



**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS  
EM JUNTAS APARAFUSADAS  
USANDO ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL**

**LUCAS FERNANDES CAMARGOS**

**PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS  
EM JUNTAS APARAFUSADAS  
USANDO ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL**

**LUCAS FERNANDES CAMARGOS**

**Orientador: PROF. DR. MARCUS VINICIUS GIRÃO DE MORAIS, ENM/UNB**

**PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**PUBLICAÇÃO ENM.PG - XXX/AAAA  
BRASÍLIA-DF, 12 DE MAIO DE 2022.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS  
EM JUNTAS APARAFUSADAS  
USANDO ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL**

**LUCAS FERNANDES CAMARGOS**

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

**APROVADA POR:**

Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes, ENM/UnB  
Orientador

Prof. Dr. Marcela Rodrigues Machado, ENM/UnB  
Examinadora interna

Prof. Dr. Gino Bertolucci Colherinhas, EMC/UFG-Goiânia  
Examinador externo

**BRASÍLIA, 12 DE MAIO DE 2022.**

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

LUCAS FERNANDES CAMARGOS

### **IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM JUNTAS APARAFUSADAS USANDO ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL**

**2022xv, 58p., 201x297 mm**

(ENM/FT/UnB, Engenheiro Mecânico, Engenharia Mecânica, 2022)

Projeto de Graduação - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

LUCAS FERNANDES CAMARGOS (2022) IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM JUNTAS APARAFUSADAS USANDO ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL. Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Publicação xxx/AAAA, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 58p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: LUCAS FERNANDES CAMARGOS

TÍTULO: IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS EM JUNTAS APARAFUSADAS USANDO ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL.

GRAU: Engenheiro Mecânico ANO: 2022

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste projeto de graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte deste projeto de graduação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

LUCAS FERNANDES CAMARGOS

lfcamargos@gmail.com

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Geraldo e Flausina, às minhas irmãs, Laila e Lídia, e aos meus cunhados Lívio e Rodrigo, por todo o apoio e incentivo de que precisei em todos esses anos de trabalho.

Aos meus colegas, André, Rodrigo, Rômulo e Izael, que me acompanharam de perto, me ajudaram e se divertiram comigo.

Ao meu orientador, Dr. Marcus Girão, quem dedicou incontáveis horas de trabalho para me indicar os melhores caminhos.

Ao amigo Dr. Brunno Emídio, quem gentilmente me acolheu em sua equipe, por quem muito fui ajudado nessa área de conhecimento.

A todos os docentes, com quem tive a honra de conversar e discutir, porque viabilizaram o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus colegas da Polícia Civil do DF, em especial aos Peritos Criminais Eduardo Borges e André Medeiros, com quem aprendi muito nesses últimos 8 anos, e em quem me inspiro profissionalmente. A todo o pessoal da PC, meu muito obrigado! GARRA!

*"A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,  
mas pensar o que ninguém ainda pensou  
sobre aquilo que todo mundo vê."*

*-Arthur Schopenhauer*

# Resumo

Na indústria aeronáutica, as juntas, sejam aparafusadas ou rebitadas, são as principais fontes de falhas estruturais, de maneira que esses conjuntos são rigorosamente estudados durante o projeto de uma aeronave, por exemplo, e devem ser minuciosamente inspecionados durante os processos de manutenção, já que uma falha neste elementos tende a ser catastrófica. Por este motivo, faz-se mister o aprofundamento das técnicas investigativas dos parâmetros físicos dessas juntas, para que o processo de identificação de desvios estruturais seja eficaz. Técnicas de medição e predição de comportamento são muito úteis neste contexto, e vêm sendo desenvolvidas justamente para tornar os processos de manutenção mais práticos e, conseqüentemente, baratos. Neste trabalho, estudou-se a possibilidade de utilização do Algoritmo Genético em atualização de modelos computacionais, para identificação de parâmetros em juntas aparafusadas, as quais serão ensaiadas por meio de análise modal experimental. Primeiramente, foram executados alguns testes matemáticos típicos de otimização do tipo maximização/minimização para verificar o funcionamento, juntamente com o desempenho, do algoritmo. Em seguida, propôs-se a avaliação de um evento físico, a análise modal de uma viga engastada-livre, em seguida, com forçamento externo, por meio de modelos de alta fidelidade, cujo objetivo é determinar características físicas dos corpos estudados, tais como densidade e coeficiente de rigidez. Foram realizados testes para decisão do tamanho das amostras, bem como para simular algum ruído aleatório, a fim de analisar a robustez da técnica frente a essas condições. Por fim, foi analisado um conjunto aparafusado, tendo o foco na determinação dos parâmetros do parafuso, utilizando as técnicas de substruturação dinâmica para reduzir o número de graus de liberdade.

**Palavras-chave:** Juntas Aparafusadas, Atualização de Modelos, Identificação de Parâmetros, Algoritmo Genético, Substruturação Baseada em Frequência.

# Abstract

In the aeronautical industry, joints, whether bolted or riveted, are the main sources of structural failures, so these assemblies are rigorously studied during the design of an aircraft, for example, and must be thoroughly inspected during maintenance processes, since that a failure in these elements tends to be catastrophic. For this reason, it is essential to deepen the investigative techniques of the physical parameters of these joints, so that the process of identifying structural deviations is effective. Behavior measurement and prediction techniques are very useful in this context, and have been developed precisely to make maintenance processes more practical and, consequently, cheaper. In this work, we studied the possibility of using the Genetic Algorithm in computational model updating, to identify parameters in bolted joints, which will be tested by means of experimental modal analysis. First, some typical mathematic optimization tests of the maximization/minimization type were performed to verify the functioning, along with the performance, of the algorithm. Then, it was proposed the evaluation of a physical event, the modal analysis of a cantilever beam, then with external forcing, through high-fidelity models, whose objective is to determine physical characteristics of the studied bodies, such as density and stiffness coefficient. Tests were carried out to decide the size of the samples, as well as to simulate some random noise, in order to analyze the robustness of the technique under these conditions. Finally, a jointed assembly was analyzed, focusing on the determination of the bolt parameters, using dynamic substructuring techniques to reduce the number of degrees of freedom.

**Keywords:** Bolted Joints, Model Updating, Parameters Identification, Genetic Algorithm, Frequency-based Substructuring.



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	ANÁLISE MODAL: FERRAMENTA DE IDENTIFICAÇÃO DE DANOS.....	1
1.2	JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO .....	3
1.3	OBJETIVO .....	3
1.3.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	3
1.4	METODOLOGIA.....	4
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	4
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>5</b>
2.1	VIGA DE EULER-BERNOULLI .....	5
2.2	DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DAS FREQUÊNCIAS E MODOS NATURAIS ....	7
2.3	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA .....	9
2.4	SUPERPOSIÇÃO MODAL .....	12
2.5	TÉCNICAS DE ATUALIZAÇÃO - <i>Updating Techniques</i> .....	15
<b>3</b>	<b>ALGORITMO GENÉTICO</b> .....	<b>17</b>
3.1	DEFINIÇÃO MATEMÁTICA .....	17
3.1.1	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO.....	18
3.1.2	PROCEDIMENTO .....	18
3.1.3	O ALGORITMO .....	19
3.2	VERIFICAÇÃO DO ALGORITMO .....	20
3.2.1	FUNÇÃO DE DE JONG .....	20
3.2.2	FUNÇÃO DE EASOM .....	21
3.2.3	FUNÇÃO DE GRIEWANGK .....	23
<b>4</b>	<b>SUBSTRUTURAÇÃO BASEADA EM FREQUÊNCIA (FBS)</b> .....	<b>25</b>
4.1	ASPECTOS GERAIS .....	25
4.2	SUBSTRUTURAÇÃO EM FREQUÊNCIA POR MULTIPLICADORES DE LA- GRANGE .....	26
4.2.1	ACOPLAMENTO DINÂMICO .....	28
4.2.2	DESACOPLAMENTO DINÂMICO .....	29
<b>5</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	<b>30</b>

5.1	VIGA EM BALANÇO .....	30
5.1.1	FUNÇÃO-OBJETIVO .....	30
5.1.2	DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE SOLUÇÕES .....	32
5.1.3	SOLUÇÃO SEM RUÍDO .....	34
5.1.4	SOLUÇÃO COM RUÍDO.....	34
5.2	VIGA ENGASTADA FORÇADA .....	36
5.2.1	FUNÇÃO-OBJETIVO .....	36
5.3	CONJUNTO APARAFUSADO .....	39
5.3.1	FUNCIONAMENTO DA FBS .....	40
5.3.2	CASO 1 - ESFORÇO AXIAL .....	41
5.3.3	CASO 2 - ESFORÇO COMBINADO .....	43
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>48</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>50</b>

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Modelo de viga, vista geral (a) e um elemento qualquer (b) .....	6
2.2	Primeiros modos vibracionais para viga engastada-livre de 1 m de comprimento	9
2.3	Diagrama de Bode.....	11
2.4	Diagrama de Argand-Gauss.....	11
2.5	Diagrama de Nyquist .....	12
2.6	Exemplo de sobreposição modal .....	15
2.7	Diagrama hipotético de atualização .....	16
3.1	Fluxograma do AG implementado .....	19
3.2	Função de De Jong, para $n = 2$ .....	20
3.3	Solução proposta pelo Algoritmo Genético, para Função de De Jong no plano $xy$ .....	21
3.4	Evolução dos indivíduos pelas gerações, Função de De Jong .....	21
3.5	Função de Easom, com domínio reduzido.....	22
3.6	Solução proposta pelo Algoritmo Genético, para Função de Easom.....	22
3.7	Evolução dos indivíduos pelas gerações, Função de Easom .....	23
3.8	Função de Griewangk, para $n = 2$ .....	23
3.9	Solução proposta pelo Algoritmo Genético, para Função de Griewangk no plano $xy$ .....	24
3.10	Evolução dos indivíduos pelas gerações, Função de Griewangk.....	24
4.1	Esquema processual da Técnica de Substruturação .....	26
4.2	Exemplo de tensor receptância .....	28
4.3	Caso hipotético de substruturação.....	28
5.1	Funções-objetivo para os pares ordenados $(W_\omega, W_\phi)$ .....	32
5.2	Função-objetivo definitiva para o caso da viga em balanço .....	32
5.3	Distribuição estatística das soluções em relação ao tamanho da amostra.....	33
5.4	Solução ótima proposta pelo AG, viga em balanço, sem ruído.....	34
5.5	Função-objetivo para viga em balanço com ruído aleatório.....	35
5.6	Nuvem de soluções propostas pelo AG .....	36
5.7	Mapa de convergência para teste forçado.....	37
5.8	Mapa de convergência para teste forçado no plano .....	37
5.9	Mapa de convergência para teste forçado com 20 soluções propostas pelo AG.	38

5.10	Funções de resposta em Frequência das soluções propostas .....	38
5.11	Esquema de modelagem do sistema .....	39
5.12	Funções de resposta em frequência, analítica e numérica para desacoplamento	40
5.13	Funções de resposta em frequência, analítica e numérica para acoplamento ....	41
5.14	Mapa de busca exaustiva para otimização, caso 1 .....	42
5.15	Solução proposta pelo AG, caso 1.....	42
5.16	Síntese das soluções propostas pelo AG, caso 1 .....	43
5.17	Função de resposta em frequência, caso 2.....	44
5.18	Soluções propostas pelo AG, caso 2 .....	44
5.19	Soluções propostas pelo AG, caso 2 bidimensional.....	45
5.20	Função de resposta em frequência, com ruído aleatório .....	46
5.21	Comparação das respostas sobre ruídos, caso 2.....	46

# LISTA DE TABELAS

5.1	Características da viga simulada .....	30
5.2	Características sugeridas pelo AG .....	34
5.3	Características sugeridas pelo AG, para diferentes ruídos .....	35
5.4	Características materiais das vigas .....	39
5.5	Características materiais do parafuso .....	41
5.6	Características encontradas pelo procedimento, em função dos ruídos aplicados .....	47

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$x$	Posição arbitrária
$\Delta x$	Comprimento infinitesimal na direção $x$
$w$	Deslocamento transversal da linha média
$E$	Módulo de elasticidade
$I$	Momento de Inércia
$i$	Unidade Imaginária
$A$	Área da seção transversal
$[\blacktriangle]$	Matriz $\blacktriangle$
$[\blacktriangle]^T$	Matriz transposta de $\blacktriangle$
$\{\blacktriangle\}$	Vetor $\blacktriangle$
$\{\blacktriangle\}^T$	Vetor transposto de $\blacktriangle$
$[I_n]$	Matriz Identidade de ordem $n$
$p\{S\}$	Probabilidade do evento $S$
$J_\omega$	Estimador mínimo quadrático em frequência
$J_\phi$	Estimador mínimo quadrático em forma modal
$H$	Função de Transferência

## Símbolos Gregos

$\psi$	Deflexão angular da linha média
$\rho$	Densidade
$\omega$	Frequência
$\omega_n$	Frequência natural
$\phi$	Forma modal
$[\Phi]$	Matriz modal
$\eta$	Variável auxiliar de transformação
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\sigma_{xx}$	Tensão trativa na direção $x$
$\varepsilon$	Deformação linear
$\sigma_{amostra}$	Desvio-Padrão de uma amostra

$\mu_{\text{amostra}}$	Média de uma amostra
$[\Lambda]$	Matriz espectral
$\alpha$	Função de Receptância

# LISTA DE TERMOS E SIGLAS

AG	Algoritmo Genético
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
FBS	<i>Frequency-Based Substructuring</i>
FDAC	<i>Frequency Domain Assurance Criterion</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FRAC	<i>Frequency Response Assurance Criterion</i>
FRF	<i>Frequency Response Function</i>



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Análise Modal: Ferramenta de Identificação de Danos

A análise modal é uma ferramenta de engenharia cuja versatilidade é responsável pela caracterização, otimização, aperfeiçoamento e diagnóstico de estruturas. As aplicações pragmáticas desse recurso permeiam diversas áreas da engenharia, entre as quais, podem-se citar a indústria aeronáutica, construções de edifícios, aplicações biomecânicas e, de maneira mais corriqueira, veículos de passeio. É esperado, com o passar do tempo, que estas aplicações de engenharia tornem-se progressivamente mais baratas, mais leves, sem que se percam a confiabilidade, o conforto e a eficiência.

Na indústria aeronáutica, por exemplo, essa ferramenta torna-se significativamente importante, no que diz respeito à integridade dos prendedores. Saber conferir a saúde desses elementos, bem como saber identificar se há algum dano, e qual a gravidade do dano é, portanto, uma habilidade essencial para os projetos neste segmento industrial, já que uma falha estrutural nesse ambiente é certamente catastrófico, e acarretará altas perdas capitais, bem como mortes.

Porém, a princípio, identificar falhas em prendedores não é uma tarefa fácil, primeiramente, pela dimensão física desses elementos em relação ao corpo do objeto analisado, bem como a quantidade de exemplares em um único projeto. Outro empecilho são as formas já existentes de avaliação: que naturalmente são destrutivas. Uma abordagem que pode fornecer resultados é a solução de um problema inverso, que parte das respostas geradas por técnicas modais e as processa para a criação de um modelo.

Iglesias [1] define análise modal experimental como todo processo que verifica e identifica parâmetros dinâmicos estruturais, por intermédio da interpretação de alguma função de resposta. Já Ewins [2] define a análise modal como o processo indicado para verificar modelos teóricos e predições, sendo realizado sob condições controladas, usualmente além do ambiente operacional da peça de estudo, a aquisição de dados estatísticos, bem como a interpretação subsequente.

De fato, essa técnica experimental é aplicada amplamente, desde sua popularização, no final dos anos 1970, quando do surgimento dos analisadores digitais das Transformadas Rápidas de Fourier (FFT), Schwarz [3].

Lundkvist [4] utiliza modelos matemáticos dinâmicos para representar a estrutura do sistema analisado, para conhecer o comportamento estrutural em conformidade com o tipo de carregamento. Ainda, é possível valer-se desse processo para prever a resposta estrutural quando forças externas atuam, bem como as alterações nas características dinâmicas do sistema.

Conforme o trabalho de Santos [5], a análise modal experimental é capaz de fornecer condições para a compreensão de falhas na estrutura, de maneira que é possível executar um planejamento de manutenção preventiva ou preditiva a partir desse processo.

Na indústria aeronáutica e aeroespacial, He e Fu [6] mostram que é plausível executar análise modal experimental sobre sistemas dessa natureza, utilizando protótipos advindos de modelagem computacional, sem perda expressiva de confiança associada ao sistema.

Batista [7] realizou, por intermédio de várias técnicas de análise modal experimental, a identificação de parâmetros característicos de vibração em uma placa fina cuja composição era de compósitos.

Na indústria da música, Lu [8] realizou, por meio de análise modal, uma comparação entre vários tipos de materiais, acerca da plausibilidade de substituir as placas superiores de violinos por outras de material compósito. Para tal, os sistemas analisados foram submetidos a rotinas numéricas, ao Método dos Elementos Finitos e à análise modal experimental.

Kaveh e Zaerrega [9] propuseram uma estratégia computacional, a qual se valia de algoritmos meta-heurísticos, para a detecção de falhas estruturais, por meio da otimização de função de custo sensível a falhas, pela neutralização dos efeitos das partes saudáveis da estrutura.

Os estudos realizados por Bograd [10] indicaram que existem várias possibilidades para modelar, computacionalmente, juntas. Foram feitas simulações utilizando modelagem em elementos finitos, baseando-se em três principais abordagens: o contato nó-a-nó utilizando o Modelo de Fricção de Jenkins, elementos de espessura fina, e placas sem espessura. Em seguida, conduziram experimentos, comparando os resultados experimentais com os numéricos, evidenciando as questões de performance das abordagens numéricas.

