensional utilizada na determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção através de similaridade. Essa propriedade pode ser escrita em função de outros parâmetros adimensionais, como o número de Reynolds  $Re$ , que faz um balanço entre as forças de inércia e as forças viscosas, e o número de Prandtl  $Pr$ , que fornece a relação entre a viscosidade e a condutividade térmica.

$$Nu = f(Re, Pr) \quad (3.93)$$

Fisicamente, o número de Nusselt representa a razão entre a energia térmica de convecção do fluido e a energia térmica conduzida dentro do fluido (Connor, 2019). Na superfície, ele equivale

ao gradiente de temperatura adimensional e fornece uma medida de transferência de calor por convecção que ocorre na superfície. Analogamente ao que acontece com o coeficiente de atrito na camada limite de velocidade do fluido, o número de Nusselt está ligado a uma camada limite térmica (Incropera et al., 1996).

Quanto a sua interpretação numérica, um número de Nusselt de valor 1 representa a transferência de calor por condução pura. Um valor entre 1 e 10 é característico de um *slug flow*<sup>2</sup> ou fluxo laminar. Um número de Nusselt maior corresponde a uma convecção mais ativa, com fluxo turbulento tipicamente na faixa de 100 a 1000 (Çengel e Ghajar, 2009).

Uma das diversas definições usuais para o número de Nusselt é dada por

$$Nu_x = \frac{h_x D_h}{\kappa_f}, \quad (3.94)$$

onde  $h_x$  o coeficiente de transferência de calor local médio,  $D_h$  o diâmetro hidráulico e  $\kappa_f$  é o coeficiente de condutividade térmica. Essa definição é usualmente utilizada para determinar O número de Nusselt local médio periférico para um ducto não circular é baseado em  $h_x$ . A partir dessa definição, os valores de Nusselt são determinados para o escoamento a partir das periferias e condições de contorno, onde um gradiente de temperatura média nas periferias na parede associado ao  $h_x$  é utilizado para a determinação de  $Nu_x$ . Essa definição de um número de Nusselt local médio de perímetro pode ou não representar a média integrada (em torno da periferia) de um Nusselt local por causa da temperatura média na parede.  $Nu_x$  pode ser positivo, infinito ou negativo dependendo da magnitude de  $h_x$  (Shah e London, 1978). A partir desse ponto, o sobrescrito  $x$  será suprimido e os  $Nu_x$  e  $h_x$  serão representados somente por  $Nu$  e  $h$ .

Além de ser utilizada para melhor conhecimento das propriedades termodinâmicas do escoamento, o  $Nu$  será utilizado para a validação do modelo numérico que determina o campo de temperatura. Os resultados obtidos numericamente serão comparados com os presentes na literatura utilizada por esse trabalho, presentes em Syrjälä (1996).

### 3.9 ADIMENSIONALIZAÇÃO

A partir da expressão que determina a velocidade do escoamento dentro de um canal retangular conforme exposto na seção anterior, ao ser realizada uma adimensionalização na expressão da velocidade, os gráficos que demonstram o comportamento físico das linhas de isovelocidades dentro do canal tornam-se capazes de serem gerados de maneira simplificada. Através de alguns termos adimensionais que serão utilizados, podemos estudar os casos particulares do escoamento de Couette-Poiseuille. O processo será repetido para o campo de temperatura com o mesmo intuito.

---

<sup>2</sup>(A palavra *slug* geralmente se refere ao fluido mais pesado e mais lento em escoamentos de líquidos, mas também pode ser usada para se referir às bolhas do fluido mais leve em um escoamento bifásico de um líquido-gás.)

### 3.9.1 Adimensionalização das propriedades do campo de velocidade

Para a adimensionalização das nossas equações governantes do campo de velocidade, vamos introduzir as seguintes variáveis adimensionais

$$\tilde{y} = \frac{y}{D_h}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{D_h}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{V}, \quad (3.95)$$

em que  $D_h$  é o diâmetro hidráulico, utilizado para realizar futuras comparações dos resultados já conhecidos para tubulações circulares,  $x$ ,  $y$  e  $z$  são os vetores posição do sistema de coordenadas e  $V$  uma velocidade característica que será definida adiante.

Substituindo as variáveis adimensionais na equação (3.11), temos que

$$\frac{V}{D_h^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{V}{D_h^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (3.96)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} = \frac{D_h^2}{\mu V} \frac{dp}{dx}. \quad (3.97)$$

A fim de simplificar a expressão adimensional (3.97), a escala de  $V$  é definida de maneira que a expressão no lado direito da igualdade seja igual a  $-1$  para que o escoamento ocorra na direção positiva do eixo de coordenadas, para o nosso caso, o eixo  $x$ . Portanto a escala de  $V$  foi definida como sendo

$$V = -\frac{D_h^2}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.98)$$

Vale ressaltar que, ao ser definida a velocidade característica dessa maneira, estamos partindo do pressuposto que sempre há um gradiente de pressão atuando no escoamento. Portanto, os parâmetros de controle que temos dentro do escoamento serão a razão de aspecto  $\lambda$  e o número de Couette. A razão de aspecto que é definida como sendo

$$\lambda = \frac{d}{b}. \quad (3.99)$$

Desta forma, a equação (3.97) se torna

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} = -1. \quad (3.100)$$

A partir expressão do diâmetro hidráulico, é possível obter a geometria (da área transversal) do duto em função do mesmo, e da razão de aspecto. Temos que

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4bd}{2(b+d)} \quad (3.101)$$

Manipulando a equação (3.101), tem-se que as dimensões da seção transversal do duto, são

$$d = \frac{D_h(1+\lambda)}{2} \quad (3.102)$$

e

$$b = \frac{D_h(1+\lambda)}{2\lambda}. \quad (3.103)$$

Conhecendo as expressões das dimensões da seção transversal definidas em função do diâmetro hidráulico e da razão de aspecto, é possível adimensionalizar as condições de contorno de forma mais objetiva para o estudo em questão.

Para adimensionalizar as condições de contorno da velocidade  $u$ , primeiramente mudaremos o intervalo do domínio do mesmo. Das equações (3.52) e (3.53), dividindo todos os termos da desigualdade (do domínio) pelo diâmetro hidráulico  $D_h$ , e substituindo  $d$  e  $b$ , conforme as equações (3.102) e (3.103), respectivamente, temos que

$$0 \leq \tilde{y} \leq \frac{1+\lambda}{2} \quad (3.104)$$

e

$$0 \leq \tilde{z} \leq \frac{1+\lambda}{2\lambda}. \quad (3.105)$$

Analisando as desigualdades acima e comparando com sua forma dimensional, podemos chegar na expressão adimensional de  $d$  e  $b$  apresentadas na forma

$$\tilde{d} = \frac{1+\lambda}{2} \quad (3.106)$$

e

$$\tilde{b} = \frac{1+\lambda}{2\lambda}. \quad (3.107)$$

Substituindo todos os termos adimensionais nas equações (3.52) e (3.53), temos portanto as condições de contorno adimensionais de  $\tilde{u}$

$$\tilde{u}(\tilde{y}, 0) = 0, \quad \tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{b}) = 0, \quad 0 < \tilde{y} < \tilde{z}, \quad (3.108)$$

e

$$\tilde{u}(0, \tilde{z}) = Co, \quad \tilde{u}(\tilde{d}, \tilde{z}) = 0, \quad 0 < \tilde{z} < \tilde{b} \quad (3.109)$$

em que  $Co$  é definido como o número de Couette, que representa a razão entre a velocidade da placa  $U$  e a velocidade característica  $V$

$$Co = \frac{U}{V}. \quad (3.110)$$

Se reavaliarmos a equação, notamos que todas as condições de contorno permanecem sendo satisfeitas. Temos velocidade nula nas paredes laterais ( $\tilde{z} = 0$  e  $\tilde{z} = \frac{1+\lambda}{2\lambda}$ ), assim também como na placa inferior ( $\tilde{y} = \frac{1+\lambda}{2}$ ), e na placa superior ( $\tilde{y} = 0$ ) temos a condição de não deslizamento, onde  $\tilde{u} = Co$ .

A razão de aspecto está ligada a simplificação do problema geral, ou seja, a transformação do caso geral de um escoamento de Couette-Poiseuille confinado em um canal retangular, em casos particulares através da alteração de seu valor. Quando a razão de aspecto é igual a zero ou igual a um, temos a simplificação do problema da seguinte forma:

Para  $\lambda = 0$ , ou seja, quando  $b \gg d$ , tem-se o problema de placas paralelas infinitas

Para  $\lambda = 1$ , ou seja, quando  $b = d$ , tem-se o problema de um duto quadrangular

Utilizando as variáveis adimensionais apresentadas nas equações (3.95), (3.98), (3.106) e a (3.107), com as devidas manipulações conforme descrito no Apêndice I.4, a equação (3.74) em sua forma adimensional é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{u} = & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{z}}{1+\lambda} \right) \left\{ \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} + \cosh \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{y}}{1+\lambda} \right) \left[ \frac{4Co}{m\pi} - \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} \right] \right. \\ & \left. + \left[ \frac{-1}{\text{senh}(m\pi\lambda)} \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} - \coth(\lambda m \pi) \left[ \frac{4Co}{m\pi} - \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} \right] \right] \text{senh} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{y}}{1+\lambda} \right) \right\}. \quad (3.111) \end{aligned}$$

A velocidade média será outra importante variável utilizada neste estudo. Ela será utilizada, para a determinação do número de Nusselt e do número de Poiseuille assim como validará a expressão da velocidade adimensional. Substituindo as variáveis adimensionais na equação (3.75), tem-se a velocidade média adimensional

$$\tilde{u}_{\text{med}} = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \int_0^{\frac{1+\lambda}{2\lambda}} \int_0^{\frac{1+\lambda}{2}} \tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (3.112)$$

Utilizando as mesmas variáveis adimensionais utilizadas para a adimensionalização da velocidade, podemos obter uma expressão adimensional para a vazão partindo da equação obtida de (3.76). Conforme descrito no Apêndice I.5, a expressão da vazão adimensional, após as devidas manipulações das variáveis, é dada por

$$\tilde{Q} = \frac{8Co}{\pi^3\lambda} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi\lambda)}{m^3 (\cosh(m\pi\lambda) + 1)} + \frac{1}{12\lambda^3} \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^2 - \frac{16}{\pi^5\lambda^3} \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi\lambda)}{m^5 (\cosh(m\pi\lambda) + 1)}. \quad (3.113)$$

Para validarmos o modelo numérico adotado para a determinação do campo de velocidade, utilizaremos o número de Poiseuille  $fRe$  na forma adimensional, utilizando as mesmas variáveis anteriormente apresentadas. A equação (3.83) ao ser adimensionalizada torna-se

$$fRe = \frac{1}{2\tilde{u}_{med}}. \quad (3.114)$$

### 3.9.2 Adimensionalização das propriedades do campo de temperatura

Para a adimensionalização das nossas equações governantes do campo de temperatura, vamos introduzir as seguintes variáveis adimensionais

$$\tilde{u}_{med} = \frac{u_{med}}{V} \quad (3.115)$$

e

$$\tilde{T} = \frac{\alpha (T - T_{parede})}{u_{med} D_h^2 \frac{dT_{med}}{dx}}. \quad (3.116)$$

Como temos um escoamento hidrodinamicamente e termicamente desenvolvidos, podemos utilizar a seguinte representação

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_{med}}{dx} \quad (3.117)$$

Substituindo as variáveis adimensionais da equação (3.116) e (3.95) além de (3.117) na equação (3.90), temos que

$$u \frac{dT_{med}}{dx} = \alpha \left( \frac{u_{med} D_h^2 \frac{dT_{med}}{dx}}{\alpha} \frac{1}{D_h^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{u_{med} D_h^2 \frac{dT_{med}}{dx}}{\alpha} \frac{1}{D_h^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (3.118)$$

Após as simplificações dos termos semelhantes, podemos reescrever a equação (3.118) como sendo

$$u = u_{\text{med}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right). \quad (3.119)$$

Note que a equação (3.119) é dimensionalmente consistente. Porém, em nossas análises trabalharemos somente com termos adimensionais afim de unificar a análise, assim, substituindo as variáveis da equação (3.95) e (3.115) na equação (3.119), temos a equação governante adimensionalizada do problema dada por

$$\tilde{u} = \tilde{u}_{\text{med}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \quad (3.120)$$

que pode ser rearranjada como

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_{\text{med}}} = 0 \quad (3.121)$$

Desta forma, a condição de contorno da temperatura adimensional  $\tilde{T}$  se torna

$$\tilde{T}(0, \tilde{z}) = \tilde{T}(\tilde{d}, \tilde{z}) = \tilde{T}(\tilde{y}, 0) = \tilde{T}(\tilde{y}, \tilde{b}) = 0. \quad (3.122)$$

Para obtenção da Temperatura média do escoamento adimensional, utilizaremos a expressão dada pela equação (3.92) que ao ter seus termos substituídos por seus correspondentes adimensionais apresentados na seção 3.9 e dado por (3.115), nos fornece

$$\tilde{T}_{\text{med}} = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \frac{1}{\tilde{u}_{\text{med}}} \int_0^{\frac{1+\lambda}{2\lambda}} \int_0^{\frac{1+\lambda}{2}} \tilde{T}(\tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (3.123)$$

Para solução da equação (3.123) será utilizado um método numérico, a regra dos trapézios generalizada, que será amplamente abordada na Seção 4.1.2. Outra variável de interesse do nosso estudo é o número de Nusselt adimensionalizado. Para obtenção da expressão geral do número de Nusselt adimensionalizado para nosso estudo, utilizaremos o mesmo modelo utilizado por Syrjälä (1996). Portanto, definiremos o coeficiente de transferência de calor médio perifericamente como sendo

$$h = \frac{\kappa_f u_{\text{med}} (D_h/4)}{\alpha T_{\text{med}}} \frac{dT_{\text{med}}}{dx}. \quad (3.124)$$

E por fim, a partir da equação (3.94) e substituindo os termos dado por (3.124), obtemos a seguinte expressão para o número de Nusselt adimensionalizado

$$Nu = -\frac{1}{4\tilde{T}_{\text{med}}}. \quad (3.125)$$

onde a variável dada pela equação (3.125) foi definida como uma variável negativa para simplificar a análise.

Em 1978 Shah e London mencionaram em seu livros os autores Marco e Han Marco, Han et al., descrevendo que os mesmos derivaram a condição de contorno designada por H1 (condição de contorno com fluxo de calor axial constante na parede e temperatura constante da parede periférica), a distribuição de temperatura para os dutos retangulares por um método de analogia usando uma solução existente para a pequena deflexão de uma placa fina sob uma carga lateral uniforme, com a placa simplesmente apoiada ao longo de todas as bordas. A expressão para determinar  $Nu$  proposta por eles pode ser expressada como

$$Nu = \frac{64}{(1 + \alpha^*)^2 \pi^2} \frac{\left[ \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 + n^2 \alpha^{*2})} \right]^2}{\left[ \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 + n^2 \alpha^{*2})^3} \right]}. \quad (3.126)$$

Os presentes autores, tomando até os primeiros 250 termos em cada série, estabeleceram precisão de seis dígitos para  $Nu$ . O  $Nu$  é aproximado, dentro de  $\pm 99,97\%$ , pela seguinte equação

$$Nu = 8,235 \left[ 1 - 2,0421\alpha^* + 3,0853\alpha^{*2} - 2,4765\alpha^{*3} + 1,0578\alpha^{*4} - 0,1861\alpha^{*5} \right] \quad (3.127)$$

considerada por nós como a equação analítica e de referência no processo de verificação dos resultados e validação do modelo numérico. Sendo tal equação obtida por Marco, Han et al. (1955).



## 4 FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

Ao ser feita a análise numérica de um problema, buscamos utilizar algoritmos de forma a aproximar a solução de problemas físicos e matemáticos. Tais algoritmos podem se dividir em iterativos, recursivos e diretos. Ao realizar processos iterativos, fazemos uma sucessão de etapas e processos que visam a convergência numérica de resultados matemáticos. Na análise recursiva, definimos o processo baseado em uma estrutura alinhada, definindo os resultados com base em seus próprios valores. Os métodos diretos se baseiam na solução de problemas com números finitos de passos de operações aritméticas. Na termofísica, muitos problemas contínuos só podem ser solucionados ao serem substituídos por problemas discretos, cuja solução é conhecida e próxima da solução exata. Para fazer isso, dividimos o domínio do problema em um número finito de pontos e em seguida transformamos as equações diferenciais governantes do problema em simples equações algébricas. No que concerne a este trabalho, tais equações serão resolvidas por algoritmos diretos realizados com uso de códigos de programação.

### 4.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES DO PROBLEMA

Nessa seção será apresentada a metodologia adotada para resolver as equações governantes do problema numericamente, tanto em termos do método numérico escolhido, como a solução computacional utilizada em termos de programação.

#### 4.1.1 Diferenças finitas

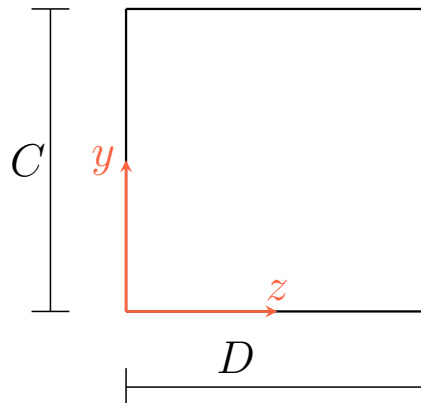
O método de diferenças finitas busca encontrar o valor da derivada. Esse processo é feito aproximando a função localmente por um polinômio, e então é feita a sua diferenciação. Uma outra maneira e a utilizada nesse trabalho é feita através da expansão da série de Taylor no ponto avaliado. Ela se baseia em quatro etapas de solução (Hoffman, 2001):

##### 1. *Discretização do domínio:*

Matematicamente, o processo de discretização é a transformação de funções contínuas, modelos, variáveis e equações em contrapartes discretas. A discretização do domínio baseia-se na divisão do domínio contínuo em um determinado número finito de intervalos com determinada dimensão. Consideremos uma placa de dimensões  $C$  por  $D$ , como indicado na Figura 4.1. Se dividirmos as dimensões  $C$  e  $D$  em  $Q$  partes na direção  $y$  e  $z$ , teremos uma divisão dos domínios de  $y$  e  $z$  em  $Q$  partes, com tamanhos iguais a  $C/Q$  e  $D/Q$  respectivamente. Fazamos  $Q = 11$ , logo, para essas partes fracionadas, teremos um operador do tipo  $\Delta y = C/11$  e  $\Delta z = D/11$ . Tem-se a representação do domínio e desses operadores nas

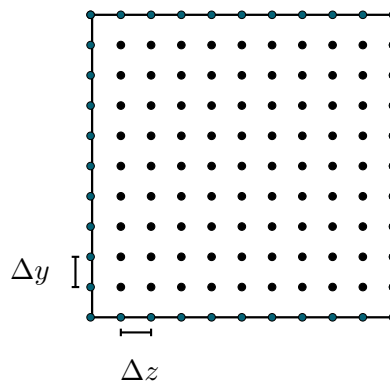
Figuras 4.1 e 4.2.

Figura 4.1: Representação gráfica de uma placa retangular com dimensões equivalentes a  $C$  e  $D$ .



Fonte: Próprios autores, 2021

Figura 4.2: Discretização do domínio das dimensões da placa.



Fonte: Próprios autores, 2021

Como o domínio é dividido em  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , para o campo de velocidade teremos a do tipo função  $u(y, z)$  aproximada por sua equivalente discreta  $u(y_j, z_k)$ , especificadas e determinados nos pontos da malha e ajustados pelas condições de contorno do problema.

## 2. Aproximação das derivadas usando séries de Taylor:

As derivadas da equação original são aproximadas usando séries de Taylor. Considerando uma função que varia apenas em  $y$ , essa expansão pode ser feita utilizando pontos à frente ou atrás, realizadas em  $y_j + \Delta y$  no primeiro caso (4.1) e em  $y_j - \Delta y$  no segundo (4.2), ambas em torno de  $y$  aplicada a  $u(y, z)$ , temos

$$\begin{aligned}
u(y_j + \Delta y, z_k) &= u(y_j, z_k) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_j + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_j \\
&\quad + \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_j + \frac{\Delta y^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_j + \dots
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
u(y_j - \Delta y, z_k) &= u(y_j, z_k) - \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_j + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_j \\
&\quad - \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_j + \frac{\Delta y^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_j + \dots
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Se as séries infinitas de Taylor são truncados após a  $n$ -ésima derivada para obter aproximações de  $u(y_j + \Delta y, z_k)$  e  $u(y_j - \Delta y, z_k)$ , então o erro do truncamento é  $\mathcal{O}(\Delta y^n)$ , que é a taxa na qual o erro vai para zero quando  $\Delta y$  se aproxima de zero (Hoffman, 2001).

Ao somarmos as equações (4.1) e (4.2) e considerarmos o termo  $u(y_j + \Delta y, z_k) = u_{j+1,k}$ ,  $u(y_j - \Delta y, z_k) = u_{j-1,k}$  e  $u(y_j, z_k) = u_{j,k}$ , onde exibimos somente a variável de interesse, podemos escrever a expansão das séries de Taylor como

$$u_{j+1,k} + u_{j-1,k} = 2u_{j,k} + \Delta y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y_j, z_k} + \frac{\Delta y^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{y_j, z_k} + \dots, \tag{4.3}$$

ou seja,

$$u_{j+1,k} + u_{j-1,k} = 2u_{j,k} + \Delta y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y_j, z_k} + \mathcal{O}(\Delta y^4). \tag{4.4}$$

Na expressão acima, se isolarmos os termos da segunda derivada, conseguimos obter a expressão para sua aproximação no ponto  $y_j$ . Assim sendo, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y_j, z_k} = \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2). \tag{4.5}$$

Perceba que o truncamento realizado nos fornece um erro de  $\mathcal{O}(\Delta y^2)$ . Por conseguinte,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y_j, z_k} \approx \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{\Delta y^2}. \tag{4.6}$$

Como vimos, a expressão (4.6) pode ser aplicada em funções de mais de uma variável. Nesse caso, mantém-se a variável de interesse da derivada na equação, e a outra variável, constante. Analogamente, se repetirmos o procedimento para variável  $z$ , a equação (4.7) é obtida.

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{y_j, z_k} \approx \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{\Delta \tilde{z}^2}. \quad (4.7)$$

Vale ressaltar que as aproximações para as derivadas não se limitam a este método (Hoffman, 2001). Partindo da equação (3.100) que é uma equação de Poisson variando em torno de  $\tilde{y}$  e  $\tilde{z}$  apenas, ao serem aproximadas por (4.6) e (4.7), as derivadas do campo de velocidade adimensional  $\tilde{u}$  se tornam

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{y_j, z_k} \approx \frac{\tilde{u}_{j+1,k} - 2\tilde{u}_{j,k} + \tilde{u}_{j-1,k}}{\Delta \tilde{y}^2} \quad (4.8)$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right|_{y_j, z_k} \approx \frac{\tilde{u}_{j,k+1} - 2\tilde{u}_{j,k} + \tilde{u}_{j,k-1}}{\Delta \tilde{z}^2}, \quad (4.9)$$

que ao serem substituídas na equação (3.100), a seguinte expressão em diferenças finitas para a equação do campo de velocidade adimensionalizada se torna

$$\frac{\tilde{u}_{j,k+1} - 2\tilde{u}_{j,k} + \tilde{u}_{j,k-1}}{\Delta \tilde{z}^2} + \frac{\tilde{u}_{j+1,k} - 2\tilde{u}_{j,k} + \tilde{u}_{j-1,k}}{\Delta \tilde{y}^2} = -1. \quad (4.10)$$

Com a equação governante do problema alterada, a fim de simplificar a expressão, a reescrevemos da seguinte maneira

$$\tilde{u}_{j,k+1} - 2\tilde{u}_{j,k} + \tilde{u}_{j,k-1} + (\tilde{u}_{j+1,k} - 2\tilde{u}_{j,k} + \tilde{u}_{j-1,k}) \frac{\Delta \tilde{z}^2}{\Delta \tilde{y}^2} = -\Delta \tilde{z}^2 \quad (4.11)$$

que ao ser reorganizado, temos

$$\tilde{u}_{j,k+1} + \tilde{u}_{j,k-1} + (\tilde{u}_{j+1,k} + \tilde{u}_{j-1,k}) \frac{\Delta \tilde{z}^2}{\Delta \tilde{y}^2} + \tilde{u}_{j,k} \left( -2 - 2 \frac{\Delta \tilde{z}^2}{\Delta \tilde{y}^2} \right) = -\Delta \tilde{z}^2. \quad (4.12)$$

As seguintes variáveis serão introduzidas no intuito de simplificar a expressão (4.12), de forma que

$$\beta = \frac{\Delta \tilde{z}^2}{\Delta \tilde{y}^2} \quad (4.13)$$

$$\gamma = -2 - 2 \frac{\Delta \tilde{z}^2}{\Delta \tilde{y}^2} = -2 - 2\beta, \quad (4.14)$$

e portanto, a equação (4.12) se torna

$$\tilde{u}_{j,k+1} + \tilde{u}_{j,k-1} + (\tilde{u}_{j+1,k} + \tilde{u}_{j-1,k}) \beta + \tilde{u}_{j,k} \gamma = -\Delta \tilde{z}^2. \quad (4.15)$$

A equação (4.15) é a equação que deve ser resolvida numericamente para a determinação do campo de velocidade.

Assim como para o campo de velocidade, o método de diferenças finitas também foi aplicado ao campo de temperatura, determinado pela equação (3.90) na sua forma adimensionalizada dada pela equação (3.121) que possui sua contraparte discreta dada por

$$\frac{\tilde{T}_{j,k+1} - 2\tilde{T}_{j,k} + \tilde{T}_{j,k-1}}{\Delta \tilde{z}^2} + \frac{\tilde{T}_{j+1,k} - 2\tilde{T}_{j,k} + \tilde{T}_{j-1,k}}{\Delta \tilde{y}^2} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_{\text{med}}}. \quad (4.16)$$

que pode ser rearranjada como

$$\tilde{T}_{j,k+1} + \tilde{T}_{j,k-1} + (\tilde{T}_{j+1,k} + \tilde{T}_{j-1,k}) \frac{\Delta z^2}{\Delta y^2} + \tilde{T}_{k,j} \left( -2 - 2 \frac{\Delta z^2}{\Delta y^2} \right) = \Delta \tilde{z}^2 \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_{\text{med}}}. \quad (4.17)$$

Utilizando as mesmas variáveis simplificadoras, dadas por (4.13) e (4.14), podemos reescrever a equação discretizada pelo método das diferenças finitas que determina o campo de temperatura como

$$\tilde{T}_{j,k+1} + \tilde{T}_{j,k-1} + (\tilde{T}_{j+1,k} + \tilde{T}_{j-1,k}) \beta + \tilde{T}_{k,j} \gamma = \Delta \tilde{z}^2 \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_{\text{med}}}. \quad (4.18)$$

### 3. *Substituição das expressões aproximadas na equação diferencial original:*

Após obtida a aproximação para as derivadas, essa deve ser substituída na equação original do problema como foi feito nos últimos passos do tópico acima. Se o domínio foi discretizado em  $n$  pontos, a substituição das aproximações das derivadas na EDP original gerará  $n$  equações. Substituindo ponto a ponto, montamos um sistema algébrico linear de equações com mesmo número de incógnitas que a equação original na forma matricial  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , em que  $\mathbf{A}$  é a matriz dos coeficientes,  $\mathbf{x}$  é o vetor coluna da variável de interesse e  $\mathbf{b}$  é o vetor resultante. Para o nosso problema, a princípio, a variável de interesse  $\mathbf{x}$  é o vetor do campo de velocidade  $u$ , já que buscamos resolver numericamente o campo de velocidade do escoamento estudado. Em síntese, a variável  $\mathbf{x}$  pode assumir qualquer propriedade física, como por exemplo o vetor  $\mathbf{T}$ , variável de interesse desse trabalho que representa o campo de temperatura do escoamento. Quanto maior a discretização do domínio for, maior será a precisão dos resultados já que o valor da diferença entre os pontos é reduzido e o erro associado também, porém ao custo de se ter maior dificuldade na hora de se resolver esse sistema matricial.

### 4. *Resolver o sistema de equações algébricas resultante :*

Ao ser montado o sistema de equações lineares, o último passo se baseia na solução desse sistema, seja através de métodos diretos ou por processos iterativos. Os métodos iterativos utilizam soluções arbitrárias (soluções iniciais baseadas em palpites) para a iteração zero (função genérica  $J$ , sem iteração alguma  $J^{ITER=0}$ ). Essa solução para a iteração zero é então

utilizada para calcular uma solução  $J^{ITER=1}$  que é um resultado mais próximo da solução verdadeira. Então  $J^{ITER=1}$  é utilizado para calcular  $J^{ITER=2}$  e esse processo continua até que a diferença entre os valores obtidos para  $J^{(ITER=k)}$  e  $J^{(ITER=k+1)}$  seja menor que uma dada tolerância. Os sobre-índices simbolizam o número da iteração, ou seja, o número exato do processo que está ocorrendo. Para o cálculo desses processos iterativos, existem diversas possibilidades metodológicas, como o processo de iteração de Jacobi, Gauss-Seidel, Sobre-relaxação sucessiva (SOR) e tantos outros.

Por sua vez, os métodos diretos utilizam números finitos de operações algébricas para encontrarem a solução exata. Quando não tratados corretamente, esse método pode não ser tão eficaz quando o sistema é composto por muitas equações, que é o caso dos sistemas encontrados no método de diferenças finitas, mas quando resolvidos com o auxílio de programas computacionais, apresentam boas precisões.

Para a presente solução, a metodologia adotada é baseada em métodos diretos com o auxílio de sistemas computacionais para a solução das diversas equações.

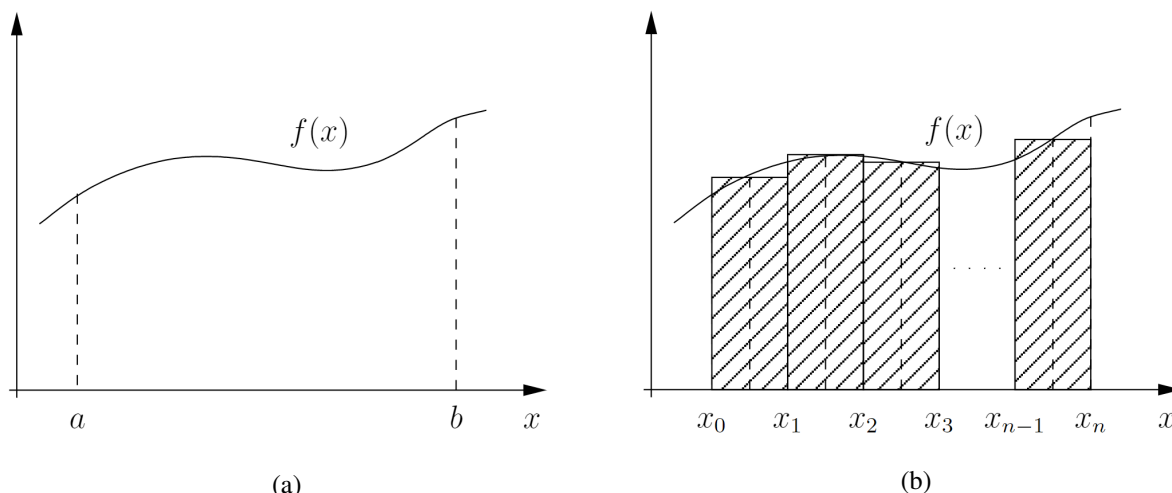
#### 4.1.2 Aproximações das integrais por métodos numéricos

Após utilização dos modelos numéricos já mencionados para solução das equações governantes, chegamos em algumas variáveis que são medidas integrais, sendo elas a velocidade média adimensional  $\tilde{u}_{med}$  e a vazão adimensional  $\tilde{Q}$ . Em determinadas situações, pode ser muito complicado integrar analiticamente uma função. Para a solução dessas medidas integrais foi empregado um método numérico, a regra dos trapézios generalizada.

Sabe-se que a ideia por trás de uma integral é a determinação da área de uma figura plana qualquer. Utilizando geometria elementar, aproximamos a área dessa figura por polígonos cujas áreas podem ser determinadas. Como mostra a Figura 4.3, podemos aproximar a área de uma figura delimitada por  $f(x)$ , pelo eixo das abcissas  $x$  e por duas retas  $x = a$  e  $x = b$  dividindo os intervalos  $a$  e  $b$  em  $n$  subintervalos iguais como mostrado na equação (4.19) para  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  (Pedrosa, 2005).

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad (4.19)$$

Figura 4.3: Aproximação da área de uma figura delimitada por uma função  $f(x)$  utilizando geometria elementar.



Fonte: Pedrosa, 2005

Em cada um dos intervalos é definido um ponto  $\xi_i$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Assim, podemos definir uma série de retângulos de base  $\Delta x$  e altura  $f(\xi_i)$  (Pedrosa). A soma da área desses retângulos é

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x .$$

O valor de  $S_n$  é, aproximadamente, o valor da área delimitada por  $f(x)$  e  $x$ , no intervalo  $[a, b]$ . Se a quantidade de subintervalos cresce e tende ao infinito, então obtemos a integral de Riemman, cujo resultado é um valor numérico. A integral de Riemman é dada por

$$S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx .$$

Como nem sempre conhecemos a primitiva de  $f(x)$ , ou sua obtenção não é trivial, utilizamos métodos numéricos para entender o comportamento da função. A solução numérica de uma integral é chamada de quadratura (Pedrosa, 2005), e por nós utilizada é conhecida como regra dos trapézios.

Para entender a regra do trapézio generalizada, é necessário entender a regra dos trapézios (não generalizada). Segundo Pedrosa (2005) a ideia básica é a substituição de uma função (de interesse) por um polinômio que a aproxime razoavelmente a função em um intervalo definido em pontos igualmente espaçados, para que assim o problema passe a ser uma integração de um polinômio, o que o torna mais simples. Utiliza-se o polinômio de Newton-Gregory do 1º grau e também o erro associado.

A regra dos trapézios generalizada consiste na utilização de apenas duas abcissas separadas por uma distância  $l$  ( $l = \Delta x$ ) e um polinômio interpolador de primeiro grau, e através da fórmula de Lagrange expressar o polinômio que interpola  $f(x)$  em  $x_0$  e  $x_1$

$$f(x) \approx e_0 P_0(x) + e_1 P_1(x),$$

onde

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x - x_1, & P_1(x) &= x - x_0, \\ e_0 &= \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}, & e_1 &= \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}. \end{aligned}$$

Como se têm apenas os pontos  $x_0 = a$  e  $x_1 = b$ , então  $x_1 - x_0 = l$  e logo

$$f(x) \approx -\frac{f(x_0)}{l}(x - x_1) + \frac{f(x_1)}{l}(x - x_0).$$

Ao integrarmos em ambos os lados da integral no intervalo  $[x_0, x_1]$ , a fórmula geral para a regra dos trapézios é obtida como sendo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{l}{2} [f(x_0) + f(x_1)],$$

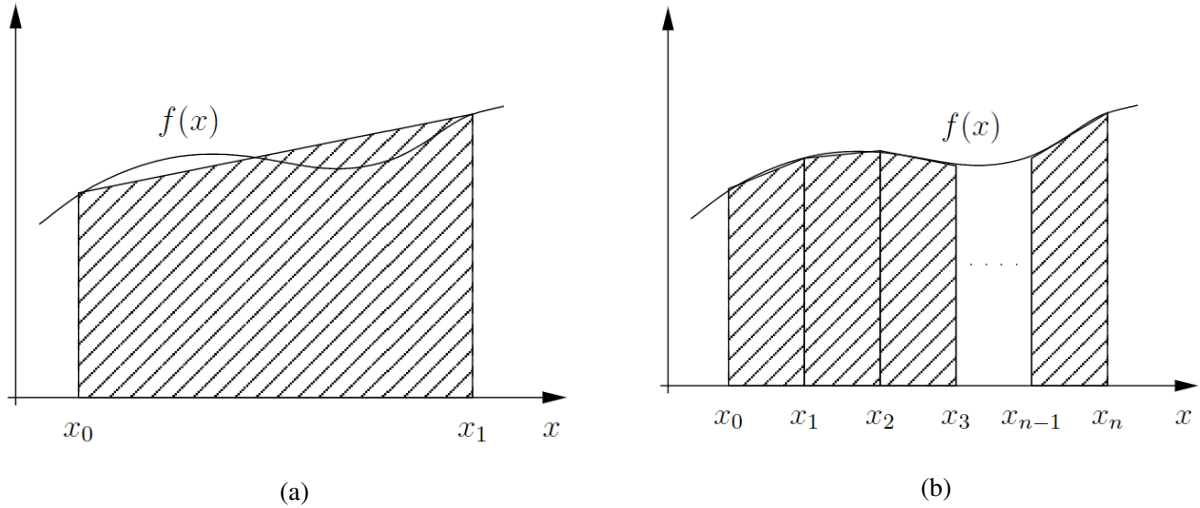
que equivale a área de um trapézio cuja altura equivale a  $l = x_1 - x_0$  e bases  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$ . Se o intervalo de integração for muito grande, também será o erro associado ao resultado fornecido pela regra dos trapézios, como pode ser visto na Figura 4.4(a). Se subdividirmos os intervalos em  $n$  pontos dentro de  $[a, b]$  e aplicarmos a regra do trapézio a cada um desses subintervalos repetidas vezes, de tal forma que  $x_{i+1} - x_i = l$ , sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , de forma simplificada, teremos (Pedrosa, 2005)

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{l}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\ &= \frac{l}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \frac{l}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \end{aligned}$$

Perceba através da Figura 4.4(b) que a realização desse processo fornece uma aproximação muito mais acurada.



Figura 4.4: Interpretação gráfica da regra dos trapézios aplicada a um intervalo delimitado.



Fonte: Pedrosa, 2005

Quando se tem uma integral dupla, o processo de obtenção das variáveis e da equação para a regra dos trapézios é similar. Considere a função  $f(x, y)$  para  $x \in [a, b]$  e  $y \in [c, d]$  em que o intervalo  $[a, b]$  são divididos em  $n$  partes e o intervalo  $[c, d]$  é dividido em  $m$  partes. Se definirmos  $l = (b - a)/n$  e  $k = (d - c)/m$  usando pontos igualmente espaçados, de forma que  $x_i = x_0 + i l$  e  $y_j = y_0 + j k$ , então a regra dos trapézios composta é dada por

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx & \frac{1}{4} \left\{ f(a, c) + f(b, c) + f(a, d) + f(b, d) \right. \\ & + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, c) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, d) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(a, y_j) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(b, y_j) \\ & \left. + 4 \sum_{j=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, y_j) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Quando substituimos  $f$  pela função do campo de velocidade média na sua forma adimensional  $\tilde{u}_{\text{med}}$ , dado pela equação (3.112), a seguinte expressão é obtida

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\text{med}} = & \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \int_0^{\tilde{d}} \int_0^{\tilde{b}} \tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{z}) dx dy \\ \approx & \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \frac{1}{4} \left\{ \tilde{u}(0, 0) + \tilde{u}(\tilde{d}, 0) + \tilde{u}(0, \tilde{b}) + \tilde{u}(\tilde{d}, \tilde{b}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{u}(\tilde{y}_j, 0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{u}(\tilde{y}_j, \tilde{b}) \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{u}(0, \tilde{z}_k) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{u}(\tilde{d}, \tilde{z}_k) + 4 \sum_{j=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{u}(\tilde{y}_j, \tilde{z}_k) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento para o campo de temperatura, substituindo  $f$  pela expressão que calcula a temperatura média do escoamento dada pela equação (3.92), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\text{med}} &= \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \frac{1}{\tilde{u}_{\text{med}}} \int_0^{\tilde{d}} \int_0^{\tilde{b}} \tilde{T}(\tilde{y}, \tilde{z}) \tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{z}) dx dy \\
&\approx \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \frac{1}{4} \left\{ \tilde{T}(0, 0) \tilde{u}(0, 0) + \tilde{T}(\tilde{d}, 0) \tilde{u}(\tilde{d}, 0) + \tilde{T}(0, \tilde{b}) \tilde{u}(0, \tilde{b}) + \tilde{T}(\tilde{d}, \tilde{b}) \tilde{u}(\tilde{d}, \tilde{b}) \right. \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{T}(\tilde{y}_j, 0) \tilde{u}(\tilde{y}_j, 0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{T}(\tilde{y}_j, \tilde{b}) \tilde{u}(\tilde{y}_j, \tilde{b}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{T}(0, \tilde{z}_k) \tilde{u}(0, \tilde{z}_k) \\
&\quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{T}(\tilde{d}, \tilde{z}_k) \tilde{u}(\tilde{d}, \tilde{z}_k) + 4 \sum_{j=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{T}(\tilde{y}_j, \tilde{z}_k) \tilde{u}(\tilde{y}_j, \tilde{z}_k) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

## 4.2 SOLUÇÃO COMPUTACIONAL

Na solução dos problemas apresentados, o método utilizado foi explorado com base na construção característica da matriz de coeficientes afim de economizar o custo computacional. Ao se montar a matriz dos coeficientes, torna-se claro que essa é do tipo *esparsa* (matriz em que a maioria dos elementos é zero), o que acaba limitando os métodos convencionais dado que esses computam todos os pontos da matriz, desperdiçando memória de cálculo para computar elementos nulos. Com base nisso, utilizamos o método da decomposição LU através de *solvers* computacionais para encontrar o valor da variável em cada ponto da malha.

A linguagem de programação utilizada foi Python, na sua versão 3.8.5. através do ambiente de desenvolvimento integrado *Spyder*. Definido os parâmetros do problema, como tamanho da malha, comprimento do passo, a expressão de diferenças finitas, e outras variáveis fixas, foram criadas matrizes nulas e preenchidas com os seus poucos elementos não nulos. Para isso, foram criados loops operacionais, intimamente ligados ao tamanho da malha, que reproduzem o padrão de preenchimento para o sistema de equações do problema. Com a matriz de resultados regida pelas condições de contorno e a matriz dos coeficientes dada pelas equações de diferenças finitas, utilizamos o solver *sparse.linalg.spsolver* do ecossistema *scipy* do Python, responsável por resolver um sistema linear esparsa do tipo  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{b}$  pode ser um vetor ou uma matriz de acordo com  $\mathbf{x}$ , para encontrar o valor do campo de velocidade. O número de pontos escolhido para a discretização da função, tanto na obtenção do campo de velocidade, quanto nas outras variáveis associadas a solução como *fRe* e *vazão*, foi  $n = 420$ . Para essa malha,  $\Delta\tilde{y} = \tilde{d}/420 = (1+\lambda)/840$  e  $\Delta\tilde{z} = \tilde{b}/420 = (1+\lambda)/840\lambda$ . Para as razões de aspecto presentes na Tabela 5.3, o maior e o menor valor de  $\Delta\tilde{y}$  são, respectivamente,  $\Delta\tilde{y} \approx 6,08 \cdot 10^{-2}$  e  $\Delta\tilde{y} \approx 2,39 \cdot 10^{-3}$ . Já para  $\Delta\tilde{z}$ , o maior e o menor são, respectivamente,  $\Delta\tilde{z} \approx 2,39 \cdot 10^{-3}$  e  $\Delta\tilde{z} \approx 1,22 \cdot 10^{-3}$ . Para fins de simulação, com base nas equações apresentadas e nos resultados obtidos conseguimos determinar que o erro geral associado ao nosso problema durante a simulação é de ordem três, sendo essa atingida na simulação numérica.

Para a solução das propriedades integrais foram utilizados loops do tipo *for*, que são res-

ponsáveis por repetir determinadas operações dentro de um intervalo de procedimentos pré-determinado que utilizavam a mesma quantidade de pontos que foi utilizada na discretização do campo de velocidade. Como na equação (4.20), as linhas de código foram separadas em 3 conjuntos: o primeiro que engloba a soma dos 4 primeiros termos que representa a função aplicada nos extremos do domínio, o segundo que contempla a soma de todos os somatórios que são multiplicados por 2 e o último composto pelo somatório duplo.

Para a determinação do campo de temperatura, o procedimento adotado foi o mesmo. Com a equação governante adimensionalizada, foi tomada sua correspondente discreta pelo método das diferenças finitas, a matriz esparsa foi resolvida e o campo de temperatura foi obtido. Os valores de temperatura média foram obtidos através das soluções integrais e a partir de seu valor, conforme a equação (3.123) descrita na seção 3.9.2 obtivemos os valores de  $Nu$ . Para cada vetor temperatura, o valor máximo de sua variável foi extraído utilizando a função interna do Python `numpy.max()`.

O programa padrão utilizado para a determinação de todas as variáveis pode ser visto no Apêndice III. Para a geração dos gráficos, foram geradas variações desse programa incorporando dentro de *loops* do tipo *for*, onde as variáveis como  $\lambda$  ou  $Co$  foram transformadas em *array* (estruturas de dados semelhantes às listas cujo os conteúdos são números inteiros ou fracionados) e sua correspondente dentro do loop importava a variável dentro da lista, simulava a rotina e por fim retornava o gráfico para a determinada variável, repetindo esse processo para a próxima variável até que o programa utilizasse como variável o elemento final da lista.

Durante as simulações, uma tentativa de uniformização do tamanho dos erros numéricos, padronizando o comprimento das diferenças entre os pontos de  $x$  e  $y$ , porém alguns erros foram gerados e o resultado numérico, para valores de  $\lambda$  diferentes de 0,5 e 1,0 os valores de Nusselt foram muito distante dos valores esperados. Dentre as considerações, acreditamos que a propagação de erros dentro das equações com valores de  $\delta$  foram superiores aos valores que minimizam os erros. Assim, os autores desse trabalho recomendam uma análise desse problema para a modelagem fixando o comprimento do erro.

### 4.3 CONFIGURAÇÕES DE SOFTWARE E HARDWARE

O software utilizado para desenvolvimento da simulação foi o Spyder. O Spyder é um ambiente científico gratuito e de código aberto escrito em Python, para Python e projetado por e para cientistas, engenheiros e analistas de dados. Ele apresenta uma combinação exclusiva da funcionalidade avançada de edição, análise, depuração e criação de perfil de uma ferramenta de desenvolvimento abrangente com a exploração de dados, execução interativa, inspeção profunda e recursos de visualização bonitos de um pacote científico. A versão do Spyder utilizada foi a 4.1.5 com o Python na versão 3.8. Para as simulações, foram dadas prioridade máxima no gerenciador de tarefas do windows.

Quanto ao hardware, a máquina é composta por um processador Intel Core i7 9700KF 3.60 GHz (4.90GHz Max Turbo), 9ª Geração, 8-Core 8-Thread, LGA 1151, BX80684I79700KF. O processador é resfriado por um Water Cooler PCyes Sangue Frio 2, 120mm. A placa mãe é da Asus modelo TUF B360M-Plus Gaming/BR, Chipset B360, Intel LGA 1151, mATX, DDR4. A configuração é composta por um par de memória DDR4 Kingston HyperX Fury, 8GB 3000MHz, modelo HX430C15FB3/8 e outra de mesma configuração modelo HX430C15FB3A/8 instaladas em dual channel paralelo. Por fim, os programas utilizados estão instalados em uma unidade de memória SSD da marca WD série Black SN750, 500GB, M.2, NVMe, Leitura 3430MB/s, Gravação 2600MB/s modelo WDS500G3X0C.

## 5 RESULTADOS

As soluções gráficas nessa seção tem como objetivo descrever melhor o problema, buscando exemplificar visualmente como o objeto de estudo se comporta mediante a variação de algumas características do mesmo. Podemos citar como exemplo o efeito da combinação entre o gradiente de pressão e o movimento de Couette (aplicação de um cisalhamento externo) no escoamento que alteram as linhas de corrente, o fator de atrito de Fanning que reduz a perda de pressão ao longo do escoamento com a variação das razões de aspecto, entre outros. Conforme visto na seção 4.2, os resultados para o campo de velocidade e do campo de temperatura foram gerados utilizando uma malha de  $420 \times 420$  e a seção se inicia com a validação numérica da solução computacional para as propriedades termo-físicas desse escoamento.

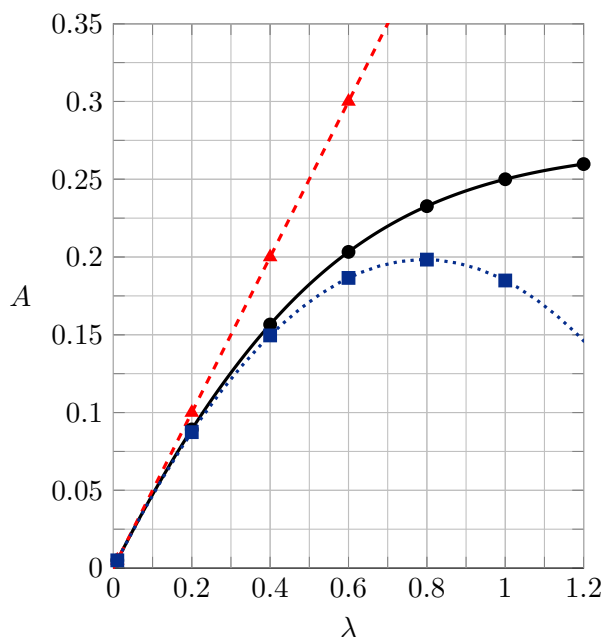
### 5.1 ANÁLISE COMPARATIVA COM OS RESULTADOS OBTIDOS POR ROWELL & FYNLANSON

A partir das expressões obtidas analiticamente e numericamente, foi possível obter os resultados das equações governantes. Alguns dos resultados obtidos foram comparados com resultados já existentes na literatura, para assim, termos a validação dos modelos utilizados.

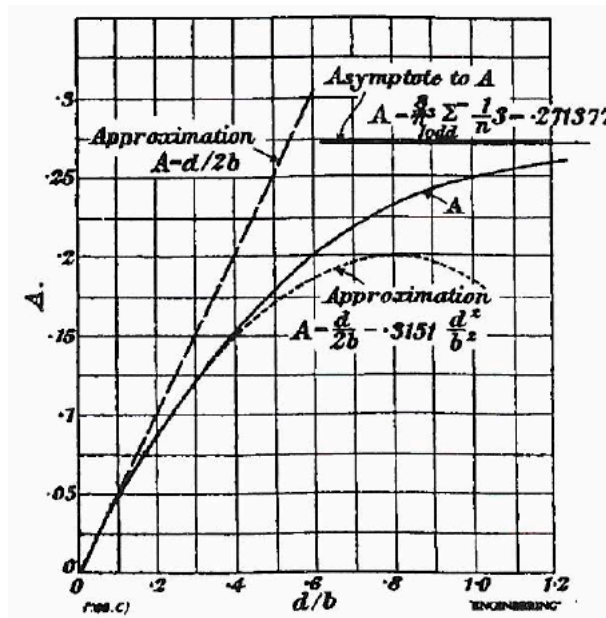
Uma das comparações realizadas foi em relação aos resultados obtidos por Rowell e Finlayson (1928). Partindo da solução originalmente desenvolvida pelos autores, em que criaram uma expressão para a velocidade do escoamento  $u$  que perfeitamente aproximava a solução do escoamento do estudo, os autores geraram algumas curvas das variáveis que compõem a vazão afim de obter alguns resultados graficamente, sendo elas  $A$  e  $B$ .

Para validarmos a nossa solução numérica, na qual baseia-se no modelo proposto Rowell e Finlayson, recriaremos os mesmos gráficos gerados pelos autores. O objetivo é verificar se os resultados obtidos numericamente através do programa são compatíveis com o obtido pelos autores. Portanto, foram geradas as curvas das variáveis simplificadoras  $A$  e  $B$ , ambas em relação a razão de aspecto  $\lambda$ , como segue:

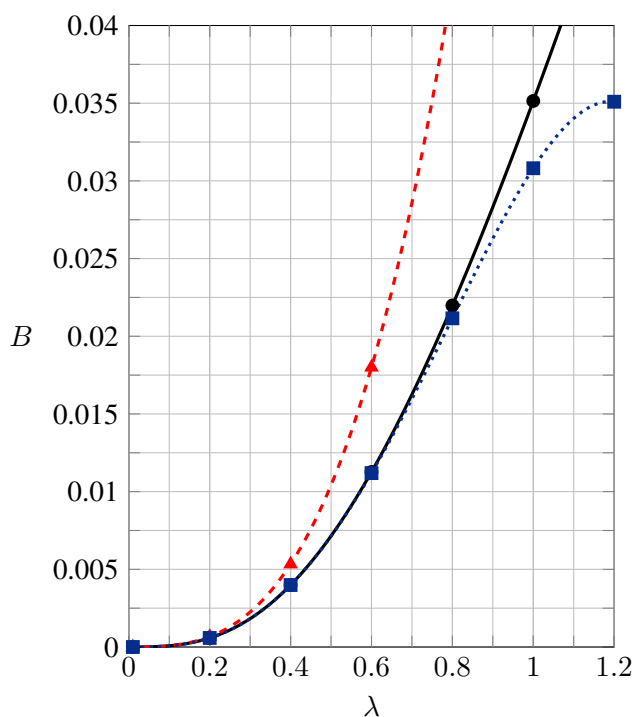
Figura 5.1: Comparação entre os resultados obtidos para a variável A, velocidade média e máxima em função da razão de aspecto  $b/a$ , (a) utilizando o método de diferenças finitas com o auxílio de um programa computacional para a solução, onde  $\text{---} A = A$ ,  $\text{- - -} A = \lambda/2$  e  $\text{.....} A = \lambda/2 - 0,3151\lambda^2$  (b) valores da literatura obtidos por Rowell e Finlayson, onde  $\bullet A = A$ ,  $\blacktriangle A = \lambda/2$  e  $\blacksquare A = \lambda/2 - 0,3151\lambda^2$ , (c) utilizando o método de diferenças finitas com o auxílio de um programa computacional para a solução, onde  $\text{---} B = B$ ,  $\text{- - -} B = \lambda^3/12$  e  $\text{.....} B = \lambda^3/12 - 0,05252\lambda^4$  (d) valores da literatura obtidos por Rowell e Finlayson, onde  $\bullet B = B$ ,  $\blacktriangle B = \lambda^3/12$  e  $\blacksquare B = \lambda^3/12 - 0,05252\lambda^4$ .



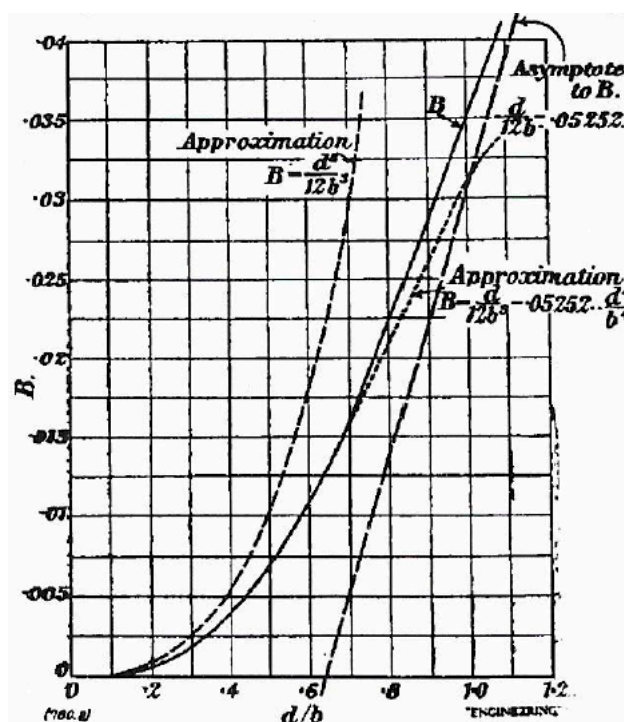
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: (a) & (c) Próprios autores, (b) & (d) Rowell e Finlayson, 1928

Os valores em comparação aos obtidos pelos autores podem ser verificados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Valores de  $A$ ,  $B$  e  $A/B$  para diferentes valores de  $\lambda$ .

$\lambda$	$A$		$B$		$A/B$	
	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
0,013	0,00636	0,00632	$10^{-7} \cdot 1,7178$	$10^{-7} \cdot 1,7061$	37030,0	37045,6
0,016	0,00800	0,00793	$10^{-7} \cdot 3,4123$	$10^{-7} \cdot 3,3789$	23440,0	23466,0
0,019	0,00954	0,00944	$10^{-7} \cdot 5,7990$	$10^{-7} \cdot 5,7268$	16450,0	16491,0
0,030	0,01491	0,01492	$10^{-6} \cdot 2,2876$	$10^{-6} \cdot 2,2824$	6519,0	6535,9
0,125	0,05772	0,05826	$10^{-4} \cdot 1,5020$	$10^{-4} \cdot 1,4994$	384,2	388,5
0,221	0,09545	0,09711	$10^{-4} \cdot 7,7066$	$10^{-4} \cdot 7,7063$	123,9	126,0
0,350	0,13812	0,14167	$10^{-3} \cdot 2,7785$	$10^{-3} \cdot 2,7785$	49,72	50,9
0,500	0,18000	0,18240	0,0071	0,0071	25,36	25,52
0,512	0,18295	0,18522	0,0076	0,0076	24,06	24,36
0,733	0,22627	0,22445	0,0181	0,0181	12,53	12,42
1,000	0,24820	0,25000	0,0352	0,0352	7,062	7,113
1,460	—	0,26617	0,0707	0,0702	—	3,792
2,199	—	0,27086	0,1314	0,1308	—	2,071

Fonte: Próprios autores, 2021

Como pode-se observar nas Figuras 5.1(a) e 5.1(c), o resultado obtido e modelo utilizado estão muito próximos para todas as variações indicadas de  $A$  e  $B$ . Para avaliar de maneira mais precisa, a Tabela 5.1 apresenta os valores em pontos específicos de  $\lambda$ , podendo ver desta forma que os resultados do nosso modelo são muito próximos aos obtidos por Rowell e Finlayson (1928). Para que possamos ter uma visão qualitativa disso, calculamos o erro relativo entre os resultados obtidos nesse trabalho e no estudo de Rowell e Finlayson.

Tabela 5.2: Erro relativo entre os resultados numéricos e analíticos de  $A$ ,  $B$  e  $A/B$ .

$\lambda$	Erro relativo		
	$A$	$B$	$A/B$
0,013	0,6534 %	0,6799 %	0,0422 %
0,016	0,8758 %	0,9784 %	0,1108 %
0,019	1,0371 %	1,2451 %	0,2490 %
0,030	0,0513 %	0,2265 %	0,2592 %
0,125	0,9323 %	0,1745 %	1,1318 %
0,221	1,7362 %	0,0040 %	1,7033 %
0,350	2,5699 %	0,0003 %	2,5501 %
0,500	1,3303 %	0,6521 %	0,6425 %
0,512	1,2400 %	0,0003 %	1,2597 %
0,733	0,8062 %	0,0007 %	0,8384 %
1,000	0,7246 %	0,0448 %	0,7292 %
1,460	—	0,6927 %	—
2,199	—	0,4057 %	—

Fonte: Próprios autores, 2021

Na Tabela 5.2 podemos visualizar os erros relativos de cada variável, sendo elas  $A$ ,  $B$  e  $A/B$ . Note que os erros associados as diferenças dos valores obtidos para cada variável podem ser considerados baixos, sendo que o maior erro relativo obtido foi para a variável  $A$  quando  $\lambda = 0,347$  e equivale a aproximadamente 2,57%, o que mostra que os resultados do modelo numérico não diferem tanto em relação ao analítico. Como a última variável da tabela é uma razão entre as duas primeiras, o erro associado é propagado, porém inferior ao máximo valor encontrado para o erro associado a  $A$ .

## **5.2 COMPARAÇÃO DAS PROPRIEDADES DO ESCOAMENTO COM DADOS DA LITERATURA**

Para a validação da rotina computacional, foram calculadas três propriedades do escoamento: o produto entre o fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds, a razão entre as velocidades máxima e média e o Número de Nuseelt para distintos valores de razão de aspecto  $\lambda$ .

A Tabela 5.3 apresenta os resultados numéricos, obtidos através da equação (3.114), e os analíticos, extraídos de Shah e London(1978), de  $fRe$  para o caso em que  $Co = 0$  e para distintas razões de aspecto  $\lambda$ . Os resultados numéricos foram obtidos para uma malha de  $420 \times 420$ , o que corresponde a variável  $n$  da rotina computacional.



Tabela 5.3:  $fRe$  para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  em um canal retangular.

$fRe$ para $Co = 0$			
Shah & London (1978)		Solução computacional - $n = 420$	
$\lambda$	$fRe$	$\lambda$	$fRe$
1,000	14,2271	1,000	14,2273
0,900	14,2610	0,900	14,2613
0,833	14,3281	0,833	14,3284
0,800	14,3778	0,800	14,3781
0,750	14,4757	0,750	14,4760
0,714	14,5648	0,714	14,5651
0,700	14,6054	0,700	14,6057
0,667	14,7118	0,667	14,7121
0,600	14,9710	0,600	14,9803
0,500	15,5481	0,500	15,5484
0,400	16,3681	0,400	16,3685
0,333	17,0897	0,333	17,0901
0,300	17,5121	0,300	17,5125
0,250	18,2328	0,250	18,2333
0,200	19,0705	0,200	19,0711
0,167	19,7022	0,167	19,7030
0,143	20,1931	0,143	20,1939
0,125	20,5846	0,125	20,5856
0,111	20,9039	0,111	20,9049
0,100	21,1689	0,100	21,1701
0,083	21,5833	0,083	21,5847
0,067	22,0189	0,067	22,0206
0,050	22,4770	0,050	22,4793
0,020	23,3625	0,020	23,3681

Fonte: Shah e London, 1978 e Próprios autores, 2021

Calculando todos os erros relativos entre os resultados analíticos e numéricos podemos perceber que o maior erro relativo é inferior a 0,0622%, sendo tal valor máximo encontrado para  $\lambda$  igual a 0,6. Portanto, concluímos que os valores são muito próximos.

Tabela 5.4:  $fRe$  para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  em um canal retangular. Os valores apresentados abaixo do trabalho de Ahmed (2006) são aproximações extraídas da Figura 5 de seu artigo, para  $Ha = 0$  e  $n = 1,0$

Ahmed		Solução computacional - $n = 420$	
$\lambda$	$fRe$	$\lambda$	$fRe$
1,0	14,4698	1,0	14,2273
0,5	15,6553	0,5	15,5484
0,2	19,1729	0,2	19,0711

Fonte: Ahmed, 2006 e Próprios autores, 2021

Na Tabela 5.4  $Ha$  é o número de Hartmann, definido no estudo de Ahmed (2006) apresentado

na Figura 5 de seu artigo. Outro parâmetro utilizado para a validação dos resultados numéricos foi a razão entre os valores de  $u_{\max}/u_{\text{med}}$  para diferentes valores de  $\lambda$ , também apresentados por Shah e London (1978). Calculando todos os erros relativos entre os resultados analíticos e numéricos podemos perceber que o maior erro relativo é inferior a 1,676%, sendo tal valor máximo encontrado para lambda igual a 1,0. Portanto, concluímos que os valores são muito próximos.

Tabela 5.5: Razão das velocidades máximas e médias de acordo com a razão de aspecto em um escoamento laminar e totalmente desenvolvido.

Razão entre as velocidades máxima e média			
Shah & London (1978)		Solução computacional - $n = 420$	
$\lambda$	$\tilde{u}_{\max}/\tilde{u}_{\text{med}}$	$\lambda$	$\tilde{u}_{\max}/\tilde{u}_{\text{med}}$
1,000	2,0962	1,000	2,0963
0,750	2,0774	0,750	2,0774
0,500	1,9918	0,500	1,9918
0,400	1,9236	0,400	1,9236
0,250	1,7737	0,250	1,7737
0,167	1,6758	0,167	1,6758
0,125	1,6283	0,125	1,6283
0,100	1,6009	0,100	1,6010
0,050	1,5488	0,050	1,5490

Fonte: Shah e London, 1978 e Próprios autores, 2021

Com os resultados expostos podemos considerar que o programa está validado e apto a determinar o campo de velocidade para as condições propostas. Note que todas as variáveis apresentadas nesta seção estão intimamente ligadas a determinação do campo de velocidade no processo de obtenção do seus valores, como a  $\tilde{u}_{\text{med}}$  presente na determinação de  $fRe$  por exemplo. Calculando todos os erros relativos entre os resultados analíticos e numéricos podemos perceber que o maior erro relativo é inferior a 0,013%, sendo tal valor máximo encontrado para lambda igual a 0,05. Portanto, concluímos que os valores são muito próximos.

A variável  $Nu$  nos permitirá comparar resultados numéricos obtidos a partir do cálculo do campo de temperatura com resultados pré-existent na literatura. Um baixo erro relativo desses resultados indica o grau de precisão que nossa rotina apresenta durante a determinação do campo de temperatura. A Tabela 5.6 foi gerada a partir de resultados obtidos através da equação (3.125) e dos valores presentes em Syrjälä (1996) para  $Co = 0$  e a Tabela 5.7 apresenta os valores extraídos de Shah e London (1978). Nelas podemos visualizar a comparação entre os resultados numérico e analítico.

Tabela 5.6: Nusselt para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  em um canal retangular. Os valores analíticos apresentados abaixo foram retirados do trabalho de Syrjälä (1996).

$\lambda$	Nusselt	
	Numérico $n = 420$	Syrjala (1996)
0,1	6,7843	6,7850
0,2	5,7374	5,7377
0,5	4,1232	4,1233
1,0	3,6078	3,6080

Fonte: Syrjälä (1996) e Próprios autores, 2021

Através da equação (3.127), os valores de  $Nu_{H1}$  foram determinados e extraídos de Shah e London. Os resultados analíticos possuem acurácia de seis dígitos com precisão de  $\pm 0,03\%$ .

Tabela 5.7:  $Nu$  para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  em um canal retangular.

$Nu$ para $Co = 0$			
Shah & London (1978)		Solução computacional - $n = 420$	
$\lambda$	$Nu_{H1}$	$\lambda$	$Nu$
1,000	3,60795	1,000	3,60783
0,900	3,62045	0,900	3,62034
0,833	3,64531	0,833	3,64546
0,800	3,66382	0,800	3,66370
0,750	3,70052	0,750	3,70039
0,714	3,73419	0,714	3,73437
0,700	3,74961	0,700	3,74948
0,667	3,79033	0,667	3,78976
0,600	3,89456	0,600	3,89442
0,500	4,12330	0,500	4,12315
0,400	4,47185	0,400	4,47168
0,333	4,79480	0,333	4,79642
0,300	4,98989	0,300	4,98966
0,250	5,33106	0,250	5,33080
0,200	5,73769	0,200	5,73736
0,167	6,04946	0,167	6,04578
0,143	6,29404	0,143	6,29207
0,125	6,49033	0,125	6,48983
0,111	6,65106	0,111	6,65181
0,100	6,78495	0,100	6,78433
0,083	6,99507	0,083	6,99861
0,067	7,21683	0,067	7,21132
0,050	7,45083	0,050	7,44967
0,020	7,90589	0,020	7,90283

Fonte: Shah e London, 1978 e Próprios autores, 2021

Tabela 5.8: Valores de  $Nu$  para um escoamento de Poiseuille ( $Co = 0$ ) para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  e tamanho de malha  $n$ .

$Nu$ para $Co = 0$						
$\lambda$	Shah & London	Solução computacional				
		$n = 420$	$n = 700$	$n = 900$	$n = 1100$	$n = 1500$
1,000	3,60795	3,60783	3,60791	3,60793	3,60793	3,60794
0,700	3,74961	3,74948	3,74957	3,74958	3,74959	3,74960
0,500	4,12330	4,12315	4,12325	4,12327	4,12328	4,12329
0,200	5,73769	5,73736	5,73758	5,73762	5,73765	5,73767
0,067	7,21683	7,21132	7,21193	7,21207	7,21214	7,21220

Fonte: Shah e London, 1978 e Próprios autores, 2021

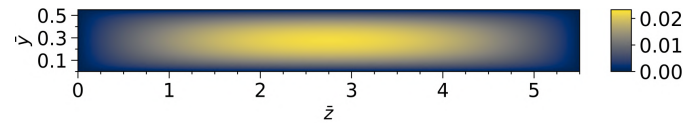
A Tabela 5.8 apresenta os valores determinados para o número de Nusselt para diferentes tamanhos de malha e comparados aos resultados analíticos presentes em Shah e London. Note que mesmo uma malha de tamanho dobrado da malha inicialmente utilizada, a precisão do resultado é aumentada em apenas uma casa decimal. Mesmo para valores que representam o triplo do valor inicial, a precisão de cinco casas recolhidas da literatura é alcançada, apesar dos valores serem muito próximos e o erro ser de apenas 0,00035% para  $\lambda \geq 0,1$ . Nas análises realizadas, percebeu-se que a precisão de cinco casas decimais para os valores de Nusselt correspondentes aos valores de  $\lambda$  extraídos de Shah e London equivalia a uma malha de  $n \geq 1900$ . O erro para valores próximos de zero é maior dada a condição de canal infinitamente largo, que por definição, gera uma propagação de erros nas variáveis dimensionais e na determinação das propriedades.

Para a malha utilizada ( $420 \times 420$ ) e seguindo os mesmo parâmetros utilizados, os valores numéricos e analíticos foram bastante próximos (erro relativo máximo menor que 0,076%, considerados pequenos suficientes pelos autores. O erro máximo para  $\lambda$  igual a 0,067). E portanto, nosso modelo pode ser validado.

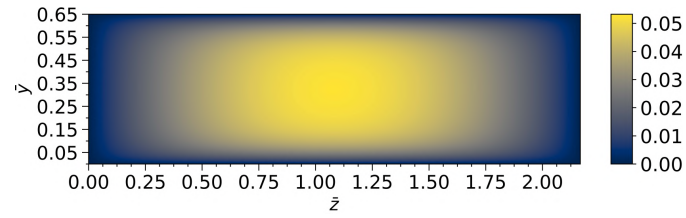
### 5.3 CAMPO DE VELOCIDADE

Com o modelo numérico obtido através do método das diferenças finitas, foram gerados graficamente o campo de velocidade dos escoamentos do estudo: o escoamento de Poiseuille e o de Couette-Poiseuille. Como informado na seção 3.9, a maneira como adimensionalizamos as equações governantes do problema não nos permite a obtenção de resultados numéricos que representem precisamente um escoamento em que não há a presença de um gradiente de pressão. Todavia, conforme veremos adiante, podemos nos aproximar graficamente desse escoamento. Os resultados para um número de Couette igual a 0 e 0,07 podem ser vistos nas Figuras 5.2 e 5.3, respectivamente.