Seguindo esta mesma linha de pesquisa, Omar [11] realizaram modelagem, via elementos finitos, utilizando quatro abordagens distintas, comparou todos os resultados com os experimentais, considerando os fatores computacionais de custo, consolidando o fato de o modelo placa-parafuso simplificado conseguir prever, com alta acurácia, o comportamento dinâmico das juntas.

Chaves *et al.* [12] propuseram um procedimento numérico para análise de uma estrutura com juntas rebitadas, baseando-se em modelagem com elementos finitos, utilizando uma

estrutura conhecida na indústria aeronáutica, considerando os efeitos das concentrações de tensões ao redor dos furos dos prendedores, bem como o efeito da não-linearidade geométrica.

## 1.2 Justificativa e Motivação

Spinelli [13] explicou que as juntas são as fontes mais comuns de falhas em estruturas aeronáuticas, e devem, por este motivo, serem bem estudadas no momento do projeto, bem como durante o uso, serem realizadas diversas observações acerca de seu comportamento, para que se obtenha uma boa estimativa de vida com segurança.

A medida em que as juntas são solicitadas, com o tempo, é esperado que haja alguma alteração nas características delas, por exemplo, em juntas aparafusadas, se a estrutura for solicitada de forma cíclica, como acontece na indústria aeronáutica, é comum que o aperto dos parafusos diminua, ou em alguma escala mais catastrófica, que surjam fissuras nestes componentes.

De toda forma, tais alterações nesses sistemas causam, direta ou indiretamente, mudanças nos parâmetros característicos de toda a estrutura, de maneira que elas podem ser evidenciadas por meio de estudos vibratórios, tais como a Análise Modal. Esta técnica permite observar cada parâmetro, sem causar danos adicionais à estrutura, de maneira que se ela for aplicada recursivamente, possibilitará acompanhar, com detalhes, a evolução da peça, viabilizando, assim, a identificação precoce de possíveis falhas.

## 1.3 Objetivo

O presente trabalho tem por objetivo identificar, por meio de Técnicas Modais, os parâmetros dinâmicos em juntas, utilizando o Algoritmo Genético como ferramenta de otimização.

### 1.3.1 Objetivos Específicos

Este estudo tem como objetivos específicos:

- Verificar a viabilidade de métricas que envolvam parâmetros modais, isto é, frequências naturais e formas modais;
- Verificar a viabilidade de métricas envolvendo respostas dinâmicas do sistema (FRF);
- Verificar a robustez da técnica frente à exposição a ruídos;

- Verificar a plausibilidade da utilização da técnica de otimização em aplicações de estruturas simples com variadas condições de contorno; e
- Verificar a usabilidade da Subestruturação Dinâmica para reduzir domínios de análise.

## 1.4 Metodologia

Na primeira etapa do processo, para que se verificasse a eficiência da ferramenta de otimização proposta, o Algoritmo Genético, foram identificados os pontos ótimos de três funções conhecidas na literatura para este fim. Em seguida se propôs realizar estudos de caso, com estruturas simples, utilizando a otimização de parâmetros.

A princípio, para esta etapa, a partir de uma formulação de um modelo de alta fidelidade, no caso, uma solução analítica de uma viga engastada-livre, sob a finalidade de otimizar dois parâmetros associados ao problema físico, a saber: módulo de elasticidade e densidade, foi feita uma varredura com dois vetores de informações viáveis, para posterior análise de minimização/maximização. Tal análise foi feita por meio do Algoritmo Genético, utilizando uma métrica de entradas modais, de forma que foi possível determinar a superfície *fitness* para esses vetores, bem como os pontos ótimos. Um ruído numérico aleatório foi, posteriormente, aplicado para que estabelecesse a robustez da técnica de otimização, frente a possíveis ruídos.

De maneira semelhante, foi feito um ensaio computacional, também utilizando modelo de alta fidelidade, de uma viga com forçamento externo. Esse ensaio foi realizado seguindo a mesma lógica do anterior, porém, desta vez, as entradas da métrica foram alteradas para receber as respostas dinâmicas (FRFs) do sistema. Neste caso, a curva *fitness* foi determinada, bem como um conjunto de possíveis soluções, isto é, uma seleção de combinações que são relevantes para a otimização.

## 1.5 Organização do Trabalho

O trabalho está organizado como segue. O capítulo 2 é a composição de uma rápida prolução teórica acerca dos assuntos tratados nos demais capítulos. O capítulo 3 apresenta o Algoritmo Genético, suas propriedades, parâmetros e condicionantes, além de exibir uma verificação matemática de desempenho. O capítulo 4 apresenta uma rápida demonstração das técnicas de acoplamento e desacoplamento dinâmico, por meio de subestruturação baseada em frequência, utilizando multiplicadores de Lagrange. O capítulo 5 aponta alguns resultados numéricos baseados em situações-problema simples, já aplicando o conceito de atualização com Algoritmo Genético.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

Neste capítulo, são apresentados os conceitos, as propriedades, as equações e as interpretações fenomenológicas que serão úteis no decorrer das manipulações e atividades deste trabalho. Enfatadamente, os conceitos pertinentes aos assuntos inteligência computacional e vibrações mecânicas serão debatidos a seguir.

### 2.1 Viga de Euler-Bernoulli

Uma viga de Euler-Bernoulli é um modelo matemático para a descrição de fenômenos vibratórios em vigas, cuja altura de perfil não seja significativa para a consideração de efeitos cisalhantes, tanto por momentos torsores, quanto para esforços cortantes. Segundo Savi e Paula [14], a hipótese de Bernoulli pode ser sintetizada pelo fato de uma seção plana e normal à linha média permanecer nesta condição ainda que se apliquem momentos.

Para quantificar os parâmetros pertinentes do objeto de estudo, é possível fazê-lo por meio da análise de forças e momentos de um elemento qualquer contido nele. Esse elemento está localizado em uma posição arbitrária  $x$  e tem espessura  $\Delta x$ , infinitesimal, sob um forçamento externo  $f$  qualquer, e está representado na Figura 2.1.

A partir do diagrama de corpo livre do elemento representado na Figura 2.1, é possível aplicar a Segunda Lei de Newton, bem como equacionar os momentos, conforme é visto na Equação (2.1), considerando que  $w$  representa o deslocamento da linha média da viga e  $\psi$ , a deflexão angular da linha média.

$$\begin{cases} \sum F = \Delta V + f\Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \sum M = \Delta M - V\Delta x + f\frac{\Delta x^2}{2} = -\rho I \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.1)$$

Como, a princípio, o comprimento do elemento é infinitesimal, faz sentido, portanto, que

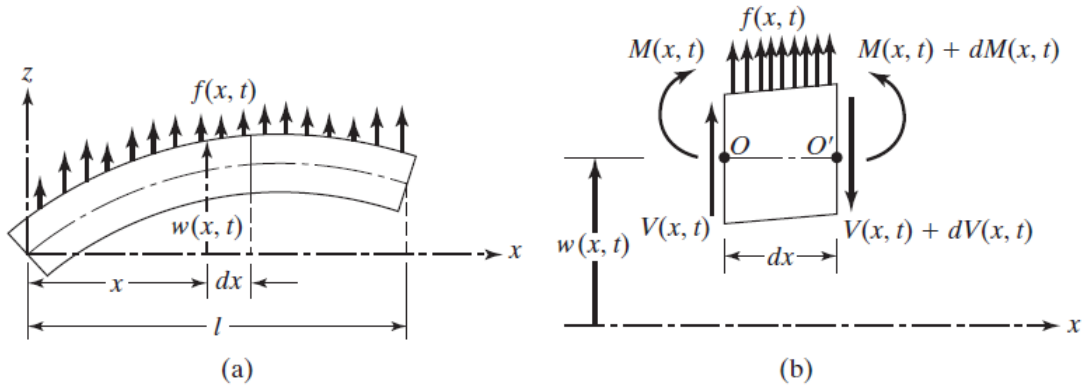


Figura 2.1: Modelo de viga, vista geral (a) e um elemento qualquer (b)[15]

se extraia o limite das equações com  $\Delta x \rightarrow 0$ . Assim a Equação (2.1) transformar-se-á na Equação (2.2):

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} + f = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} & (a) \\ \frac{\partial M}{\partial x} - V = -\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} & (b) \end{cases} \quad (2.2)$$

Como esta é uma viga de Euler-Bernoulli, e é válido, por hipótese, que as seções normais à linha média mantêm-se normais após a aplicação da carga, então, para pequenos deslocamentos, pode-se dizer que  $w$  e  $\psi$  estão relacionadas segundo a Equação (2.3).

$$\psi = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.3)$$

Igualmente importante salientar que sob essas condições, Beer e Johnston [16] garantem que a segunda derivada do deslocamento da linha média está relacionada com curvatura da viga, o que pode ser visto na relação do raio da circunferência osculatória, na Equação (2.4).

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

O momento  $M$  pode ser calculado segundo a Equação (2.5), de forma que se pode desenvolver uma relação definitiva para o fenômeno, como se pode ver na Equação (2.7).

$$M = - \int_A E z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

Agora, manipulando a Equação (2.2), tomando a derivada parcial em  $x$ , na equação (b),

somando, termo a termo, com (a), tem-se

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \quad (2.6)$$

A partir das Equações (2.3) e (2.5) em (2.6), tem-se:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - f = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.7)$$

É possível desprezar a parcela que indica a inércia de rotação, visto que se trata de uma viga Euler-Bernoulli, o que transforma a Equação (2.7) em uma versão mais simplificada:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - f = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

## 2.2 Determinação Analítica das Frequências e Modos Naturais

A partir da Equação (2.8), e admitindo que a solução da EDP é separável, isto é, que a solução é uma composição de funções de uma variável exclusiva, e possível exercer uma manipulação matemática para isolar cada uma dessas funções,  $W(x)$  e  $g(t)$ , que estão associadas diretamente com as frequências naturais, bem como com as formas modais. Assim:

$$w(x, t) = W(x) \cdot g(t) \quad (2.9)$$

Aplicando a Equação (2.9) na EDP característica, obtém-se:

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} g = -\rho A \frac{d^2 g}{dt^2} W \quad (2.10)$$

Pode-se, a partir do resultado obtido na Equação (2.10), isolar as funções independentes em cada membro da equação. Dessa forma, em um dos membros, haverá uma composição dependente exclusivamente do espaço, e no outro, uma composição dependente exclusivamente do tempo, de maneira que isso somente poderá ser verdade se cada uma dessas composições for independente, tanto do espaço, como do tempo, isto é:

$$\frac{EI}{\rho A} \left( \frac{1}{W} \right) \frac{d^4 W}{dx^4} = -\frac{d^2 g}{dt^2} \left( \frac{1}{g} \right) = \omega^2 \quad (2.11)$$

A Equação (2.11) gera, como são duas variáveis, duas equações, que são descritas na

Equação (2.12), considerando que  $\beta^4 = \rho A \omega^2 / EI$ :

$$\begin{cases} \frac{d^2 g}{dt^2} + \omega^2 g = 0 & (a) \\ \frac{d^4 W}{dx^4} - \beta^4 W = 0 & (b) \end{cases} \quad (2.12)$$

Tendo por base, inicialmente, a parte (a) da Equação (2.12), a solução pode ser proposta como  $g(t) = Ae^{st}$ . Dessa forma, tem-se:

$$s^2 Ae^{st} + \omega^2 Ae^{st} = 0 \Rightarrow s = \pm i\omega \quad (2.13)$$

Da Equação (2.13), pode-se substituir na proposta de solução, de forma a obter-se a família de soluções possíveis:

$$g(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.14)$$

Agora, para a equação do espaço, segue-se o mesmo padrão, isto é, sugere-se uma solução do tipo exponencial  $W(x) = Ae^{sx}$  e substitui-se na EDO característica, nesse caso (2.12 (b)). Assim, tem-se:

$$(s^4 - \beta^4)Ae^{sx} = 0 \Rightarrow s = \pm\beta \vee s = \pm i\beta \quad (2.15)$$

Dessa forma, como foi admitida uma forma de solução, basta aplicar os valores obtidos para  $s$  que se determinará a solução geral, como é visto na Equação (2.16).

$$W(x) = A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} + A_3 e^{i\beta x} + A_4 e^{-i\beta x} \quad (2.16)$$

É possível, por meio de identidades matemáticas, transformar as funções exponenciais, complexas ou não, em funções trigonométricas ou hiperbólicas, de maneira que a Equação (2.16) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$W(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) + C_3 \cosh(\beta x) + C_4 \sinh(\beta x) \quad (2.17)$$

A Equação (2.17) representa, tipicamente, o esboço geral da forma modal governante de um modo vibracional. Contudo, para que se determine, analiticamente, tal forma modal, é necessário que incluam as condições de contorno da viga, restrições e liberdades, de maneira que determinar-se-ão os valores para as funções de amplitude  $C_i$ , bem como o problema de valor próprio para a determinação das frequências naturais, que dependem de  $\beta$ .

Nesse ponto, Rao [15] mostra que para cada condição de contorno existe um problema de autovalores a ser solucionado, e que, por exemplo, uma viga de comprimento  $l$  engastada em



uma ponta e livre na outra possui forma modal, para o  $n$ -ésimo modo, conforme a Equação (2.18) mostra.

$$\begin{cases} \cos(\beta_n l) \cdot \cosh(\beta_n l) = -1 \\ W_n(x) = C_n \cdot \{\text{sen}(\beta_n x) - \text{senh}(\beta_n x) - \alpha_n \cdot [\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x)]\} \\ \alpha_n = \frac{\text{senh}(\beta_n l) + \text{sen}(\beta_n l)}{\cos(\beta_n l) + \cosh(\beta_n l)} \end{cases} \quad (2.18)$$

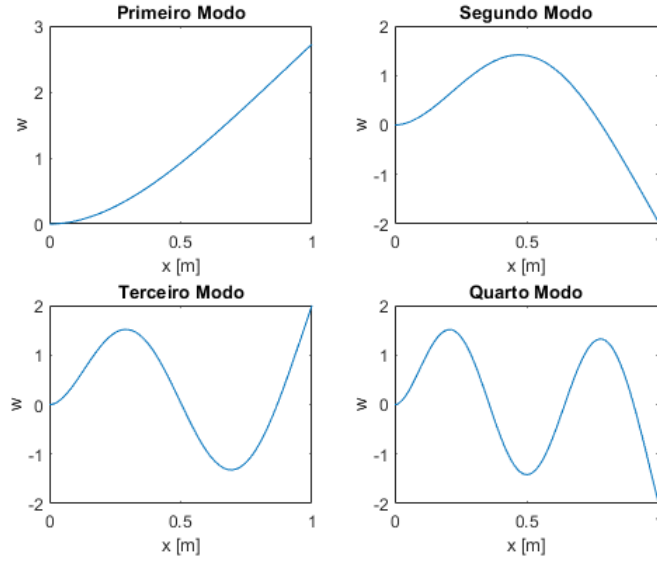


Figura 2.2: Primeiros modos vibracionais para viga engastada-livre de 1 m de comprimento

Agora, para determinar as frequências naturais, basta manipular a expressão característica de  $\beta_n$ , em sua definição, já que seu valor foi calculado por meio da Equação (2.18).

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.19)$$

## 2.3 Função de Transferência

Segundo Soeiro [17], uma função de transferência é, por definição, uma função matemática que associa a resposta de um sistema à excitação a qual ele foi submetido. A rigor, essa função é largamente utilizada na identificação de parâmetros sistemáticos, porquanto é possível, a partir dela, delimitar experimentalmente as características intrínsecas do objeto de estudo.

Em uma situação hipotética, na qual o objeto de estudo é um sistema de um grau de liberdade, isto é, um sistema dotado de massa, amortecimento e rigidez únicos, pode-se obter a função de transferência a partir da aplicação da Transformada de Laplace na equação

do movimento, como se pode ser visto nas Equações (2.20) e (2.21).

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.20)$$

Agora, tomando a Transformada de Laplace sobre a Equação (2.20), considerando que o interesse está no regime permanente, de maneira que as condições iniciais de posição e velocidade não causam interferência, tem-se:

$$ms^2x(s) + csx(s) + kx(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (2.21)$$

Assumindo a forma da função de transferência, tomando o quociente entre a resposta do sistema (posição) e a excitação à qual o sistema foi exposto (forçamento externo), define-se, matematicamente, para este caso, o comportamento da função de transferência, conforme é visto na Equação (2.22).

$$H(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (2.22)$$

A Equação (2.22) propõe que se estude, matematicamente, o comportamento do denominador, isolando-se as raízes desse polinômio característico, com base nas características pertinentes ao objeto de estudo. Dessa forma, as raízes, doravante polos, são descritas segundo a Equação (2.23), para um sistema subamortecido.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.23)$$

Existe, contudo, um caso específico de função de transferência, usualmente utilizado em processos experimentais, como em análises modais, que é a Função de Resposta em Frequência (FRF), a qual assume uma aplicação do campo Laplaciano no campo das frequências, isto é, a princípio é uma bijeção do espaço temporal no espaço das frequências. As FRFs são obtidas, algebricamente, pela aplicação dos polos inerentes na função de transferência correspondente, na variável frequência, ou seja

$$H(\omega) = H(s)\Big|_{s=i\omega} = \frac{1/m}{\omega_n^2 - \omega + 2i\xi\omega_n\omega} \quad (2.24)$$

As funções de resposta em frequência são utilizadas largamente na identificação experimental de parâmetros fundamentais nos objetos de estudos em análise modal, e isto se dá, de certa forma, visualmente. Existem maneiras e técnicas distintas para cada necessidade. Podem-se citar, como principais, os Diagramas de Bode, o Diagrama de Argand-Gauss e o Diagrama de Nyquist.

Exemplos desses diagramas são encontrados nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5, as quais foram plotadas com uma série de valores para os amortecimentos. O diagrama de Bode é um

conjunto de gráficos, os quais consideram a magnitude das FRFs em função do campo de frequências, bem como as fases das FRFs em função do campo de frequências.