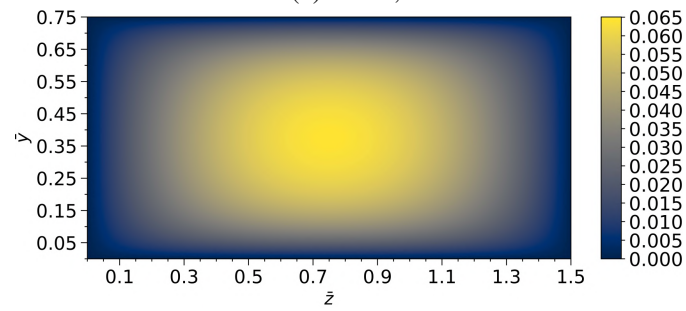
Figura 5.2: Perfil de velocidades obtido para  $Co = 0$  e variando a razão de aspecto  $\lambda$  do canal, para:



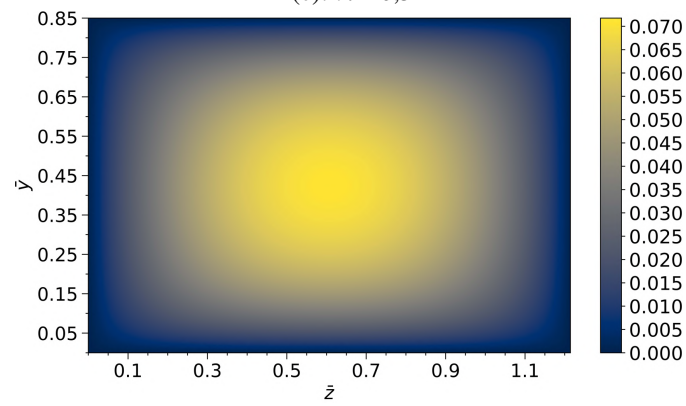
(a):  $\lambda = 0,1$



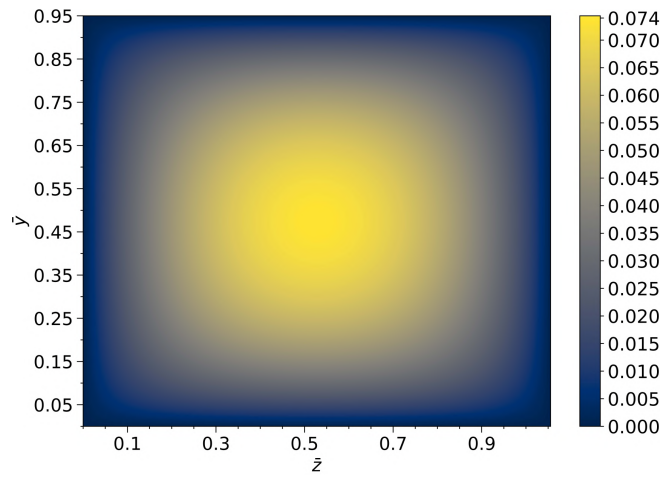
(b):  $\lambda = 0,3$



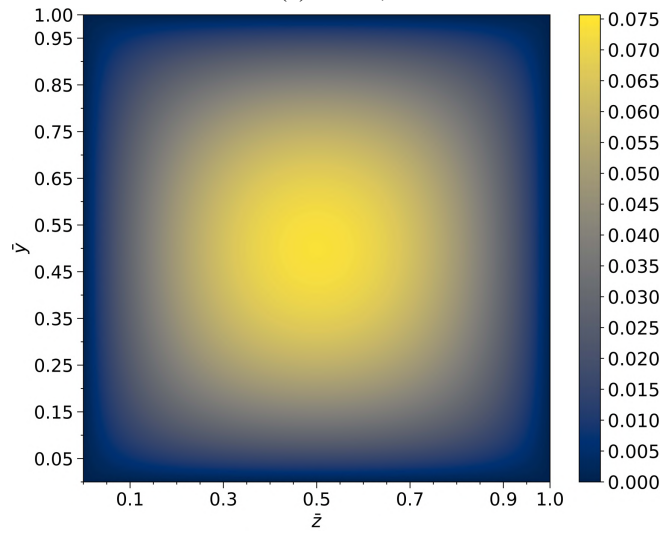
(c):  $\lambda = 0,5$



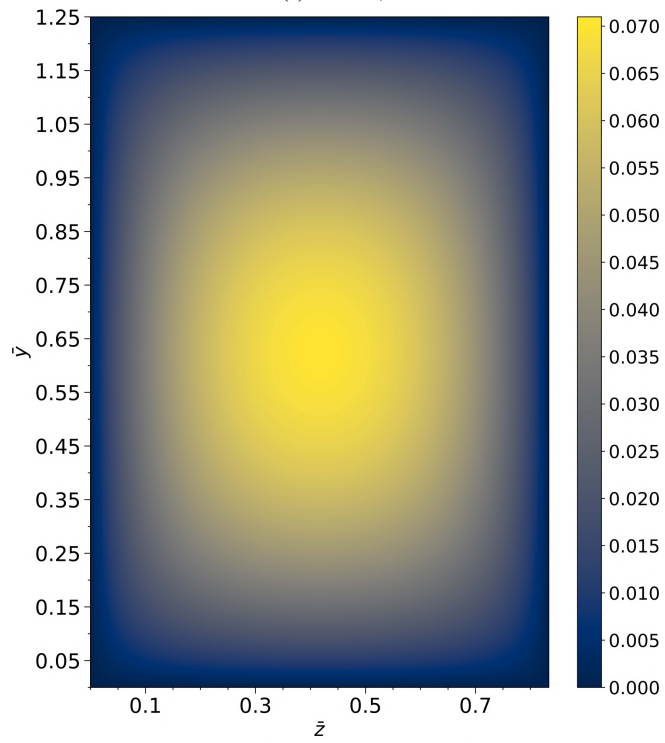
(d):  $\lambda = 0,7$



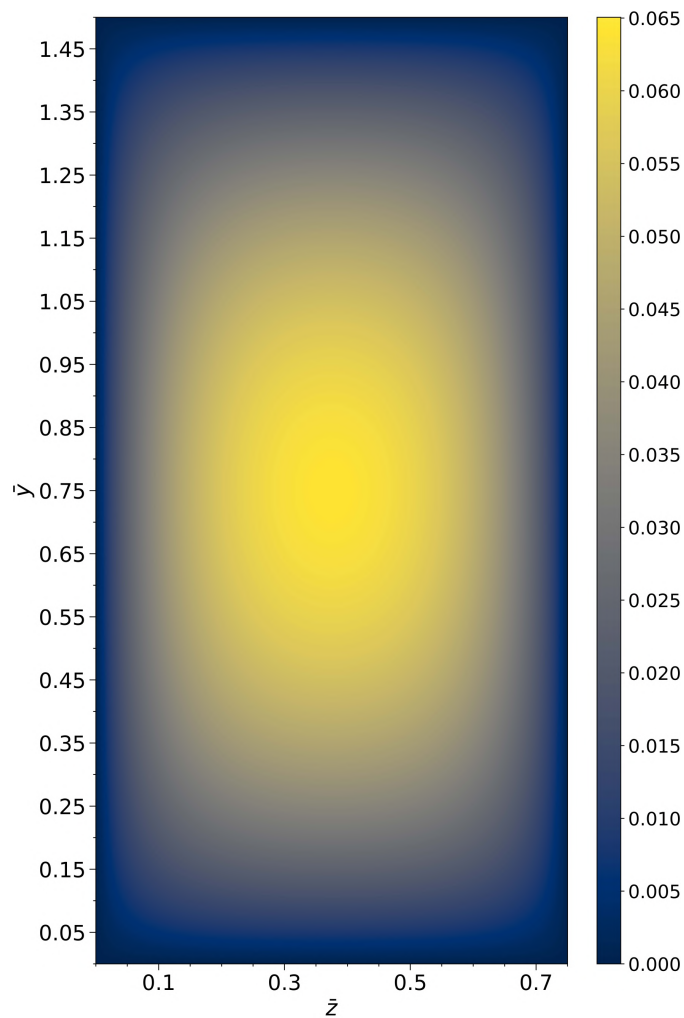
(e):  $\lambda = 0,9$



(f):  $\lambda = 1,0$



(g):  $\lambda = 1,5$



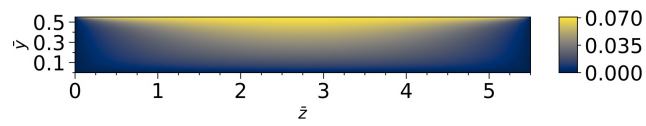
(h):  $\lambda = 2,0$

Fonte: Próprios autores, 2021

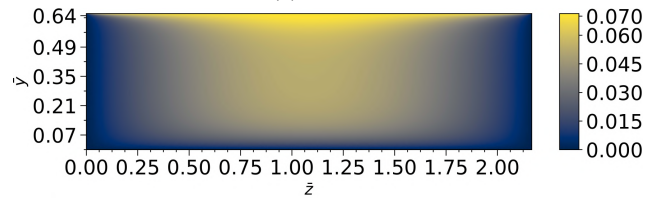
A Figura 5.2 apresenta o escoamento de Poiseuille. Como esperado, as velocidades são simétricas e mais intensas no centro geométrico do canal. Apesar de sempre simétrico, quanto maior a razão de aspecto, maior é o valor da velocidade máxima e mais perceptível se torna o alinhamento do escoamento com a simetria do canal. A velocidade mais intensa está sempre presente no centro geométrico do canal para qualquer valor de  $\lambda$  já que esse é o ponto mais distante de qualquer parede. Para  $\lambda = 1$ , temos um escoamento perfeitamente simétrico nas direções  $y$  e  $z$ . Conforme  $\lambda$  cresce, vemos um aumento no comprimento das paredes laterais do canal e o campo de velocidade mantém-se no centro geométrico do canal com uma região de espalhamento de velocidades intermediárias para esse número de  $Co$  bem extensa. Resultados para  $\lambda = 5$  podem ser vistos no Apêndice II.1. Conforme é aplicado um cisalhamento externo ao escoamento (Figura 5.3), o perfil de velocidades apresenta características mistas dos escoamentos de Couette e Poiseuille. É curioso observar que, para um mesmo número de  $Co$ , a infusão das linhas de isovelocidades são mais intensas ao longo da altura do canal e se torna mais expressivo com o aumento de  $\lambda$ , ilustrando mais claramente a influência da velocidade da placa e do gradiente de pressão no

escoamento.

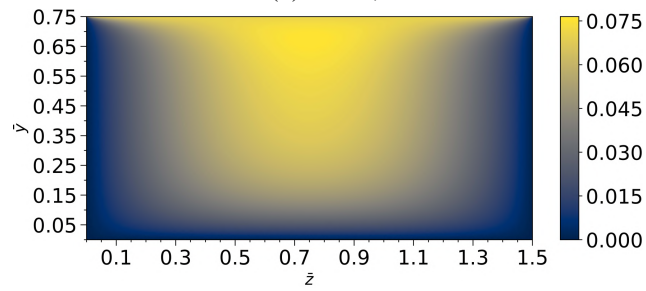
Figura 5.3: Perfil de velocidades obtido para  $Co = 0,07$  e variando a razão de aspecto  $\lambda$  do canal, para:



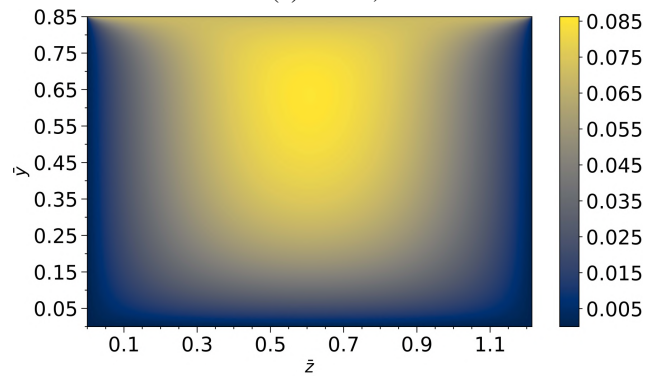
(a):  $\lambda = 0,1$



(b):  $\lambda = 0,3$

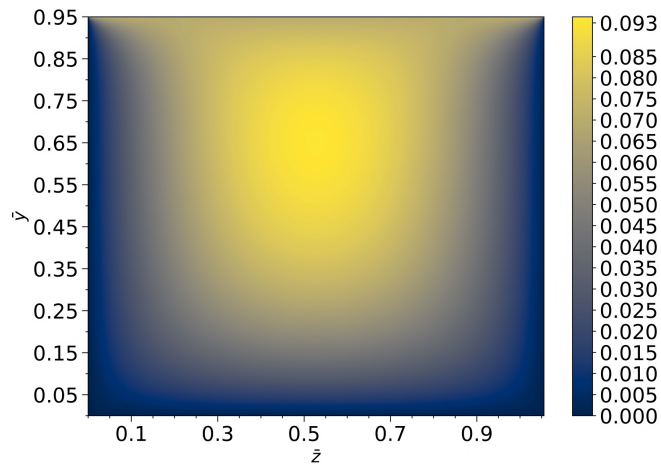


(c):  $\lambda = 0,5$

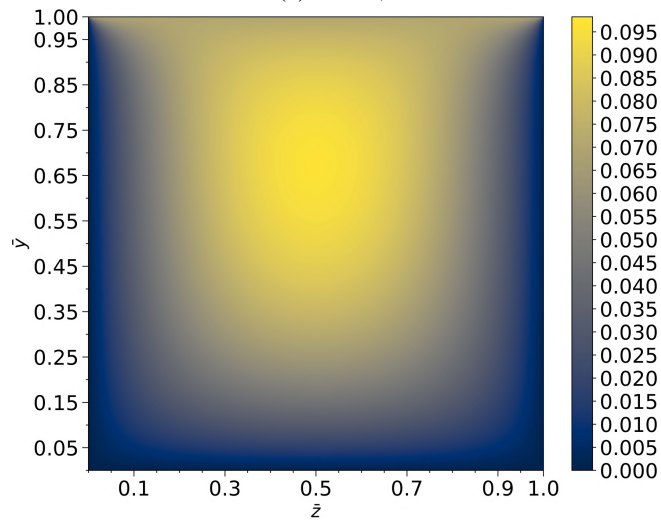


(d):  $\lambda = 0,7$

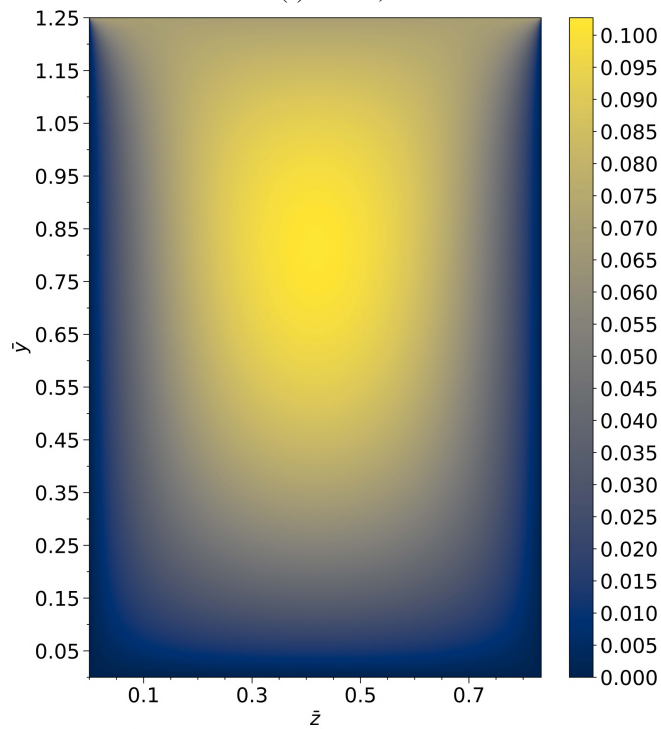




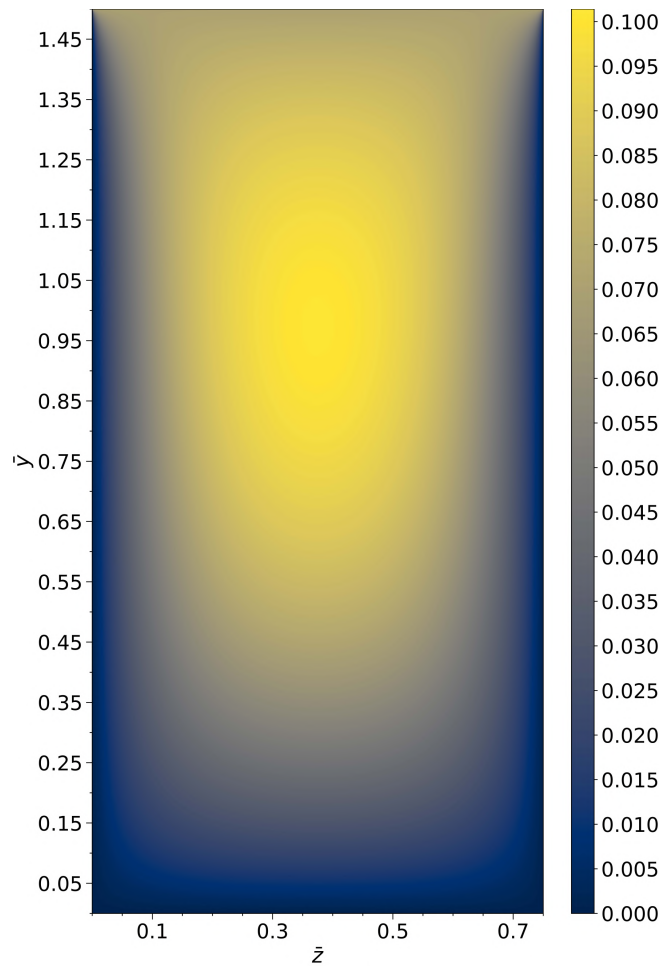
(e):  $\lambda = 0,9$



(f):  $\lambda = 1,0$



(g):  $\lambda = 1,5$



(h):  $\lambda = 2,0$

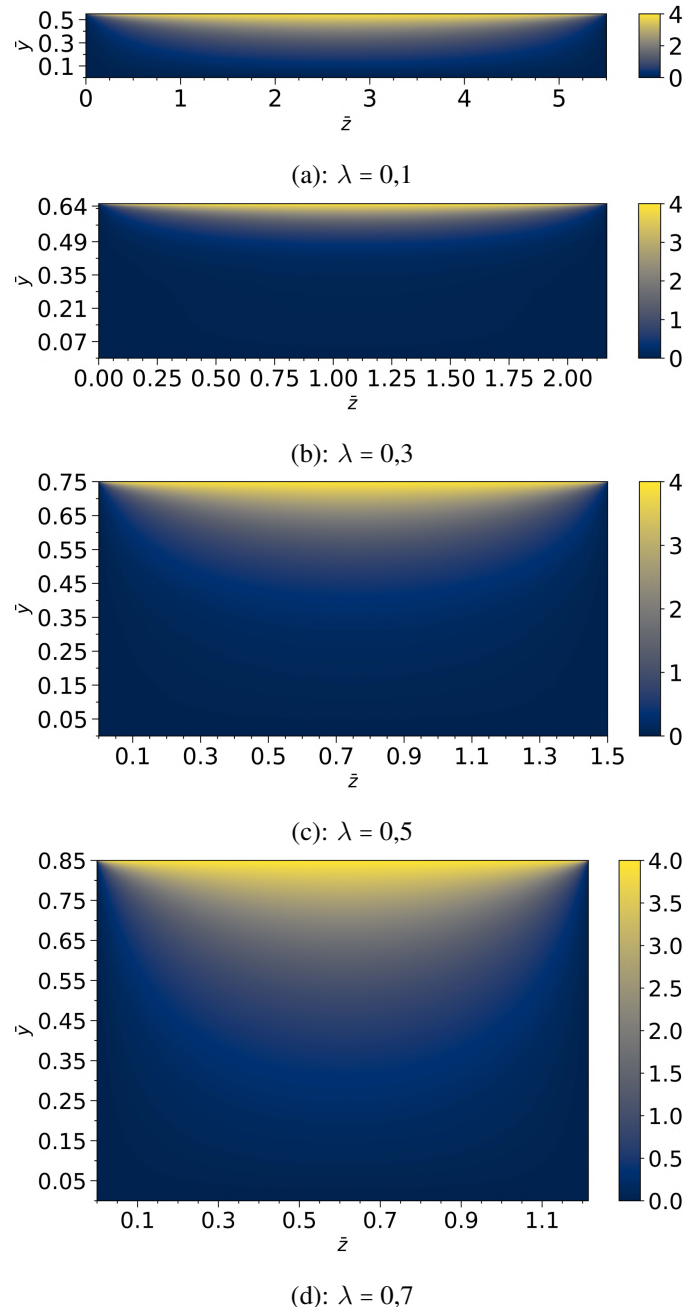
Fonte: Próprios autores, 2021

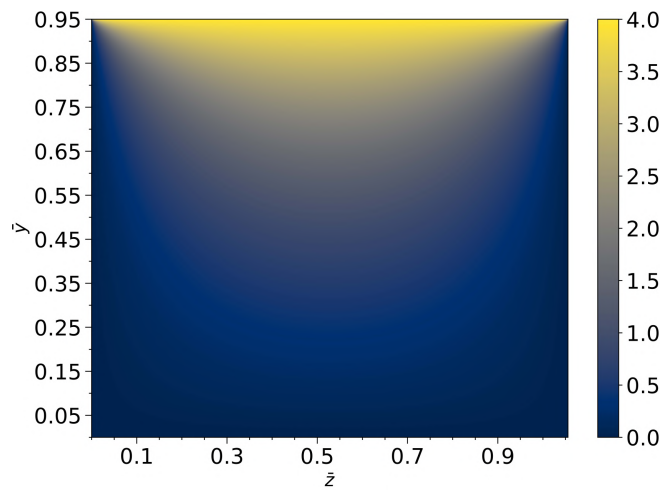
Perceba que a combinação do gradiente de pressão e do cisalhamento causado no escoamento geram uma grande região de espalhamento do movimento do fluido, que se torna mais expressivo com o aumento de  $\lambda$ . A região mais intensa de velocidade do escoamento encontra-se em uma região entre o topo e o centro geométrico, apresentando um valor mínimo de intensidade máxima igual ao número de Couette, inicialmente localizado no topo do canal ( $y = 0$ ), onde o escoamento assume a condição de não escorregamento e é modificado pela relevância do gradiente de pressão dentro do canal quando  $\lambda$  aumenta durante o movimento do fluido. Isso faz com que a intensidade máxima do escoamento aumente e sua posição dentro do canal seja alterada. As linhas de isovelocidades ocupam uma área expressiva do canal, onde as regiões próxima das paredes laterais e fundo do canal, dada a condição de não escorregamento, geram uma região expressiva de velocidades nulas. Note que mesmo para valores de  $\lambda > 1,0$ , a característica evolutiva do escoamento é mantida e temos cada vez mais uma região maior de velocidades expressivas (vide Apêndice II.1).

Conforme constatado em nossos estudos, os perfis de velocidade para números de Couette maiores que 4,0, embora apresentem uma vasta diferença em intensidade, em muito se asseme-

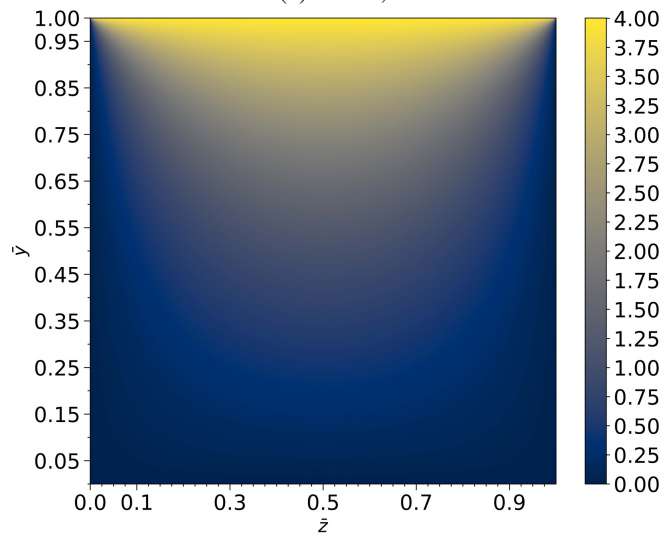
lham. É possível notar um perfil claramente caracterizado pelo escoamento plano de Couette. Isso indica que para valores do número de Couette relativamente altos, a influência do gradiente de pressão no escoamento não é muito significativa e esse passa a ser regido pela força de cisalhamento. As representações gráficas para os campo de velocidade do escoamento para o número de  $Co$  igual a 4,0 e diferentes razões de aspecto podem ser vistas na Figura 5.4, onde variamos a razão de aspecto do canal  $\lambda$  para a comparação das linhas de corrente características.

Figura 5.4: Perfil de velocidades obtido para  $Co = 4,0$  e variando a razão de aspecto  $\lambda$  do canal, para:

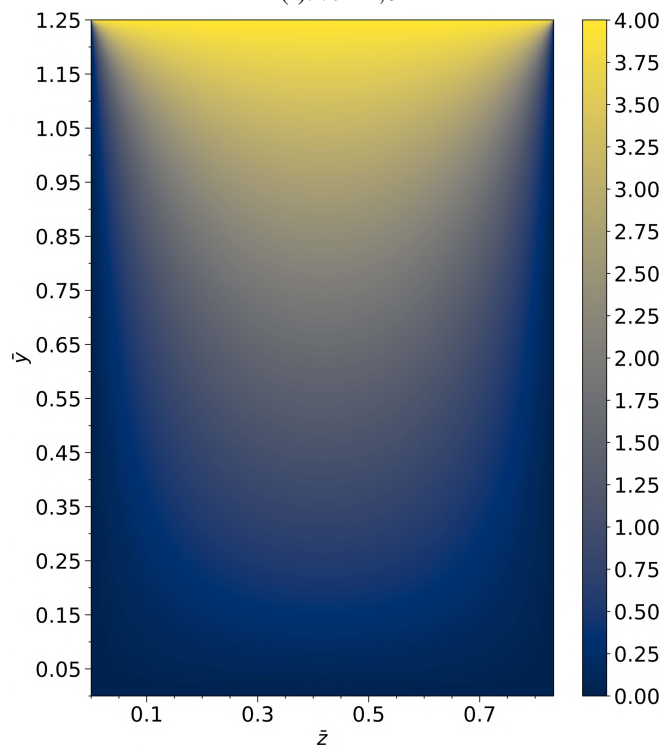




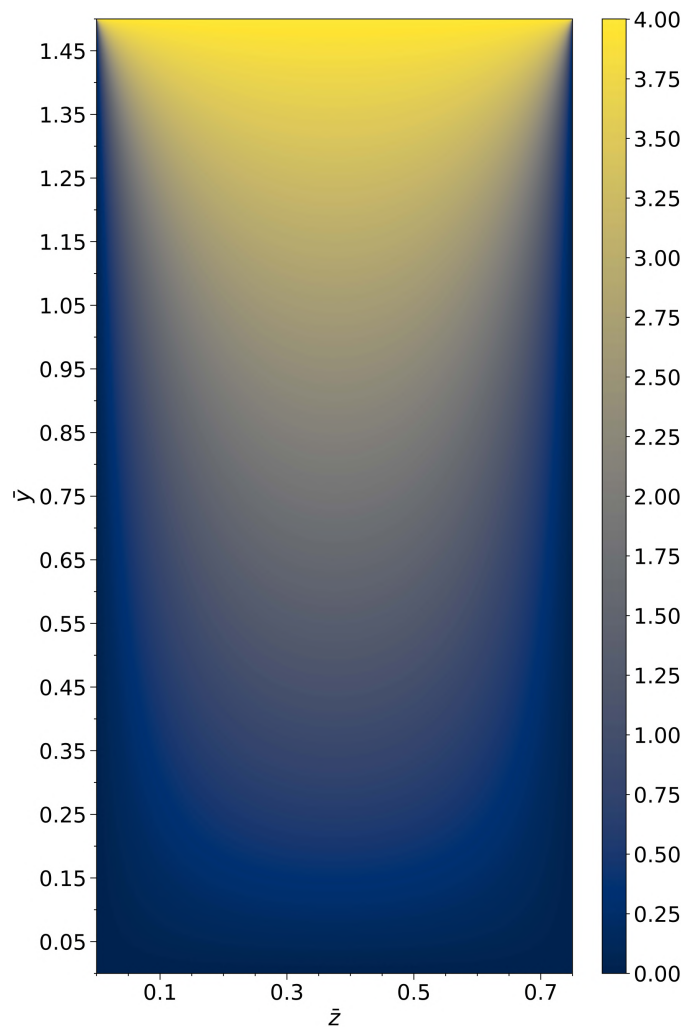
(e):  $\lambda = 0,9$



(f):  $\lambda = 1,0$



(g):  $\lambda = 1,5$



(h):  $\lambda = 2,0$

Fonte: Próprios autores, 2021

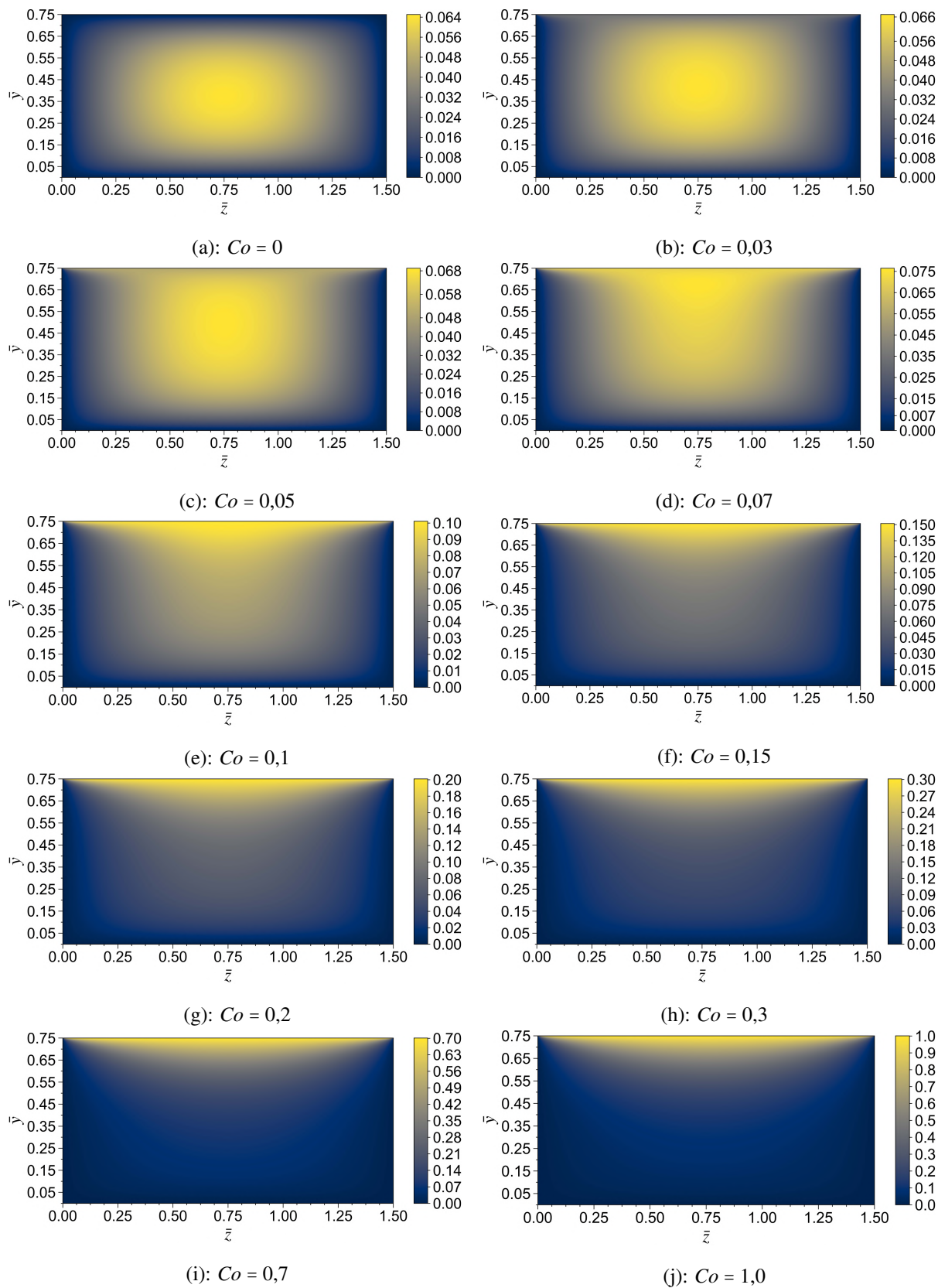
Diferentemente dos casos em que Couette é menor do que 0,1, assim como no caso em que  $Co = 4,0$  vemos que, independentemente do valor de  $\lambda$ , a velocidade mais intensa experimentada pelo escoamento é a mesma da placa quando movimentada, concentrada na região superior. Conforme aumenta-se a proporção entre a largura e a altura do canal, as camadas adjacentes de fluido, que se encontra em contato com a placa superior, são afetadas pelo movimento das partículas. Isso causa um espalhamento gradual da velocidade e gera grandes regiões de isovelocidades que ocupam áreas cada vez maiores ao longo da altura do canal.

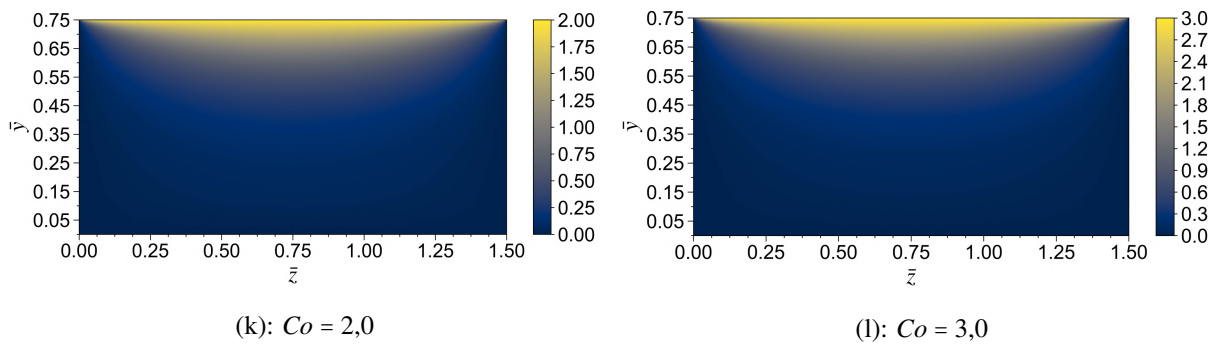
#### 5.4 VARIAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADE COM O NÚMERO DE COUETTE

Ao se fixar o valor da razão de aspecto  $\lambda$  e variar o número de Couette, uma diferenciação da característica do escoamento pode ser avaliada e a transição entre o escoamento de Poiseuille para um escoamento de Couette-Poiseuille pode ser melhor visualizada. Assim, conseguimos ter uma

estimativa para qual valor do número de Couette temos um escoamento que pode ser considerado como escoamento de Couette, com influências insignificantes do campo de pressão.

Figura 5.5: Variação do campo de velocidade com a inclusão e aumento do número de Couette





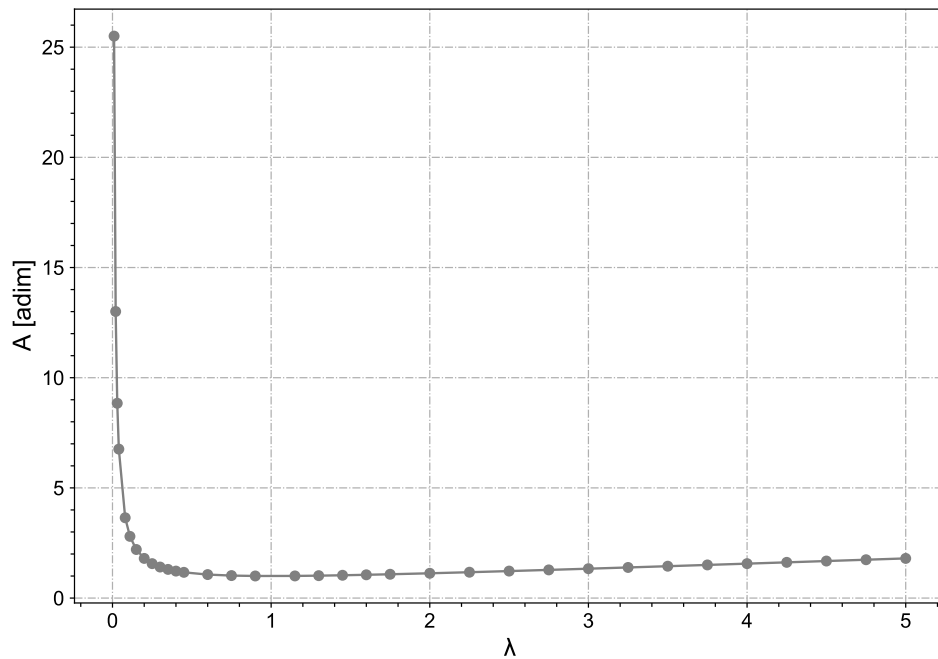
Fonte: Próprios autores, 2021

Na Figura 5.5 podemos observar essa variação, para Couette entre 0 e 3. Podemos observar que a partir de um número de Couette baixo (a partir de 1,0), os efeitos predominantes do escoamento são gerados pelo cisalhamento entre as placas. E a partir de um número de Couette igual a 4,0 podemos dizer que o escoamento, é um escoamento puramente de Couette.

## 5.5 VAZÃO

Uma propriedade necessária para obtenção da vazão adimensional  $\tilde{Q}$  é a área da seção transversal do canal. A área é obtida pelo produto das duas dimensões transversais do canal retangular. Podemos, dessa forma, facilmente encontrar a curva da área da seção transversal em função da razão de aspecto  $\lambda$ , como se segue:

Figura 5.6: Área transversal do canal retangular em função da razão de aspecto.



Fonte: Próprios autores, 2021

Podemos verificar que para o caso em que a razão de aspecto se aproxima de zero, o valor da área tende ao infinito, e com o aumento de  $\lambda$  a mesma é reduzida e volta a crescer. Na Figura 5.6, a fim de melhor representar a curva, o gráfico começa de valores de  $\lambda = 0,01$ . O principal fator atrelado a curva característica dessa propriedade é a forma como foram adimensionalizadas as equações, no nosso caso, em função do diâmetro hidráulico  $D_h$ . Com isso valores pequenos de  $\lambda$  proporcionam altos valores de  $\tilde{b}$ . Como a área não é uma propriedade absoluta, caso tivéssemos adimensionalizado as equações em função dos comprimentos característicos, isto é, adimensionalizando  $y$  com  $d$  e  $z$  com  $b$ , essa curva seria uma reta constante. Perceba que, quando  $\lambda = 1$  a área equivale a  $A = 1$ , o que é consistente com o modelo adotado. Note também que o aumento de  $\lambda$  faz com que a área volte a crescer para valores de  $\lambda$  maiores que 1. Isso acontece porque razões de aspecto maiores do que 1 representam razões entre a altura do canal maiores que a largura. Como definimos os comprimentos característicos em função da razão de aspecto, o aumento de  $\lambda$  proporciona o aumento dos comprimentos característicos e, conseqüentemente, da área. A Tabela 5.9 apresenta os valores correspondentes da área para os respectivos valores de  $\lambda$ .

Tabela 5.9: Valores da área  $A$  para diferentes valores de  $\lambda$ .

$\lambda$	$A$ [adim]	$\lambda$	$A$ [adim]
0,010	25,503	1,300	1,017
0,020	13,005	1,450	1,035
0,030	8,841	1,600	1,056
0,040	6,760	1,750	1,080
0,080	3,645	1,900	1,107
0,110	2,800	2,000	1,125
0,150	2,204	2,250	1,174
0,200	1,800	2,500	1,225
0,250	1,563	2,750	1,278
0,300	1,408	3,000	1,333
0,350	1,302	3,250	1,389
0,400	1,225	3,500	1,446
0,450	1,168	3,750	1,504
0,600	1,067	4,000	1,563
0,750	1,021	4,250	1,621
0,900	1,003	4,500	1,681
1,000	1,000	4,750	1,740
1,150	1,005	5,000	1,800

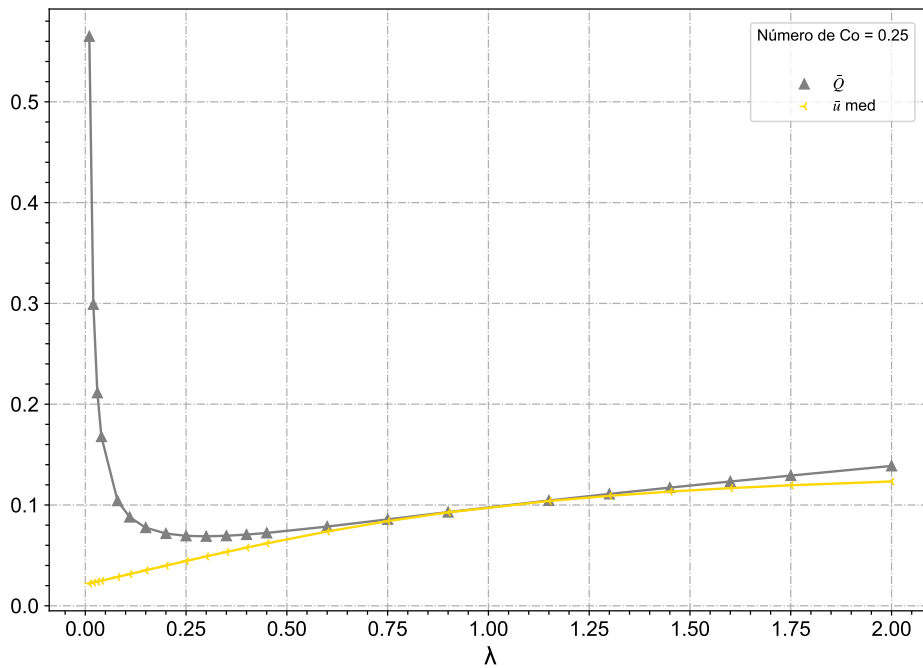
Fonte: Próprios autores, 2021

Outra propriedade intrinsecamente ligada a vazão adimensional  $\tilde{Q}$  é a velocidade média adimensional  $\tilde{u}_{med}$ . A partir de (3.112), foi possível obter as curvas de vazão e da velocidade média em relação à  $\lambda$  para o escoamento de Couette-Poiseuille. As representações gráficas dessas curvas foram feitas utilizando diferentes números de Couette, sendo eles: 0,25, 1,0 e 4,0, como nas Figuras 5.7(a), 5.7(b) e 5.7(c), respectivamente. Sabendo que a vazão adimensional  $\tilde{Q}$  é o produto da velocidade média adimensional pela área, podemos observar que, como esperado, mesmo que  $\tilde{u}_{med}$  apresente valores pequenos para baixos valores de  $\lambda$ , a vazão é compensada pelos altos valo-



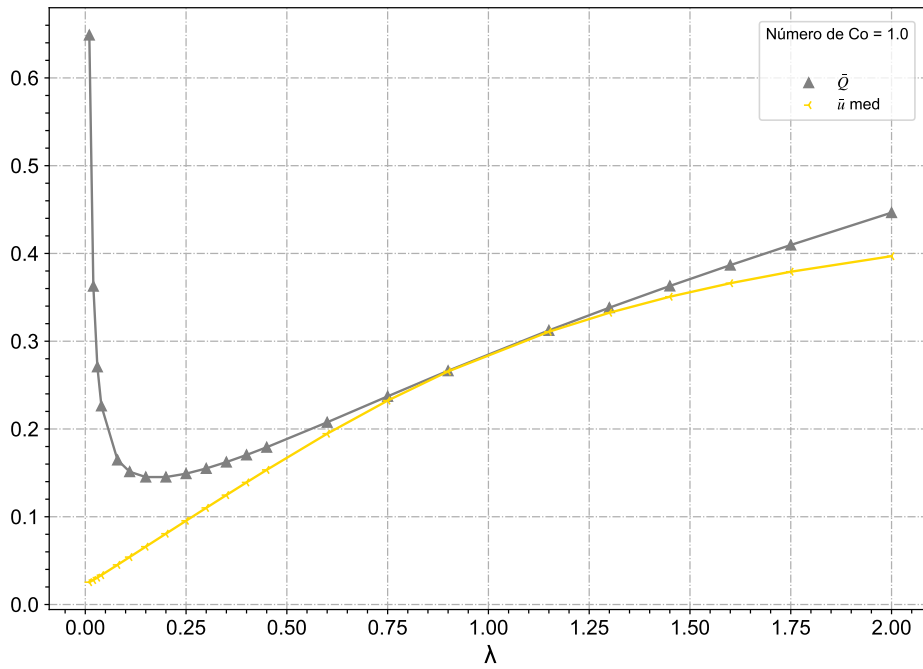
res presentes na área. Conforme  $\lambda$  aumenta, a redução nos valores da área são compensados pelo acréscimo nos valores de  $\tilde{u}_{med}$ . Perceba que nas Figuras 5.7(a), 5.7(b) e 5.7(c) a vazão parte de um valor elevado, é reduzida com o aumento de  $\lambda$  até atingir seu valor de mínimo, para o qual volta a crescer. Essa característica pode ser melhor observada quanto maior é o número de Couette. Na Figura 5.7(c), rapidamente a vazão atinge seu ponto de mínimo e volta a crescer com o aumento de  $\tilde{u}_{med}$ .

Figura 5.7: Vazão adimensional  $\tilde{Q}$  e velocidade média  $\tilde{u}_{med}$  em função da razão de aspecto  $\lambda$  para número de Couette igual a: (a)  $Co = 0,25$  (b)  $Co = 1,0$  (c)  $Co = 4,0$ .

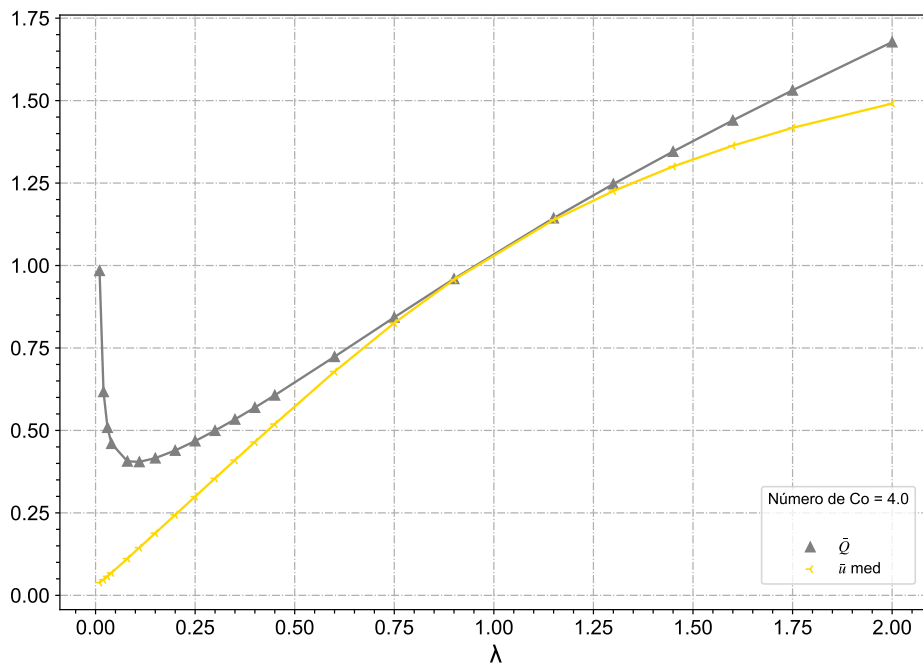


(a)

Como é sabido, um aumento no número de Couette provoca o surgimento de velocidades mais expressivas no escoamento. Com o aumento da velocidade máxima, há também o aumento da velocidade média do escoamento dentro do canal.



(b)



(c)

Fonte: Próprios autores, 2021

Como a área é uma propriedade independente de  $Co$ , é esperado que o aumento de  $\tilde{u}_{med}$  gere as curvas assintóticas da vazão adimensional  $\tilde{Q}$ . Para todos os gráficos, é fácil notar que quanto mais próximo  $\lambda$  fica de um, ou seja, o caso em que temos um duto quadrado, mais próximo da velocidade média a vazão se torna. Isso se dá pela simetria do escoamento dentro do canal, já que quando  $\lambda = 1$ ,  $A = 1$ , como pode ser visto na Tabela 5.9. Portanto, nessa situação,  $\tilde{Q}$  passa a ser

igual a  $\tilde{u}_{med}$ . Note que para valores de  $\lambda$  maiores do que 1, mesmo que haja uma redução gradual na velocidade média do escoamento, a vazão mantém-se em crescendo, compensada pelos efeitos do aumento constante da área do canal. Perceba também que para um  $Co$  mais baixo, como na Figura 5.7(a), o valor de  $\tilde{Q}$  se aproxima de  $\tilde{u}_{med}$  a partir de  $\lambda = 0,5$  e é tão mais próximo conforme  $\lambda$  aumenta. Ao compararmos esse comportamento para um  $Co$  maior, como na Figura 5.7(c), vemos que essa característica é mantida, porém com um afastamento do valor de  $\lambda$  para o qual essa proximidade é vista, como podemos acompanhar da Tabela 5.10.

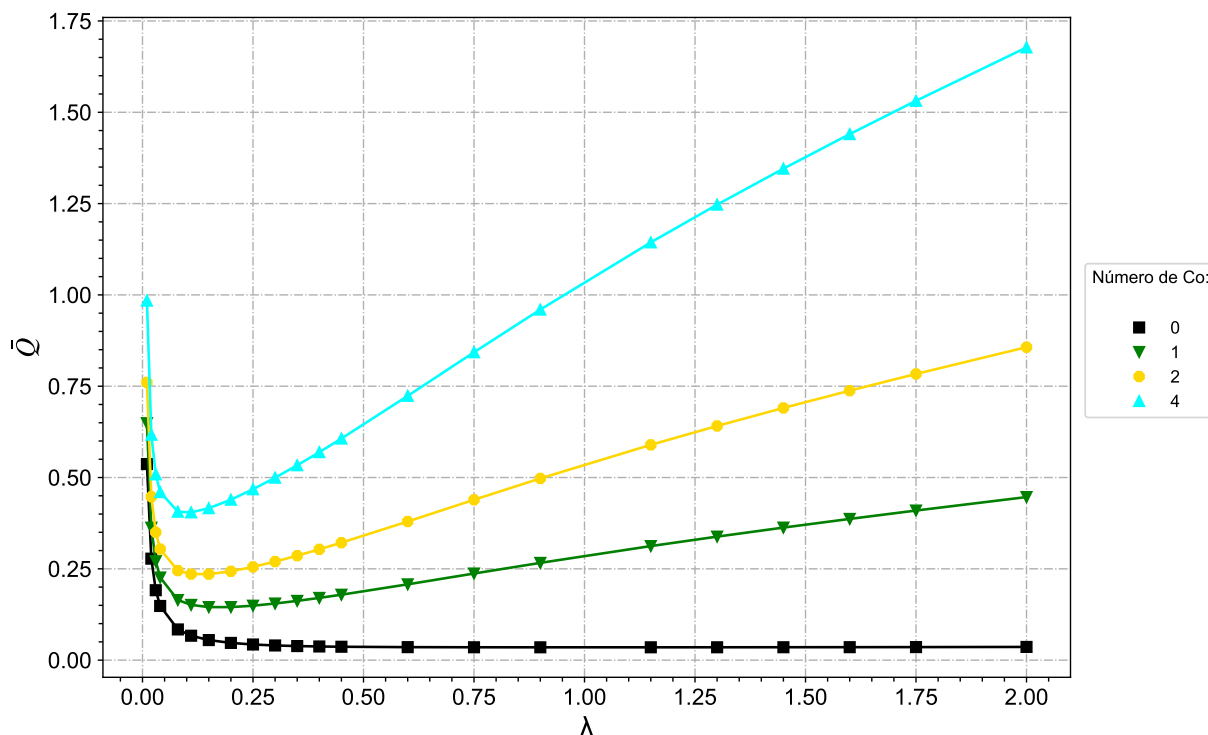
Tabela 5.10: Valores de  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{u}_{med}$  para diferentes valores de  $\lambda$  e  $Co$ .

$\lambda$	$Co = 0,25$		$Co = 1,0$		$Co = 4,0$	
	$\tilde{Q}$	$\tilde{u}_{med}$	$\tilde{Q}$	$\tilde{u}_{med}$	$\tilde{Q}$	$\tilde{u}_{med}$
0,010	0,56494	0,02215	0,64881	0,02544	0,98430	0,03860
0,020	0,29905	0,02300	0,36268	0,02789	0,61717	0,04746
0,030	0,2113	0,02390	0,27076	0,03063	0,50864	0,05753
0,040	0,16782	0,02483	0,22626	0,03347	0,46002	0,06805
0,080	0,10421	0,02859	0,16464	0,04517	0,40637	0,11149
0,110	0,08798	0,03142	0,15132	0,05404	0,40467	0,14451
0,150	0,07753	0,03518	0,14522	0,06588	0,41597	0,18872
0,200	0,07169	0,03983	0,14521	0,08067	0,43931	0,24406
0,250	0,0694	0,04442	0,14908	0,09541	0,46782	0,29940
0,300	0,06891	0,04893	0,15503	0,11008	0,49953	0,35470
0,350	0,06946	0,05336	0,16228	0,12466	0,53356	0,40987
0,400	0,07066	0,05768	0,17041	0,13911	0,56939	0,46481
0,450	0,0723	0,06189	0,17916	0,15338	0,60663	0,51935
0,600	0,0786	0,07368	0,20759	0,19462	0,72357	0,67835
0,750	0,08573	0,08398	0,23716	0,23232	0,84289	0,82569
0,900	0,09294	0,09269	0,26632	0,26558	0,95980	0,95714
1,000	0,09764	0,09764	0,28514	0,28514	1,03517	1,03517
1,150	0,10445	0,10394	0,31232	0,31080	1,14378	1,13821
1,300	0,11098	0,10909	0,33820	0,33244	1,24709	1,22587
1,450	0,11724	0,11329	0,36292	0,35068	1,34565	1,30025
1,600	0,1233	0,11673	0,38667	0,36608	1,44016	1,36346
1,750	0,1292	0,11959	0,40962	0,37915	1,53133	1,41743
2,000	0,13876	0,12334	0,44651	0,39689	1,67751	1,49112
2,250	0,14809	0,12619	0,48215	0,41083	1,81838	1,54939
2,500	0,1573	0,12841	0,51695	0,42200	1,95555	1,59636
2,750	0,16642	0,13018	0,55115	0,43113	2,09010	1,63493
3,000	0,17549	0,13162	0,58495	0,43871	2,22279	1,66710
3,250	0,18453	0,13281	0,61845	0,44511	2,35413	1,69432
3,500	0,19356	0,13382	0,65174	0,45059	2,48445	1,71765
3,750	0,20258	0,13468	0,68487	0,45531	2,61402	1,73785
4,000	0,2116	0,13542	0,71788	0,45944	2,74300	1,75552
4,250	0,22063	0,13607	0,75080	0,46308	2,87153	1,77110
4,500	0,22964	0,13664	0,78365	0,46630	2,99969	1,78494
4,750	0,23866	0,13715	0,81644	0,46918	3,12757	1,79732
5,000	0,24768	0,13760	0,84919	0,47177	3,25522	1,80845

Fonte: Próprios autores, 2021

Para verificar de forma mais ampla o efeito que o acréscimo de  $\tilde{u}_{med}$  causa na vazão adimensional, em função da razão de aspecto  $\lambda$  e verificando apenas o efeito do número de Couette na mesma, foram sintetizadas algumas curvas no mesmo gráfico para diferentes número de Couette, como pode ser visto na Figura 5.8. Olhando de forma conjunta as vazões para os diferentes números de Couette, fica claro a relevância da  $\tilde{u}_{med}$  com o aumento de  $Co$ . Note que ao passo que o gradiente de pressão passa a ter uma menor significância no comportamento do escoamento, as curvas da vazão passam a adquirir uma aparência parabólica com o valor mínimo concentrado dentro de uma pequena região no eixo  $x$  que compreende os valores de  $\lambda$  entre 0,083 e  $1/3$ . A partir da Tabela 5.10, é possível perceber que o aumento no número de Couette provoca uma redução no valor  $\lambda$  que corresponde ao valor mínimo da vazão.

Figura 5.8: Vazão adimensional  $\tilde{Q}$  em função da razão de aspecto  $\lambda$  para diferentes número de Couette.



Fonte: Próprios autores, 2021

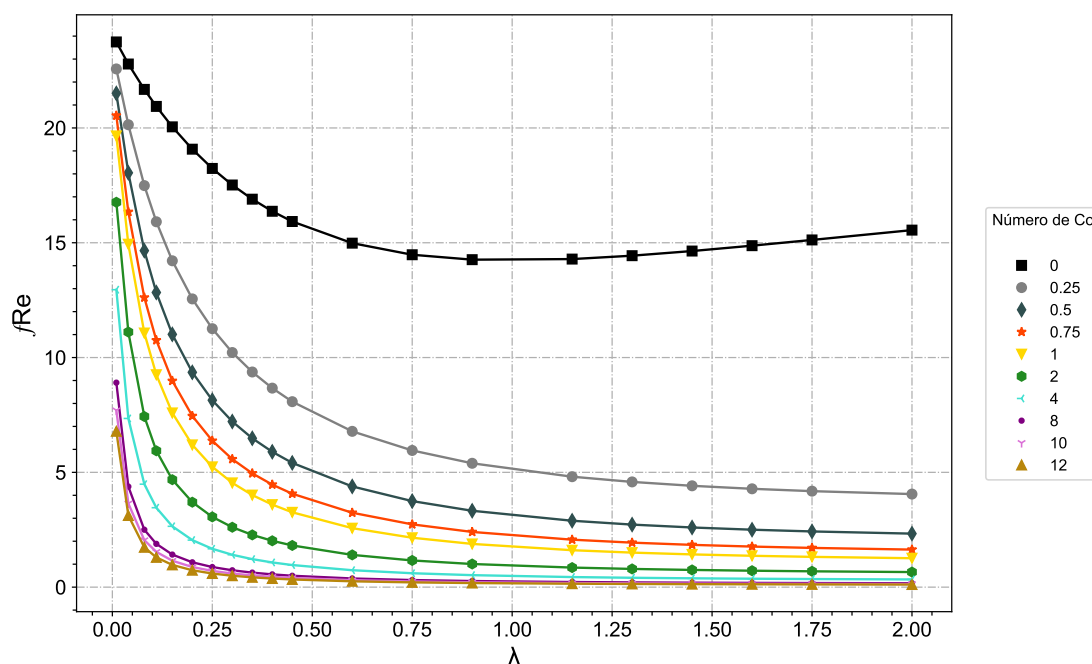
## 5.6 NÚMERO DE POISEUILLE E A PERDA DE PRESSÃO

Sob uma esfera mais ampla, para diferentes valores do número de Couette, foram geradas diversas curvas que avaliam como o  $Po = fRe$  varia com as velocidades características do escoamento. Esse efeito pode ser acompanhado na Figura 5.9.

Diferentemente da vazão e da área adimensional em que os resultados variam de acordo com a adimensionalização que é feita, o  $fRe$  não. Isto é, seu resultado independe da adimensionalização, e portanto, podemos utilizá-lo como forma alternativa de comparação com resultados já presentes

na literatura para o caso em que o número de  $Co = 0$ , assim como foi mostrado na Tabela 5.3. O produto entre o fator de atrito de Fanning  $f$  e o número de Reynolds  $Re$ , também conhecidos como número de Poiseuille, nos permite determinar a perda de pressão causada pelo atrito existente nas paredes da tubulação. Como será visto, os valores dessa propriedade são mais expressivas quanto menor é o valor da razão de aspecto, o que está de acordo com o problema. Quando  $\lambda$  assume pequenos valores, o comprimento da altura do canal é baixo e as paredes superior e inferior do canal estão muito próximas, fazendo com que os efeitos de não escorregamento causados pelo contato do fluido escoando com a interface sólida sejam muito perceptíveis e afetados pela rugosidade relativa do canal.

Figura 5.9: Fator de atrito de Fanning  $fRe$  para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  e para diferentes valores do número de Couette.



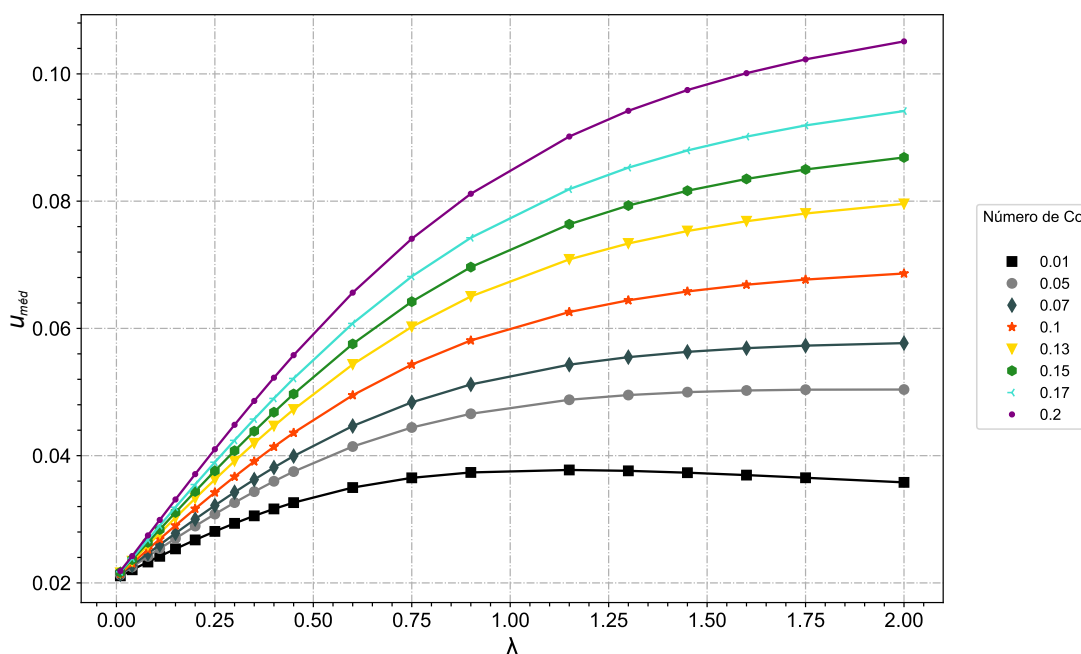
Fonte: Próprios autores, 2021

Como descrito na equação (3.114), o  $fRe$  é inversamente proporcional a velocidade média adimensional  $\tilde{u}_{med}$ . Note que, a partir de sua definição na forma dimensional, o produto entre o fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds é dependente das propriedades físicas do fluido, das dimensões do canal onde esse escoar e das forças de campo presentes no escoamento. Essa variável é diretamente proporcional ao gradiente de pressão, inversamente proporcional a velocidade média do escoamento e a viscosidade do fluido e quadraticamente proporcional ao diâmetro hidráulico.

Podemos observar que o aumento do número de Couette diminui gradualmente o valor de  $fRe$ , já que como vimos, o aumento do  $Co$  eleva o valor de  $\tilde{u}_{med}$  assim como, também, o aumento da razão de aspecto  $\lambda$ . Essa afirmação é válida para todos os números de Couette, salve para valores de Couette menores que 0,3 onde a curva de  $fRe$  apresenta aspectos parabólicos

com pontos de mínimo e retorno de crescimento. Isso acontece porque para valores de Couette menores que 0,3, há uma competição entre o gradiente de pressão e a força cisalhante, e o escoamento claramente caracterizado pelos efeitos de Couette-Poiseuille apresenta variações súbitas na velocidade do escoamento dentro do canal, onde para pequenos valores de  $\lambda$ , a velocidade média cresce mas rapidamente volta a decrescer como podemos ver na Figura 5.10, fazendo com que a variável  $fRe$  volte a crescer indefinidamente, já que  $\tilde{u}_{med}$  decresce com o aumento de  $\lambda$ . Fisicamente, esse comportamento é presenciado porque para determinada razão de aspecto, o movimento da placa é insuficiente na proporção de uma grande infusão no escoamento já que o canal apresenta paredes laterais muito maiores que as superfícies superior e inferior, reduzindo a velocidade média do canal já que as velocidades experimentadas não são tão intensas, como pode ser percebido na Figura 5.11.

Figura 5.10: Valores da velocidade média  $\tilde{u}_{med}$  para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  e para diferentes valores do número de Couette.

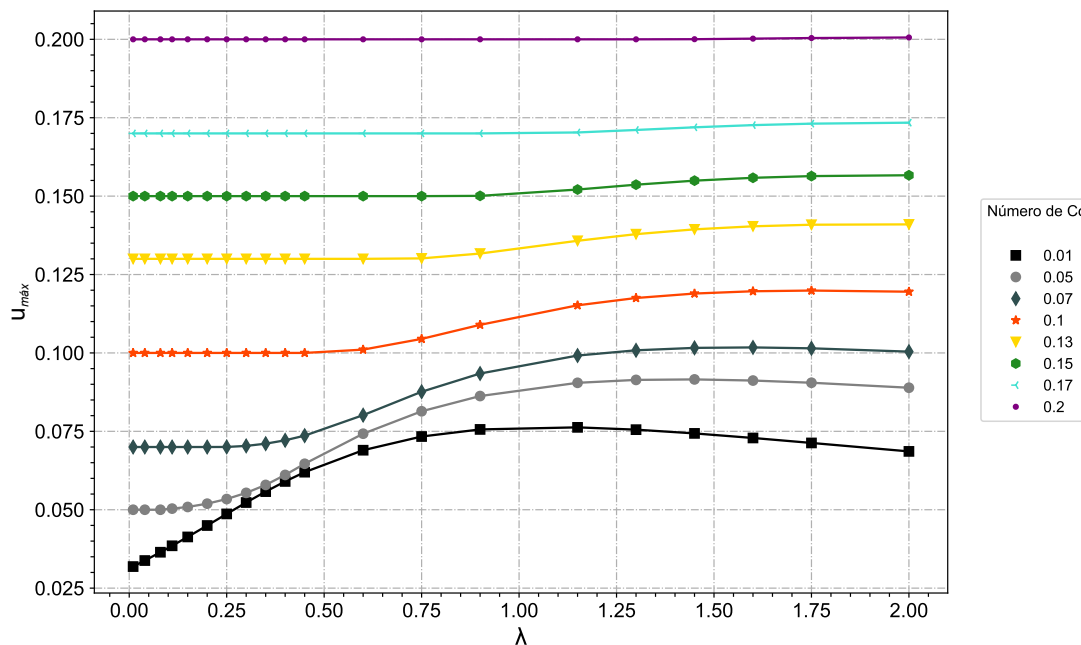


Fonte: Próprios autores, 2021

Veja que para números de Couette igual a 0,2 a variação na velocidade máxima experimentada pelo escoamento é quase nula e essa permanece praticamente igual ao número de Couette, mas para valores menores que esse vemos que a velocidade máxima é superior a velocidade provocada pelo número de Couette e, conseqüentemente, pelo movimento da parte superior do canal. Esse comportamento é ainda mais visível para baixos números de Couette, demonstrando que nesse intervalo de números de Couette temos uma variação súbita na velocidade máxima do escoamento, mas conforme aumentamos a razão de aspecto  $\lambda$  essa começa a decrescer e conseqüentemente diminui a velocidade média do escoamento no canal. Quando aumentamos a razão de aspecto, afastamos as superfícies superior e inferior do canal, o que faz com que haja um espalhamento muito grande das linhas de corrente já que as partes inferiores do canal passam cada vez mais a sentir

menos os efeitos provocados pelo movimento da parte superior do canal, reduzindo os valores de velocidade média do escoamento já que há uma porção maior de fluido que oferece resistência ao movimento.

Figura 5.11: Valores da velocidade máxima  $\tilde{u}_{\max}$  para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  e para diferentes valores do número de Couette.



Fonte: Próprios autores, 2021

Para valores de Couette superiores a 0,2 a velocidade máxima vista no canal é praticamente equivalente ao número de Couette e a variação é mínima com o aumento nos valores da razão de aspecto, se tornando quase imperceptível mesmo para valores de  $\lambda = 100$  para números de Couette igual 0,3. Vemos que quanto maior for  $\tilde{u}_{med}$ , maior a redução no valor da variável  $fRe$  e mais próximo de zero  $fRe$  se torna. Fisicamente, uma redução no valor de  $fRe$  implica em uma redução na influência do fator de atrito de Fanning no escoamento, fazendo com que a perda de pressão experimentada pelo escoamento ao longo do comprimento do canal seja menor.

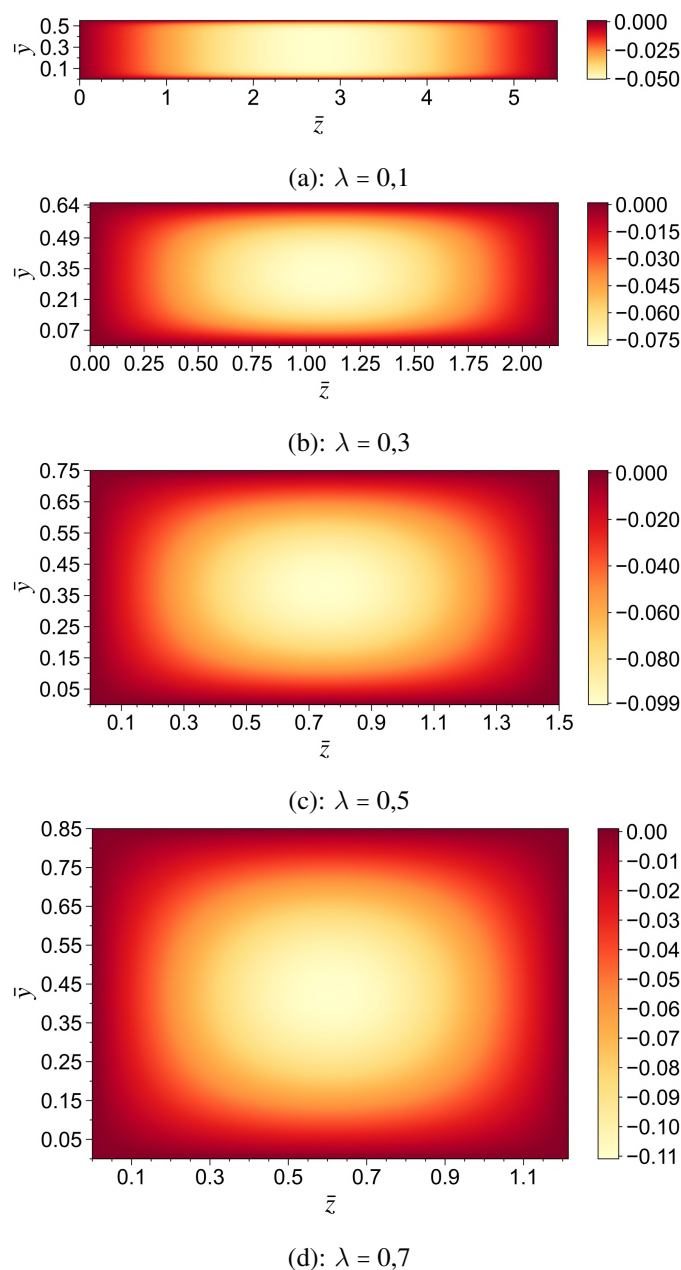
Como podemos verificar na Figura 5.9, a partir do número de Couette igual a oito, a variação entre as curvas de  $fRe$  é pequena quando comparada aos valores de Couette igual a dez e doze. Para os mesmos valores de Couette, quando se tem uma razão de aspecto igual a 0,4, essa variação torna-se praticamente nula.