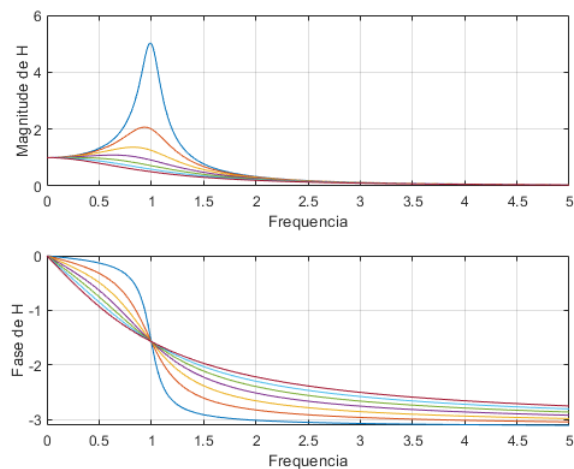


Figura 2.3: Diagrama de Bode

As ressonâncias são esperadas nas regiões de pico (na magnitude), tal qual na fase  $-\pi/2$ , como pode ser visto na Figura (2.3), onde a curva azul representa o menor amortecimento da série. De fato, a magnitude na área de ressonância tende a ser maior na medida em que se diminui o amortecimento.

Já o Diagrama de Argand-Gauss considera as partes real e imaginária da FRF em função da frequência. Nesse estudo, as ressonâncias são esperadas quando a parte real cruza o eixo das abcissas, bem como nos vales da parte imaginária.

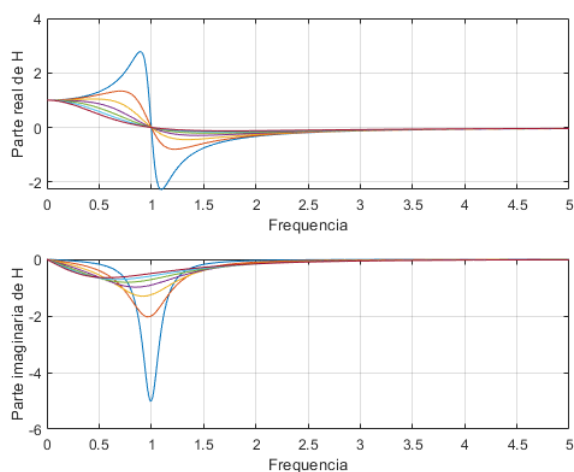


Figura 2.4: Diagrama de Argand-Gauss

Os Diagramas de Nyquist são diferentes no que diz respeito à construção, isto é, os eixos coordenados não consideram o campo de frequência, mas somente as partes real e imaginária da FRF, dando uma interpretação espacial do fenômeno vibratório. Neste caso,

como se pode ver na Figura 2.5, os círculos aumentam o diâmetro na medida em que se diminuem os amortecimentos.

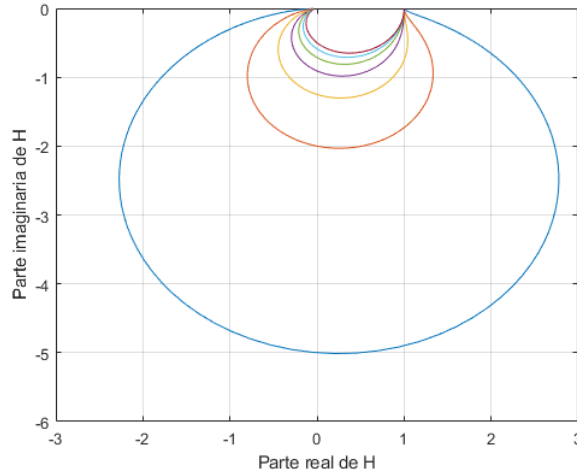


Figura 2.5: Diagrama de Nyquist

Ademais, existem técnicas de identificação associadas à análise desses diagramas, como o Método da Quadratura do Pico, as técnicas de análise da largura de banda e o Método dos Mínimos Quadrados [2].

## 2.4 Superposição Modal

O Método da Superposição Modal compreende uma série de eventos matemáticos para sustentar previsões de respostas de sistemas com vários graus de liberdade. Para tal, basta considerar um sistema com  $n$  graus de liberdade, e para efeitos explicativos, que não haja amortecimento. Desta maneira, a resposta desse sistema, isto é, o movimento do conjunto pode ser descrito segundo uma equação matricial que envolve os parâmetros de inércia e de rigidez, conforme descrito na Equação (2.25).

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{F\} e^{i\Omega t} \quad (2.25)$$

A Equação 2.25 pode ser transportada para o domínio modal por meio de uma transformação da variável  $x$ , para  $\eta$ , considerando a matriz modal  $\Phi$ , a matriz dos autovetores desse sistema. No momento da transformação, quando há a pré-multiplicação por  $[\Phi]^T$ , propõe-se uma normalização da matriz de inércia, isto é, após todos os cálculos da transformação, será forçada a aparição de uma matriz identidade, conforme Inman [18]. Assim:

$$\{x\} = [\Phi] \{\eta\} \Rightarrow [I_n] \{\ddot{\eta}\} + [\Lambda] \{\eta\} = [\Phi]^T \{F\} e^{i\Omega t} \quad (2.26)$$

Na Equação (2.26), a matriz  $\Lambda$  é diagonal, e cada elemento não-nulo  $\lambda_k$  representa o

quadrado da  $k$ -ésima frequência natural do sistema.

Seja  $\mathbf{v}_k$  o conjunto dos  $n$  autovetores de  $\Lambda$ , e que para esta análise, por simplicidade  $\lambda_k \neq 0$ , para todo  $k$ . Dessa maneira, pode-se deprender que as soluções no domínio modal, são da forma exponencial, conforme mostra a Equação (2.27).

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = \mathbf{v}_k e^{\pm\sqrt{\lambda_k}it} \quad (2.27)$$

Utilizando a Identidade de Euler, é possível reescrever esta equação na forma harmônica, como mostra a Equação (2.28).

$$\boldsymbol{\eta}_k(t) = d_k \mathbf{v}_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}t + \varphi\right) \quad (2.28)$$

Na Equação (2.28), as variáveis  $d_k$  e  $\varphi$  são determinadas pela inserção das condições iniciais da situação-problema, que podem ser descritas como  $\boldsymbol{\eta}(0)$  e  $\dot{\boldsymbol{\eta}}(0)$ . Com a normalização aplicada, é possível demonstrar que os autovetores são todos ortogonais dois a dois, isto é,  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_j = 0$  se  $k \neq j$ . Dessa maneira, segundo Anton e Rorres [19], o conjunto desses autovetores de  $\Lambda$ , por serem ortogonais dois a dois, formam uma base completa em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, qualquer vetor incluso nesse domínio é escrito como a combinação linear dos  $n$  vetores da base, que neste caso são os autovetores. Dessa forma, em particular, a solução para  $\boldsymbol{\eta}(t)$  está definida:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{v}_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}t + \varphi\right) \quad (2.29)$$

Assim, quando se retorna para o domínio físico, por meio da Equação (2.26), as formas modais  $\boldsymbol{\phi}_k$  aparecem naturalmente, por definição, de maneira que se pode escrever definitivamente:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n d_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}t + \varphi\right) \boldsymbol{\phi}_k \quad (2.30)$$

Por fim, a Equação (2.30) exhibe a principal característica do modelo de superposição, isto é, a resposta de um sistema com vários graus de liberdade, independentemente da excitação, será a combinação linear efetiva de todas as formas modais correspondentes aos graus de liberdade do sistema.

Via de regra, o parâmetro  $d_k$  indica a influência de uma forma modal na resposta final do corpo, e isso se torna preponderante na medida em que se aproxima da  $k$ -ésima frequência natural, quando esse parâmetro tenderá ao infinito.

Alternativamente, assumindo a hipótese contida na Equação (2.27), aplicando-a na equação geral descrita pela Equação (2.26), extraindo a solução por inversão de matrizes, será obtido o que se vê na Equação (2.31):

$$\{\boldsymbol{\eta}\} = \{\bar{\boldsymbol{\eta}}\} e^{i\Omega t} \Rightarrow \{\bar{\boldsymbol{\eta}}\} = \left(-\Omega^2[\mathbf{I}_n] + [\Lambda]\right)^{-1} [\Phi]^T \{F\} \quad (2.31)$$

Retornando para o domínio físico, pré-multiplicando por  $[\Phi]$ , obtém-se a Equação (2.32):

$$\{\bar{U}\} = [\Phi] (-\Omega^2[I_n] + [\Lambda])^{-1} [\Phi]^T \{F\} \quad (2.32)$$

Por definição, na Equação (2.32), que relaciona deslocamento e a força externa, pode-se, portanto, incluir a matriz de receptância, que é de razoável facilidade de obtenção, em análise modal, de forma a reescrever:

$$\{\alpha(i\omega)\} = [\Phi] (-\Omega^2[I_n] + [\Lambda])^{-1} [\Phi]^T \quad (2.33)$$

A Equação (2.33) relaciona a receptância com os fatores modais do sistema analisado. Se o produto matricial contido nela for expandido, obter-se-á:

$$\{\alpha(i\omega)\} = \begin{bmatrix} \{\phi_1\} & \{\phi_2\} & \cdots & \{\phi_n\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\omega_1^2 - \Omega^2)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\omega_2^2 - \Omega^2)^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\omega_n^2 - \Omega^2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_1\}^T \\ \{\phi_2\}^T \\ \vdots \\ \{\phi_n\}^T \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Sendo assim, é possível escrever a receptância como uma soma de parcelas que remetem às características modais de cada grau de liberdade:

$$\{\alpha(i\omega)\} = \frac{\{\phi_1\} \{\phi_1\}^T}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{\{\phi_2\} \{\phi_2\}^T}{\omega_2^2 - \Omega^2} + \cdots + \frac{\{\phi_n\} \{\phi_n\}^T}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\{\phi_i\} \{\phi_i\}^T}{\omega_i^2 - \Omega^2} \quad (2.35)$$

Essa técnica é largamente utilizada nos campos da Análise Modal Experimental, porque é possível identificar as formas modais, bem como as frequências naturais do sistema, e também, no campo das simulações por elementos finitos, a superposição modal é utilizada para as determinações das respostas dos corpos em geral.

Para exemplificar esse fenômeno, é possível assumir um sistema com vários graus de liberdade, retratando a função de resposta em frequência dele, e sobrepor sobre esse gráfico as funções de transferência de cada modo vibracional, como se pode ver na Figura 2.6, na qual a linha azul representa a FRF do sistema e as demais curvas são as funções de transferência de cada modo.

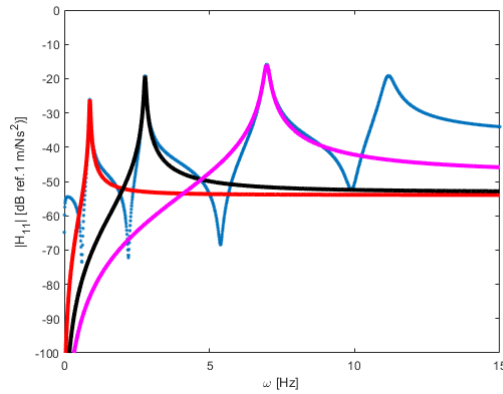


Figura 2.6: Exemplo de sobreposição modal

## 2.5 Técnicas de Atualização - *Updating Techniques*

Neste campo de estudos, é importante compreender a forma que se é aplicada para computar uma série de expressões e sentenças matemáticas, de maneira digital, bem como executar estudos acerca das técnicas de otimização computacionais, principalmente no campo da heurística.

Em situações de simulação computacional, é desejável reproduzir, com fidelidade, um fenômeno físico, de maneira que seja viável fazer previsões reais acerca dele. Contudo, sempre existirá alguma discrepância entre o fenômeno real, medido, e o simulado computacionalmente, e isto está associado a incertezas aleatórias, como ruído na medida, ou até alguma limitação no modelo.

Medições experimentais podem fornecer uma boa fonte de dados para melhorar a acurácia das previsões do modelo computacional, e isto pode ser feito modificando (atualizando) o modelo, conforme Schuëller e Jensen[20]. Tais atualizações são realizadas quando se alteram parâmetros duvidosos, ou incertos, nos modelos, basicamente utilizando os dados advindos de estudos vibratórios do sistema estrutural, segundo Bartilson[21].

Segundo Mottershead e Friswell[22], as principais fontes de erros na construção de um modelo de elementos finitos, os quais provocarão aumento na incerteza nas previsões fornecidas por ele, são os erros na estrutura do modelo, quando há incertezas associadas às equações governantes; os erros nos parâmetros do modelo, os quais respondem geralmente à má aplicação das condições de contorno; e os erros de ordem, os quais são associados à discretização de sistemas contínuos muito complexos.

Existem inúmeras técnicas computacionais que tratam diretamente de atualização de modelos, conforme elenca Marwala [23], os quais, em tese, operam em dois domínios: o domínio modal, no qual os dados são expressos como frequências naturais, taxas de amortecimento, e formas modais; e o domínio em frequência, no qual a excitação e a resposta da estrutura de estudo medidas são transformadas no domínio de frequência utilizando transfor-

madras de Fourier.

Para esse propósito, uma série de técnicas são admissíveis, a depender do caso, das dificuldades de cada análise. Por exemplo, uma viga simples pode ser atualizada pelo Método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), segundo Azizi [24], porquanto é um método que preserva estabilidade de convergência. Pode-se, também, utilizar outros métodos, como o Anelamento Simulado, conforme Levin e Lieven [25], algum método utilizando redes neurais artificiais, com aprendizado profundo, conforme Zapico *et al* [26]. Há, também, métodos que se valem de estruturas aleatórias de raciocínio como o Método do Pastor Embaralhado como elencou Kaveh e Zaerreza [27].

A princípio, qualquer técnica de atualização de modelos envolve tentar ajustar as curvas simuladas computacionalmente às experimentais, por meio de adaptações em alguns parâmetros de procedência duvidosa, ou que notavelmente têm consigo uma fonte inviável de erros. Pascual [28] propôs um método, com elevada robustez, de atualização de modelos baseando-se em FRFs, e deixando propositalmente os resíduos constantes nas iterações do processo. A Figura 2.7 mostra o movimento desejável para os resultados simulados em relação aos experimentais, a partir de alguma técnica de atualização.

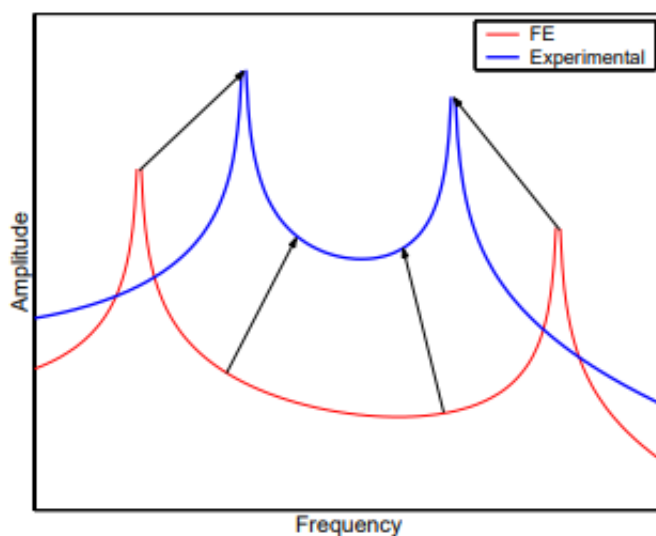


Figura 2.7: Diagrama hipotético de atualização

Neste contexto, é bastante pertinente realizar algum estudo de sensibilidade dos modelos, para que os estimadores, bem como a escolha e determinação das variáveis de estudo sejam plausíveis, do ponto de vista experimental. Segundo Mottershead *et al* [29], é possível e viável utilizar esse tipo de estudo em problemas de larga escala industriais, com bastante acurácia, nos quais se utiliza atualização de modelos.

Cada um desses métodos portam proficiências e deficiências, e são apropriados para determinadas atividades. Neste trabalho, dar-se-á ênfase no método de atualização utilizando Algoritmos Genéticos, os quais são baseados em observações acerca do processo evolutivo de espécies biológicas.



# Capítulo 3

## Algoritmo Genético

Neste capítulo é apresentada uma metodologia de identificação de parâmetros, experimental e não destrutiva. Trata-se de um modelo evolutivo de populações conhecido como Algoritmo Genético.

### 3.1 Definição Matemática

Seja  $P$  um problema de cunho físico ao qual se podem atribuir características matemáticas, isto é, indicar variáveis para que seja possível qualquer análise fenomenológica, por meio de funções observáveis. Entretanto, a depender das características intrínsecas de  $P$ , não é trivial avaliar tais propriedades, tampouco atribuir, com baixas incertezas, valores numéricos a elas.

Dessa forma, é fulcral que existam modelos estruturais para solucionar  $P$ , de modo a facilitar processos, no sentido de baratear custos operacionais, com, por exemplo, o tempo de execução de análises estruturais e detecção de falhas, ou aprofundar o conhecimento acerca de um fenômeno específico.

De maneira geral, um fenômeno físico é tradutível em equações matemáticas governantes, que para este contexto, a determinação de parâmetros, serão estudadas via correlação de variáveis, em uma função específica, a qual deverá ser otimizada (minimizada ou maximizada), denominada doravante função-objetivo  $f_{\text{obj}}$ , que relaciona um vetor  $n$ -dimensional real (variáveis de inspeção) a um valor (métrica), também real, isto é:

$$f_{\text{obj}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f_{\text{obj}}(\mathbf{x}) = y \quad (3.1)$$

É notável que  $P$  pode ser complexo o suficiente para demonstrar uma gama de possíveis soluções. Contudo, como as características do fenômeno são observáveis, ou seja, em se tratando de um fenômeno real, com um conjunto fixo e finito de restrições, então existe uma solução ótima  $\mathbf{x}^*$ , que maximiza ou minimiza  $f_{\text{obj}}$ , a depender do que se é procurado.