## 5.7 CAMPO DE TEMPERATURA

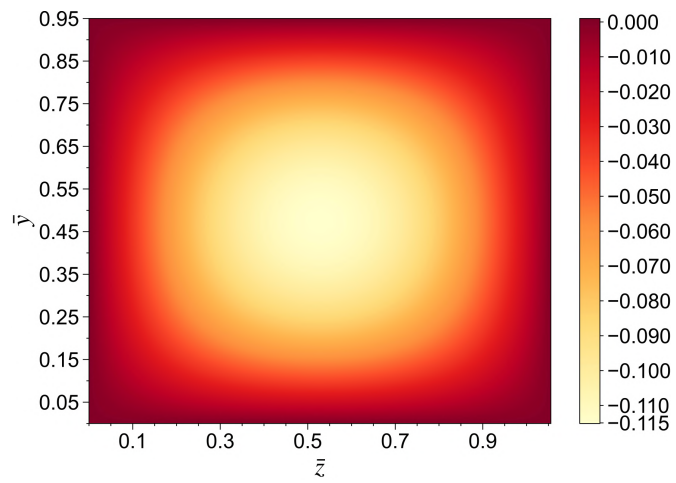
Utilizando a mesma metodologia na determinação do campo de velocidade obtivemos, através dos dados numéricos, resultados que se propõem a demonstrar como o campo de temperatura se

comporta dentro de um escoamento incompressível, laminar, em regime permanente, bidimensional, unidirecional de um fluido Newtoniano desconsiderando os efeitos de dissipação viscosa dentro de um canal retangular com paredes adiabáticas e isotérmicas. Assim como exposto na Seção 3.8, o campo de temperatura foi determinado a partir do campo de velocidade do escoamento, portanto as limitações numéricas existentes para o modelo e rotina adotados também se aplicam para os resultados expostos nessa seção. As Figuras 5.12, 5.13 e 5.14 adiante apresentam os campos de temperatura para os escoamentos gerados a partir dos números de Couette equivalentes à  $Co = 0$ ,  $Co = 0,07$  e  $Co = 4$  respectivamente para diferentes razões de aspecto.

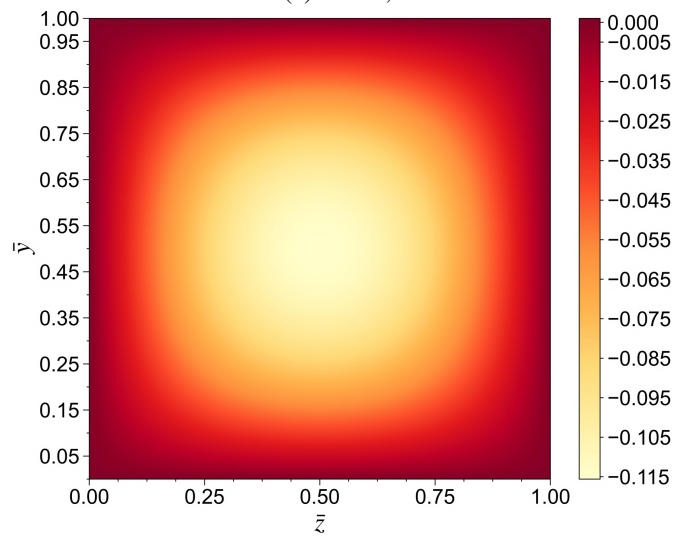
Figura 5.12: Perfil do campo de temperatura obtido para  $Co = 0$  variando a razão de aspecto  $\lambda$  do canal, para: (a)  $\lambda = 0,1$ , (b)  $\lambda = 0,3$ , (c)  $\lambda = 0,5$ , (d)  $\lambda = 0,7$ , (e)  $\lambda = 0,9$ , (f)  $\lambda = 1,0$ , (g)  $\lambda = 1,5$  e (h)  $\lambda = 2,0$ .



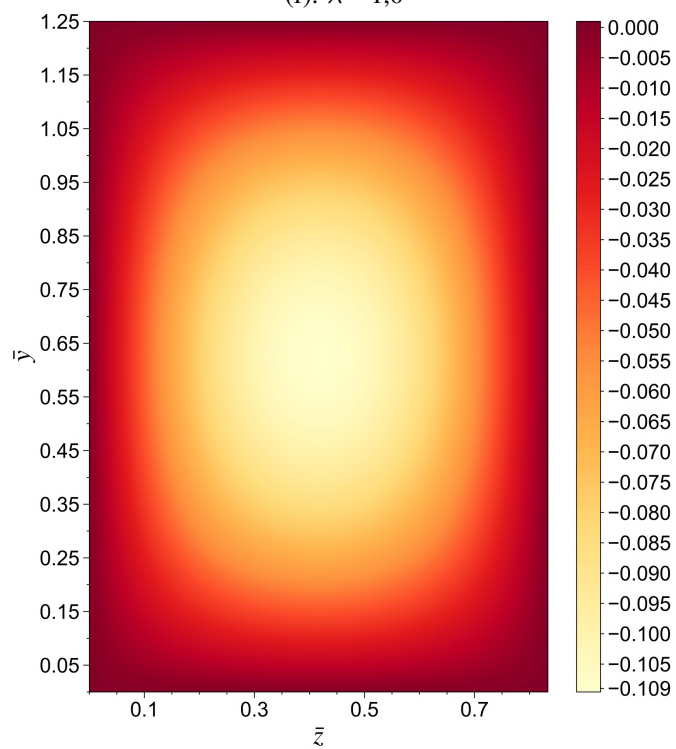




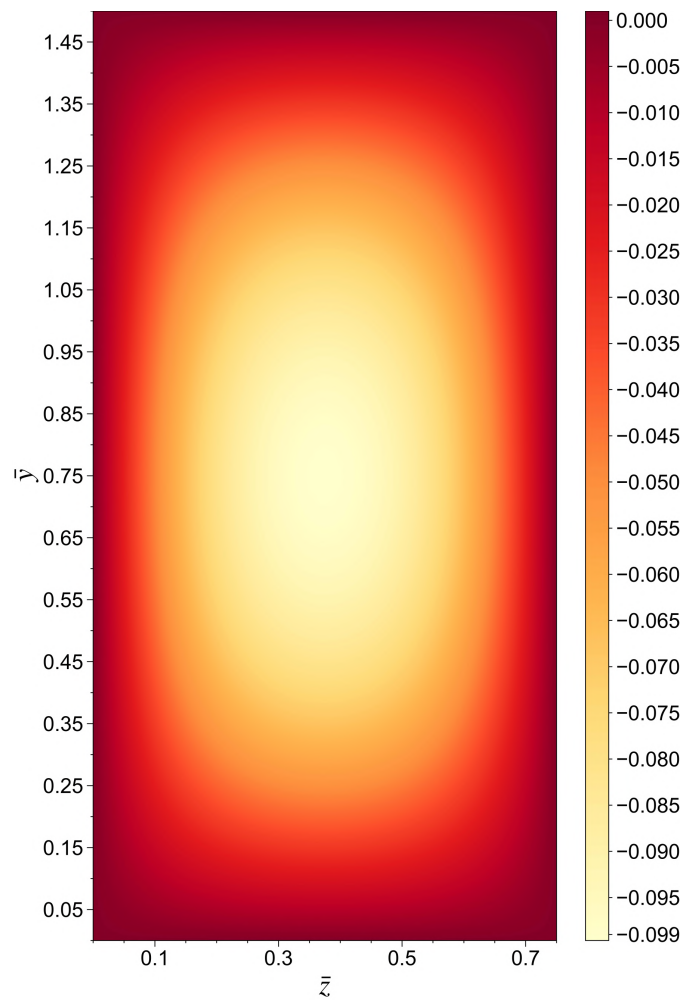
(e):  $\lambda = 0,9$



(f):  $\lambda = 1,0$



(g):  $\lambda = 1,5$



(h):  $\lambda = 2,0$

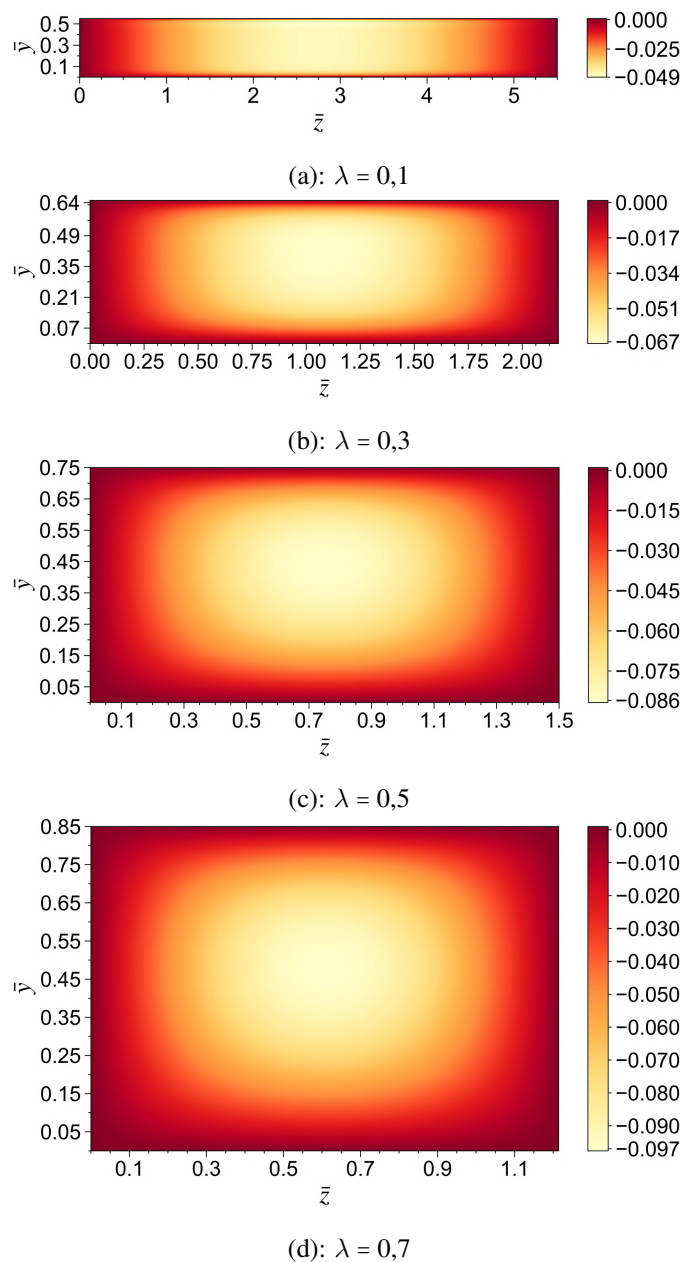
Fonte: Próprios autores, 2022

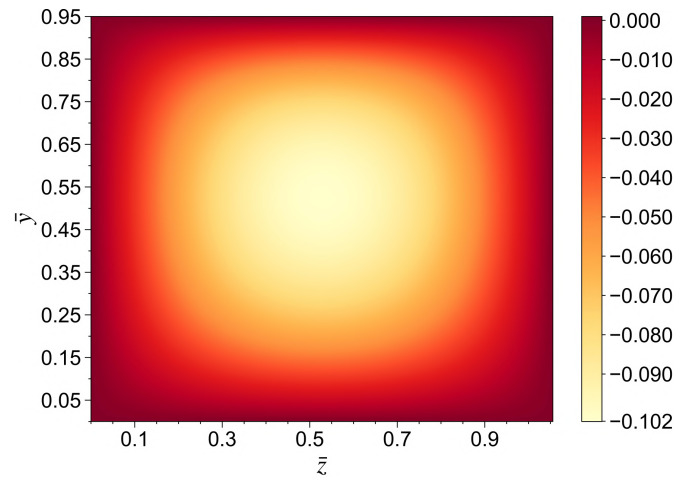
Note que o campo de temperatura em muito se assemelha do campo de velocidade para o caso em que  $Co = 0$ . Temos uma região elíptica bem definida no centro geométrico do canal com temperaturas mais intensas que vão aos poucos diminuindo radialmente conforme se aproximam das bordas do canal até que atinjam temperatura nula nas periferias adiabáticas. Perceba que um aumento na razão de aspecto gera também um aumento na intensidade máxima da temperatura, até que essa atinja o valor máximo em  $\lambda = 1,0$  onde, a partir desse valor, o aumento em  $\lambda$  proporciona uma redução na máxima intensidade.

A Figura 5.13 apresenta os campos de temperatura para o número de  $Co = 0,07$  que representa uma inclusão dos efeitos de cisalhamento no escoamento e uma disputa entre os escoamentos de Poiseuille e Couette. Visualmente, os campos de velocidade se assemelham muito aos vistos na Figura 5.12, mas note que os perfis de temperatura já não são elipses regulares e possuem um abaulamento nas curvas próximas ao fundo do canal mais acentuados do que o experimentado pelas partículas no topo do canal, próximas ao movimento da placa. Outra notória diferença é a mesma discutida na Seção 5.3, onde a maior intensidade da variável não se encontra mais no

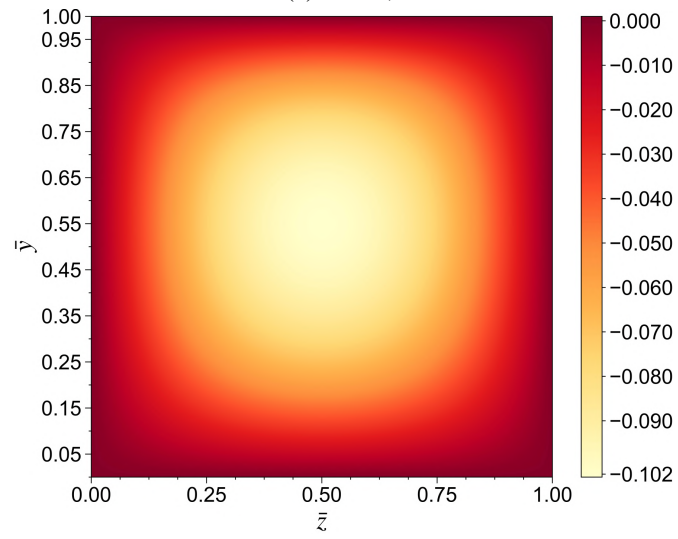
centro geométrico do canal, mas sim em uma região situada na metade superior do canal, entre o centro e o topo.

Figura 5.13: Perfil do campo de temperatura obtido para  $Co = 0,07$  variando a razão de aspecto  $\lambda$  do canal, para: (a)  $\lambda = 0,1$ , (b)  $\lambda = 0,3$ , (c)  $\lambda = 0,5$ , (d)  $\lambda = 0,7$ , (e)  $\lambda = 0,9$ , (f)  $\lambda = 1,0$ , (g)  $\lambda = 1,5$  e (h)  $\lambda = 2,0$ .

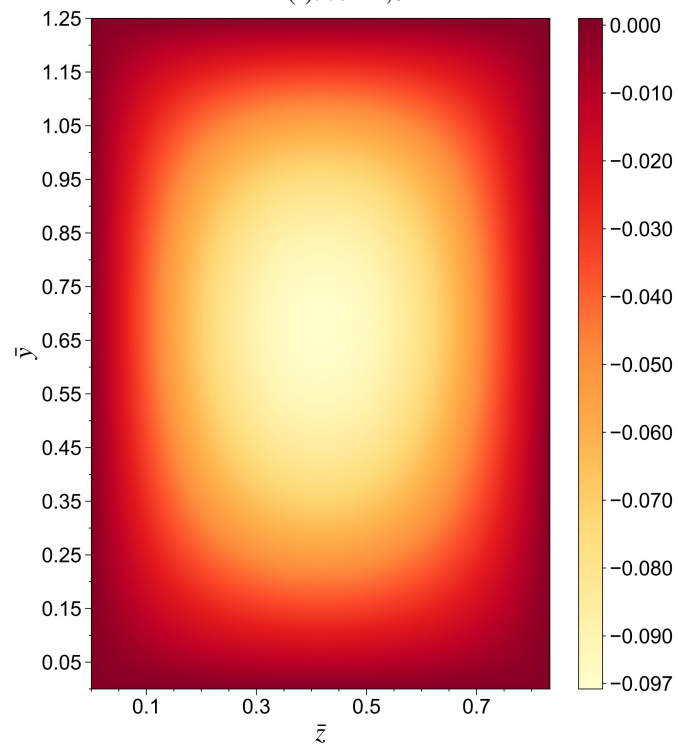




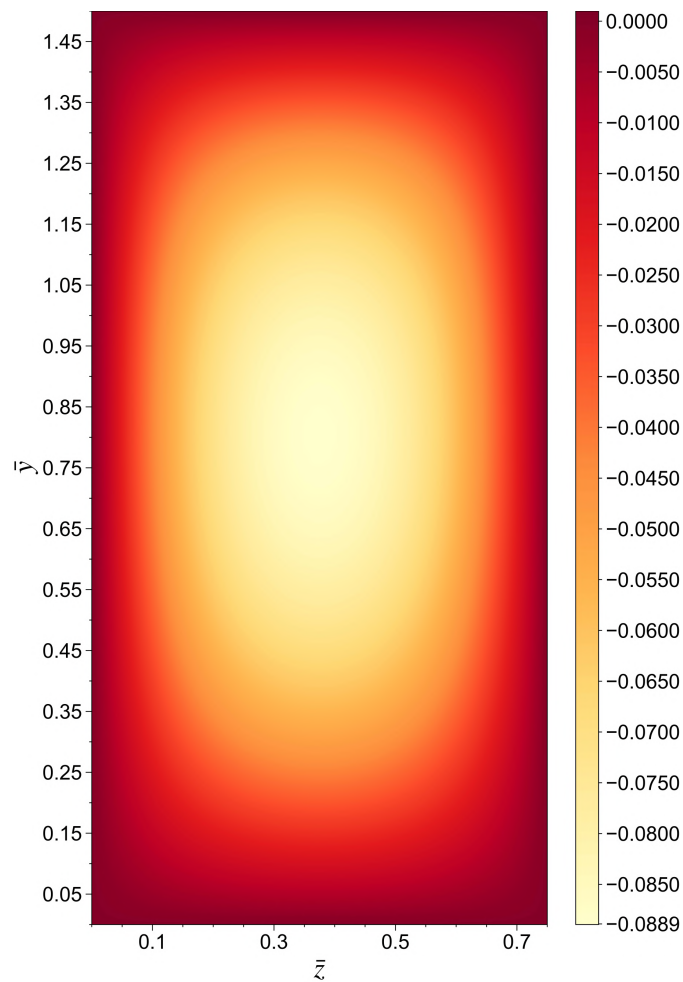
(e):  $\lambda = 0,9$



(f):  $\lambda = 1,0$



(g):  $\lambda = 1,5$

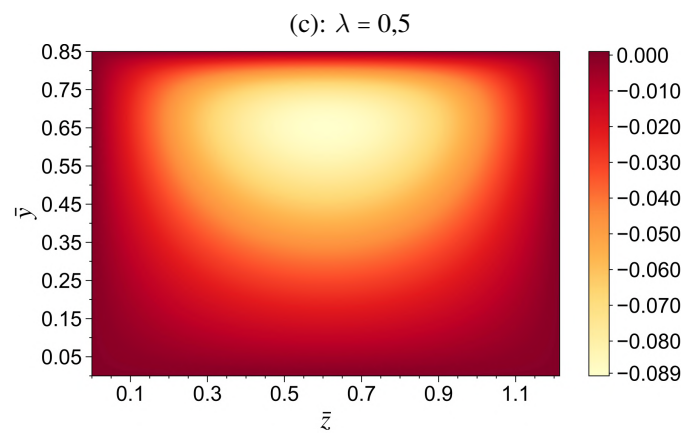
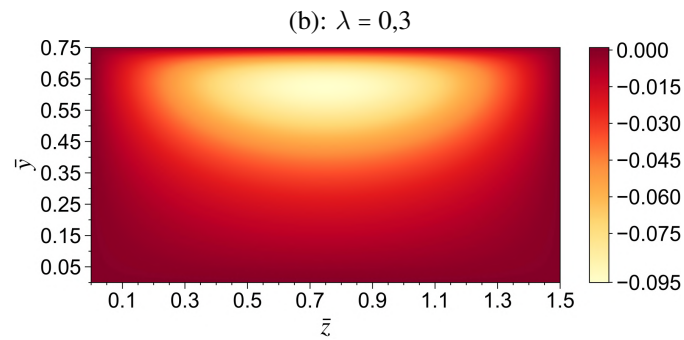
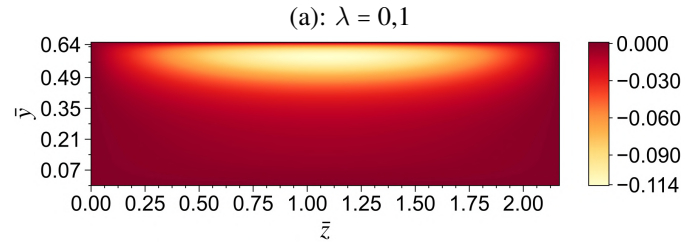
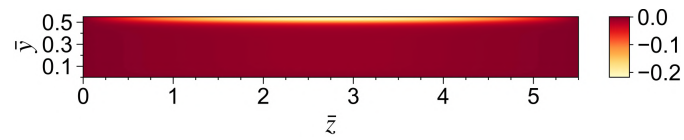


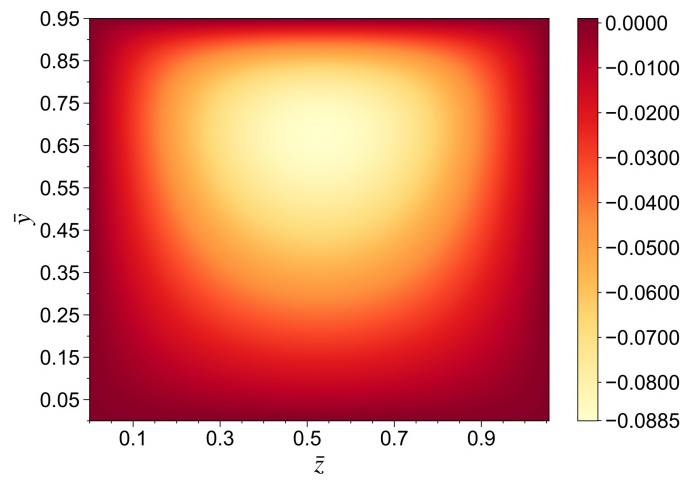
(h):  $\lambda = 2,0$

Fonte: Próprios autores, 2022

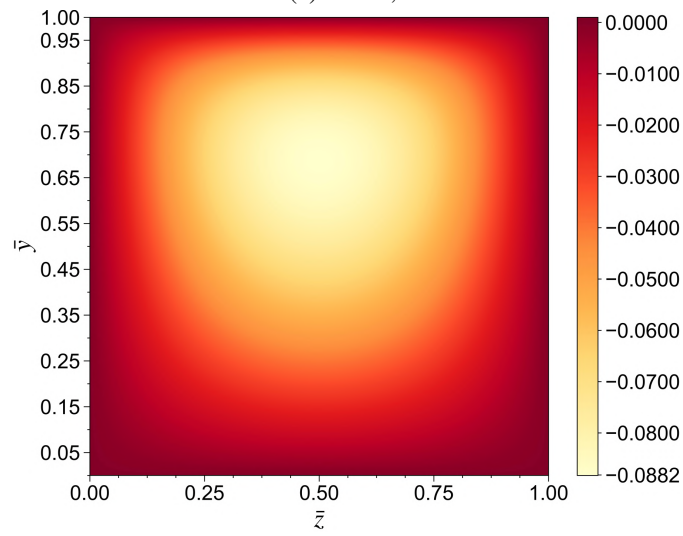
Em nossas análises, para o campo de temperatura de  $Co = 0,07$  e  $\lambda = 0,7$  dentro de uma malha de 420 por 420 por exemplo, o valor mais intenso (mais negativo) encontra-se na célula 210 no eixo  $\tilde{z}$  do sistema de coordenadas, que representa o ponto central no eixo horizontal, e na célula 185 no eixo  $\tilde{y}$  do sistema de coordenadas (do topo para o fundo), estando 25 posições acima da linha central do canal na Figura 5.13(d) assim como esperado dado as linhas do perfil de velocidades para esse número de  $Co$ . Aumentando ainda mais o número de Couette, vemos o comportamento do campo de temperatura se aproximando do perfil de velocidade para o mesmo  $Co$ . A Figura 5.14 apresenta o campo de temperatura para um valor de  $Co = 4,0$  e variando com  $\lambda$ . Note que o campo de temperatura encontra-se sempre mais intenso próximo a parte superior do canal, onde as velocidades são mais intensas.

Figura 5.14: Perfil do campo de temperatura obtido para  $Co = 4,0$  variando a razão de aspecto  $\lambda$  do canal, para: (a)  $\lambda = 0,1$ , (b)  $\lambda = 0,3$ , (c)  $\lambda = 0,5$ , (d)  $\lambda = 0,7$ , (e)  $\lambda = 0,9$ , (f)  $\lambda = 1,0$ , (g)  $\lambda = 1,5$  e (h)  $\lambda = 2,0$ .

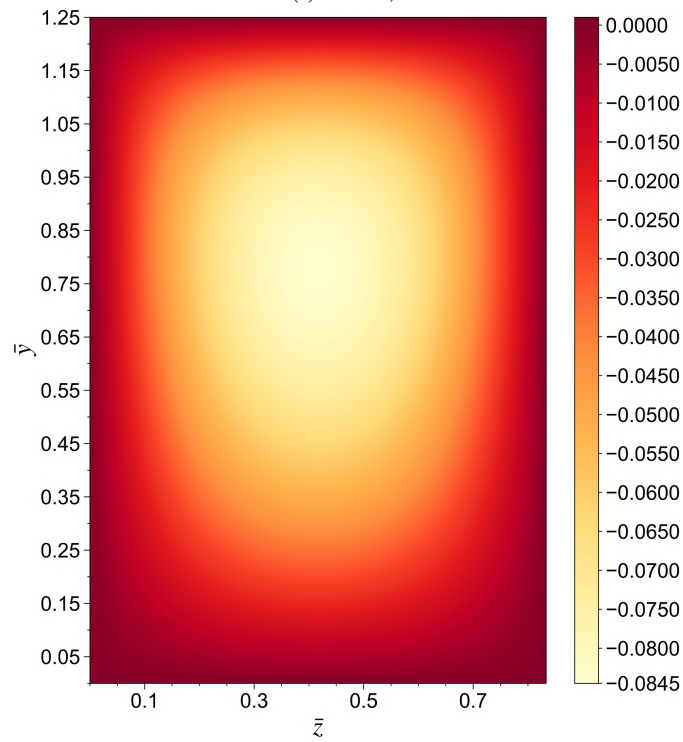




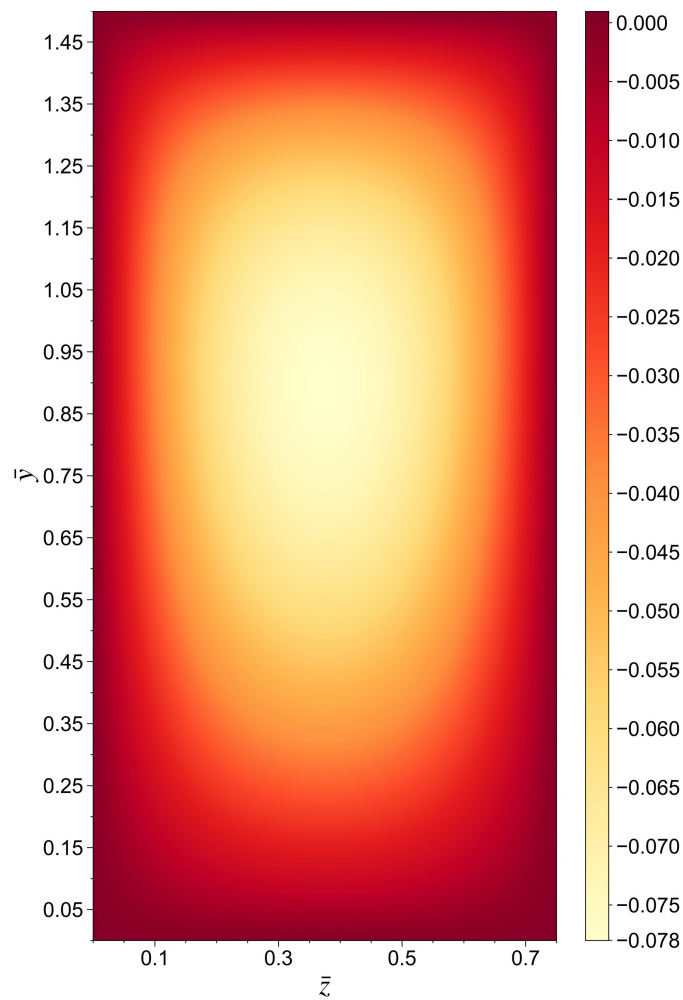
(e):  $\lambda = 0,9$



(f):  $\lambda = 1,0$



(g):  $\lambda = 1,5$



(h):  $\lambda = 2,0$

Fonte: Próprios autores, 2022

Perceba que o aumento expressivo de  $\lambda$  faz com que o canal aumente o comprimento das superfícies laterais e a região afetada pelo coeficiente de troca de calor é maior, mas a região contemplada pelos efeitos de não escorregamento do escoamento nas paredes adiabáticas, e portanto com temperaturas nulas, permanecem quase que com temperaturas iguais a zero. Repare que apesar de os efeitos de condução serem muito inferiores aos de convecção, ainda existe uma transferência de calor nas periferias do escoamento de baixa velocidade, próximas as superfícies sólidas, onde grande parte das partículas apresentam temperaturas  $T \leq -0,010$ .

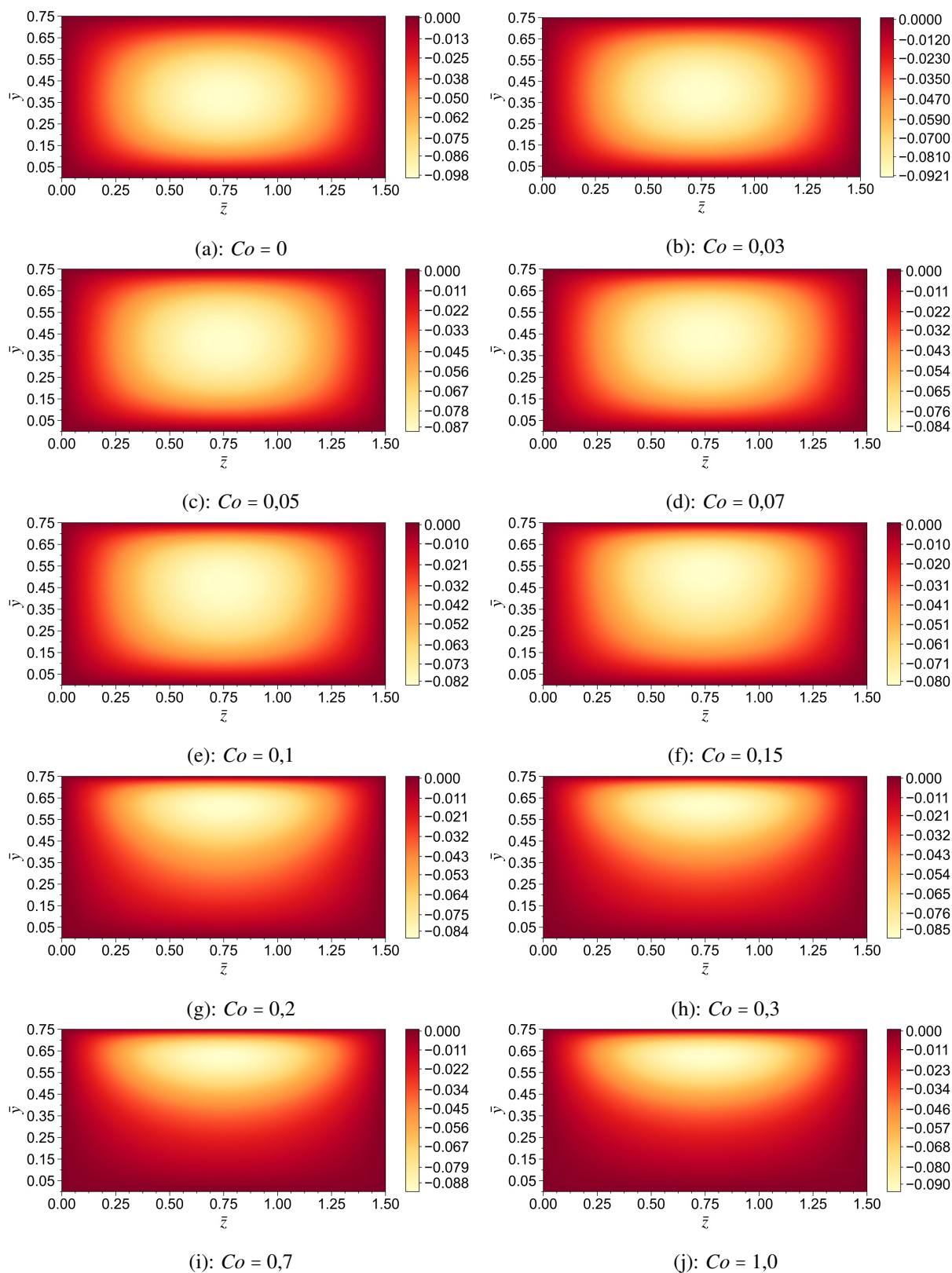
## 5.8 VARIAÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA COM O NÚMERO DE COUETTE

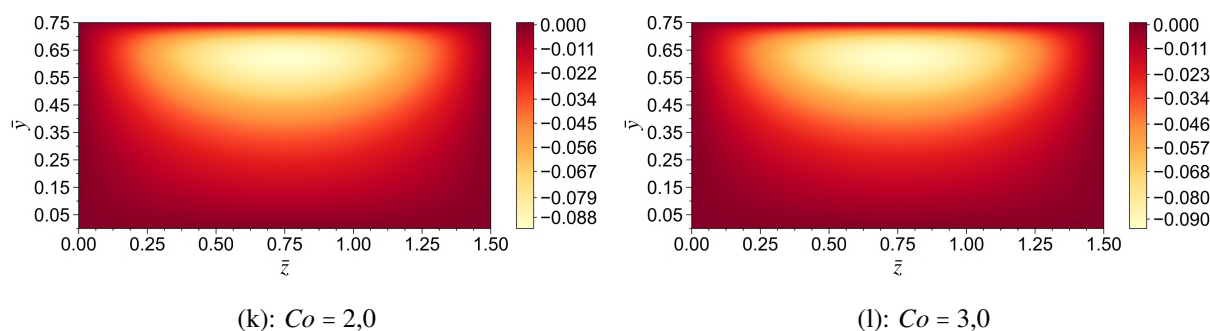
Semelhantemente ao feito para a variação do campo de velocidade, podemos fixar o número de lambda e variar o número de Couette, para análise do do campo de temperatura com a variação dessas propriedades. Utilizaremos os mesmos números de Couette do utilizado no campo



de velocidade, assim como o mesmo valor de razão de aspecto. Desejemos observar o comportamento do campo de temperatura partindo do escoamento de Poiseuille para o escoamento de Couette-Poiseuille.