### 3.1.1 Métodos de Otimização

Segundo Holtz [30], esse tipo de otimização pode ser feito por intermédio de dois tipos de métodos, a saber, os métodos determinísticos e os métodos estocásticos.

Os métodos determinísticos, os quais se baseiam sobretudo em argumentos tipicamente matemáticos, isto é, valem-se de toda a estrutura de raciocínio, partindo de axiomas, lemas e teoremas a fim de alcançar a legitimidade de proposições, que validam um processo de convergência para a solução ótima, quando esta existe. Esse tipo de método costuma ser bem preciso, porém é dependente de um bom ponto de partida, o qual determina todos os passos subsequentes.

Os métodos estocásticos, por sua vez, ponderam o fenômeno pela função-objetivo, com parâmetros introduzidos via geração de eventos tipicamente aleatórios, de maneira que, iterativamente, haverá a convergência para a solução ótima, quando esta existir. Esse tipo de método permite a otimização de problemas com muitas variáveis, ou seja, é possível descrever um fenômeno de maneira ótima, com poucos dados acerca dele. Eventualmente, se o conjunto de variáveis desconhecidas for muito grande, o método torna-se custoso.

O Algoritmo Genético é um método estocástico, que se vale da meta-heurística, a qual conforme Biondi *et al* [31] descreve, é a composição de heurística, a qual é um termo designado para descrever um método que baseado na experiência ou julgamento, parece conduzir a uma boa solução, isto é, um método cujos resultados são tipicamente circunstanciais, não verificáveis, com o prefixo meta, que indica um nível superior de descoberta.

A rigor, o Algoritmo Genético é baseado no modelo evolutivo das espécies proposto por Darwin [32], o qual indica as condições para a sobrevivência de uma espécie, bem como dos mecanismos evolutivos, que envolvem cruzamentos, competições, aptidões e dizimações, de maneira que os indivíduos mais aptos à sobrevivência transmitem suas características aos seus descendentes e os menos aptos, ou sofrem alguma mutação ou morrem.

Dessa forma, o Algoritmo Genético, como neste trabalho, pode ser usado para problemas de otimização que envolvam sistemas em que as informações sejam bem limitadas.

### 3.1.2 Procedimento

O AG, conforme Colherinhas [33], sistematicamente, cria uma população com características aleatórias tendo em vista as restrições do sistema. A partir da função-objetivo, atribui-se a cada indivíduo uma pontuação, a chamada métrica, de maneira que ao final da avaliação, os indivíduos com as maiores pontuações reproduzir-se-ão a fim de passar adiante as características que geraram a boa pontuação, bem como os indivíduos de baixa pontuação iniciarão alguma estratégia evolutiva que aumente a sua pontuação, seja por meio de cruzamentos ou mutações. Podem-se definir, ainda, o elitismo, que traduz a capacidade de uma parcela dos melhores indivíduos de sempre ficar viva, bem como a dizimação dos piores

indivíduos. Idealmente, faz sentido promover a manutenção da diversidade dos indivíduos, como DeJong [34] e Goldberg [35], tal qual operar as estratégias evolutivas promovendo a hibridização das características individuais (genes), como foi realizado por Costa [36] e Muhlenbein *et al* [37].

Esse processo se repete por várias gerações, para que haja a esperança de convergência ao ponto ótimo, já que o algoritmo funciona de forma semelhante ao que Darwin [32] observou em termos de Biologia, isto é, desde que seja fornecido tempo suficiente para o sistema, os seres observados evoluirão para que a suas características favoreçam a sobrevivência da espécie. Este efeito é plausível quando se verifica o Teorema da Convergência para Algoritmos Heurísticos e Meta-Heurísticos, consoante Michalewicz [38]:

$$p \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^t) = f_{\text{obj}}(\mathbf{x}^*) \right\} = 1 \quad (3.2)$$

A Equação (3.2) é bastante clara quanto ao fato de que o método, se convergir, ele o faz em um evento estatisticamente certo, dado um número suficientemente grande de gerações, contudo, não garante a que taxa isto ocorre, de maneira que é necessário estudar as influências de cada parâmetro, para que os resultados sejam computáveis satisfatoriamente.

### 3.1.3 O Algoritmo

Para que o AG fosse implementado computacionalmente, optou-se pela linguagem MATLAB<sup>®</sup>, que oferece boas fonte de resultados gráficos e manipulabilidade das variáveis em massa.

Os parâmetros do sistema que alimentam o programa são: o número de gerações, a partir da primeira população  $N_{\text{ger}}$ , o número de cromossomos por geração  $N_{\text{ind}}$ , o período das dizimações  $N_{\text{diz}}$ , a probabilidade de dizimação  $p_{\text{diz}}$ , a probabilidade de elitismo  $p_{\text{elit}}$ , a probabilidade de mutação  $p_m$ , a probabilidade de cruzamento  $p_c$  e a função-objetivo.

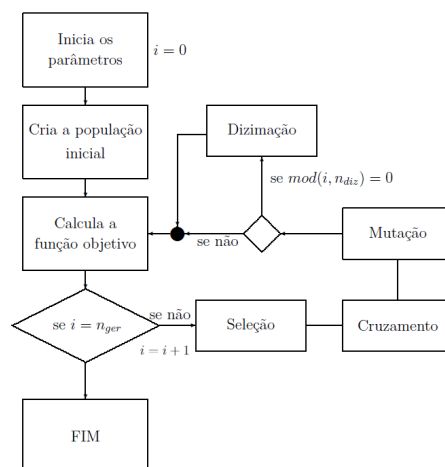


Figura 3.1: Fluxograma do AG implementado [33](adaptado)

## 3.2 Verificação do Algoritmo

A fim de verificar o processo e o AG, propõe-se realizar a otimização de três funções bem conhecidas na Literatura para este fim, conforme é mostrado por Molga e Smutnicki [39]. Elas serão formalmente apresentadas, e em seguida, submetidas ao Algoritmo Genético, para depreender delas o ponto de otimização.

### 3.2.1 Função de De Jong

Trata-se de uma função de teste muito simples, haja vista seu comportamento convergente, de maneira absoluta, e única, ou seja, a função possui uma forma que se assemelha a um poço potencial, o que facilita a otimização. Ela é contínua, convexa e unimodal.

A Primeira Função de De Jong, como é conhecida, é definida usualmente pelo domínio  $[-5.12, 5.12]^n \times \mathbb{N}^*$ , com a seguinte Lei de Formação:

$$f(\mathbf{x}, n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (3.3)$$

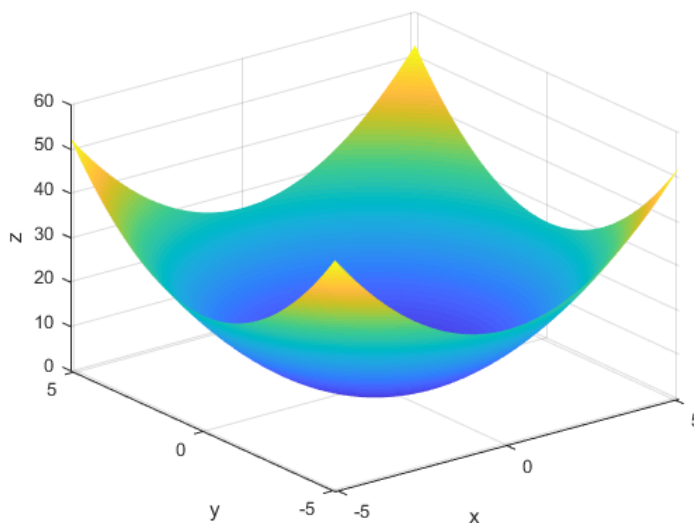


Figura 3.2: Função de De Jong, para  $n = 2$

A função de De Jong assume o mínimo global em  $(0, 0)$ , quando a função atinge o valor 0. Ao submeter esta função ao Algoritmo Genético, ele retornou como *output* o resultado constante na Figura 3.3, e como resultado secundário, as evoluções populacionais na Figura 3.4.

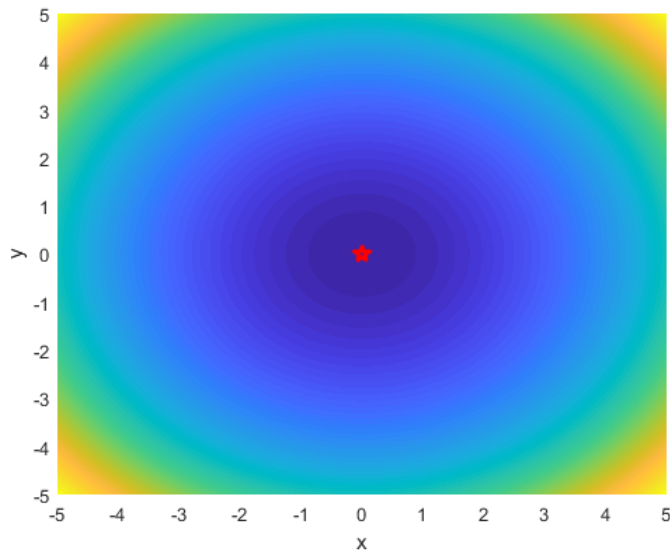


Figura 3.3: Solução proposta pelo Algoritmo Genético, para Função de De Jong no plano  $xy$

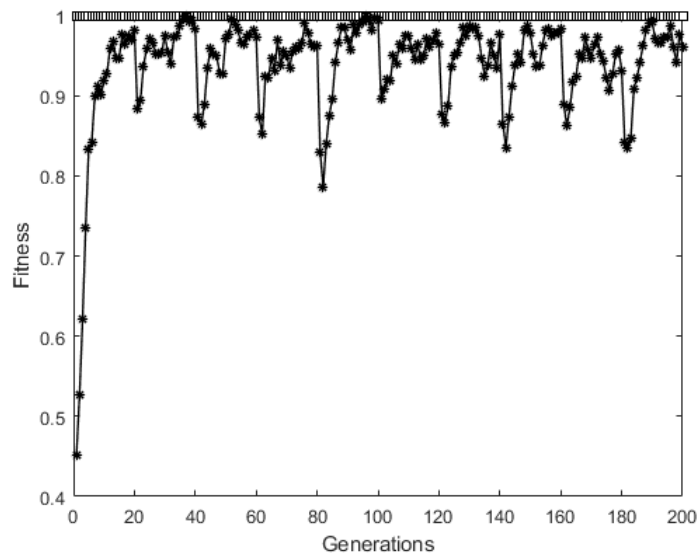


Figura 3.4: Evolução dos indivíduos pelas gerações, Função de De Jong

### 3.2.2 Função de Easom

Esta função é bastante curiosa, para o critério de otimização, já que a área onde está o mínimo global é pequena quando comparada ao espaço total de busca, conforme trabalho de Maia [40].

A Função de Easom, a princípio, é definida pelo domínio  $[-500, 500] \times [-500, 500]$ , com a seguinte Lei de Formação:

$$f(x, y) = -\cos(x) \cdot \cos(y) \cdot e^{-(x-\pi)^2 - (y-\pi)^2} \quad (3.4)$$

Esta função alcança o mínimo global em  $(\pi, \pi)$ , quando a função assume o valor  $-1$ .

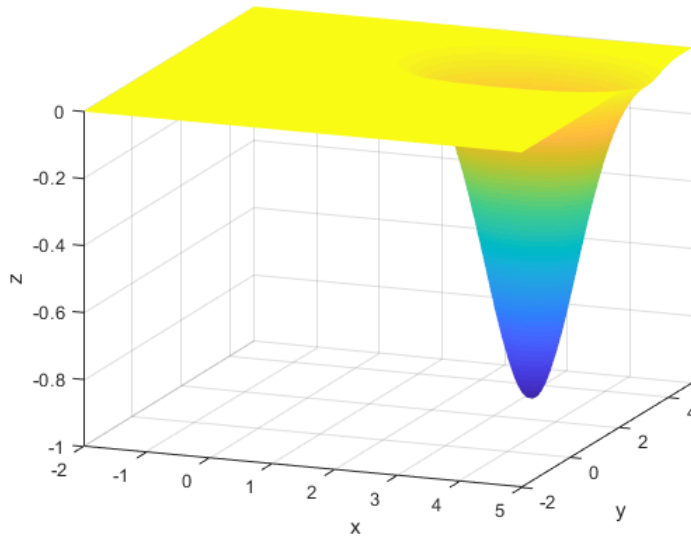


Figura 3.5: Função de Easom, com domínio reduzido

Ao submeter a Função de Easom ao Algoritmo Genético, obteve-se o resultado que consta na Figura 3.6. Um diagrama secundário (Figura 3.7) é gerado pelo mesmo algoritmo, que mostra justamente o desempenho evolutivo do programa em relação à solução ótima, ponderada pela função-objetivo.

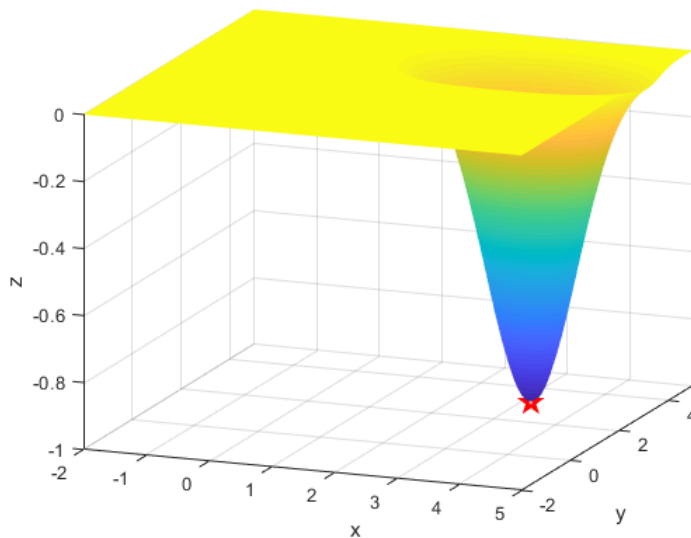


Figura 3.6: Solução proposta pelo Algoritmo Genético, para Função de Easom

Na Figura 3.7, o eixo das abscissas agrupa as gerações, definidas pelo operador, neste caso,  $n_{ind} = 200$ , e o eixo das ordenadas agrupa os valores de métrica. A linha escura com pontos estrelados mostra a mediana das métricas por geração, e a linha fina com pontos quadrangulares revela a métrica do melhor indivíduo na geração.

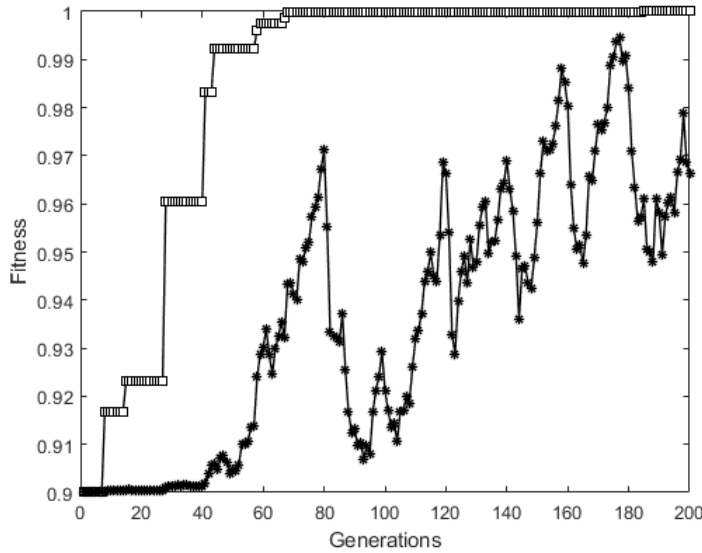


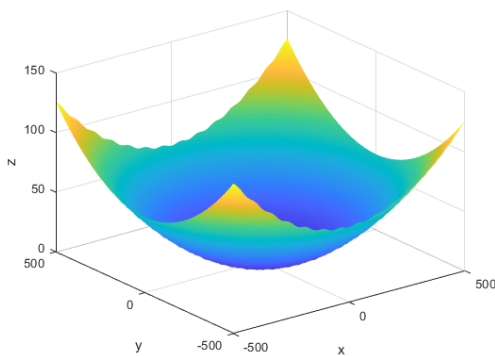
Figura 3.7: Evolução dos indivíduos pelas gerações, Função de Easom

### 3.2.3 Função de Griewangk

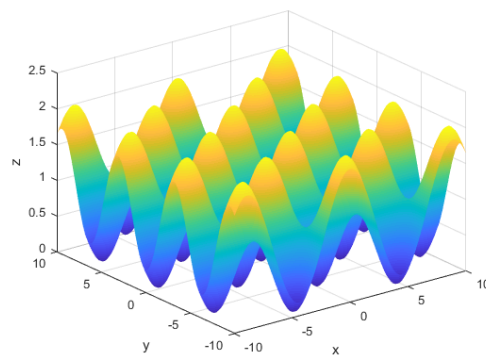
Trata-se de uma função complexa do ponto de vista da otimização, visto que apesar do aspecto macroscópico bem próximo da função de De Jong (Seção 3.2.1), no aspecto microscópico, ela oscila densamente nas proximidades do mínimo global, o que torna difícil a otimização, principalmente se forem aplicados métodos determinísticos.

A Função de Griewangk é definida pelo domínio  $[-500, 500]^n \times \mathbb{N}^*$ , atinge o mínimo em  $(0, 0)$ , quando a função assume o valor 0, e é regido pela Lei de Formação:

$$f(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1 \quad (3.5)$$



(a) Domínio completo



(b) Domínio restrito

Figura 3.8: Função de Griewangk, para  $n = 2$

Ao restringir o domínio na região de mínimo global, como visto na Figura 3.8(a), as oscilações ficam mais visíveis, conforme se pode ser visto na Figura 3.8(b). Essa função

é convexa, contínua e possui por toda a sua extensão, nos dois eixos do domínio, diversos pontos críticos.