Figura 5.15: Variação do campo de temperatura com a inclusão e aumento do número de Couette





Fonte: Próprios autores, 2022

Na Figura 5.15 podemos observar essa variação, para Couette entre 0 e 3. Inicialmente, temos o campo de temperatura exclusivamente devido ao escoamento de Poiseuille (Figura 5.15(a)) dado o número de Couette nulo, ou seja, há apenas a atuação do gradiente de pressão ao longo do canal. Com o acréscimo do cisalhamento devido ao movimento da parte superior do canal, observamos nas figuras seguintes a inclusão gradual do efeito de Couette e consequentemente a alteração do escoamento e do campo de temperatura.

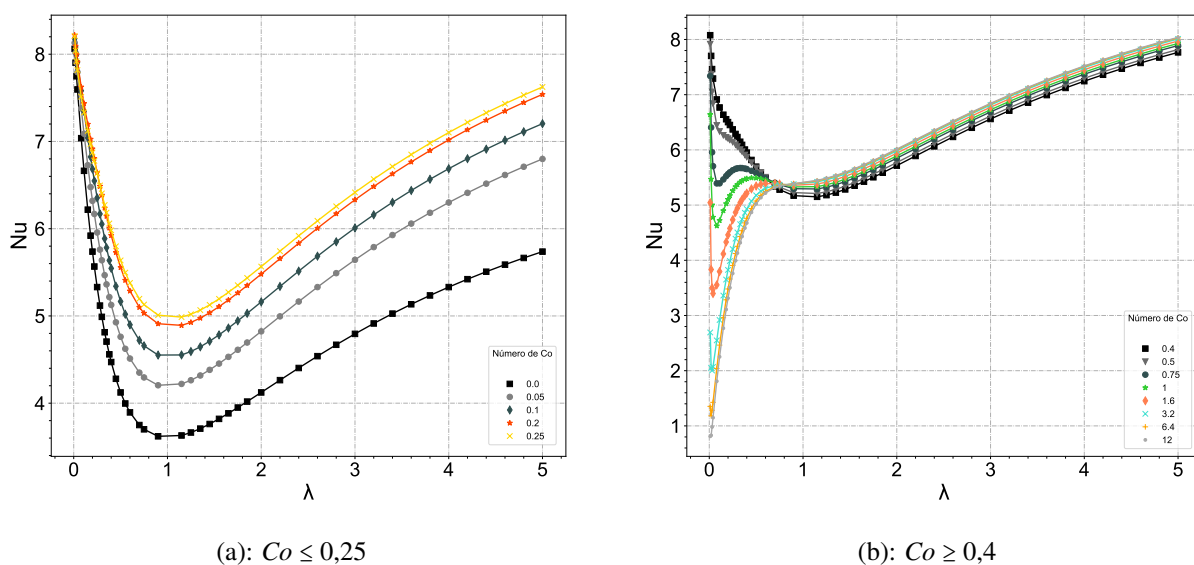
A variação do campo de temperatura com  $Co$  apresenta um comportamento ligeiramente distinto do observado no campo de velocidade, já que as superfícies implicam em distintas alterações em relação a cada campo. Isto porque na análise energética as paredes são adiabáticas e não permitem o fluxo de calor através delas, fazendo com que o efeito do cisalhamento gerado pela superfície superior atuando no escoamento não altere imediatamente as propriedades termodinâmicas do escoamento já que temperaturas nas bordas são nulas. Portanto, podemos observar que a interferência no campo de temperatura causado pelo acréscimo do número Couette no escoamento é mais intensa para números maiores de  $Co$ .

A partir do número de Couete igual a 0,1 podemos perceber visualmente que a intensidade do campo de temperatura se dá principalmente devido ao escoamento de Couette, já que há o deslocamento da região de maior intensidade da velocidade, que associada aos efeitos do coeficiente de troca de calor, desloca o campo de temperatura. Percebe que essa região que antes estava posicionada no centro geométrico do canal é movida para a região que contempla a metade superior do canal, entre o centro e o topo, indicando que o efeito de Couette é maior que o de Poiseuille. Consequentemente, quanto maior é o número de Couette menos significativa se torna a contribuição do gradiente de pressão para o campo de temperatura já que a velocidade aumenta e a troca de calor passa a acontecer majoritariamente pela convecção. Porém, como as paredes são adiabáticas, parte do calor trocado pelas partículas fluidas das periferias do canal, cada vez menos afetada pelos efeitos de alta velocidade do deslocamento das partículas onde as iterações acontecem cada vez mais rápidas e uma porção menor do escoamento passa a ser significativamente alterada, é muito dependente da condução do calor do centro do escoamento para os bordos.

## 5.9 NÚMERO DE NUSSELT

O número de Nusselt é uma variável importante no estudo da transferência de calor e pode nos ajudar a determinar alguns parâmetros do escoamento. Como dito na seção 5.2, o número de Nusselt descreve a razão entre a energia térmica convecção do fluido e a energia térmica conduzida dentro do fluido Incropera et al. (1996). Os gráficos presentes na Figura 5.16 nos dão um aspecto geral dos parâmetros de transferência de calor dentro do escoamento. As Figuras 5.16(a) e 5.16(b) apresentam alguns valores do número de Nusselt  $Nu$  variando com a razão de aspecto do canal  $\lambda$  e para distintos números de Couette  $Co$ . Avaliando as figuras é fácil notar que um aumento na razão de aspecto do canal provoca um aumento gradual no número de Nusselt que varia com a intensidade da velocidade do canal. Para  $Co$  menores que 0,5 o comportamento é ligeiramente diferente do que para valores maiores que esse, como mostra a Figura 5.16(a). Vemos que para as curvas apresentadas, um aumento de  $Co$  reduz a variação média na intensidade dos valores de  $Nu$ , apesar de partirem aproximadamente do mesmo valor, mas mantendo o ponto de mínima em  $\lambda = 1,0$ , onde a variável volta a crescer. Isso significa que para baixos números de  $Co$ , quanto mais distantes as paredes laterais do canal, e conseqüentemente baixas razões de aspecto, temos um escoamento laminar e com a transferência de calor predominantemente convectiva, porém ainda influenciada pela condução. Apesar de a condução não dominar a convecção para essa faixa de número de  $Co$ , um aumento na razão de aspecto aumenta gradualmente a transferência de calor dada pela condução. Essa variável atinge seu valor mínimo em  $\lambda = 1,0$  porque nessa razão de aspecto temos um escoamento igualmente distanciado de todas as paredes e, nesse caso, temos a máxima troca de calor por condução possível que acontece nas periferias dos fluidos afetados pela condição de não escorregamento. Conforme aumentamos a razão de aspecto, e conseqüentemente afastamos as paredes superior e inferior, os efeitos convectivos voltam a dominar no canal o que explica o aumento no  $Nu$ .

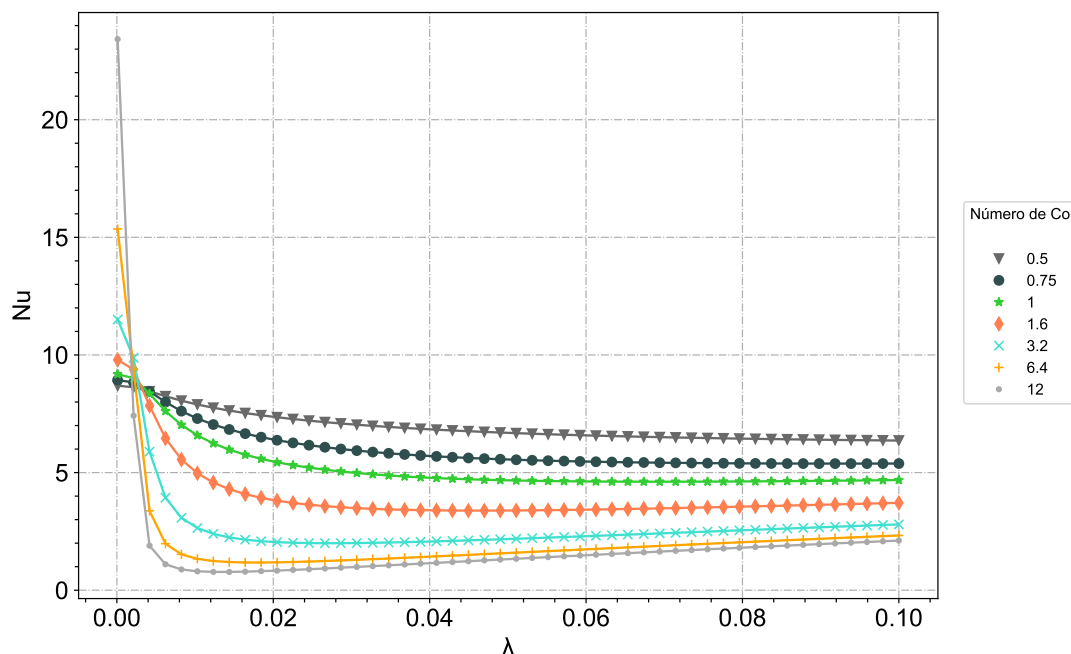
Figura 5.16: Valores do número de Nusselt para distintos valores de  $Co$  e diferentes razões de aspecto  $\lambda$ .



Fonte: Próprios autores, 2022

Conforme aumentamos o número de Couette, o  $Nu$  começa a mudar seu comportamento apresentando um decréscimo súbito para valores de  $\lambda$  muito próximos de zero onde o gráfico apresenta seu ponto de mínimo valor, seguido de um crescimento gradual com a concavidade invertida. Note que quanto maior o número de  $Co$ , mais próximo de um se torna o ponto de inflexão, onde o gráfico mantém-se crescendo mas inverte sua concavidade e cresce conforme  $\lambda$  cresce. A Figura 5.17 apresenta valores de  $Nu$  para números de  $Co$  maiores que 0,5 para razões de aspecto próximas de zero. Perceba que para valores de  $Co$  próximos de 1,0, onde os efeitos de Poiseuille começam a ser menos relevantes e as velocidades no canal passam a ser regidas pelos efeitos de Couette, o  $Nu$  apresenta valores cada vez maiores para  $\lambda = 0$ , evidenciando um comportamento assintótico quanto maior é  $Co$ , demonstrando que no caso em que temos um canal infinitamente largo, a transferência de calor é dada quase que exclusivamente pela convecção. É curioso notar que para razões de aspecto ligeiramente maiores que zero, um aumento de  $Co$  faz com que  $Nu$  apresente valores cada vez menores, se aproximando de zero. Como dito na seção 3.8.1, para o intervalo compreendido entre  $Nu = 0$  e  $Nu = 1,0$  o  $Nu$  representa uma transferência de calor dada apenas por condução. Nessas condições, um escoamento muito rápido dentro de um canal com a altura limitada e paredes laterais muito afastadas, restringe as interações entre as moléculas de fluido fazendo com que só uma parcela de fluido em contato com a superfície móvel (no caso de  $Co > 0$ ) e as intermediações muito próximas a ela sintam os efeitos de deslocamento do escoamento. Portanto, a parcela do fluido responsável pela convecção é muito menor quando comparada com a parcela de fluido estacionária ou quase estacionária, responsável pela condução, fazendo assim com que a razão entre essas energias térmicas seja muito pequena.

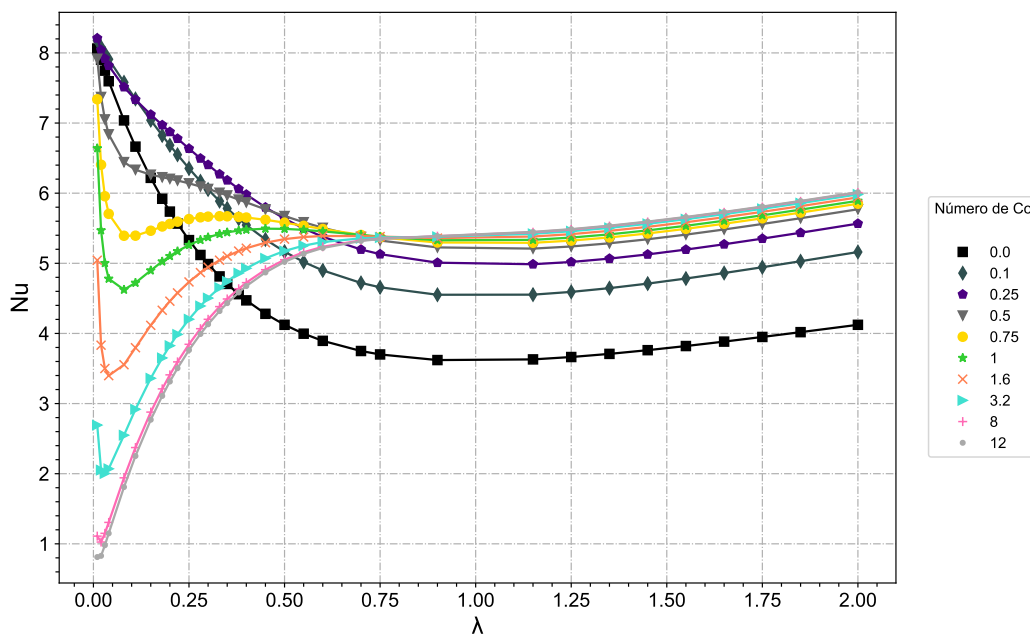
Figura 5.17: Valores do número de Nusselt  $Nu$  para números de  $Co$  maiores que 0,5 e  $\lambda$  próximo de zero.



Fonte: Próprios autores, 2022

Para valores de  $\lambda$  próximos a 0,75 e  $Co$  maiores que 0,5, há uma intersecção nos valores de  $Nu$  e  $\tilde{T}_{med}$  (vide Tabelas 5.11 e 5.12), onde após esse ponto cada curva de  $Co$  decresce até  $\lambda = 1,0$  onde volta a crescer indefinidamente para os valores utilizados, como mostra a Figura 5.18. Perceba que a variação entre os valores de  $Nu$  para  $Co$  maiores que 6,4 é mínima para valores de  $\lambda$  ligeiramente maiores que zero, como mostra a Figura 5.17, comportamento esse que se repete entre os valores de  $Co$  iguais a 8,0 e 12 na Figura 5.18.

Figura 5.18: Parâmetro geral da variação do número de Nusselt  $Nu$  para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  e para diferentes valores do número de Couette  $Co$ .



Fonte: Próprios autores, 2022

Tabela 5.11: Valores de  $Nu$  e  $\tilde{T}_{med}$  para diferentes valores de  $\lambda$  e  $Co$ .

$\lambda$	$Co = 0,5$		$Co = 0,75$		$Co = 1,0$	
	$Nu$	$\tilde{T}_{med}$	$Nu$	$\tilde{T}_{med}$	$Nu$	$\tilde{T}_{med}$
0,50	5,17663	-0,04829	5,63653	-0,04435	5,67419	-0,04406
0,55	5,25205	-0,04760	5,49696	-0,04548	5,58586	-0,04476
0,60	5,30345	-0,04714	5,37822	-0,04648	5,50616	-0,04540
0,65	5,33652	-0,04685	5,27875	-0,04736	5,43591	-0,04599
0,70	5,35635	-0,04667	5,19674	-0,04811	5,37543	-0,04651
0,75	5,36732	-0,04658	5,13040	-0,04873	5,32463	-0,04695
0,80	5,37296	-0,04653	5,07801	-0,04923	5,28322	-0,04732
0,85	5,37604	-0,04650	5,03797	-0,04962	5,25073	-0,04761
0,90	5,37863	-0,04648	5,00887	-0,04991	5,22661	-0,04783
0,95	5,38216	-0,04645	4,98940	-0,05011	5,21023	-0,04798
1,00	5,38764	-0,04640	4,97842	-0,05022	5,20096	-0,04807

Fonte: Próprios autores, 2022

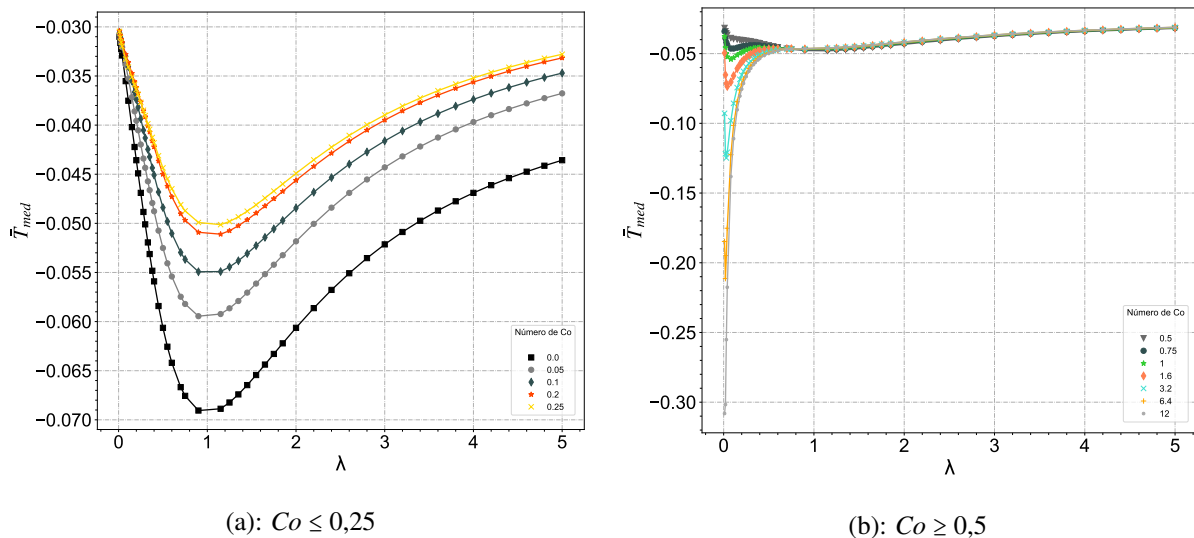
Tabela 5.12: Valores de  $Nu$  e  $\tilde{T}_{med}$  para diferentes valores de  $\lambda$  e  $Co$ .

$\lambda$	$Co = 1,6$		$Co = 3,2$		$Co = 8,0$	
	$Nu$	$\tilde{T}_{med}$	$Nu$	$\tilde{T}_{med}$	$Nu$	$\tilde{T}_{med}$
0,50	5,57979	-0,04480	5,49102	-0,04553	5,05136	-0,04949
0,55	5,53485	-0,04517	5,47691	-0,04565	5,15817	-0,04847
0,60	5,48916	-0,04554	5,45569	-0,04582	5,23563	-0,04775
0,65	5,44521	-0,04591	5,43089	-0,04603	5,28987	-0,04726
0,70	5,40479	-0,04626	5,40528	-0,04625	5,32661	-0,04693
0,75	5,36916	-0,04656	5,38097	-0,04646	5,35087	-0,04672
0,80	5,33909	-0,04682	5,35948	-0,04665	5,36686	-0,04658
0,85	5,31501	-0,04704	5,34186	-0,04680	5,37794	-0,04649
0,90	5,29704	-0,04720	5,32872	-0,04692	5,38665	-0,04641
0,95	5,28513	-0,04730	5,32039	-0,04699	5,39487	-0,04634
1,00	5,27905	-0,04736	5,31693	-0,04702	5,40391	-0,04626

Fonte: Próprios autores, 2022

Como visto na seção 3.8.1, o  $Nu$  foi definido como sendo o negativo de um quarto da temperatura média, então essas propriedades variam de forma similar e dependente. Isso fica bem claro quando comparamos as Figuras 5.18 e 5.20. Nas Figuras 5.19(a) e 5.19 vemos que rapidamente o escoamento passa a ter baixas variações na temperatura média com uma mudança pequena no número de  $Co$ . Para números de  $Co$  entre 0,5 e 1,6 a variação média na  $\tilde{T}_{med}$  é pequena, aumentando para pequenos valores de  $\lambda$  dada a condição assintótica de  $\lambda = 0$  com redução nas intensidades de  $\tilde{T}_{med}$  máximas, que são tão mais intensas quanto maior é o  $Co$ , de forma abrupta. Para essa região, a  $\tilde{T}_{med}$  é mínima se aproximando de zero em  $\lambda = 0$ , aumentando para valores cada vez mais negativos com o aumento de  $\lambda$  para valores menores que 0,1, onde atinge o máximo e reduz-se de forma gradual até que se aproxime de valores pouco variáveis com o acréscimo de  $\lambda$ .

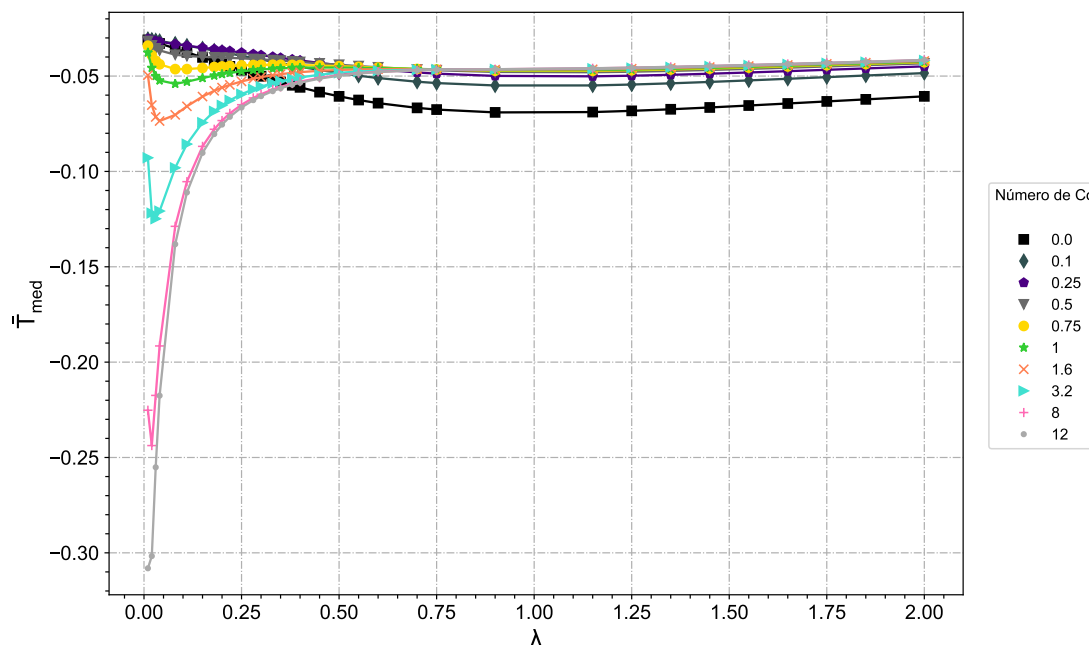
Figura 5.19: Valores da temperatura média  $\tilde{T}_{med}$  para distintos valores de  $Co$  e diferentes razões de aspecto  $\lambda$ .



Fonte: Próprios autores, 2022

Veja que para valores de  $Co$  pequenos, a maior temperatura média acontece em  $\lambda = 1,0$  e é tão mais intensa quanto menor é o  $Co$ , diferentemente do que acontece para valores de  $Co$  maiores que 1,0.

Figura 5.20: Parâmetro geral da variação da temperatura média  $\tilde{T}_{med}$  para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  e para diferentes valores do número de Couette  $Co$ .



Fonte: Próprios autores, 2022

No caso da temperatura máxima, o padrão das curvas é bem parecido com o visto nos gráficos de temperatura média. Uma notável diferença é vista para valores de  $Co$  entre 0,2 e 0,5. Note que para valores de  $\lambda$  muito próximos de zero a  $\tilde{T}_{m\acute{a}x}$  apresenta o mesmo comportamento anteriormente visto, a  $\tilde{T}_{m\acute{a}x}$  parte de valores muito próximos de zero aumentando sua intensidade instantaneamente para valores mais negativos, porém com um valor menor do que a intensidade máxima da  $\tilde{T}_{m\acute{a}x}$ , onde inicialmente decresce sua intensidade até valores de  $\lambda$  próximos de 0,4 onde volta a torna-se mais negativo até que  $\tilde{T}_{m\acute{a}x}$  atinja seu maior valor (mais negativo) em  $\lambda = 1,0$  e volta a decrescer.

Quanto maior o número de Couette, mais evidente se torna o comportamento assintótico do gráfico para  $\lambda = 0$ , onde rapidamente a temperatura máxima sai de zero para um valor muito negativo (vide Figura 5.22). Isso acontece porque para pequenas razões de aspecto ( $\lambda \leq 0,01$ ), temos um escoamento com o campo de velocidade pouco difundido no canal. Para número de  $Co$  maiores que 1,0, assim como mostra a Figura 5.21, concentra-se na região superior do canal. Nessa região, as velocidades de grande parcela das partículas fluidas são muito elevadas, o que faz com que o  $Re$  também seja. Um elevado número de  $Re$  propicia um elevado número  $Nu$  que nos indica que temos uma transferência de calor acontecendo somente por convecção, e através de uma de suas formulações, sabemos que associado a esse escoamento temos um alto valor de

coeficiente de troca de calor por convecção. Nessa região, temos um ambiente que proporciona, a uma pequena parcela do fluido, temperaturas muito intensas.

Figura 5.21: Valores da temperatura máxima  $\tilde{T}_{\text{máx}}$  para distintos valores de  $Co$  e diferentes razões de aspecto  $\lambda$ .

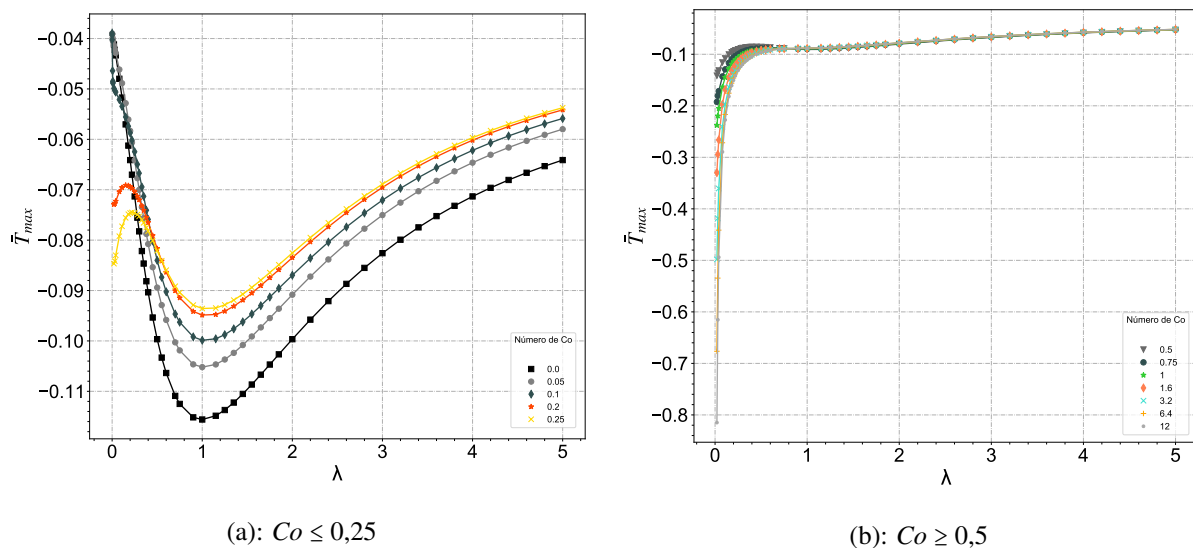
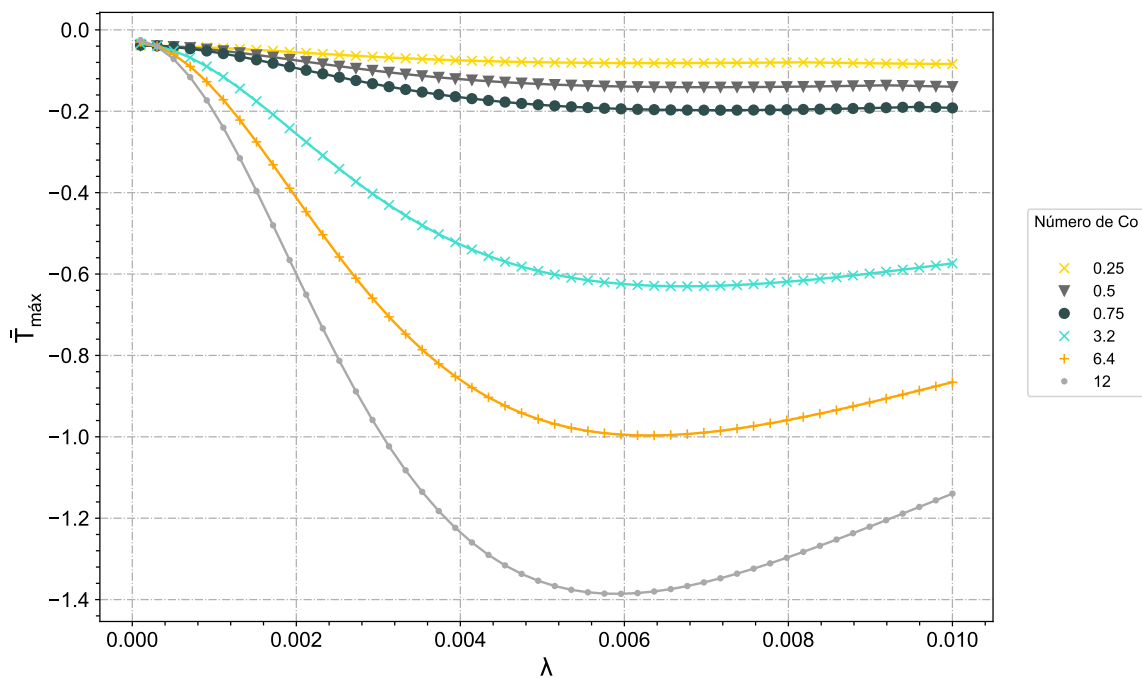


Figura 5.22: Curva da rápida variação da temperatura máxima  $\tilde{T}_{\text{máx}}$  para razões de aspecto entre  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 0,01$  para alguns valores do número de Couette  $Co$ .

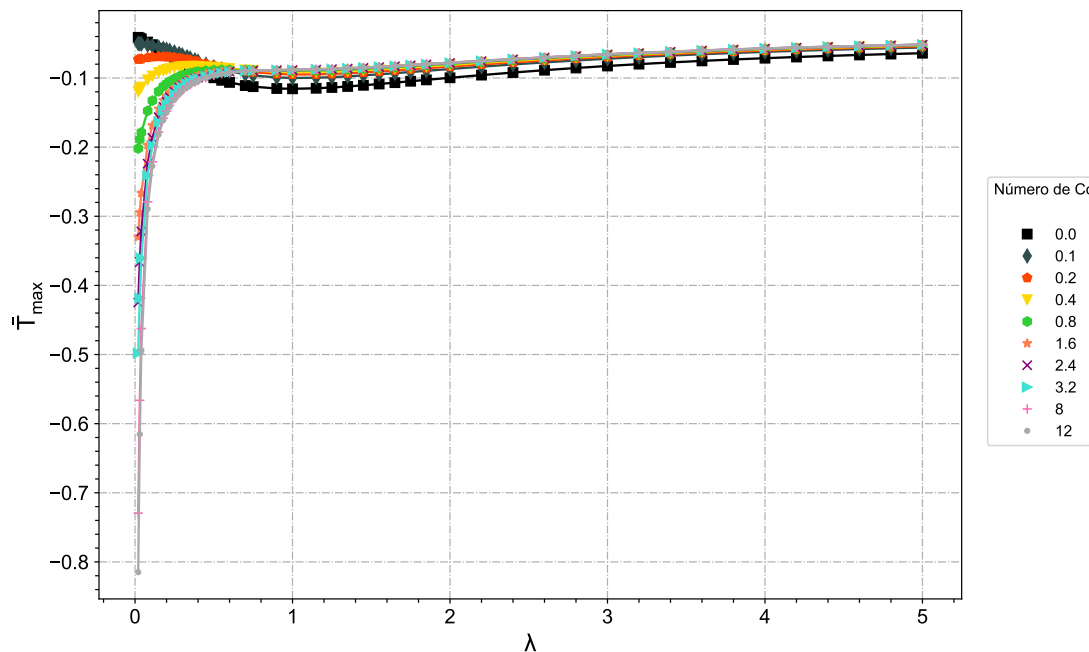


Fonte: Próprios autores, 2022



Como nessa região da razão de aspecto temos uma grande parcela de fluido quase imóvel e a transferência de calor acontece quase que exclusivamente por convecção com baixíssimas influências dadas pela condução, temos uma grande região do escoamento que praticamente não troca calor, o que faz com que a temperatura média no canal seja pequena mesmo com temperaturas máximas muito elevadas.

Figura 5.23: Parâmetro geral da variação da temperatura máxima  $\tilde{T}_{\text{máx}}$  para diferentes razões de aspecto  $\lambda$  e para diferentes valores do número de Couette  $Co$ .



Fonte: Próprios autores, 2022

Perceba da Figura 5.23 que a variação dos valores de temperatura máxima para  $\lambda > 1,0$  é muito pouca para valores de  $Co$  maiores do 0,2 e o crescimento da curva (portanto, uma redução no valor de  $\tilde{T}_{\text{máx}}$  e uma aproximação dessa variável do valor nulo) acontece lentamente, como mostra a Tabela 5.13. Veja que até valores de  $\lambda = 2,0$  a precisão dos resultados de  $Co = 1,6$  e  $Co = 12$  é de três casa decimais. Conforme aumentamos  $\lambda$ , esse número cai para duas casas decimais, mesmo para  $Co$  distanciados por uma dezena.

Tabela 5.13: Valores de  $\tilde{T}_{\text{máx}}$  determinado para distintos valores de  $\lambda$  e vários números de  $Co$ .

$\lambda$	$\tilde{T}_{\text{máx}}$							
	$Co = 0$	$Co = 0,2$	$Co = 0,8$	$Co = 1,6$	$Co = 2,4$	$Co = 4,0$	$Co = 8$	$Co = 12$
1,00	-0,11559	-0,09487	-0,08963	-0,08876	-0,08849	-0,08828	-0,08813	-0,08808
1,15	-0,11485	-0,09475	-0,08929	-0,08824	-0,08789	-0,08761	-0,08740	-0,08733
1,25	-0,11371	-0,09410	-0,08869	-0,08761	-0,08723	-0,08694	-0,08671	-0,08664
1,35	-0,11223	-0,09311	-0,08784	-0,08675	-0,08638	-0,08608	-0,08585	-0,08577
1,45	-0,11052	-0,09189	-0,08679	-0,08573	-0,08536	-0,08506	-0,08483	-0,08476
1,55	-0,10865	-0,09051	-0,08560	-0,08457	-0,08421	-0,08392	-0,08370	-0,08362
1,65	-0,10669	-0,08902	-0,08431	-0,08332	-0,08297	-0,08269	-0,08247	-0,08240
1,75	-0,10469	-0,08746	-0,08295	-0,08200	-0,08166	-0,08139	-0,08118	-0,08111
1,85	-0,10266	-0,08587	-0,08155	-0,08064	-0,08032	-0,08006	-0,07986	-0,07979
2,00	-0,09966	-0,08348	-0,07942	-0,07857	-0,07827	-0,07802	-0,07783	-0,07777
2,20	-0,09577	-0,08035	-0,07661	-0,07583	-0,07555	-0,07533	-0,07516	-0,07510
2,40	-0,09210	-0,07736	-0,07391	-0,07318	-0,07293	-0,07272	-0,07256	-0,07251
2,60	-0,08868	-0,07456	-0,07134	-0,07067	-0,07044	-0,07025	-0,07010	-0,07006
2,80	-0,08551	-0,07195	-0,06895	-0,06833	-0,06811	-0,06793	-0,06780	-0,06775
3,00	-0,08259	-0,06954	-0,06673	-0,06615	-0,06594	-0,06578	-0,06565	-0,06561
3,20	-0,07992	-0,06732	-0,06468	-0,06413	-0,06394	-0,06379	-0,06367	-0,06363
3,40	-0,07747	-0,06529	-0,06279	-0,06228	-0,06210	-0,06195	-0,06184	-0,06180
3,60	-0,07523	-0,06343	-0,06106	-0,06057	-0,06040	-0,06027	-0,06016	-0,06013
3,80	-0,07319	-0,06173	-0,05947	-0,05901	-0,05885	-0,05872	-0,05862	-0,05859
4,00	-0,07133	-0,06018	-0,05802	-0,05758	-0,05743	-0,05730	-0,05721	-0,05718
4,20	-0,06962	-0,05876	-0,05668	-0,05626	-0,05612	-0,05600	-0,05591	-0,05588
4,40	-0,06806	-0,05746	-0,05546	-0,05506	-0,05492	-0,05481	-0,05472	-0,05469
4,60	-0,06663	-0,05626	-0,05434	-0,05395	-0,05382	-0,05371	-0,05363	-0,05360
4,80	-0,06532	-0,05517	-0,05331	-0,05294	-0,05281	-0,05270	-0,05262	-0,05260
5,00	-0,06412	-0,05416	-0,05236	-0,05200	-0,05188	-0,05178	-0,05170	-0,05167

Fonte: Próprios autores, 2021

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 ENCERRAMENTO

Com este trabalho fomos capazes de abordar vários aspectos que envolvem o escoamento do nosso estudo, o escoamento de Couette-Poiseuille em um canal retangular. Desenvolvemos habilidades para: encontrar soluções analíticas e numéricas; fazer plotagens dos campos de estudos; e aprofundar no tema em que envolve esse escoamento (estudo bibliográfico).

Analisamos primeiramente a parte analítica de cada escoamento que o compõe (Couette e Poiseuille) em duas dimensões e também da composição de ambos, partindo da equação de Navier Stokes até chegar na solução de cada um dos campos de velocidade, com as respectivas condições de contorno. Também introduzimos outras variáveis, como a vazão e a taxa de cisalhamento. Após essa abordagem inicial, partimos para o estudo em questão, utilizando o modelo proposto por Rowell e Finlayson (1922) para obter a solução analítica desse modelo. E além disso, desenvolvemos um modelo numérico, utilizando o método das diferenças finitas para obter uma solução numérica, validando-o com a solução analítica. Fomos capazes também, de além de obter soluções para esse escoamento, entender e estudar o processo real que envolve esse escoamento, a extrusão. Mapeamos esse estudo que se iniciou a muito anos atrás e que até hoje é estudado, com algumas abordagens diferentes, e sendo autores diferentes.

Após a obtenção da solução computacional do campo de velocidade do escoamento em questão, utilizamos a mesma metodologia empregada para analisar uma nova variável que foi introduzida no escoamento, que é a temperatura. Considerando que o escoamento é não isotérmico, conseguimos obter também o campo de temperatura desse escoamento para diferentes variações.

Para ambas as partes, desenvolvemos uma análise crítica, já que foram analisados diferentes casos para o mesmo estudo, variando o efeito de Couette, assim também como as dimensões do canal, pela razão de aspecto. Portanto, fizemos uma análise para cada um dos casos, apontando mudanças, e explicando alguns comportamentos de certas variáveis baseado nos modelos gráficos criados.

Com isso fomos capazes de colaborar com esse estudo, fornecendo modelos numéricos e analíticos, e outras abordagens sobre o tema, que pode acrescentar para quem deseja entender um pouco mais sobre o escoamento que ocorre no processo de extrusão, assim como para outras pessoas que desejam ir um pouco mais além do que foi estudado, incluindo uma nova variável ou alteração no mesmo.

## 6.2 SÍNTESE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Através das equações governantes discretizadas através do método das diferenças finitas e simuladas computacionalmente, obtivemos resultados numéricos com satisfatória precisão mesmo para malhas consideravelmente pequenas escolhidas no intuito de economizar custo computacional, com erros relativos na validação inferiores a 1% para praticamente todos os casos analisados.

Partindo da validação do modelo numérico com modelo proposto por Rowell e Finlayson (1922), analisamos o comportamento do escoamento de Couette-Poiseuille com as condições de contorno impostas. Para uma razão de aspecto muito pequena, aproximando o canal de placas paralelas de comprimentos infinitos, nos deparamos com uma propagação de erros muito grande associada a definição das variáveis no programa e da limitação do modelo utilizado, o que nos afastou da precisão dos resultados presentes na literatura. Para valores de razão de aspecto ligeiramente maiores do que zero, os resultados se apresentaram satisfatórios e concisos com a teoria.

Na geração do campo de velocidade, obtivemos variáveis como vazão e velocidade média. Ao contrário do que esperado inicialmente esperado, a velocidade média do escoamento não cresce indefinidamente com o aumento da razão de aspecto. O  $fRe$  associado a perda de pressão por sua vez se torna menor e estável com o aumento de  $\lambda$ , onde decai, quase que invariavelmente a partir determinados números de  $Co$ . Para pequenos valores de  $Co$  ( $Co \leq 0,3$ ), o comportamento é distinto já que a velocidade média do escoamento decai com o aumento de  $\lambda$ , o que implica no aumento da perda de pressão para essa faixa de  $Co$ .

Com o campo de temperatura, o comportamento foi ligeiramente distinto do esperado, onde procurávamos um escoamento com temperaturas tão difundidas quanto as velocidades das partículas. Ao invés disso, o campo de temperatura possui uma difusão mais lenta que o campo de velocidade. Apesar dos altos valores de velocidade com a inclusão do número de  $Co$  e consequentemente dos altos coeficientes de troca de calor por convecção no escoamento, a região de intensas temperaturas se concentra em uma região muito específica do canal, entre o centro e o topo com elevados gradientes de temperatura ao redor dessa região. Para baixos valores de  $\lambda$ , a variável que corresponde a razão entre as formas de troca de calor,  $Nu$ , tende ao infinito, o que é coerente com a física do problema. Para valores de  $\lambda$  próximos de zero, o comprimento vertical é muito menor que o horizontal com uma pequena parcela do volume trocando calor com o movimento do fluido, mas sendo muito afetada pela condição adiabática e temperatura nula das superfícies, fazendo com que a temperatura média tendesse a zero e, consequentemente,  $Nu$  ao infinito.

Quanto as intensidades da temperatura, é curioso observar que a temperatura máxima do canal decresce com o aumento de  $\lambda$ , partindo de valores muito próximos de zero quanto mais próximo de zero  $\lambda$  está, crescendo subitamente, e decrescendo com o aumento de  $\lambda$ . Esse efeito é justificado pela interação das partículas de fluido de alta velocidade com a superfície adiabática que lhes fornece momento em um escoamento cada vez menos influenciado pelo gradiente de pressão e

mais dependente do cisalhamento.

Para trabalhos futuros, recomendamos um aprimoramento nas regiões de baixa razão de aspecto, que apesar de elevarem o custo computacional, fornecem dados importantes para a evolução do escoamento, já que podemos presenciar o escoamento que ocorre em aproximadamente placas paralelas para um escoamento em duto de seção retangular. Uma expansão nas condições de contorno proporciona um complemento a esse estudo e podem proporcionar valiosos dados no estudo de escoamentos dentro de dutos de seções retangulares. Outra abordagem que pode ser feita, é explorar diferentes geometrias do canal, como circulares, semi elípticas, triangulares, etc. E ainda, estudar o caso em que o fluido é não Newtoniano.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ROWELL, H. S.; FINLAYSON, D. Screw viscosity pumps. Engineering, v. 114, p. 606–607, 1922.
- 2 SYRJÄLÄ, S. Further finite element analyses of fully developed laminar flow of power-law non-Newtonian fluid in rectangular ducts: Heat transfer predictions. International Communications in Heat and Mass Transfer, Elsevier, v. 23, n. 6, p. 799–807, 1996.
- 3 CARLEY, J.; STRUB, R. Basic concepts of extrusion. Industrial & Engineering Chemistry, ACS Publications, v. 45, n. 5, p. 970–973, 1953.
- 4 GRIFFITH, R. Fully developed flow in screw extruders. theoretical and experimental study. Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals, ACS Publications, v. 1, n. 3, p. 180–187, 1962.
- 5 LIU, T.-J.; CHEN, K.-C. Generalized couette flow in channels of irregular cross-section. Journal of the Chinese Institute of Engineers, Taylor & Francis, v. 10, n. 3, p. 345–352, 1987.
- 6 KAISER, H.; SMITH, C. W. Prediction of flow of a melted plastic through a screw extruder. 1969.
- 7 TAMURA, M. S.; HENDERSON, J. M.; POWELL, R. L.; SHOEMAKER, C. F. Analysis of the helical screw rheometer for fluid food. Journal of Food Process Engineering, Wiley Online Library, v. 16, n. 2, p. 93–126, 1993.
- 8 WILCZYŃSKI, K.; NASTAJ, A.; LEWANDOWSKI, A.; WILCZYŃSKI, K. J.; BUZIAK, K. Fundamentals of global modeling for polymer extrusion. Polymers, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 11, n. 12, p. 2106, 2019.
- 9 AHMED, M. E. S. Numerical solution of power law fluids flow and heat transfer with a magnetic field in a rectangular duct. International Communications in Heat and Mass Transfer, Elsevier, v. 33, n. 9, p. 1165–1176, 2006.
- 10 FERDYNUS, M.; SIKORA, J.; GASPAR-CUNHA, A. Mecanismo de Plasticização da Extrusora Monofuso. Instituto Nacional da propriedade Industrial, 2019. Classificação internacional B29C 48/36 (2019), B29C 48/50 (2019) e B29C 48/505 (2019). Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1822/68636>>.
- 11 ROWELL, H. S.; FINLAYSON, D. Screw viscosity pumps. Engineering, v. 126, p. 249–250, 385–387, 1928.
- 12 CARLEY, J.; MALLOUK, R.; MCKELVEY, J. Simplified flow theory for screw extruders. Industrial & Engineering Chemistry, ACS Publications, v. 45, n. 5, p. 974–978, 1953.
- 13 ECCHER, S.; VALENTINOTTI, A. Experimental determination of velocity profiles in an extruder screw. Industrial & Engineering Chemistry, ACS Publications, v. 50, n. 5, p. 829–836, 1958.
- 14 MOHR, W.; SAXTON, R.; JEPSON, C. Theory of mixing in the single-screw extruder. Industrial & Engineering Chemistry, ACS Publications, v. 49, n. 11, p. 1857–1862, 1957.
- 15 MIDDLEMAN, S. Flow of power law fluids in rectangular ducts. Transactions of the Society of Rheology, The Society of Rheology, v. 9, n. 1, p. 83–93, 1965.
- 16 IKRYANNIKOV, N. Temperature distribution in laminar flow of an incompressible fluid in a rectangular channel allowing for energy dissipation. Journal of Engineering Physics, Springer, v. 10, n. 3, p. 180–182, 1966.

- 17 SHAH, R. K.; LONDON, A. L. Laminar Flow Forced Convection in Ducts - A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data. [S.l.]: Academic Press, INC, 1978.
- 18 LI, Y.; HSIEH, F. Modeling of flow in a single screw extruder. Journal of Food Engineering, Elsevier, v. 27, n. 4, p. 353–375, 1996.
- 19 LI, Y.; HSIEH, F. New melt conveying models for a single screw extruder 1. Journal of Food Process Engineering, Wiley Online Library, v. 17, n. 3, p. 299–324, 1994.
- 20 MCKELVEY, J. Experimental studies of melt extrusion. Industrial & Engineering Chemistry, ACS Publications, v. 45, n. 5, p. 982–986, 1953.
- 21 MIDDLEMAN, S. Fundamentals of Polymer Processing. [S.l.]: McGraw-Hill College, 1977.
- 22 CHOO, K.; NEELAKANTAN, N.; PITTMAN, J. Experimental deep-channel velocity profiles and operating characteristics for a single-screw extruder. Polymer Engineering & Science, Wiley Online Library, v. 20, n. 5, p. 349–356, 1980.
- 23 CAMPBELL, G.; SWEENEY, P.; FELTON, J. Experimental investigation of the drag flow assumption in extruder analysis. Polymer Engineering & Science, Wiley Online Library, v. 32, n. 23, p. 1765–1770, 1992.
- 24 ALVES, M. V. C.; JR, J. R. B.; PRATA, A. T. Analytical solution of single screw extrusion applicable to intermediate values of screw channel aspect ratio. Journal of Food Engineering, Elsevier, v. 92, n. 2, p. 152–156, 2009.
- 25 VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. [S.l.]: Pearson education, 2007.
- 26 ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H.; RAMAKANTH, M.; SHANKAR, V. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. [S.l.]: CRC Press, 2020.
- 27 HUGHES, T. J. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- 28 PHAM, T. V.; MITSOULIS, E. Viscoplastic flows in ducts. The Canadian Journal of Chemical Engineering, Wiley Online Library, v. 76, n. 1, p. 120–125, 1998.
- 29 MARSCHIK, C.; ROLAND, W.; LÖW-BASELLI, B.; MIETHLINGER, J. A heuristic method for modeling three-dimensional non-Newtonian flows of polymer melts in single-screw extruders. Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics, Elsevier, v. 248, p. 27–39, 2017.
- 30 MORGON, R.; PEREIRA, S. do L. Regressão simbólica com seleção por amostragem. 2015.
- 31 MARSCHIK, C.; ROLAND, W.; MIETHLINGER, J. A network-theory-based comparative study of melt-conveying models in single-screw extrusion: A. isothermal flow. Polymers, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 10, n. 8, p. 929, 2018.
- 32 MARSCHIK, C.; ROLAND, W.; DÖRNER, M.; STEINBICHLER, G.; SCHÖPPNER, V. Leakage-flow models for screw extruders. Polymers, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 13, n. 12, p. 1919, 2021.
- 33 PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- 34 BEJAN, A. Convection heat transfer. [S.l.]: John wiley & sons, 2013.

- 35 CONNOR, N. What is Nusselt Number Definition. 2019. Disponível em: <<https://www.thermal-engineering.org/what-is-nusselt-number-definition/>>.
- 36 INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S. et al. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. [S.l.]: Wiley New York, 1996. v. 6.
- 37 ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. Tranferência de Calor e Massa. [S.l.]: AMGH editora, 2009.
- 38 MARCO, S.; HAN, L. et al. A note on limiting laminar Nusselt number in ducts with constant temperature gradient by analogy to thin-plate theory. Trans. ASME, v. 77, n. 1955, p. 625–630, 1955.
- 39 HOFFMAN, J. Numerical Methods for Engineers and Scientists. [S.l.]: Marcel Dekker Inc, 2001.
- 40 PEDROSA, D. P. F. Integração numérica - material complementar de aula da disciplina DCA0399: *Métodos Computacionais em Engenharia Civil*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2005.
- 41 LANDAU, L. D.; LIFSCHITZ, E. M. *Statistische physik*. Akademie Verlag, v. 5, p. 172 and 180–181, 1966.



## APÊNDICES

# I. REFERÊNCIAS MATEMÁTICAS

## I.1 SÉRIE DE FOURIER DA ONDA QUADRADA

Seja  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  definida por

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } -L \leq x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < L \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

conhecida como *onda quadrada* (gráfico na Figura I.1).

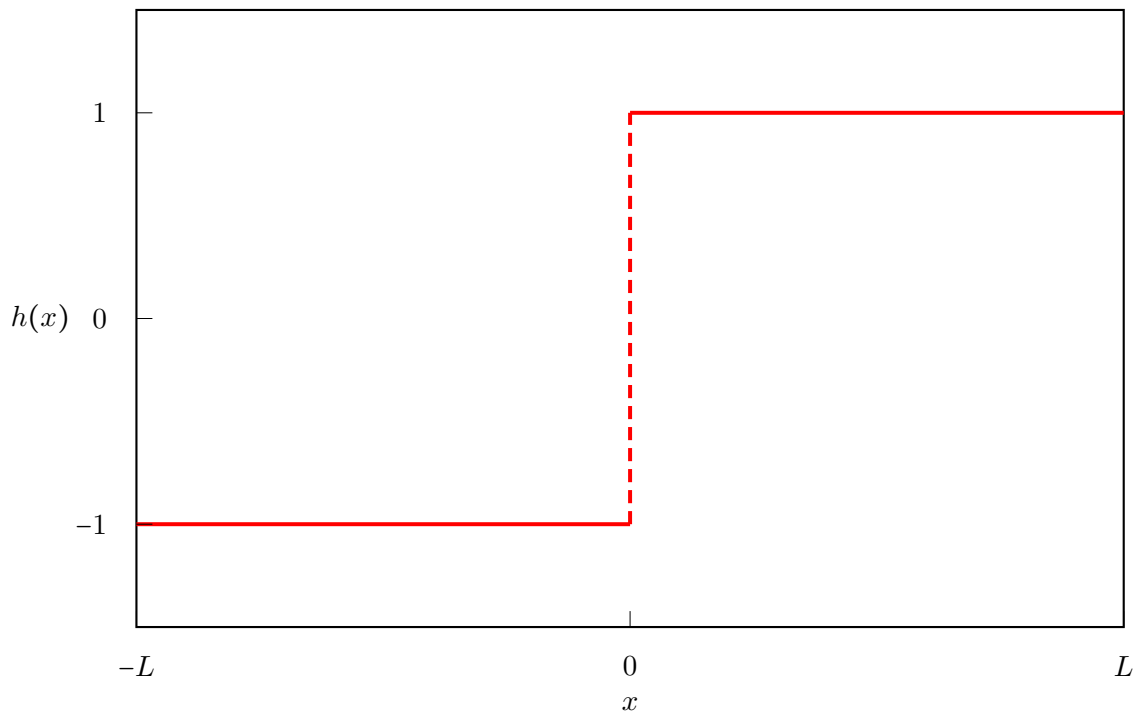


Figura I.1: Onda quadrada.

Como  $h$  é uma função ímpar<sup>1</sup>, a sua série de Fourier é uma série de senos, isto é,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{I.2})$$

onde

$$X_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2(1 - \cos \pi n)}{\pi n}$$

---

<sup>1</sup> $h(x) = -h(-x)$

ou seja,

$$X_{2k} = 0, \quad X_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Portanto, a série de fourier para a função  $h$  é

$$h(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{L} \quad (\text{I.3})$$

Logo,

$$-1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{L} \quad (\text{I.4})$$

para  $-L \leq x < 0$  e

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{L} \quad (\text{I.5})$$

para  $0 \leq x < L$ .

## I.2 DEDUÇÃO DA EDO DE SEGUNDA ORDEM

Sendo a equação abaixo (I.6) uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de segunda ordem não homogênea, tem-se uma solução particular e duas soluções independentes, sendo a solução geral a soma de todas elas. Assim, devemos encontrar cada solução, para se obter a expressão para  $Y_m$ .

$$\frac{d^2 Y_m}{dy^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2} Y_m = \frac{4}{m \pi \mu} \frac{dp}{dx} \quad (\text{I.6})$$

No caso particular em que  $Y_m$  é uma constante, tem-se que  $\frac{d^2 Y_m}{dy^2} = 0$ , portanto esta solução particular da equação (I.6) se resume a

$$Y_m = -\frac{4b^2}{m^3 \pi^3 \mu} \frac{dp}{dx}. \quad (\text{I.7})$$

Como toda EDO pode ter sua solução escrita como uma combinação de sua solução particular e homogênea, o objetivo agora é encontrar as soluções independentes do problema. Considerando uma EDO de segunda ordem linear, temos

$$ay'' + by' + cy = g. \quad (\text{I.8})$$

Quando  $g$  é igual a zero e considerando as variáveis  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes, a equação acima se torna

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (\text{I.9})$$

Utilizando a função exponencial como solução do problema  $y = e^{ry}$ , em que  $r$  é um parâmetro a ser determinado, e substituindo na equação (I.8), obtemos

$$ar^2 e^{ry} + bre^{ry} + ce^{ry} = 0, \quad (\text{I.10})$$

que pode ser simplificado da seguinte forma

$$e^{ry}(ar^2 + br + c) = 0. \quad (\text{I.11})$$

Como  $e^{ry} \neq 0$ , temos que

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (\text{I.12})$$

Substituindo as constantes do problema na equação (I.12), e sabendo que  $b = 0$ , obtemos

$$r^2 - \frac{m^2\pi^2}{b^2} = 0, \quad (\text{I.13})$$

e portanto,

$$r = \pm \frac{m\pi}{b}. \quad (\text{I.14})$$

A equação (I.12) é conhecida como equação característica para equações diferenciais. Seu significado reside no fato de que, se  $r$  é uma raiz da equação polinomial, então  $y = e^{ry}$  é solução da equação diferencial (I.6).

Como a variável  $m$  é um número positivo e inteiro e, juntamente com  $b$  (também positivo) são parâmetros geométricos, ambos pertencem ao conjunto dos números reais, e  $y_1(z) = e^{\frac{m\pi y}{b}}$  e  $y_2(z) = e^{-\frac{m\pi y}{b}}$  são soluções da equação (I.6). Como  $y_1(z)$  e  $y_2(z)$  são soluções particulares da equação (I.6), a combinação delas também o será, portanto temos que

$$y(z) = c_1 y_1(z) + c_2 y_2(z) = c_1 e^{\frac{m\pi y}{b}} + c_2 e^{-\frac{m\pi y}{b}}. \quad (\text{I.15})$$

Observando que o  $\cosh(x)$  e o  $\sinh(x)$  são, respectivamente, definidos da seguinte forma

$$\cosh(x) = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{2},$$

podemos reescrever a equação (I.15) em função dessas variáveis. Portanto, fazendo o uso de tais variáveis, e também em termos das nossas variáveis, temos que

$$Y_m = A_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + B_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{b}\right) - \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (\text{I.16})$$

Em que  $A_m$  e  $B_m$  são constantes.

### I.3 OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO DA VAZÃO

Como vimos, a expressão da velocidade a ser utilizada a partir da solução de Rowell e Finlayson é dada por

$$u = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) \left\{ -\frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} + \cosh\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \left( \frac{4U}{m\pi} + \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right) \right. \\ \left. + \left[ \frac{4b^2}{\pi^3 m^3 \mu} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{m\pi d}{b}\right)} - \coth\left(\frac{m\pi d}{b}\right) \left( \frac{4U}{m\pi} + \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right) \right] \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right\} \quad (\text{I.17})$$

Para encontrarmos a expressão que descreve a vazão do escoamento, basta resolvermos a equação dada por (3.76), substituindo a expressão da velocidade determinada previamente:

$$Q = \int_0^d \int_0^b u \, dy \, dz. \quad (\text{I.18})$$

Por integração direta temos

$$Q = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2\pi^2} \left\{ 2b^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi m}{2}\right) \left[ \left( 2 \frac{4}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} b^2 + \frac{4U}{m\pi} \right) \operatorname{tanh}\left(\frac{\pi dm}{2b}\right) - \pi \frac{4}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} bdm \right] \right\}$$

Reorganizando,

$$Q = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} 2b^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi m}{2}\right) \left\{ \left[ \frac{8}{m^5\pi^5\mu} \frac{dp}{dx} b^2 + \frac{4U}{m^3\pi^3} \right] \operatorname{tanh}\left(\frac{\pi dm}{2b}\right) - \frac{4}{m^4\pi^4\mu} \frac{dp}{dx} bdm \right\}$$

Como  $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi m}{2}\right) = 1$  para  $m = 1, 3, 5, \dots$ , a equação anterior torna-se

$$Q = 2b^2 \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{8}{m^5\pi^5\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \operatorname{tanh}\left(\frac{\pi dm}{2b}\right) + \frac{4U}{m^3\pi^3} \operatorname{tanh}\left(\frac{\pi dm}{2b}\right) \right] - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m^4\pi^4\mu} \frac{dp}{dx} bdm \right\} \quad (\text{I.19})$$

$$+ \frac{4U}{m^3\pi^3} \operatorname{tanh}\left(\frac{\pi dm}{2b}\right) \left. \right\} - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m^4\pi^4\mu} \frac{dp}{dx} bdm \quad (\text{I.20})$$

Da expressão acima, tem-se

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{m^4 \pi^4 \mu} \frac{dp}{dx} bd = \frac{4bd}{\mu \pi^4} \frac{dp}{dx} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4}$$

onde o termo do somatório, ao ser expandido pode ser reescrito como

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

que está associado a um caso particular da função *zeta de Riemann*:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Note que  $\zeta(4)$  é obtida na física, por exemplo, ao integrar a lei de Planck para derivar a lei de Stefan-Boltzman (Landau e Lifschitz, 1966).

Portanto, ao fazer essa substituição, a equação para a vazão se torna

$$Q = 2b^2 \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{8}{m^5 \pi^5 \mu} \frac{dp}{dx} b^2 \tanh\left(\frac{\pi dm}{2b}\right) + \frac{4U}{m^3 \pi^3} \tanh\left(\frac{\pi dm}{2b}\right) \right] - \frac{\pi^4}{96} \frac{4}{\pi^4 \mu} \frac{dp}{dx} bd \right\}$$

ou seja,

$$Q = b^2 \left\{ \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{8U}{m^3 \pi^3} \tanh\left(\frac{m\pi d}{2b}\right) + \frac{16}{m^5 \pi^5 \mu} \frac{dp}{dx} b^2 \tanh\left(\frac{m\pi d}{2b}\right) \right] - \frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} bd \right\}$$

Para simplificar a equação, introduziremos duas constantes, assim como feito por Rowell e Finlayson em 1922.

$$A = \frac{8}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh\left(\frac{m\pi d}{2b}\right)}{m^3}$$

$$B = \frac{d}{12b} - \frac{16}{\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh\left(\frac{m\pi d}{2b}\right)}{m^5}$$

Por fim, podemos escrever a expressão da vazão como sendo

$$Q = b^2 \left( AU + B \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} b^2 \right)$$

## I.4 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO VETOR VELOCIDADE

Partindo da equação da velocidade, dada por (3.74):

$$u = \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi z}{b}\right) \left\{ -\frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} + \cosh\left(\frac{\pi my}{b}\right) \left[ \frac{4U}{m\pi} + \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right] + \left[ \frac{4b^2}{\operatorname{senh}\left(\frac{m\pi d}{b}\right) \pi^3 m^3 \mu} \frac{dp}{dx} - \coth\left(\frac{m\pi d}{b}\right) \left[ \frac{4U}{m\pi} + \frac{4b^2}{m^3\pi^3\mu} \frac{dp}{dx} \right] \right\} \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (\text{I.21})$$

e utilizando os termos adimensionais apresentados na seção 2.7:

- Escala adimensional para  $y$

$$\tilde{y} = \frac{y}{D_h} \quad (\text{I.22})$$

- Escala adimensional para  $z$

$$\tilde{z} = \frac{z}{D_h} \quad (\text{I.23})$$

- Escala adimensional para a velocidade

$$\tilde{u} = \frac{u}{V} \quad (\text{I.24})$$

- Razão de aspecto

$$\lambda = \frac{d}{b} \quad (\text{I.25})$$

- Escala adimensional para a velocidade genérica

$$V = -\frac{D_h^2}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (\text{I.26})$$

- Escala adimensional do comprimento vertical

$$\tilde{d} = \frac{d}{D_h} = \frac{1 + \lambda}{2} \quad (\text{I.27})$$

- Escala adimensional do comprimento transversal

$$\tilde{b} = \frac{b}{D_h} = \frac{1 + \lambda}{2\lambda} \quad (\text{I.28})$$

- Razão de velocidades (Número de Couette)

$$Co = \frac{U}{V} \quad (\text{I.29})$$



conseguimos obter uma expressão adimensional para a equação da velocidade. A fim de simplificar a solução, equação da velocidade será adimensionalizada de forma separada, dividindo a equação em quatro termos como se segue:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 + \tilde{u}_4 \quad (\text{I.30})$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \frac{1}{V} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{m\pi\tilde{z}D_h}{D_h(1+\lambda)/2\lambda} \right) \left[ -\frac{4\frac{D_h^2(1+\lambda)^2}{4\lambda^2}}{m^3\pi^3} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \right] \\ &= \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left[ -\frac{(1+\lambda)^2}{m^3\pi^3\lambda^2} \frac{1}{V} \frac{D_h^2}{\mu} \frac{dp}{dx} \right] \\ &= \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left[ \frac{(1+\lambda)^2}{m^3\pi^3\lambda^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= \frac{1}{V} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left\{ \cosh \left( \frac{m\pi\tilde{y}D_h}{D_h(1+\lambda)/2\lambda} \right) \left[ \frac{4U}{m\pi} + \frac{4\frac{D_h^2(1+\lambda)^2}{4\lambda^2}}{m^3\pi^3} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \right] \right\} \\ &= \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left\{ \cosh \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{y}}{(1+\lambda)} \right) \left[ \frac{4U}{m\pi V} + \frac{(1+\lambda)^2}{m^3\pi^3\lambda^2} \frac{1}{V} \frac{D_h^2}{\mu} \frac{dp}{dx} \right] \right\} \\ &= \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left\{ \cosh \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{y}}{(1+\lambda)} \right) \left[ \frac{4Co}{m\pi} - \frac{(1+\lambda)^2}{m^3\pi^3\lambda^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3 &= \frac{1}{V} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left\{ \sinh \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{y}}{(1+\lambda)} \right) \left( \frac{1}{\sinh(m\pi\lambda)} \frac{4\frac{D_h^2(1+\lambda)^2}{4\lambda^2}}{m^3\pi^3} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) \right\} \\ &= \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left\{ \sinh \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{y}}{(1+\lambda)} \right) \left( \frac{1}{\sinh(m\pi\lambda)} \frac{(1+\lambda)^2}{m^3\pi^3\lambda^2} \frac{1}{V} \frac{D_h^2}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) \right\} \\ &= \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \text{sen} \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left\{ \sinh \left( \frac{2\lambda m\pi\tilde{y}}{(1+\lambda)} \right) \left( \frac{-(1+\lambda)^2}{m^3\pi^3\lambda^2} \frac{1}{\sinh(m\pi\lambda)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_4 &= \frac{1}{V} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left\{ -\operatorname{senh} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \coth(m\pi\lambda) \left[ \frac{4U}{m\pi V} + \frac{4 \frac{D_h^2(1+\lambda)^2}{4\lambda^2}}{m^3 \pi^3 V} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \right] \right\} \\
&= \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left\{ -\operatorname{senh} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \coth(m\pi\lambda) \left[ \frac{4Co}{m\pi} + \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} \frac{D_h^2}{\mu V} \frac{dp}{dx} \right] \right\} \\
&= \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \left\{ -\operatorname{senh} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{z}}{(1+\lambda)} \right) \coth(m\pi\lambda) \left[ \frac{4Co}{m\pi} - \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} \right] \right\} \quad (\text{I.34})
\end{aligned}$$

Com todos os termos devidamente adimensionalizados, temos que o vetor velocidade na sua forma adimensional  $\tilde{u}$ , dada pela soma de (I.31), (I.32), (I.33) e (I.34) conforme (I.30), pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{z}}{1+\lambda} \right) \left\{ \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} + \cosh \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{y}}{1+\lambda} \right) \left[ \frac{4Co}{m\pi} - \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} \right] \right. \\
&+ \left. \left( \frac{-1}{\operatorname{senh}(m\pi\lambda)} \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} - \coth(\lambda m \pi) \left[ \frac{4Co}{m\pi} - \frac{(1+\lambda)^2}{m^3 \pi^3 \lambda^2} \right] \right) \operatorname{senh} \left( \frac{2\lambda m \pi \tilde{y}}{1+\lambda} \right) \right\} \quad (\text{I.35})
\end{aligned}$$

## I.5 ADIMENSIONALIZAÇÃO DA VAZÃO

Partindo da equação (3.76), afim de simplificar as variáveis da solução, tem-se a seguinte equação a ser adimensionalizada:

$$Q = 2b^2 \left\{ \frac{4U}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi d}{b}\right)}{m^3 \left(\cosh\left(\frac{m\pi d}{b}\right) + 1\right)} - \frac{b^2}{24\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{8b^2}{\pi^5 \mu} \frac{dp}{dx} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi d}{b}\right)}{m^5 \left(\cosh\left(\frac{m\pi d}{b}\right) + 1\right)} \right\} \quad (\text{I.36})$$

e utilizando os termos adimensionais apresentados na seção 2.7, saindo de (I.40):

- Escala adimensional para y

$$\tilde{y} = \frac{y}{D_h} \quad (\text{I.37})$$

- Escala adimensional para z

$$\tilde{z} = \frac{z}{D_h} \quad (\text{I.38})$$

- Escala adimensional para a velocidade

$$\tilde{u} = \frac{u}{V} \quad (\text{I.39})$$

- Escala adimensional para a vazão

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{Vbd} \quad (\text{I.40})$$

- Razão de aspecto

$$\lambda = \frac{d}{b} \quad (\text{I.41})$$

- Escala adimensional para a velocidade genérica

$$V = -\frac{D_h^2}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (\text{I.42})$$

- Escala adimensional do comprimento vertical

$$\tilde{d} = \frac{d}{D_h} = \frac{1 + \lambda}{2} \quad (\text{I.43})$$

- Escala adimensional do comprimento transversal

$$\tilde{b} = \frac{b}{D_h} = \frac{1 + \lambda}{2\lambda} \quad (\text{I.44})$$

- Razão de velocidades (Número de Couette)

$$Co = \frac{U}{V} \quad (\text{I.45})$$

Adimensionalizaremos a equação como três termos separados. Assim, temos que

$$\tilde{Q} = \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_3 \quad (\text{I.46})$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= \frac{1}{Vbd} 2b^2 \cdot \left[ \frac{4U}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi d}{b}\right)}{m^3 \left(\cosh\left(\frac{m\pi d}{b}\right) + 1\right)} \right] \\ &= \frac{8U}{\pi^3 Vd} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh\left(m\pi \frac{d}{b}\right)}{m^3 \left(\cosh\left(m\pi \frac{d}{b}\right) + 1\right)} \\ &= \frac{8Co}{\pi^3 \lambda} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi \lambda)}{m^3 \left(\cosh(m\pi \lambda) + 1\right)} \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2 &= \frac{1}{Vbd} 2b^2 \cdot \left( -\frac{b^2}{24\mu} \frac{1}{dx} \frac{dp}{dx} \right) \\ &= -\frac{1}{V\lambda} \frac{\frac{d^2}{\lambda^2}}{12} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \\ &= \frac{1}{12\lambda^3} \left( -\frac{d^2}{V} \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{12\lambda^3} \left( -\frac{\tilde{d}^2}{V} \frac{D_h^2}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{12\lambda^3} \left( \frac{1+\lambda}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_3 &= \frac{1}{Vbd} 2b^2 \cdot \left[ \frac{8b^2}{\pi^5 \mu} \frac{dp}{dx} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh\left(\frac{m\pi d}{b}\right)}{m^5 \left(\cosh\left(\frac{m\pi d}{b}\right) + 1\right)} \right] \\ &= \frac{1}{V\lambda} \frac{16}{\pi^5} \frac{\frac{d^2}{\lambda^2}}{\mu} \frac{1}{dx} \frac{dP}{dx} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi \lambda)}{m^5 \left(\cosh(m\pi \lambda) + 1\right)} \\ &= \frac{1}{\lambda^3} \frac{16}{\pi^5} \left( \frac{d^2}{V} \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \right) \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi \lambda)}{m^5 \left(\cosh(m\pi \lambda) + 1\right)} \\ &= \frac{1}{\lambda^3} \frac{16}{\pi^5} \left( \frac{\tilde{d}^2}{V} \frac{D_h^2}{\mu} \frac{dP}{dx} \right) \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi \lambda)}{m^5 \left(\cosh(m\pi \lambda) + 1\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\lambda^3} \frac{16}{\pi^5} (\tilde{d}^2) \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi\lambda)}{m^5 (\cosh(m\pi\lambda) + 1)} \\
&= -\frac{16}{\pi^5 \lambda^3} \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi\lambda)}{m^5 (\cosh(m\pi\lambda) + 1)} \tag{I.49}
\end{aligned}$$

Logo, se somarmos as partes adimensionais (I.47),(I.48) e (I.49) conforme em (I.46), temos a vazão como

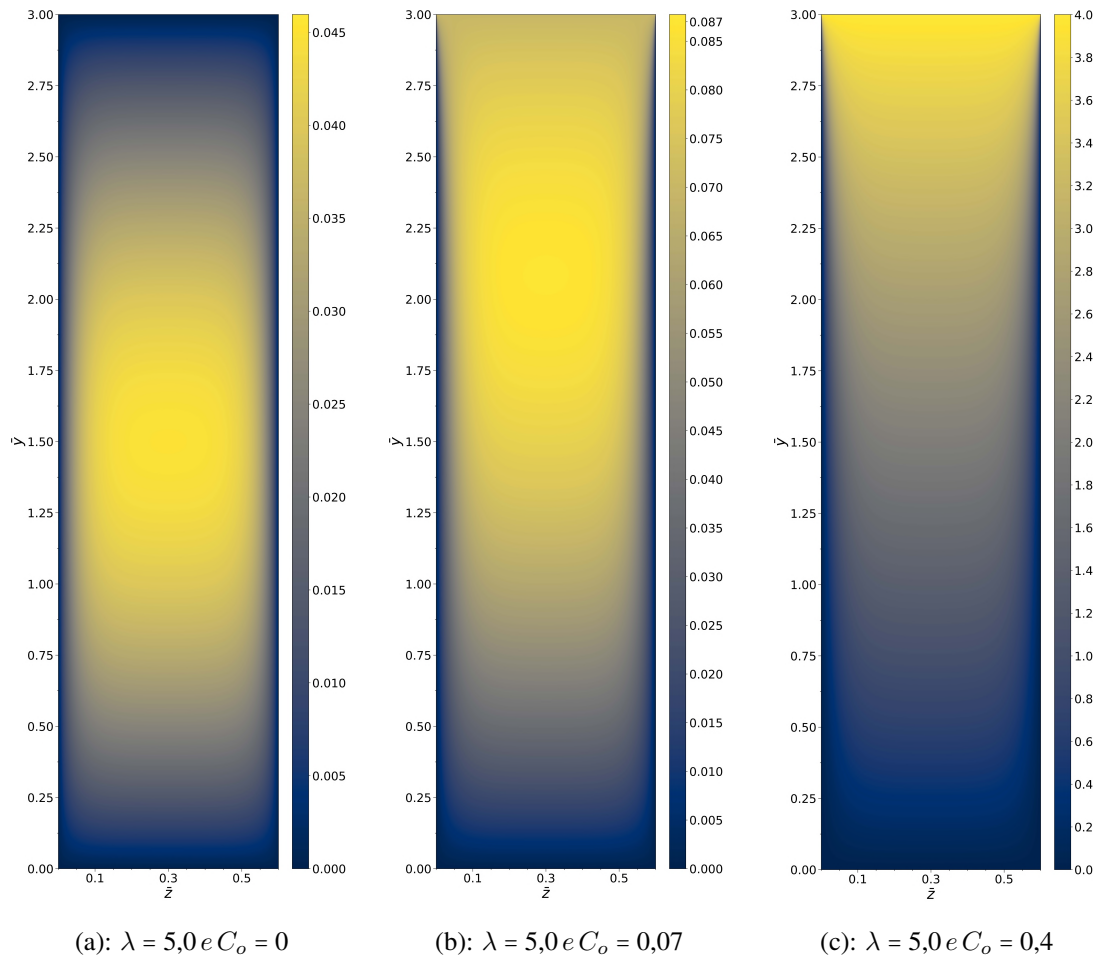
$$\begin{aligned}
\tilde{Q} &= \frac{8C_o}{\pi^3 \lambda} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi\lambda)}{m^3 (\cosh(m\pi\lambda) + 1)} + \frac{1}{12 \lambda^3} \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^2 \\
&\quad - \frac{16}{\pi^5 \lambda^3} \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh(m\pi\lambda)}{m^5 (\cosh(m\pi\lambda) + 1)} \tag{I.50}
\end{aligned}$$

## II. RESULTADOS EXTRAS

### II.1 CAMPO DE VELOCIDADE

Apesar do aumento expressivo da razão de aspecto do canal e do número de Couette, note que existe uma região que continua pouco afetada pelo escoamento.