Quando se submete ao algoritmo essa função, ele retorna a otimização do mínimo global, conforme se pode ver na Figura 3.9, e o processo evolutivo dos indivíduos, na Figura 3.10, onde se pode observar o grau de convergência, bem como a velocidade, em termos de número de gerações, em que o processo encontra um valor ótimo.

Com os resultados fornecidos pelo procedimento do Algoritmo Genético, nas três funções acima, cada uma com alguma dificuldade, do ponto de vista da otimização, é possível assumir a plausibilidade do funcionamento do processo. Ademais, nas Seções subsequentes serão apresentadas situações em que a função-objetivo não é explícita, como nesses casos, tampouco é bem comportada. Contudo, a resolução desses casos refletem condições de experimentos reais.

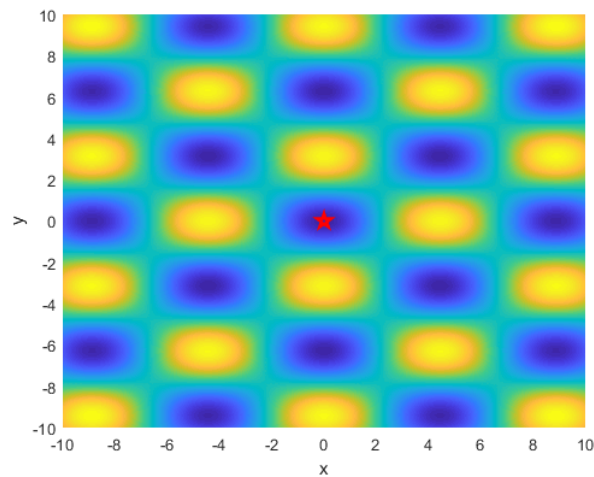


Figura 3.9: Solução proposta pelo Algoritmo Genético, para Função de Griewangk no plano  $xy$

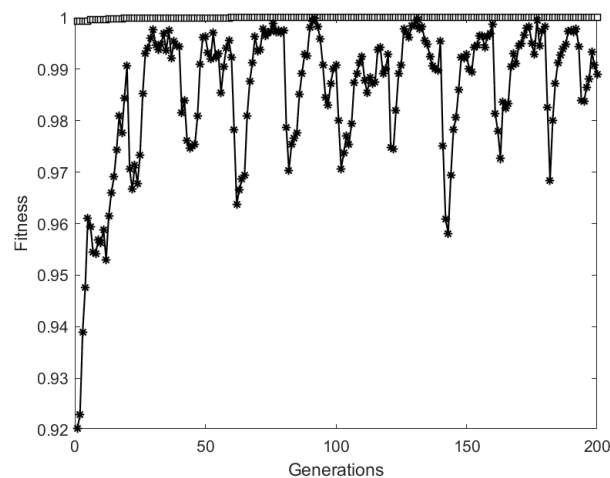


Figura 3.10: Evolução dos indivíduos pelas gerações, Função de Griewangk



# Capítulo 4

## Substruturação Baseada em Frequência (FBS)

Neste capítulo é apresentada uma ferramenta matemática de substruturação no domínio da frequência, utilizada na identificação de parâmetros, capaz de proporcionar reduções em custos computacionais, valendo-se um antigo princípio do “dividir para conquistar”.

### 4.1 Aspectos Gerais

A técnica de substruturação dinâmica consiste em um poderoso conceito capaz de modelar e analisar um sistema dinâmico em termos de suas substruturas [41]. O surgimento desta técnica se deu por volta dos anos 60, como uma maneira de analisar modelos de elementos finitos muito extensos, cuja solução tradicional era inviável, tendo em vista as capacidades computacionais à época.

A técnica possui características que facilitam o processamento de projetos FEM de grandes dimensões [42], possibilitando o tratamento por equipes diversas. É possível associar essa técnica também a projetos cuja complexibilidade estrutural é notável, nos quais se analisam, separadamente, os componentes do conjunto. Além disso, de Klerk [43] também aponta que, com o uso da técnica, é possível reconhecer, com mais facilidade, alguns comportamentos locais das estruturas, bem como é possível mesclar dados numéricos ou analíticos com experimentais. Já Soleimani [44] comprova que é possível descartar componentes que não oferecem importância estrutural, inclusive para melhorar o desempenho computacional.

Matematicamente, ela pode ser descrita como uma sucessão lógica advinda do conceito de Decomposição de Domínios, formulada por H. Schwarz [45]. De maneira análoga àquele raciocínio, pode-se tomar um sistema, do qual é delimitada uma partição estrutural, isto é, tomam-se conjuntos não-nulos, disjuntos dois a dois e cuja união resulta na estrutura total. Em seguida, separam-se estes conjuntos, porém impondo condições de compatibilidade a cada conjunto. Condições estas que consideram as interações internas e externas a cada

conjunto.

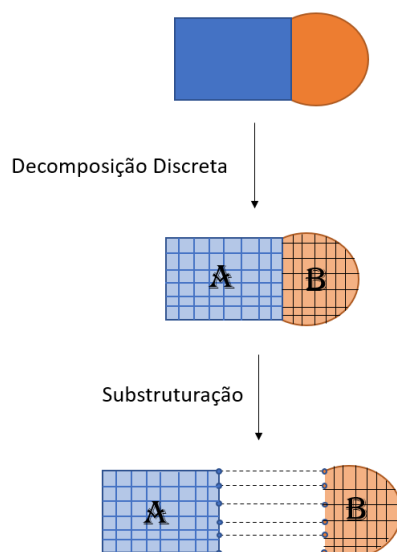


Figura 4.1: Esquema processual da Técnica de Substruturação

A Figura 4.1 mostra, de maneira esquemática, o que se faz na prática, ou seja, inicialmente, a partir da estrutura completa, realiza-se uma discretização do domínio, como é feito nas análises de elementos finitos, por exemplo. Em seguida, delimitam-se os subsistemas, isolando-os, contudo, inserindo condições matemáticas que possibilitam a compatibilidade das partes em relação ao todo. No geral, tais condições são interações entre as partes, que podem ser interpretadas como forças.

## 4.2 Substruturação em Frequência por Multiplicadores de Lagrange

Seja  $\Gamma$  uma coletânea de  $n$  componentes, que serão alocados de maneira que configurem um novo sistema formado por todos eles. Naturalmente, as características físicas podem ser assumidas conhecidas. Assim sendo, é possível considerar um vetor deslocamento  $\{u\}$  que englobe os deslocamentos de todos os componentes, bem como matrizes que caracterizem as massas, as rigidezes e os amortecimentos. Dessa forma, pode-se afirmar que, para cada componente, haverá uma equação geral do movimento no formato da Equação (2.20). Assim, de maneira total, para unir todas as equações, pode-se aplicar uma notação tensorial, conforme pode ser visto na Equação (4.1), considerando o conjunto de forças externas  $\{f\}$  e internas  $\{g\}$  entre as partes:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [C] \{\dot{u}\} + [K] \{u\} = \{f\} + \{g\} \quad (4.1)$$

É interessante, todavia, operar o sistema no domínio da frequência, de forma que fique

plausível associar a ele as funções de resposta em frequência, então, a Equação (4.1) assumirá outra forma, como se pode ver na Equação(4.2), resultante da aplicação da Transformada de Fourier:

$$\begin{cases} [Z(i\omega)] \{u(\omega)\} = \{f(\omega)\} + \{g(\omega)\} \\ [Z(i\omega)] = -\omega^2[M] + i\omega[C] + [K] \end{cases} \quad (4.2)$$

Tendo escrito a equação geral do movimento, é necessário observar o comportamento das interfaces dos componentes, conferindo-lhes características que indiquem as interações entre elas. Usualmente, como se deseja estudar um corpo sólido, atribui-se uma equidade de deslocamentos entre as interfaces, o que garante a compatibilidade estrutural das conexões. Assim sendo, de forma matemática, diz-se que se  $A$  e  $B$  são interfaces que interagem entre si, seus deslocamentos são idênticos, isto é,  $u_A = u_B$ .

De maneira geral, pode-se construir uma matriz  $[B]$  que opera nas interfaces dos graus de liberdade que interagem entre si, funcionando como uma matriz Booleana, isto é, aplica os valores 1 e  $-1$  aos graus de liberdade localizados nas interfaces e o valor 0 aos demais, de maneira que todas as condições de compatibilidade estrutural podem ser escritas sob a equação:

$$[B] \{u(\omega)\} = \{0\} \quad (4.3)$$

A última condição a ser exposta é a aplicação direta da Terceira Lei de Newton, na qual deve-se considerar um balanço de forças internas, quando se considera o conjunto como um todo. Seguindo a ideia anterior, se  $A$  e  $B$  são interfaces relacionadas, então  $\{g_A\} = -\{g_B\}$ . Dessa forma, como  $g$  representa as forças internas do sistema, que em tese, podem assumir qualquer valor real, são assumidos os Multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  como variáveis auxiliares para a caracterização matemática do problema. É notável, com essa ideia que

$$\{g\} = -[B]^T \{\lambda\} \quad (4.4)$$

Até então, não houve diferença conceitual entre acoplar componentes para gerar um grande sistema ou desacoplar os componentes de um grande sistema para estudar os componentes. Contudo, essa diferença dar-se-á na definição da matriz Booleana, bem como na matriz dinâmica combinada, que será definida nas seções subsequentes. Mas, para alcançar os resultados, foi necessário definir um ente matemático que auxiliou todo o processo: o tensor de receptância. Trata-se de um tensor de terceira ordem, no qual apresenta uma matriz de receptância por um vetor de frequências, ou seja, do “paralelepípedo” formado pelo tensor, em uma de suas dimensões se tem as frequências, para as quais são expostas as matrizes completas de receptância.

Na Figura 4.2, é mostrado o comportamento do tensor, para um sistema hipotético de dois graus de liberdade: a terceira dimensão é onde são expostos os valores de frequência, e para cada frequência, são mostradas todas as receptâncias. Seguindo este exemplo, o elemento 6, representa  $Y_{12}$ (receptância medida no nó 2, quando forçado no nó 1) no segundo passo no

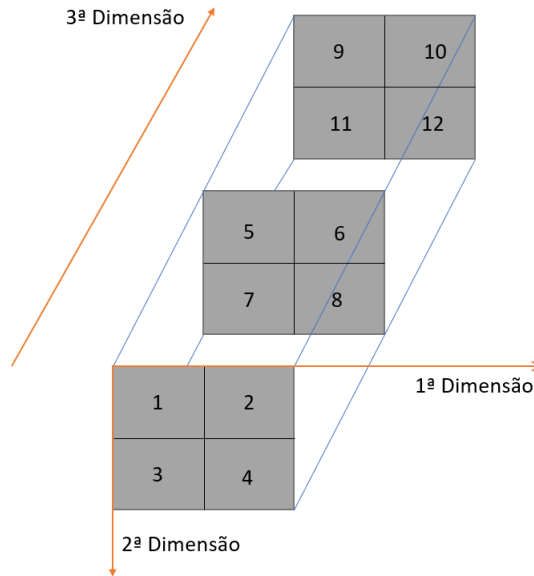


Figura 4.2: Exemplo de tensor receptância

vetor de frequências.

Para efeitos didáticos, os métodos de acoplamento e desacoplamento serão descritos para um sistema hipotético com dois componentes, conforme se pode ver na Figura 4.3.

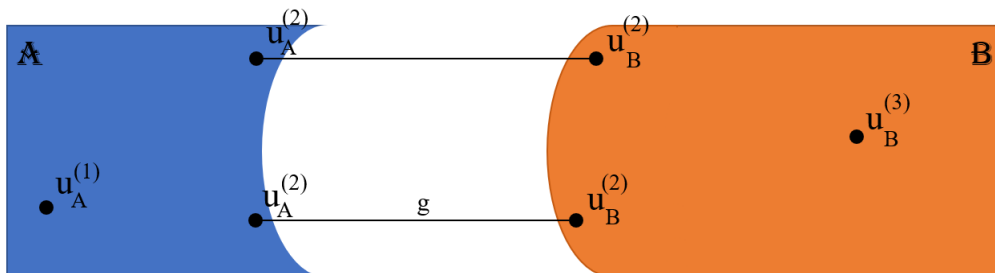


Figura 4.3: Caso hipotético de substruturação

### 4.2.1 Acoplamento Dinâmico

Neste conceito, são assumidos conhecidas as FRFs de todos os componentes, bem como o forçamento externo  $f$ . Para esse ambiente, define-se uma matriz dinâmica que agrupa todas as informações dos componentes.

$$Z_{AB} = \begin{bmatrix} [Z_A] & 0 \\ 0 & [Z_B] \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Tomando as equações (4.2), (4.3) e (4.4), monta-se o seguinte sistema de equações, que governa esse fenômeno de substruturação. As notações de vetor e matriz serão omitidas por

simplicidade.

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{AB}(i\omega)\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{B}\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.6)$$

Tomando a primeira equação de (4.6), isolando os Multiplicadores de Lagrange ( $\boldsymbol{\lambda}$ ), tem-se, considerando que  $\mathbf{Y}_{AB} = \mathbf{Z}_{AB}^{-1}$ :

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{B}\mathbf{Y}_{AB}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y}_{AB}\mathbf{f} \quad (4.7)$$

Devolvendo o resultado (4.7) na Equação (4.6), obtém-se:

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{Y}_{AB}\mathbf{f} - \mathbf{Y}_{AB}\mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{Y}_{AB}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y}_{AB}\mathbf{f} \quad (4.8)$$

Assim, pela definição de receptância, pode-se, a partir da Equação (4.8), construir o espectro de resposta do conjunto formado pelos componentes  $A$  e  $B$ ,  $\mathbf{Y}_{AB}^{\text{coupled}}$

$$\mathbf{Y}_{AB}^{\text{coupled}} = \mathbf{Y}_{AB} - \mathbf{Y}_{AB}\mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{Y}_{AB}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y}_{AB} \quad (4.9)$$

## 4.2.2 Desacoplamento Dinâmico

Para dividir um sistema em componentes menores, o raciocínio é bem semelhante, senão pela definição de uma matriz dinâmica diferente. No caso do acoplamento, colocou-se na diagonal de uma matriz todas as matrizes dinâmicas dos componentes, já para o desacoplamento, deve-se considerar o conjunto e tirar dele as partes que não se deseja estudar, isto é, tirar aquilo que se conhece.

Dessa forma, para esta técnica, são assumidas conhecidas as FRFs do conjunto todo, bem como de uma das partes, diga-se  $\mathbf{Y}_B$ . A definição da matriz se altera, de forma que se tem

$$\mathbf{Z}_{AB}^B = \begin{bmatrix} [\mathbf{Z}_{AB}] & 0 \\ 0 & -[\mathbf{Z}_B] \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

O raciocínio segue de maneira análoga ao acoplamento, de forma que se alcança o resultado:

$$\mathbf{Y}_A^{\text{decoupled}} = \mathbf{Y}_{AB}^B - \mathbf{Y}_{AB}^B \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{Y}_{AB}^B \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y}_{AB}^B \quad (4.11)$$

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos

### 5.1 Viga em Balanço

Tendo comprovado o efeito de convergência de funções complexas, no ponto de vista da localização dos pontos de otimização, é possível utilizar este método para otimizar problemas de cunho experimental.

Apresenta-se uma simulação do sistema a ser otimizado pelo método, o caso da viga de Euler-Bernoulli engastada em uma ponta e em balanço, sob vibrações livres. As características reais da viga estão dispostas na Tabela 5.1.

Característica	Valor
$E$	$2,0 \times 10^{10}$ Pa
$\rho$	3000 kg/m <sup>3</sup>

Tabela 5.1: Características da viga simulada

#### 5.1.1 Função-Objetivo

O objetivo desse experimento hipotético é, a partir do resultado de uma análise modal da viga, determinar o módulo de elasticidade  $E$  e a densidade  $\rho$ . Sendo assim, a função-objetivo deve relacionar todas essas características, para que o AG consiga determinar, com um certo grau de certeza, a combinação ótima dos parâmetros.

É adotada a função-objetivo, sugerida por Friswell e Garvey[46], que realiza uma combinação linear entre o erro relativo entre as frequências naturais e o erro relativo das formas modais, medido e analítico.

$$f_{\text{obj}} = W_{\omega} \cdot J_{\omega} + W_{\phi} \cdot J_{\phi} \quad (5.1)$$

onde  $W_{\omega}$  e  $W_{\phi}$  são valores compreendidos entre 0 e 1,  $J_{\omega}$  e  $J_{\phi}$  são calculados segundo as

fórmulas da Equação (5.2):

$$\begin{cases} J_{\omega} = \sum_{j=1}^r \left( \frac{\omega_{mj} - \omega_{aj}}{\omega_{mj}} \right)^2 \\ J_{\phi} = \sum_{j=1}^r (\phi_{mj} - \phi_{aj})^T (\phi_{mj} - \phi_{aj}) \end{cases} \quad (5.2)$$

Os subíndices  $m_j$  e  $a_j$  simbolizam a  $j$ -ésima propriedade medida e a  $j$ -ésima propriedade analítica, respectivamente. Contudo, em se tratando de um procedimento experimental, não faz sentido assumir todos os possíveis modos de vibrar, já que segundo Ritto *et al*[47], a partir do terceiro modo vibracional já não se é possível determinar, de maneira precisa, tanto as frequências naturais, como também as formas modais. Sendo assim, a fim de aplicar cálculos mais verossímeis, serão verificados apenas os três primeiros modos, ou seja  $r = 3$ .

Quanto aos fatores  $W_{\omega}$  e  $W_{\phi}$ , é necessário compreender que cada um deles tem uma força na composição da função-objetivo, de maneira que, a depender da determinação desses elementos, a sensibilidade dos erros experimentais são afetadas.