Figura II.1: Resultados para o campo de velocidade para diversos números de  $C_o$  e uma razão de aspecto  $\lambda = 5,0$

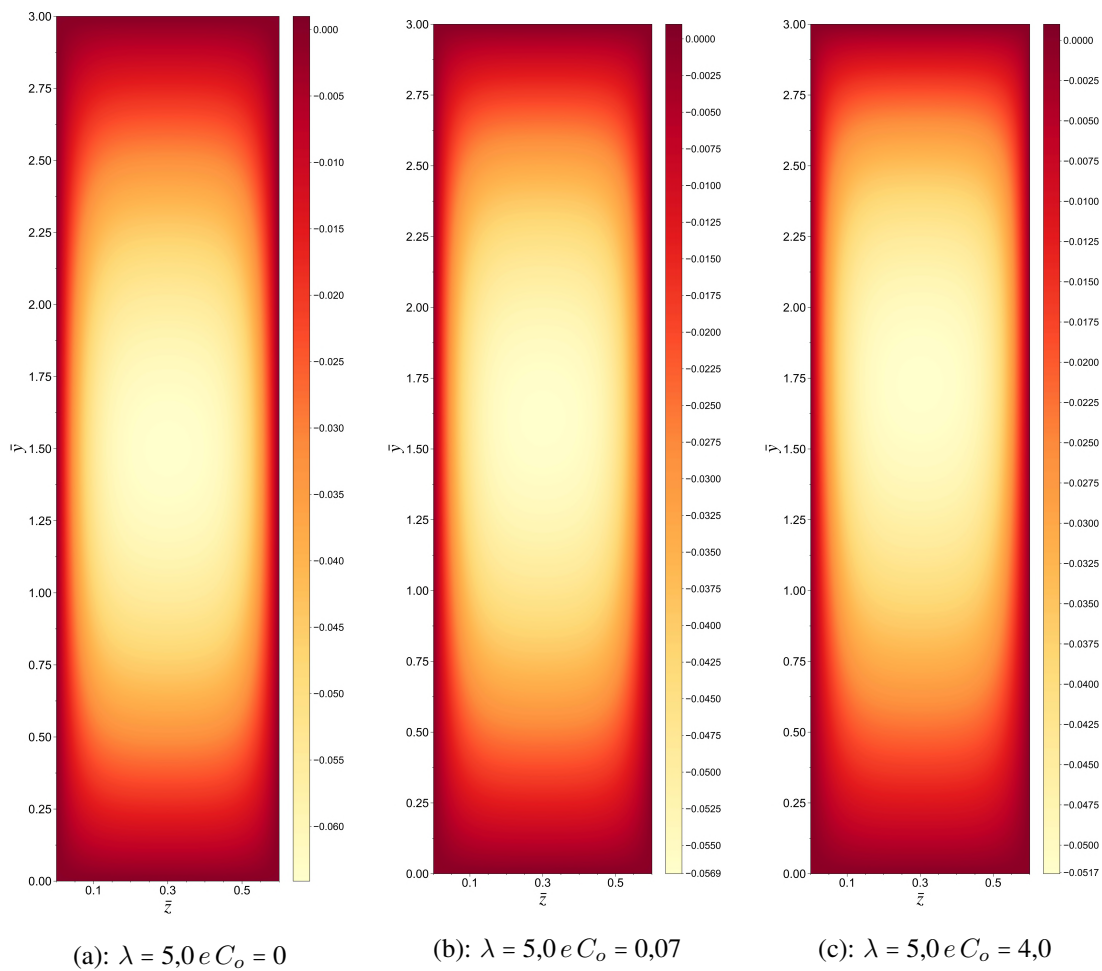


Fonte: Próprios autores, 2021

### II.2 CAMPO DE TEMPERATURAS

Perceba que o aumento no número de Couette para essas razões de aspecto provocam uma redução na intensidade máxima do escoamento, comportamento esperado assim como vimos através da Figura 5.21.

Figura II.2: Resultados para o campo de temperatura para diversos números de  $C_o$  e uma razão de aspecto  $\lambda = 5,0$



Fonte: Próprios autores, 2022

### III. ROTINA COMPUTACIONAL

```
1
2
3     # -*- coding: utf-8 -*-
4     """
5     Created on Thu Jul  1 20:14:17 2021
6
7     @author: harrison
8     """
9
10
11     import numpy as np
12     import mpmath
13     import matplotlib.pyplot as plt
14     from matplotlib import cm
15     from mpl_toolkits import mplot3d
16     from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator
17     import scipy.sparse as sss
18     import scipy.sparse.linalg
19
20
21     #Escoamento de Couette - duto retangular
22     #lambda = 1           razão de aspecto d/b
23     #G = 0                Termo da pressão
24     #Co = U/V = 1        Número de Couette
25
26     #Escoamento de Poiseuille - duto retangular
27     #lambda = 1           razão de aspecto d/b
28     #G = 1                Termo da pressão
29     #Co = U/V = 0        Número de Couette
30
31     # A expressão para a velocidade está admensionalizada, portanto:
32     # u = u*, z = z*, y = y*
33
34     # u = SUM_0^infy sen((2*n + 1)*math.pi*z)
35     # * (((4*G)/(n^3 * math.pi^3 * lambda^2))
36     # + (math.cosh(math.pi*n*y*lambda)*( (4*Co)/(n*math.pi)
37     # - (4*G)/(n^3 * math.pi^3 * lambda^2)) )
38     # + ( (math.sinh(n*math.pi*y*lambda)/(math.sinh(n*math.pi*lambda)))
39     # * ((-4*G)/(n^3 * math.pi^3 * lambda^2)) )
40     # + ( (math.sinh(n*math.pi*y*lambda))*(math.coth(n*math.pi*y)
41     # * ((4*Co)/(n*math.pi) - (4*G)/(n^3 * math.pi^3 * lambda^2)) ) )
42
43     #Equação de Poisson
44     #[dšu/dyš + dšu/dzš] = - 1
45
46     #Parâmetros do problema e condicionais
```



```

47
48 'Equação do tipo Ax = b'
49
50 m = 419 #tamanho da malha do python; matriz de 0 a 3
51 # número de intervalos
52 '# eixo x é perpendicular ao plano da tela; No caso em que o duto for retangular,'
53 '# considere utilizar ambos nz e ny'
54
55 # número de pontos
56 n = m+1 #discretização
57
58 # Assumindo geometria quadrada; y=z
59 nz = (n**2) #ordem quadrada
60
61 #Razão de aspecto lambda
62 Lbd = 0.2 #d_dim/b_dim
63
64 #Comprimentos dimensionais
65
66 if Lbd == 0.0:
67     b = 9.9999999999 * 10**(10) # Largura <----> Eixo Z
68     d = (1 + Lbd)/2 # Altura î Eixo Y
69
70 else:
71     b = (1 + Lbd)/(2*Lbd) # Largura <----> Eixo Z
72     d = (1 + Lbd)/2 # Altura î Eixo Y
73
74
75 '''
76 Y
77 |
78 |_____ Z
79 '''
80
81 dz = (b/(m)) #divisor do intervalo em z sem o contorno
82 # inteiro - dz = (1 + )/(2m)
83 dy = (d/(m)) #divisor do intervalo em y sem o contorno inteiro
84
85
86 #comprimento dos vetores dos eixos; deve-se considerar a
87 # matriz do problema inteira
88
89 z = np.linspace(0.0, b, m+1)
90 y = np.linspace(0.0, d, m+1)
91
92 u = np.zeros((n, n)) #Utiliza a matriz inteira, por isso "m"
93
94 #variáveis auxiliares
95 'Beta: zš/yš'
96 beta = (dz**2)/(dy**2)
97 'Gamma: -2 - 2 '
98 gama = ((-2) - (2*beta))

```

```

99
100 Co = 0
101
102 H = dz**2
103
104 #Escala de V
105 #V = Dhš/ P/x
106
107
108 # Equação final das diferenças finitas
109 'u[i+1,j] + u[i-1,j] - 2u[i,j] + (zš/yš)* {u[i,j+1]
110 + u[i,j-1] -2u[i,j]} = - zš'
111
112 'u[i+1,j] + u[i-1,j] + *u[i,j+1] + Beta*u[i,j-1]
113 + Gamma*u[i,j] = - z^2 = - H'
114
115
116 #matrizes
117
118 #matriz de resultados do campo de velocidades
119 B = np.zeros(nz)
120
121 #matriz = np.zeros((nz,nz), float)
122 matriz = scipy.sparse.lil_matrix((nz,nz)) #definindo a matriz esparsa
123
124 # OBSERVAÇÃO:
125 #.....
126
127 #Para o caso em que =0, temos o caso de placas paralelas, ou seja, o canal
128 # retangular passar a ter somente dois, dos 4 limites. Portanto, nesse caso,
129 # utilizaremos o mesmo método de diferenças finitas que para =0 assume
130 # uma matriz dos coeficientes levemente diferente.
131
132 #.....
133
134 #Definindo as diagonais da matriz dos coeficientes "A"
135
136 #Diagonal principal
137 if Lbd == 0:
138     #Primeiro bloco
139     for k in range(nz):
140         #Preenche a diagonal principal inteira com 1 desde que o
141         # k-ésimo elemento seja um nž menor
142         # que o tamanho da malha escolhido.
143         # Isso faz com que a primeira matriz mxm seja preenchida
144
145         if k <= m:
146             matriz[k,k] = 1
147
148         #Preenche a diagonal principal inteira com 1 desde que o
149         # k-ésimo elemento seja um nž maior que o tamanho da
150         # malha escolhido. Isso faz com que a última matriz mxm

```

```

151         # seja preenchida
152
153         elif k >= (n*(m)) and k <(nz):
154             matriz[k,k] = 1
155
156         else:         #Diagonal principal; gamma
157             matriz[k,k] = gama
158
159
160     #Diagonal logo acima e abaixo
161
162     for k in range(1,nz):
163         #-----Diagonal superior-----
164
165         #Converte os elemenos da determinada diagonal da última matriz n x n
166         if k >= (n*(m)) and k <(nz):
167             matriz[k,k-1] = 0
168
169         elif k > m and k < (n*m):
170             #Esse loop faz com que as matrizes mxm da diagonal principal sejam
171             alterados
172
173             if k%n == 0: # Se o k-ésimo elemento for divisível por n e o resto
174             = 0(primeiro elemento de cada matriz nxn), então:
175                 matriz[k,k-1] = 0 # O elemento a esquerda do primeiro elemento
176                 da diagonal principal de cada matriz nxn é nulo
177                 matriz[k,k+1] = beta # O primeiro elemento a direita é dzš/dyš
178                 matriz[k,k+2] = beta # O segundo elemento a direita é dzš/dyš
179
180             elif k%n == m: # Se o k-ésimo elemento for divisível por n e o
181             resto = m(último elemento de cada matriz nxn), então:
182                 matriz[k,k-1] = beta # O primeiro elemento a esquerda é dzš/
183                 dyš
184                 matriz[k,k-2] = beta # O segundo elemento a esquerda é dzš/dyš
185                 matriz[k,k+1] = 0 # O elemento a esquerda do primeiro elemento
186                 da diagonal principal de cada matriz nxn é nulo
187
188             else: # Preenche as diagonais com dzš/dyš
189                 matriz[k,k-1] = beta # diagonal a esquerda da principal
190                 matriz[k,k+1] = beta # Diagonal a direita da principal
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999

```

```

197
198 #Diagonal acima; Zera a SEGUNDA matriz mxm da primeira linha e preenche o
199 # restante da diagonal com 1
200 for k in range(0,nz-n):
201     matriz[k,k+n] = 1
202
203     if k < n:
204         matriz[k,k+n] = 0
205
206
207 else:
208     #Primeiro bloco
209     for k in range(nz):
210         if k <= m:
211             matriz[k,k] = 1
212
213         elif k >= (n*(m)) and k <(nz):
214             matriz[k,k] = 1
215
216         elif k%n == 0: # Se o resto da divisão for igual a zero, kk igual a 1
217             matriz[k,k] = 1
218
219         elif k%(n) == m: # Se o resto da divisão for igual a três, kk igual a
220             1
221             matriz[k,k] = 1
222
223         else: #Diagonal principal; gamma
224             matriz[k,k] = gama
225
226 #Diagonal logo acima e abaixo
227
228 for k in range(1,nz):
229     #-----Diagonal superior-----
230     #Converte os elemenos da determinada diagonal da primeira matriz, a partir
231     do matriz m x m
232     if k <= m+1:
233         matriz[k,k-1] = 0
234         matriz[k,k+1] = 0
235
236     #Converte os elemenos da determinada diagonal da última matriz m x m
237     elif k >= (n*(m)) and k <(nz):
238         matriz[k,k-1] = 0
239
240     elif k%n == 0: # Se o resto da divisão for igual a zero, kk igual a 1
241         matriz[k,k-1] = 0
242         matriz[k,k+1] = 0
243
244     elif k%n == m:
245         matriz[k,k-1] = 0
246         matriz[k,k+1] = 0
247
248     else: #Diagonal principal; gamma

```

```

247         matriz[k,k-1] = beta
248         matriz[k,k+1] = beta
249
250     #Diagonais afastadas
251
252     for k in range(n,nz):
253         matriz[k,k-n] = 1
254
255         if k%n == 0:
256             matriz[k,k-n] = 0
257
258         elif k%n == m:
259             matriz[k,k-n] = 0
260
261         elif k >= (n*(m)) and k <=(nz):
262             matriz[k,k-n] = 0
263
264
265     for k in range(0,nz-n):
266         matriz[k,k+n] = 1
267
268         if k%n == 0:
269             matriz[k,k+n] = 0
270
271         elif k%n == m:
272             matriz[k,k+n] = 0
273
274         elif k<= n:
275             matriz[k,k+n] = 0
276
277     #.....
278     #Matriz "b"
279
280     # OBSERVAÇÃO:
281     #.....
282     # A matriz dos coeficientes, para =0, apresenta a matriz de resultados como
283     # composta pelos n-ésimos primeiros elementos nulos (placa de baixo estacionária),
284     # todos os elementos intermediários iguais a - zš e os últimos n-ésimos elementos
285     # igual a razão das velocidades Co = U/V. Para 0, a diferença está somente no
286     # primeiro e último elemento de cada matriz de tamanho n, que nesse caso, é nulo.
287     #.....
288
289     if Lbd == 0:
290         # Para todos os pontos intermediários, a equação de DF é igual - H =- zš
291         for i in range(m, nz-n):
292
293             if i > (m) and i <(nz-n):
294                 B[i]= -H
295
296         # Define todos os elementos da n-ésima matriz de tamanho nx1 como iguais a Co
297         for i in range(0, n):
298

```

```

299         if i <= m:
300             B[(nz-1)-i] = Co
301
302     else:
303
304         # Para todos os pontos intermediários, a equação de DF é igual H = zš
305         for i in range(m, nz-n):
306
307             if i > (m) and i <(nz-n):
308                 B[i]= -H
309
310         # Anula o primeiro elemento da mini matriz de tamanho n
311         for i in range(0, nz):
312
313             if i%n == 0:
314                 B[i] = 0
315
316         # Anula o último (n-ésimo) elemento da mini matriz de tamanho nx1
317         for i in range(n, nz):
318
319             if (i+1)%n == 0:
320                 B[i] = 0
321
322         # Define todos os elementos da n-ésima matriz de tamanho nx1 como iguais a Co
323         for i in range(0, n):
324
325             if i <= m:
326                 B[(nz-1)-i] = Co
327
328     #.....
329     #Solver - Utiliza a matriz dos coeficientes "A" e a matriz de resultados "b"
330     # para determinar "x"
331
332     M = scipy.sparse.csr_matrix(matriz)          #Converte a matriz para modelo CSR
333
334     # Equação de DF para u:
335     #M[i,j] = u[i+1,j] + u[i-1,j] + beta* u[i,j+1] + beta* u[i,j-1] + gama*u[i,j]
336
337     x = scipy.sparse.linalg.spsolve(M, B)      #solver para matriz esparsa entrando com
338     A e b, retornando x
339     #x = np.linalg.solve(matriz, b)
340
341     #Vetor velocidade
342     for i in range(0,n):
343         for j in range(0,n):
344             u[i,j]= x[i + (n)*(j)]
345
346     # Limpando a variável para otimizar o programa
347     del(M, x)
348     #-----
349     #Velocidade média

```

```

350
351 #Podemos determinar a velocidade média utilizando a regra do trapézio para
      integrais duplas
352
353 u_m = np.zeros((n,n),float)
354
355
356 Dz = dz
357 Dy = dy
358
359 # b = (1+)/2
360 # d = (1+)/2
361
362 #Função adimensionalizada: [4/(1+)] * 0/^(b) 0/^(d) u dz dy
363
364                                     # Quinas
365 u_m[0,0] = u[0,0]    #f(a,c)
366 u_m[m,0] = u[m,0]   #f(b,c)
367 u_m[0,m] = u[0,m]   #f(c,d)
368 u_m[m,m] = u[m,m]   #f(b,d)
369
370 um1 = u_m[0,0] + u_m[m,0] + u_m[0,m] + u_m[m,m]
371
372 u_m1 = (1/4)*Dz*Dy*um1
373
374                                     #laterais, topo e base
375
376 u_m2_1 = u_m2_2 = u_m2_3 = u_m2_4 = 0
377
378 for k in range(1,m):
379     # i=1|m-1 f(x,c)
380     u_m2_1 += u[k,0]    #Parede do fundo
381     # i=1|m-1 f(x,d)
382     u_m2_2 += u[k,m]   #Parede do topo
383
384 for j in range(1,m):
385     # j=1|m-1 f(a,y)
386     u_m2_3 += u[0,j]   #Parede da esquerda
387     # j=1|m-1 f(b,y)
388     u_m2_4 += u[m,j]   #Parede da direita
389
390
391 # F = f(x,c) + f(x,d) + f(a,y) + f(b,y)
392 um2 = (u_m2_1 + u_m2_2 + u_m2_3 + u_m2_4)
393
394 # Trapezio_2 =1/4*x*y*2*( f(x,c) + f(x,d) + f(a,y) + f(b,y))
395 u_m2 = (1/4)*Dz*Dy*(2*um2)
396
397                                     #interno
398
399 um3=0
400 for k in range(1,m):

```

```

401     for j in range(1,m):
402         # F = j=1|m-1 [i=1|m-1 f(x,y)]
403         um3 += u[j,k]
404
405 # Trapezio_3 = 1/4*x*y*[ j=1|m-1 [i=1|m-1 f(x,y)] ]
406 u_m3 = (1/4)*Dz*Dy*(4*um3)
407
408 # Velocidade média dimensional obtida pela regra do trapézio - u med
409 u_med = (u_m1 + u_m2 + u_m3)*((4*Lbd)/((1+Lbd)**2))
410
411 # Razão entre velocidades para validação numérica de acordo com a tabela 39 de [1]
412 u_max = np.max(u)
413 razão_u = u_max/u_med
414
415 #=====
416 #Solução numérica - Vazão Q
417 #=====
418
419 #Podemos determinar a vazão utilizando a regra do trapézio para integrais duplas
420
421 Q = np.zeros((m+1,m+1), float)
422
423 a = z[0]
424 b = z[m]
425 c = y[0]
426 d = y[m]
427
428 # b = (1+)/2
429 # d = (1+)/2
430
431 Dz = dz
432 Dy = dy
433
434 # integral: S; limite inferior "_"; limite superior "^"
435 #função: 0_S^1 0_S^1 8 exp(-x^(2) - y^(4)) dy dx
436
437                                     # Quinas
438 Q[0,0] = u[0,0]
439 Q[m,0] = u[m,0]
440 Q[0,m] = u[0,m]
441 Q[m,m] = u[m,m]
442
443 Q1 = Q[0,0] + Q[m,0] + Q[0,m] + Q[m,m]
444
445 Q_1 = (1/4)*Dz*Dy*Q1
446
447                                     #laterais, topo e base
448
449 Q2_1 = Q2_2 = Q2_3 = Q2_4 = 0
450 for k in range(1,m):
451     # i=1|m-1 f{x,c}
452     Q2_1 += u[k,0]

```



```

453     # i=1|m-1  f{x,d}
454     Q2_2 += u[k,m]
455
456 for j in range(1,m):
457     # j=1|m-1  f(a,y)
458     Q2_3 += u[0,j]
459     # j=1|m-1  f(b,y)
460     Q2_4 += u[m,j]
461
462
463 # F = f(x,c) + f(x,d) + f(a,y) + f(b,y)
464 Q2 = (Q2_1 + Q2_2 + Q2_3 + Q2_4)
465
466 # Trapezio_2 =1/4*x*y*2*( f(x,c) + f(x,d) + f(a,y) + f(b,y))
467 Q_2 = (1/4)*Dz*Dy*(2*Q2)
468
469                                     #interno
470 Q3=0
471 for k in range(1,m):
472     for j in range(1,m):
473         # F = j=1|m-1  [i=1|m-1  f(x,y)]
474         Q3 += u[j,k]
475
476 # Trapezio_3 = 1/4*x*y*[ j=1|m-1  [i=1|m-1  f(x,y)] ]
477 Q_3 = (1/4)*Dz*Dy*(4*Q3)
478
479
480 # Vazão obtida pela regra do trapézio Q_t
481 Q_t = Q_1 + Q_2 + Q_3
482
483 #=====
484 #                               CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO DE FANNING- fRe
485 #=====
486
487 #Power Law
488
489 # Valores de utilizados para comparação com resultados da literatura [1]
490 Lbd_2 = [0,0.02,0.05,0.066667,0.0833333,1/10,1/9,0.125,1/7,1/6,0.2,0.25,0.3,1/3,
491 0.4,0.5,0.6,2/3,0.7,1/1.4,0.75,0.8,1/1.2,0.9,1.0]
492 Lbd2 = np.array(Lbd_2)
493
494 fRe_2 = []
495
496 # Equação utilizada por Shah & London [1] como aproximação da função analítica
497 if Lbd in Lbd2:
498     for i in Lbd_2:
499         f_Re = 24*(1 - 1.3553*i + 1.9467* i**2 - 1.7012* i**3 + 0.9564* i**4 -
500             0.2537* i**5)
501         fRe_2.append(f_Re)
502
503 # Equacionamento do fator de atrito de fanning para o problema
504 fRe= (1/(2*u_med))

```

```

504
505 # Função que busca na lista de comparação o índice do valor de lambda
      correspondente utilizado no programa
506 K = Lbd_2.index(Lbd)
507
508 print('')
509 print('')
510 if Lbd in Lbd2:
511     print('fRe de referência:', fRe_2[K])
512 else:
513     print('Não há fRe de referência para Shah & London - Tab 42')
514 print('Lambda:', Lbd)
515 print('u_med =', u_med)
516 print('u_max =', u_max)
517 print('numero de pontos:', n)
518 print('1/2u_med = fRe =', 1/(2*u_med))
519 print('')
520
521
522 # _____
523 # =====
524 # _____
525 # =====
526 '''
527 #SOLUÇÃO PARA O CAMPO DE TEMPERATURA
528 '''
529 # _____
530 # =====
531 # _____
532 # =====
533
534 # A equação para a determinação da temperatura foi obtida através da equação da
535 # energia, com as considerações necessárias seguindo o modelo adotado em [3]
536
537
538 'Equação do tipo Ax = c'
539
540 T = np.zeros((n, n))      #Vetor temperatura. Utiliza a matriz inteira, por isso "n
      "
541
542 # _____
543
544 #Variáveis do escoamento
545
546 'Eq das diferenças finitas:'
547 'T[i+1, j] + T[i-1, j] + (T[i, j+1] + T[i, j-1]) (Dz^2/Dy^2) + T[i, j] (-2-2Dz^2/Dy^2) =
      u/umed'
548 '(Dz^2/Dy^2) = Tau ; (-2-2Dz^2/Dy^2) = Eta'
549 'T[i+1, j] + T[i-1, j] + (T[i, j+1] + T[i, j-1])*Tau + T[i, j]*Eta = Dz^2 u/umed'
550
551 #matrizes
552

```

```

553 #C = scipy.sparse.lil_matrix((nz,nz))
554 C = np.zeros(nz)
555
556 #.....
557 #Matriz de resultados "c"
558
559 for i in range(1, m):
560
561     for j in range(1,m):
562         C[(j*(n))+i] = (u[i, j]/u_med)*(dz**2)
563
564 #Condições de contorno
565
566 for i in range(0, nz):
567
568     if i%n == 0:
569         C[i] = 0
570
571 for i in range(n, nz):
572
573     if (i+1)%n == 0:
574         C[i] = 0
575
576 for i in range(0, n):
577
578     if i <= m:
579         C[(nz-1)-i] = 0
580
581 #.....
582 #Solver
583
584
585 M_T = scipy.sparse.csr_matrix(matriz)      #Converte a matriz para modelo CSR
586
587 x_T = scipy.sparse.linalg.spsolve(M_T, C)  #solver para matriz esparsa entrando
588                                             com A e b, retornando x
589 #x = np.linalg.solve(matriz, b)
590
591 for i in range(0,n):
592     for j in range(0,n):
593         T[i, j]= x_T[i + (n)*(j)]
594
595 # Limpando variáveis para otimizar o programa
596 #del(matriz,M_T,x_T)
597
598 #=====
599 #Temperatura média - Tm
600 #=====
601
602 #A temperatura média foi, também, determinado utilizando a regra do trapézio
603

```

```

604 T_m = np.zeros((n,n),float)
605
606 a3 = z[0]
607 b3 = z[m]
608 c3 = y[0]
609 d3 = y[m]
610
611 Dz = dz
612 Dy = dy
613
614 # b = (1+Lambda)/2 Lambda
615 # d = (1+Lambda)/2 Lambda
616 #Função adimensionalizada: [4/(1+š)] * 0/ˆb 0/ˆd ũ dz dy
617
618                                     # Quinas
619 T_m[0,0] = T[0,0]*u[0,0]      #f(a,c)
620 T_m[m,0] = T[m,0]*u[m,0]      #f(b,c)
621 T_m[0,m] = T[0,m]*u[0,m]      #f(c,d)
622 T_m[m,m] = T[m,m]*u[m,m]      #f(b,d)
623
624 Tm1 = T_m[0,0] + T_m[m,0] + T_m[0,m] + T_m[m,m]
625
626 T_m1 = (1/4)*Dz*Dy*Tm1
627
628                                     #laterais, topo e base
629
630 T_m2_1 = T_m2_2 = T_m2_3 = T_m2_4 = 0
631
632 for k in range(1,m):
633     # i=1|m-1 f{x,c}
634     T_m2_1 += T[k,0]*u[k,0]      #Parede do fundo
635     # i=1|m-1 f{x,d}
636     T_m2_2 += T[k,m]*u[k,m]      #Parede do topo
637
638 for j in range(1,m):
639     # j=1|m-1 f(a,y)
640     T_m2_3 += T[0,j]*u[0,j]      #Parede da esquerda
641     # j=1|m-1 f(b,y)
642     T_m2_4 += T[m,j]*u[m,j]      #Parede da direita
643
644
645 # F = f(x,c) + f(x,d) + f(a,y) + f(b,y)
646 Tm2 = (T_m2_1 + T_m2_2 + T_m2_3 + T_m2_4)
647
648 # Trapezio_2 =1/4*x*y*2*( f(x,c) + f(x,d) + f(a,y) + f(b,y))
649 T_m2 = (1/4)*Dz*Dy*(2*Tm2)
650
651                                     #interno
652
653 Tm3=0
654 for k in range(1,m):
655     for j in range(1,m):

```





```

756 ax.set_ylabel(r'y', fontsize = 16)
757
758 # Colocando as marcas:
759 plt.xticks(size = 13) #configura o tamanho do número no eixo
760 plt.yticks(size = 13)
761 #ax.set_xlim([np.min(z), np.max(z)])
762 #ax.set_ylim([np.min(y), np.max(y)])
763
764 #plt.grid(False, linestyle='-.') #exibe grades no grafico
765 #-----
766
767
768 #.....
769 '#plot da solução analítica'
770
771 # intervalos para plotar os contornos.
772 # Temos 10 intervalos de 0.0 a 1.0 .
773 #intervals = np.linspace(0.0,limite,11)
774
775 # Note que estou plotando a transposta de T, porque não
776 # definimos os pontos (i,j) no domínio físico
777 # da mesma forma como definimos (i,j) na matriz T.
778
779 #contours = plt.contourf(z_ant, y_ant, u_analitica, linestyles = 'dotted',
780     linewidths = 1.75, colors = 'dodgerblue')
781 contours = plt.contourf(z,y, np.transpose(u), cmap='RdPu')
782 plt.clabel(contours, inline=True, fontsize=15, colors = 'black')
783 plt.colorbar(contours)
784
785 plt.show()
786
787 #-----
788 '#plot da solução numerica:'
789
790
791 #variável pra legenda
792 textom = str(m)
793
794 #legenda e eixos
795 fig,ax=plt.subplots(1,1)
796 ax.set_title(u'Velocidade - n = %0.0f'%n),
797 fontsize = 14)
798 ax.set_xlabel(r'z', fontsize = 16)
799 ax.set_ylabel(r'y', fontsize = 16)
800
801 # Colocando as marcas:
802 plt.xticks(size = 13) #configura o tamanho do número no eixo
803 plt.yticks(size = 13)
804 #ax.set_xlim([np.min(z), np.max(z)])
805 #ax.set_ylim([np.min(y), np.max(y)])
806

```





```

858
859 levels = np.linspace(np.min(T), np.max(T), 11)
860
861 graph=plt.contourf(z,y, np.transpose(T),levels=levels, cmap='YlOrRd')
862
863
864 # A função cmap controla o mapa de cores do gráfico
865 # colocar um f depois de contour deixa o gráfico negativo;
866
867 #Controle das cores das linhas do gráfico
868 #contours = plt.contour(z_ant, y_ant, np.transpose(u_analitica))
869
870
871
872 plt.colorbar(graph) #Ajuda a verificar os valores da função para os pontos de x e
      y
873 #cria uma barra de valores explícitos da função para as determinadas cores
874
875 #plt.savefig(u'Velocidade_n_%0.0f.png'%(m), format='png', dpi=500)
876
877 plt.show()
878
879 '''
880 #=====
881 Referências bibliográficas
882 #=====
883
884 [1] LAMINAR FLOW FORCED CONVECTION IN DUCTS A Source Book for Compact
885 Heat Exchanger Analytical Data.
886 R.K.Shah,A.L.London, 1978.
887
888 [2] SCREW VISCOSITY PUMPS. Publicado em Engineering, vol 114, p. 606, Nov 17
      ,1922.
889 Rowell & Fynlanson, 1922.
890
891 [3] FURTHER FINITE ELEMENT ANALYSES OF FULLY DEVELOPED LAMINAR FLOW OF
892 POWER-LAW NON-NEWTONIAN FLUID IN RECTANGULAR DUCTS: HEAT TRANSFER PREDICTIONS.
893 Seppo Syrjala, 1996.
894
895 '''

```