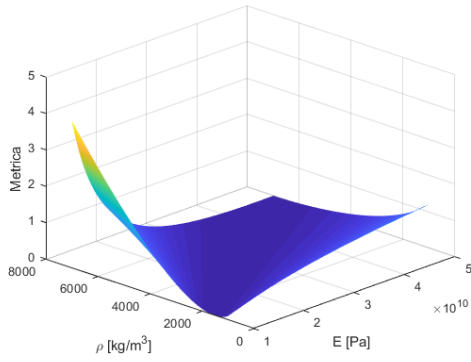
Para este caso específico, Savi e Paula[14] e Rao[15] elaboraram modelos de solução analítica, para frequências naturais e formas modais, que foram implementados em um algoritmo, via MATLAB<sup>®</sup>, por meio de uma varredura das características procuradas,  $E$  e  $\rho$ . Para mostrar a sensibilidade da métrica dos fatores  $W$ , foram plotadas no espaço as funções-objetivo assumindo a influência pura de cada um dos fatores, o que pode ser visto na Figura 5.1.

Contudo, o que sugere Friswell[46], é necessário tomar uma combinação linear desses duas grandezas, para que o sistema tenha um comportamento mais adequado e seja mais provável de isolar a situação ótima. Em termos geométricos, a combinação linear deve, idealmente, conter a solução ótima dentro de uma curva fechada dentro da função-objetivo, como um poço, ou algo semelhante ao que é visto na Função de Easom (Seção 3.2.2).

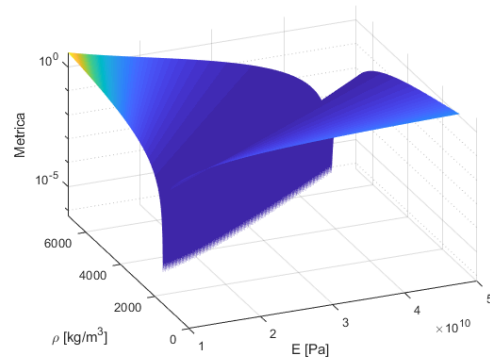
De fato, após alguns testes, e considerando a dificuldade experimental de determinação das formas modais, definiu-se o fator de sensibilidade para as frequências naturais como 1 e o fator de sensibilidade para a forma modal como 1%. Assim, as características da função-objetivo definitiva estão presentes na Figura 5.2.

A seguir, serão mostrados os resultados do Algoritmo Genético para esse caso hipotético, sob as condições de simulação perfeita e, em seguida, com um ruído aleatório, para que se reproduza essa característica vista em experimentos reais.

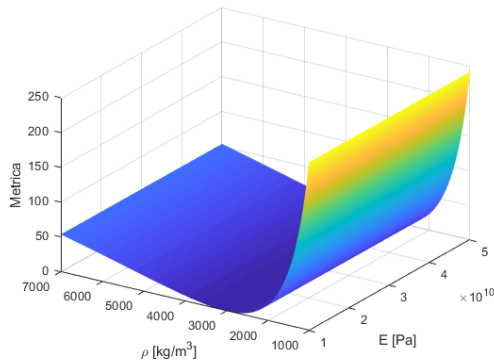
Diferentemente das soluções empregadas para validação, para este caso, será feito uma coletânea de soluções, cada uma com um resultado diferente, e será realizado um estudo estatístico de todas as soluções, isto é, o programa será forçado a fornecer o melhor resultado, bem como analisar a distribuição de todas as possíveis soluções, quantitativamente.



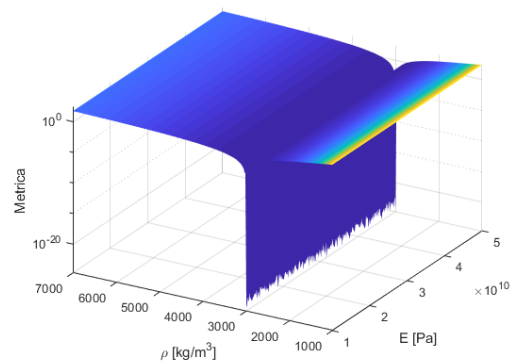
(a) (1, 0)



(b) (1, 0), escala logarítmica

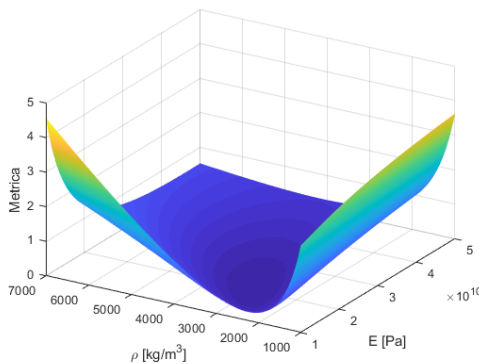


(c) (0, 1)

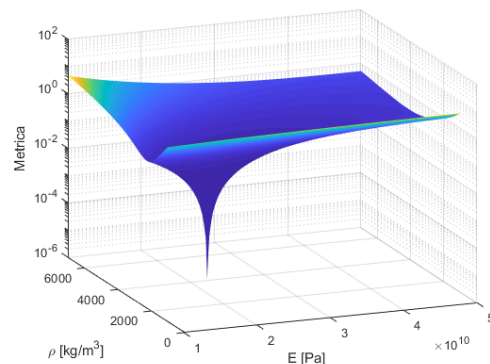


(d) (0, 1), escala logarítmica

Figura 5.1: Funções-objeto para os pares ordenados  $(W_\omega, W_\phi)$



(a) Escala linear



(b) Escala logarítmica

Figura 5.2: Função-objeto definitiva para o caso da viga em balanço

### 5.1.2 Determinação do Número de Soluções

Para que o processo seja razoavelmente rápido, sem que se perca significativamente a precisão de que se necessita, podem-se fazer testes comparativos alterando-se o número de soluções fornecidas pelo algoritmo.

Para determinar o número de soluções a ser considerado, foi realizado um teste esta-



tístico, envolvendo uma população de 100 soluções, segundo o AG, e então selecionando amostras aleatórias, sem reposição de indivíduos, de tamanhos distintos, de 10 a 50 soluções por amostra, para analisar os parâmetros sistêmicos.

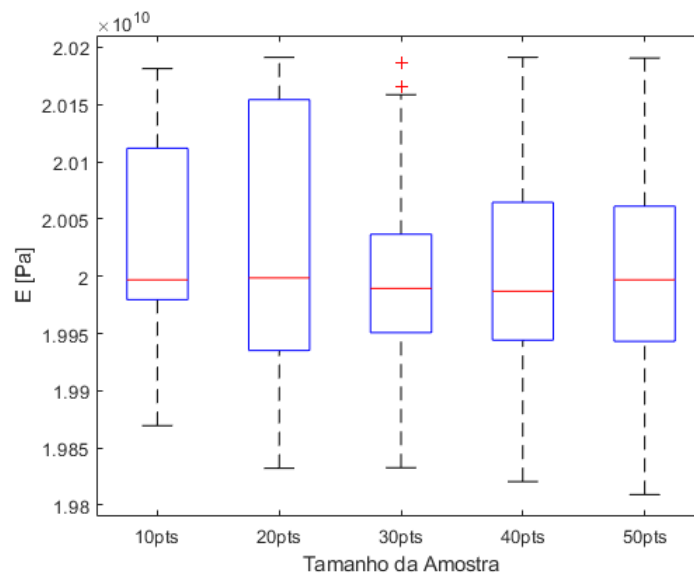


Figura 5.3: Distribuição estatística das soluções em relação ao tamanho da amostra

A técnica empregada na exibição dos dados da Figura 5.3, chama-se Boxplot, uma forma de isolar na distribuição geral das grandezas, os percentis de 25% e 75% em uma caixa (azul), bem como a mediana (vermelho) e os demais pontos (linha tracejada e cruces vermelhas) [48].

Sendo assim, as maiores caixas tem maior dispersão de pontos quando comparadas às menores, de forma que a mediana do rol de pontos tende a se aproximar do valor real procurado. Segundo Montgomery e Runger [49], a partir dos 30 pontos por amostra, o Teorema do Limite Central se aplica, de forma que a distribuição amostral da média aproxima-se de uma distribuição normal. Dessa forma, faz sentido, adotar esse tamanho de amostras, a fim de obter uma boa precisão, com custo computacional adequado.

Além disso, é plausível estabelecer, para fins estatísticos de validade, o Coeficiente de Variação da amostra selecionada, que é uma forma de expressar o grau de dispersão de uma amostragem em relação à população a qual pertence, isto é, um  $CV$  pequeno representa uma amostra com baixa dispersão, bem como um  $CV$  alto mostra discrepância entre os indivíduos da amostra. O  $CV$  relaciona o desvio-padrão da amostra  $\sigma_{amostra}$  à média da amostra  $\mu_{amostra}$  conforme exibe a Equação (5.3):

$$CV = \frac{\sigma_{amostra}}{\mu_{amostra}} \quad (5.3)$$

Para esta amostragem de 30 pontos, localizada na Figura 5.3, o  $CV$  foi calculado em 0.473%, o que, em tese, demonstra uma baixíssima dispersão, de maneira que a mediana do

conjunto amostral representa uma boa solução geral para o sistema.

### 5.1.3 Solução sem Ruído

Dando seguimento ao processo, submete-se o sistema ao AG, para que ele opere e sugira a otimização dos parâmetros, e lance como resposta o par ordenado com as características de busca, neste caso, o módulo de elasticidade e a densidade.

A Figura 5.4 mostra, graficamente, a solução proposta pelo algoritmo, junto ao mapa da função-objetivo, no plano  $E\rho$ , e a Tabela 5.2 exibe, em números, os valores, bem como os erros associados a cada característica otimizada.

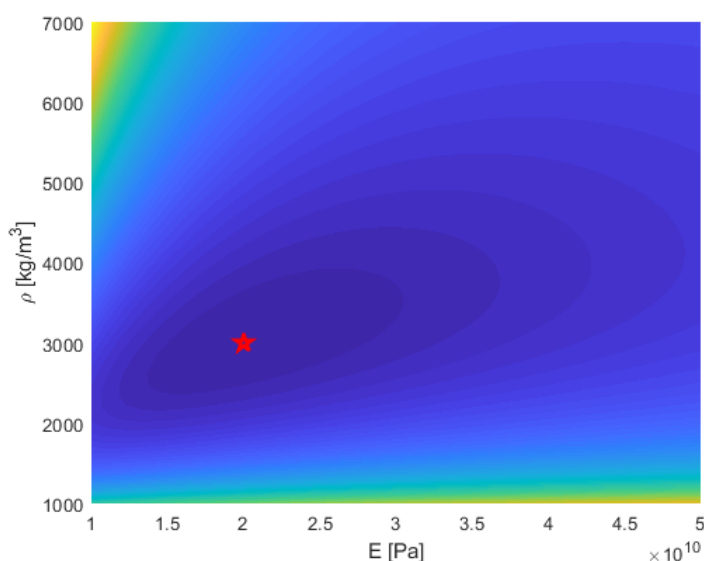


Figura 5.4: Solução ótima proposta pelo AG, viga em balanço, sem ruído

Característica	Valor Sugerido Aproximado	Erro	Erro Percentual
$E$	$2,0 \times 10^9$ Pa	$2,68 \times 10^2$ Pa	$1,34 \times 10^{-6}\%$
$\rho$	2999,9 kg/m <sup>3</sup>	$1,98 \times 10^{-5}$ kg/m <sup>3</sup>	$6,61 \times 10^{-7}\%$

Tabela 5.2: Características sugeridas pelo AG

### 5.1.4 Solução com Ruído

Seguindo a mesma lógica, porém, agora, adicionando um ruído aleatório simulado, para antever a proposição de resposta do algoritmo, ainda que se tenha instabilidade nos equipamentos de medida, como é na realidade, serão realizados experimentos cujos ruídos se alocam em diversas amplitudes.

Entretanto, a função-objetivo sofre influência desse ruído, de maneira que o mapa gerado na Figura 5.2 não é mais tão fidedigna, apesar de ter valor teórico. Para este novo padrão, pode-se gerar uma nova função-objetivo, como se pode ver na Figura 5.5.

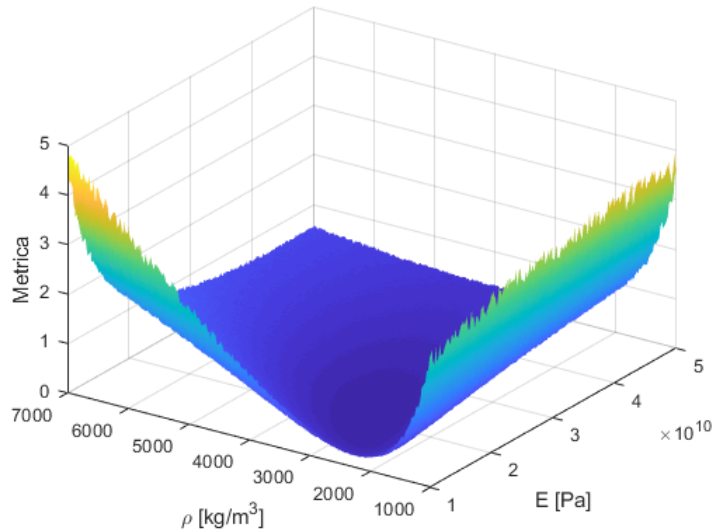


Figura 5.5: Função-objetivo para viga em balanço com ruído aleatório

A imposição do ruído foi estabelecido para cada ponto da curva, assumindo-se algum valor fracionário, aleatório, numa distribuição uniforme, sendo aplicado ao valor da medida, segundo a Equação (5.1), isto é, considerando  $F$  uma medição com ruído e  $F_{\text{noiseless}}$  o valor real da medida, com o ruído aleatório no intervalo  $[-n, n]$ , pode-se estabelecer a relação de obtenção da curva *fitness* com ruído:

$$F = F_{\text{noiseless}} \cdot [1 + \text{rand}(-n, n)] \quad (5.4)$$

Para se diversificarem as possibilidades, os testes foram conduzidos, tomando os valores de 1%, 2%, 5% e 10% para o ruído aleatório. Dessa maneira, ao submeter esse novo sistema de pontuação ao original, foram admitidos os resultados contidos na Tabela 5.3.

	$E$			$\rho$		
<b>Ruído</b>	<b>Valor [GPa]</b>	<b>Erro [MPa]</b>	<b>Erro [%]</b>	<b>Valor [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>Erro [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>Erro [%]</b>
1%	19,996	3,8	0,019	2999,21	0,79	0,026
2%	20,022	22,4	0,112	3004,86	4,86	0,116
5%	20,067	66,3	0,331	3010,26	10,26	0,342
10%	19,927	73,2	0,336	2998,04	11,96	0,398

Tabela 5.3: Características sugeridas pelo AG, para diferentes ruídos

Seguindo o procedimento, tomando a amostragem das melhores soluções, o algoritmo foi capaz de otimizar o sistema, conforme exibe a Figura 5.6, no pior dos cenários, isto é, aquele com o maior ruído.

Na Figura 5.6, foram plotadas todas as soluções do espaço amostral, onde a estrela avermelhada representa a mediana da amostra das soluções ótimas, bem como a mancha verde representa os demais indivíduos da amostra.

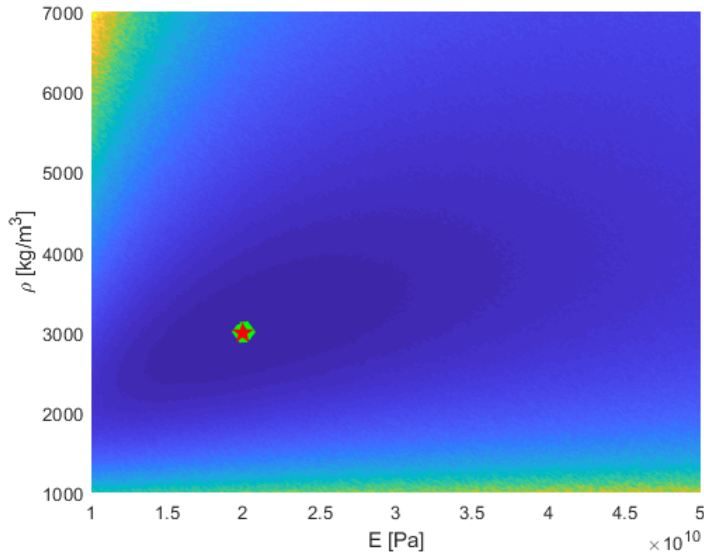


Figura 5.6: Nuvem de soluções propostas pelo AG

## 5.2 Viga Engastada Forçada

De maneira semelhante ao que foi realizado para a viga livre, foi realizado o teste da mesma viga, contudo sob condição de forçamento externo. A princípio, o modelo de análise modal é completo e bem preciso, porém, por ser carregado de incertezas experimentais, pode não ser o melhor método de obtenção da curva *fitness* para otimização dos parâmetros característicos. Dessa forma, pode-se aplicar uma outra métrica, sob outras condições, para verificar a validade do processo.

### 5.2.1 Função-Objetivo

Consoante Allemang [50], uma possível métrica a ser aplicada em casos de experimentos com forçamentos externos é o FRAC (*Frequency Response Assurance Criterion*). Essa métrica faz uma comparação entre as funções de resposta em frequência, neste caso, a receptância, do modelo experimental com toda a gama de varredura de testes, em regiões específicas. O FRAC é definido como na Equação (5.5).

$$FRAC = \frac{\left| \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_3} H(\omega) \cdot H^*(\omega) \right|^2}{\sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_3} H(\omega) \cdot H^*(\omega) \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_3} H(\omega) \cdot \hat{H}^*(\omega)} \quad (5.5)$$

Importante salientar, segundo Pascual [51], que o FRAC é um critério que analisa localmente as funções de resposta. Será implementado, também, um critério, muito semelhante a esse, que analisa globalmente as funções de resposta, o FDAC (*Frequency Domain Assu-*

rance Criterion) , que é definido matematicamente segundo a Equação (5.6).

$$FDAC = \frac{[H^T(\omega_a)H(\omega_x)]^2}{[H^T(\omega_x)H(\omega_x)][H^T(\omega_a)H(\omega_a)]} \quad (5.6)$$

De fato, a função objetivo para este caso, é capaz de fornecer um mapa estrutural de convergência, semelhante, porém com razoáveis diferenças, ao da Figura 5.1, como se mostra nas Figuras 5.7 e 5.8.

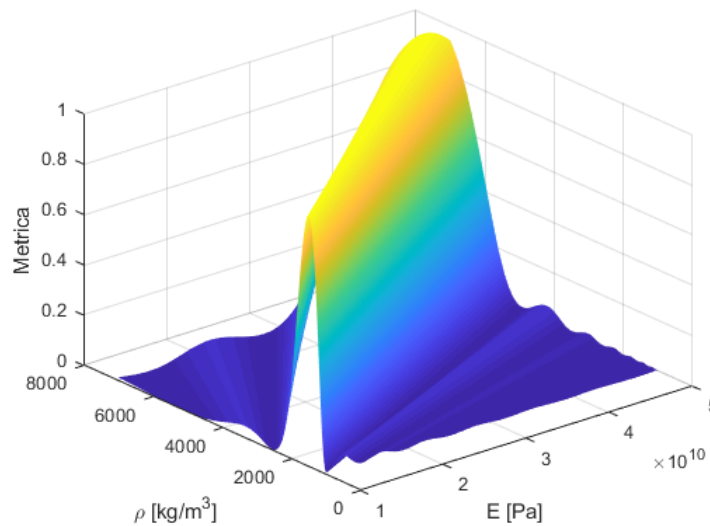


Figura 5.7: Mapa de convergência para teste forçado

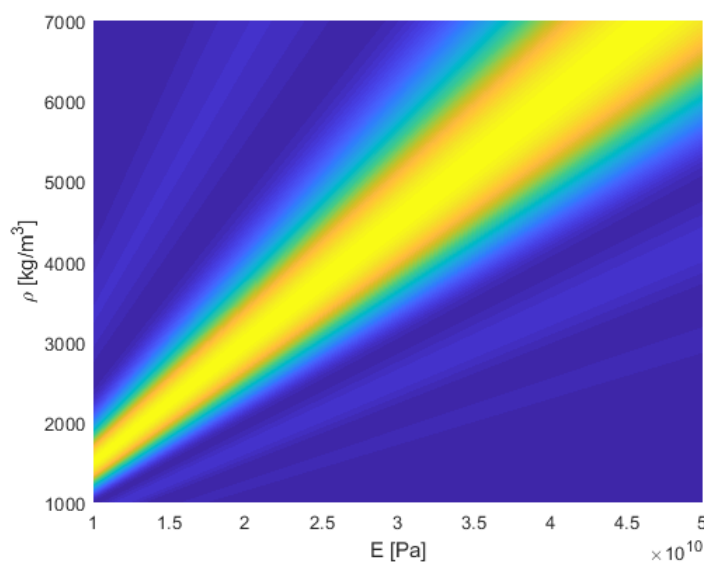


Figura 5.8: Mapa de convergência para teste forçado no plano

Ao submeter este sistema ao algoritmo, repetidas vezes, obteve-se uma nuvem de possíveis soluções, que foram colocadas sobre o mapa para demonstrar o efeito de convergência, na Figura 5.9.

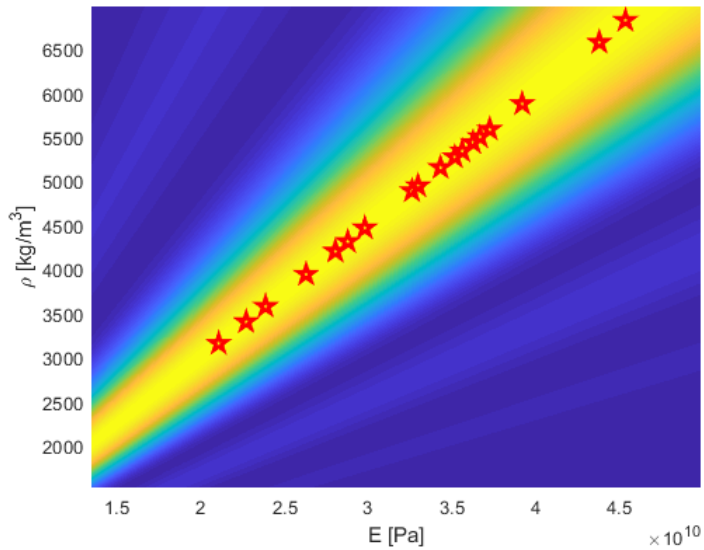


Figura 5.9: Mapa de convergência para teste forçado com 20 soluções propostas pelo AG

Notavelmente, em comparação ao caso da viga engastada-livre, este método é mais custoso em termos computacionais, e isto é justificável pelo aumento superlativo da quantidade de operações matemáticas que o algoritmo computa em relação ao outro método.

Contudo, o conjunto de pontos selecionados pelo AG contém soluções bem plausíveis, no que diz respeito à métrica proposta, isto é, todos os pontos identificados na Figura 5.9 mostram-se adequados, em termos de função de resposta em frequência, à resposta analítica, como pode ser visto na Figura 5.10. Nesta figura, a linha cheia avermelhada é a função de resposta em frequência da solução analítica, enquanto as demais tracejadas são as soluções propostas. É notável que as soluções propostas, ainda que divergentes, em relação à analítica, possuem FRFs bem próximas as dela, o que corrobora para a validade da métrica.

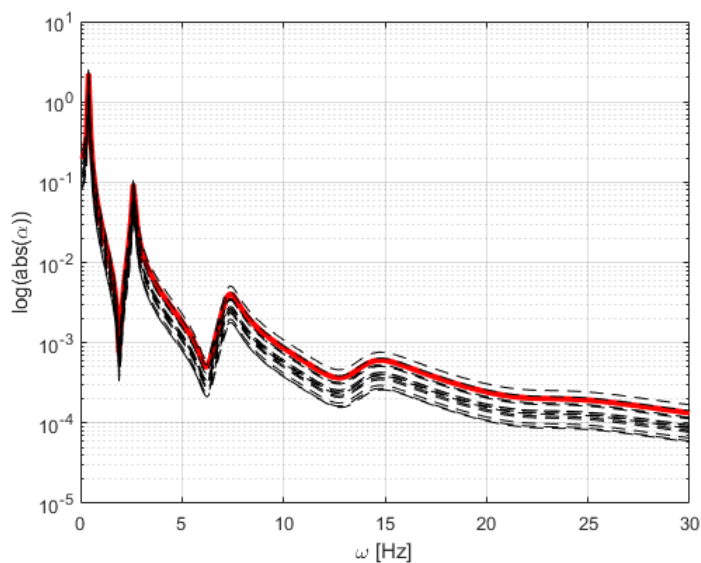


Figura 5.10: Funções de resposta em Frequência das soluções propostas

## 5.3 Conjunto Aparafusado

Nesta seção, o objeto de estudo será composto por duas vigas, supostamente idênticas, unidas por um parafuso, alocado nas extremidades das duas vigas. O conjunto será estudado sob a condição livre-livre, sendo aplicadas as técnicas de subestruturação para isolar o parafuso das vigas, quando será iniciado o processo de identificação por meio do uso do AG, para em seguida, recolocá-lo na estrutura, quando será comparado com um modelo. As características materiais das vigas foram elencadas na Tabela 5.4

Característica	Valor
Módulo de Elasticidade	210 MPa
Densidade	7800 kg/m <sup>3</sup>
Comprimento	0,5 m
Largura	50 mm
Altura	25,5 mm

Tabela 5.4: Características materiais das vigas

A modelagem do sistema foi feita por meio de um modelo de parâmetros concentrados, nos quais as vigas foram divididas em 4 nós, e o parafuso em 2 nós. As uniões entre nós de uma estrutura são modelados com molas e amortecedores, todos unidirecionais, já as conexões entre os nós de uma viga com o parafuso foi considerada, a princípio rígida. A Figura 5.11 apresenta um esquema simplificado do sistema, já considerando a discretização do domínio, bem como as conexões e os subsistemas existentes.

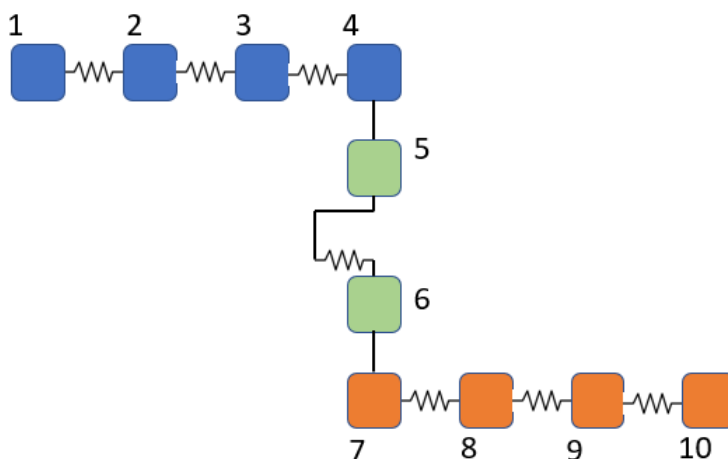


Figura 5.11: Esquema de modelagem do sistema

Ainda na Figura 5.11, os nós de 1 a 4 e de 7 a 10 são das vigas e 5 e 6, do parafuso. A escolha desse número de elementos foi feita para que se tivesse uma boa representação do sistema, em suas características, mas que não fosse grande demais para causar um alto custo computacional, em especial, para o desacoplamento, que nesse caso, apresentará tensores com 18 linhas e colunas, fora o comprimento na terceira dimensão.

### 5.3.1 Funcionamento da FBS

Inicialmente, para avaliar a precisão dos métodos, tanto de acoplamento, como de desacoplamento, o sistema em questão foi levado a testes. Inicialmente, Foi realizado, conforme já explicitado, o processo de desacoplamento do parafuso, isto é, assumindo que a resposta do conjunto “vigas+parafuso”, bem como as respostas das vigas são conhecidas, aplica-se a Equação (4.11).

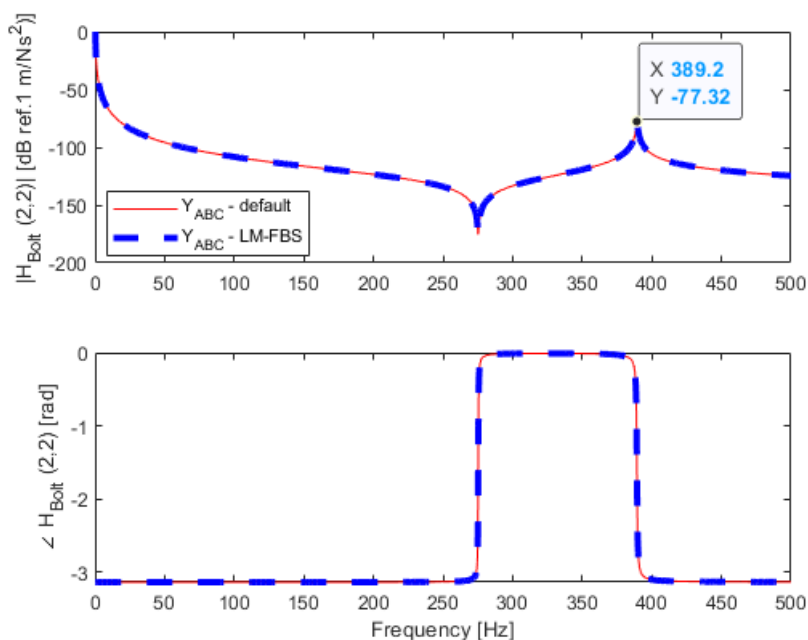


Figura 5.12: Funções de resposta em frequência, analítica e numérica para desacoplamento

A Figura 5.12 foi obtida tomando-se um vetor de frequências de 0 a 500 Hz, com 2500 divisões, e foi analisada a receptância da posição (2, 2) do parafuso. O amortecimento das partes foi considerado proporcional às condições de massa e rigidez. A linha sólida vermelha representa a resposta analítica do corpo do parafuso, e a linha tracejada azul é a resposta entregue pelo processo de subestruturação. Como se pode ver, essa técnica reproduz com elevada exatidão o comportamento do objeto analisado, de maneira que sua utilização nos processos vindouros não acarretará em desvios significativos. Além disso, essa figura mostra que a modelagem foi feita de maneira correta, pois apresenta os dois graus de liberdade que o parafuso possui, nesta discretização.

Em seguida, de forma semelhante, foi feito acoplamento das partes, ainda que de forma analítica, isto é, conhecidas as respostas das vigas e do parafuso, foi estabelecida a resposta do conjunto segundo a técnica de FBS.

A Figura 5.13 foi gerada, analisando umas das uniões, mais precisamente no nó 5, com as mesmas considerações que foram feitas para o desacoplamento. De maneira semelhante, a linha vermelha é a resposta analítica e a tracejada é a gerada pelo processo. Assim como a técnica de desacoplamento, esta parte da técnica de subestruturação não causa distorções



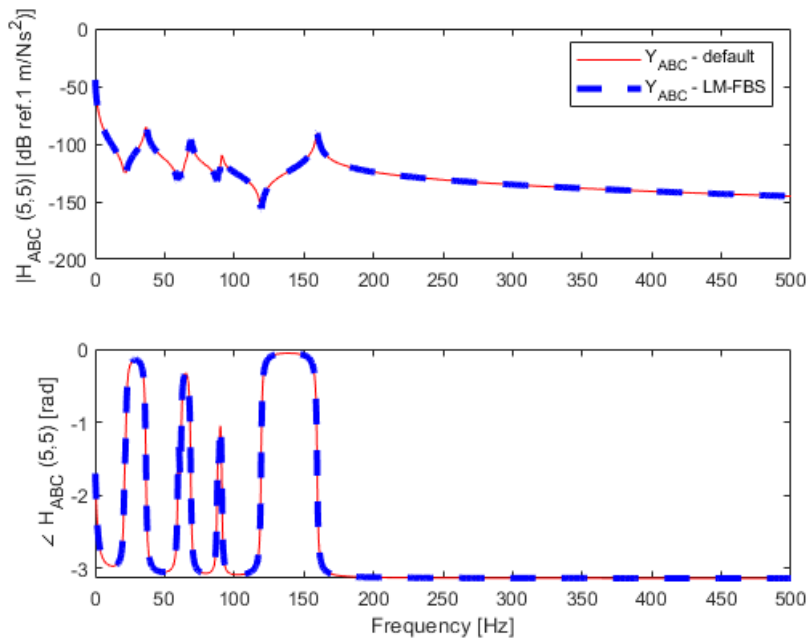


Figura 5.13: Funções de resposta em frequência, analítica e numérica para acoplamento

significativas na FRF, podendo ser aplicada em procedimentos sem que gere um acúmulo de desvios ao final.

### 5.3.2 Caso 1 - Esforço Axial

Este primeiro teste propõe identificar dois parâmetros do parafuso. Para isso, foi necessário desacoplar o parafuso das vigas, obtendo-se o comportamento do parafuso, supostamente desconhecido, que será submetido ao Algoritmo Genético, e ao final, será acoplado novamente, para que se possa comparar com a resposta do conjunto, e se possa otimizar as melhores características. As características do parafuso utilizadas como referência estão listados na Tabela 5.5

Característica	Valor
Módulo de Elasticidade	$8,93 \times 10^5$ Pa
Massa	0,2984 kg

Tabela 5.5: Características materiais do parafuso

Antes de aplicar o AG, foi desenvolvido um algoritmo de busca exaustiva, que associa a cada par ordenado  $(K, m)$  no domínio viável, um valor de função objetivo  $f_{fitness}$ , que foi objetivo comparando as FRFs numéricas com a analítica. O resultado desse algoritmo renderizou um mapa de possíveis soluções para a otimização procurada.

De fato, A Figura 5.14 mostra uma região, dentro do domínio viável, que é plausível de utilização. É esperado, portanto, que qualquer combinação de  $K$  e  $m$  dentro dessa região,

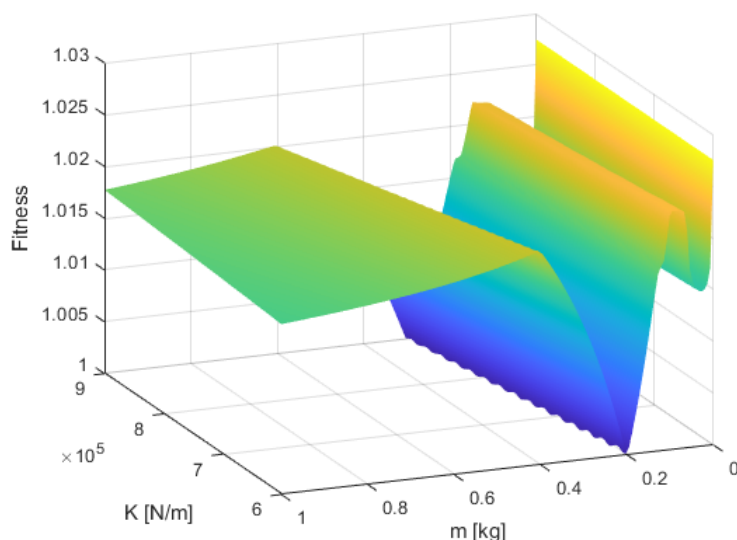


Figura 5.14: Mapa de busca exaustiva para otimização, caso 1

com cor azul escuro, funcionaria como uma boa representação do sistema, no que concerne à semelhança, em termos de FRF, com a resposta analítica.

Quando o Algoritmo Genético foi acionado para determinar a melhor combinação, ocorreu o que foi previsto: ele isolou várias combinações de rigidez e massa, dentro da região azul escuro no mapa, inclusive aquela que mais se aproxima das características esperadas pela referência, como pode ser visto na Figura 5.15. Foram realizadas 50 repetições para averiguar o comportamento do sistema. Cada estrela representa uma solução, e a pequena caixa amarela representa a resposta esperada.

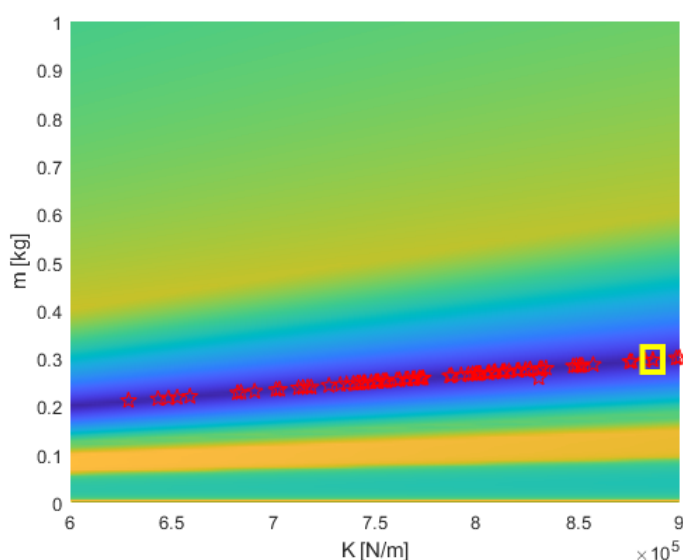


Figura 5.15: Solução proposta pelo AG, caso 1

Para comprovar a eficiência das soluções propostas, é interessante conferir, de maneira isolada, o comportamento, em termos de FRF, de cada uma das soluções, e colocá-las em

contraste com a solução esperada. A Figura 5.16 mostra precisamente este procedimento, na qual a linha sólida avermelhada é a resposta esperada, e todas as linhas finas tracejadas em preto são os comportamentos das soluções propostas pelo algoritmo.

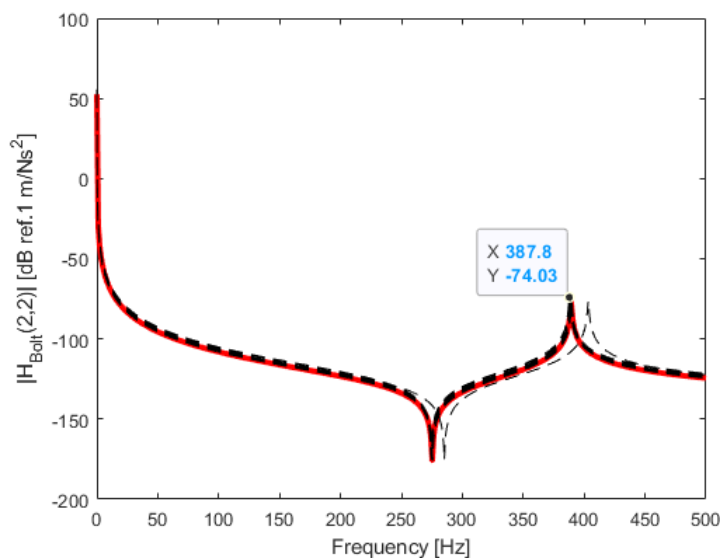


Figura 5.16: Síntese das soluções propostas pelo AG, caso 1

De fato, todas as soluções se mostraram representativas, quando se comparam as FRFs delas com a esperada, o que indica que para este tipo de análise necessita de mais dados para isolar uma região viável mais restrita, ou até mesmo, uma solução única. Contudo, essa natureza dos problemas inversos delimitam uma série de compatibilidades. Por exemplo, neste caso, uma das propriedades que se propôs identificar era a massa do parafuso, que pode ser medida externamente, sem interferir no sistema, e com isso a região em azul escuro na Figura 5.14 reduzir-se-ia a um ponto no espaço, o que resolveria integralmente o problema.

### 5.3.3 Caso 2 - Esforço Combinado

Para este teste, o sistema estudado se mantém idêntico ao apresentado na Figura 5.11, contudo, agora as vibrações serão admitidas nas três direções, bem como as conexões serão axiais e flexionais. A metodologia, para este processo é semelhante à anterior, isto é, define-se a função-objetivo, aplica-se um algoritmo de busca exaustiva para delimitar uma curva de possibilidades, em seguida, executa-se o AG no sistema, anteriormente desacoplado, e ao final acopla-se novamente, para posterior comparação com uma série de dados analíticos. Este processo repete-se algumas vezes, para trato estatístico.

Como o sistema agora pode sofrer vibrações em outras direções, bem como possui mais graus de liberdade, é natural que a resposta analítica também mude. A Figura 5.17 mostra como é o comportamento da nova estrutura.

Para iniciar o teste, foi criado o modelo das vigas e do parafuso, utilizando um elemento do tipo pórtico 2d, que assume deslocamentos lineares em duas dimensões, além de distor-

ções no plano, aplicando 3 graus de liberdade por nó ( $u_x$ ,  $u_y$  e  $\theta$ ). A princípio, a proposta é identificar apenas a constante de rigidez do parafuso, ou seja, será uma otimização unidimensional. O processo se deu conforme método elencado acima.

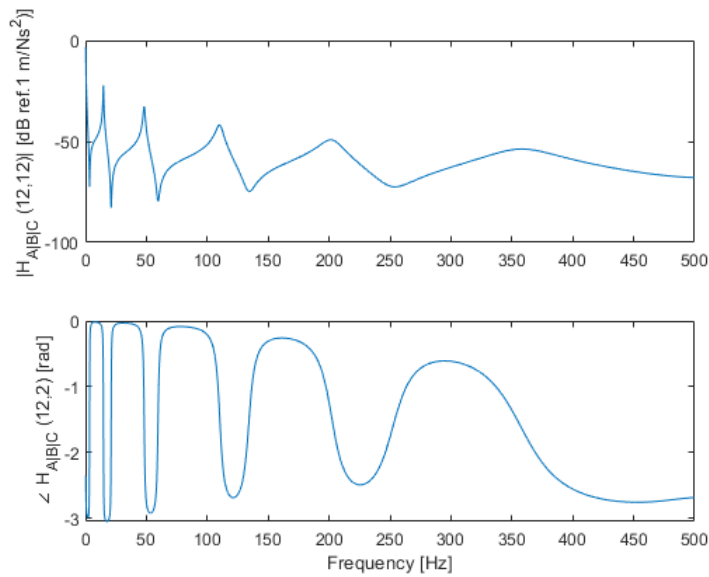


Figura 5.17: Função de resposta em frequência, caso 2

Tendo isso como base para as comparações, pode-se então iniciar o processo de otimização, via Algoritmo Genético. O ponto de referência nas análises deste teste será no nó de interface entre a primeira viga e o parafuso, neste caso, o nó 12. Para este teste, por conta de um aumento significativo do sistema, foram tomadas 30 soluções.

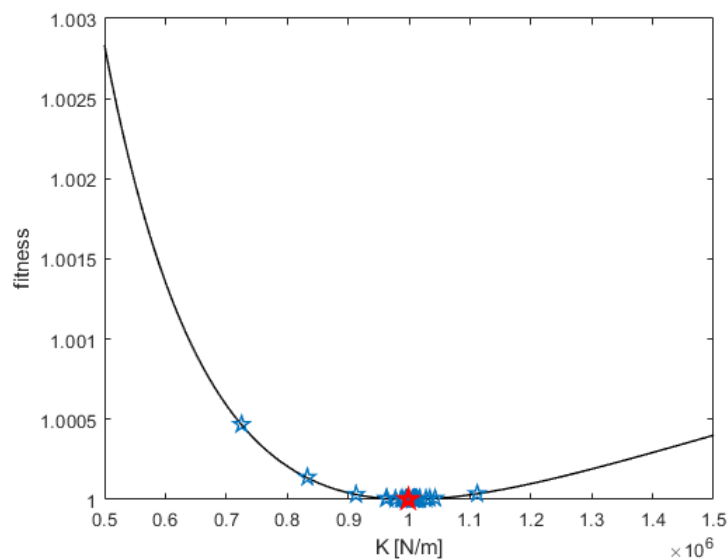


Figura 5.18: Soluções propostas pelo AG, caso 2

A Figura 5.18 mostra o bom comportamento dos elementos do processo: a qualidade da função-objetivo, a representação das técnicas de substruturação e a execução do Algoritmo Genético. Também é notável a acurácia do processo de seleção das soluções, uma vez que o

desvio da técnica em relação à resposta esperada foi visualmente imperceptível, alcançando 0,2% de erro na melhor solução.

Seguindo a proposta feita no caso 1, também aqui foi feita uma análise bidimensional, mas agora, considerando um atrito não-viscoso nas conexões do parafuso. Essa consideração afeta diretamente nas equações governantes, uma vez que impõe uma não linearidade. Contudo, é possível, segundo Inman [18], promover uma linearização, a qual utiliza a hipótese de estado permanente. Tal proposta insere um efeito da amplitude vibracional na constante de amortecimento do contato.

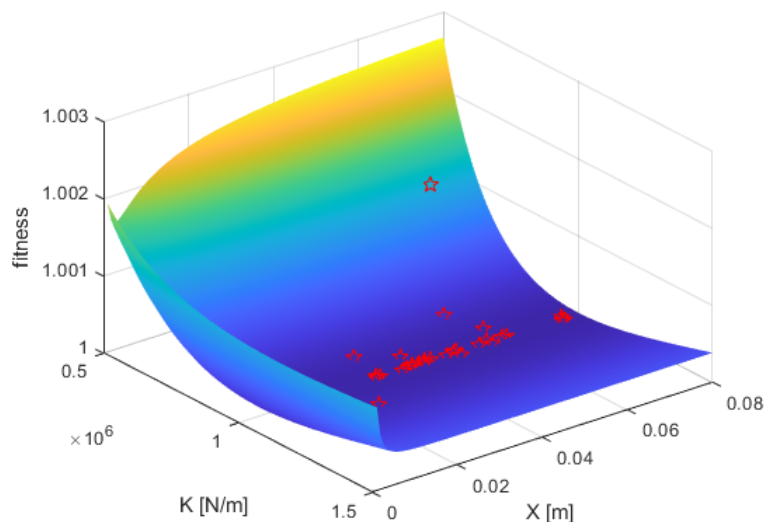


Figura 5.19: Soluções propostas pelo AG, caso 2 bidimensional

A Figura 5.19 mostra um comportamento semelhante ao que foi visto na Figura 5.15, no que diz respeito à multiplicidade de opções plausíveis para soluções, isto é, existem muitos candidatos à solução ótima, de maneira que o Algoritmo Genético não consegue isolar uma região viável mais restrita, a menos que alguma condição, ou informação, seja incorporada no processo de modelagem.

Porém, essa solução, no conto geral, fornece a possibilidade de analisar a inserção de um modelo que acrescenta um fator de amortecimento, na forma de atrito seco, e ainda assim, garantir um bom conjunto de soluções o qual determina, com precisão, uma das características de interesse, nesse caso o  $K$  da mola que modela a rigidez interna ao parafuso.

Até então, todos os estudos consideraram medições sem ruído de qualquer natureza, de forma que é interessante simular, ainda que numericamente, algumas condições de ruído. O ruído foi inserido nesse caso, por ser o mais complexo, em termos de geometria e graus de liberdade, intencionalmente, para avaliar a sensibilidade do processo, como um todo, a ruídos de uma forma geral.

A fim de inserir os efeitos de um ruído sistêmico, que é característico de medições reais, foi aplicado ao programa que gera as FRFs do sistema uma função que toma uma porcenta-

gem  $p$  do valor que a FRF assume, e a esse valor é atribuído uma extensão aleatória que varia de  $-p$  a  $p$ , que é então somado ao valor da FRF, ponto a ponto em frequência. A Figura 5.20 mostra o resultado da aplicação do ruído à FRF mostrada na Figura 5.17.

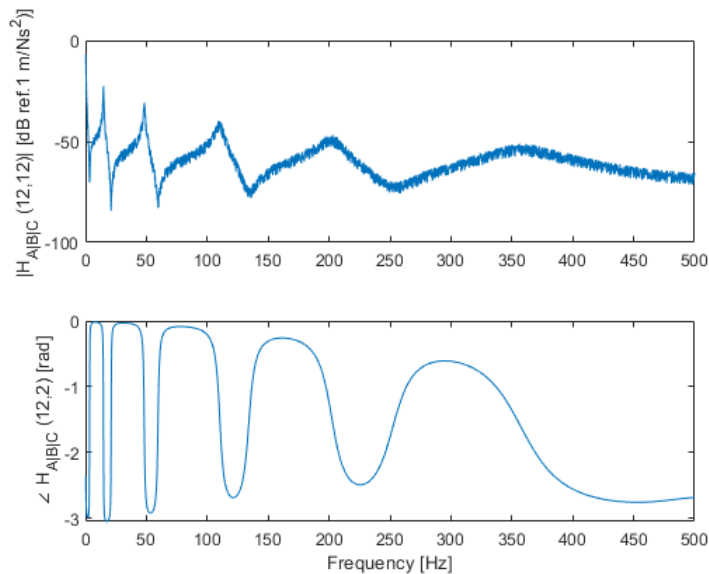


Figura 5.20: Função de resposta em frequência, com ruído aleatório

O procedimento foi realizado de forma completa, para a busca da otimização da rigidez do parafuso, e foram analisados sob os ruídos de 0, 5%, 1, 0%, 5, 0% e 10%, cujos resultados foram elencados na forma de *boxplot*, na Figura 5.21.

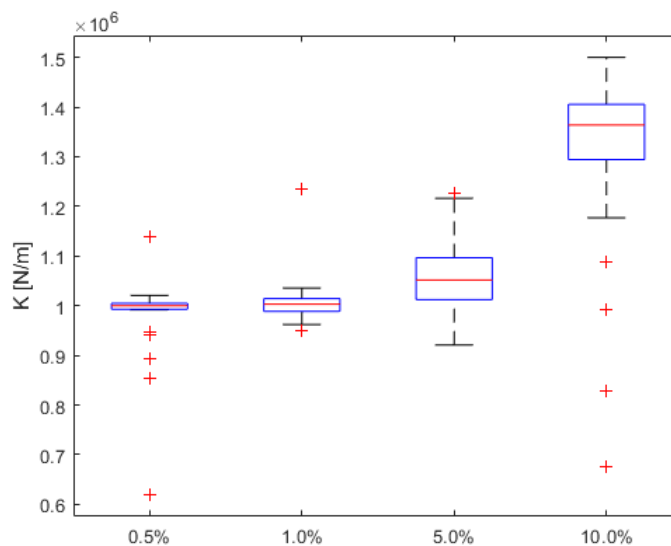


Figura 5.21: Comparação das respostas sobre ruídos, caso 2

Para se ter uma visão estatística das soluções, que também foram impressas na Figura 5.21, foram calculadas as médias e os desvios-padrão para todos os ruídos aleatórios, o que pode ser visto na Tabela 5.6.

Ruído	$K[10^6\text{N/m}]$	$\sigma[10^5\text{N/m}]$	Erro [%]
0,5%	0,9812	0,8171	-1,8819
1,0%	1,0084	0,4677	0,8389
5,0%	1,0638	0,7733	6,3806
10%	1,3308	1,3627	33,0834

Tabela 5.6: Características encontradas pelo procedimento, em função dos ruídos aplicados.

A coluna de erro da tabela foi montada por meio da comparação dos valores médios dos conjuntos de soluções, para cada ruído, e posto em configuração de porcentagem. É notável que até o ruído de 5%, o procedimento mostrou resultados razoáveis. Contudo, o teste com ruído a 10% não forneceu, em média, valores razoáveis como solução para esse problema.

De maneira geral, esses resultados indicam a validade do procedimento, bem como a boa execução das rotinas, verificando as técnicas envolvidas e também a procedência dos resultados. A precisão das tomadas, com os ruídos, apesar de nem todos os resultados serem acurados, todos são razoavelmente precisos, já que os desvios-padrão resultaram em cerca de 10% do valor da grandeza.

# Capítulo 6

## Conclusão

Os experimentos numéricos, conduzidos ao longo do trabalho, indicaram a plausibilidade de identificação de parâmetros modais de prendedores, por meio de técnicas modais, com o auxílio do Algoritmo Genético como ferramenta de otimização matemática. Primeiramente, foi estudado um sistema simples, de uma viga em balanço, com o objetivo de resolver um problema inverso, determinando as características do sistema. Em seguida, o problema envolveu o estudo de um conjunto aparafusado, com mesmo fim.

No estudo do caso simples, a viga engastada, foi possível determinar a melhor combinação de densidade e rigidez, utilizando o Algoritmo Genético sobre a média ponderada das funções de custo relativas à frequência natural e à forma modal, após o processo de escolha dos pesos relativos a cada função. Foi observado o comportamento da função *fitness* para algumas combinações de pesos, para que se pudesse notar algum padrão geométrico nas superfícies geradas, de maneira que ao final do processo, o AG determinou a combinação ótima com erro relativo desprezível.

Em seguida, ainda sob o mesmo objeto de estudo, realizou-se o experimento numérico, porém, utilizando uma função de custo que envolve as respostas em frequência do corpo. A aplicação do Algoritmo Genético não forneceu uma combinação ótima para os parâmetros desejados, contudo, ofereceu uma gama de possíveis soluções, dentro dos vetores viáveis, que eram compatíveis com a resposta analítica, mostrando que há a necessidade de informações adicionais acerca do sistema, para que se desenvolva uma solução mais restrita.

No estudo posterior, os parâmetros modais de um parafuso, sob situação hipotética, foram relacionados segundo métrica que avalia FRFs, contudo, na tentativa de identificar dois parâmetros, o comportamento das soluções foi semelhante ao anterior, ou seja, foi determinado um conjunto amplo de soluções, todas coerentes, em termos da função-objetivo, indicando uma possível falta de informações sobre o sistema. Entretanto, ao reduzir o número de parâmetros a serem identificados, o processo convergiu para uma região mais restrita, de maneira que se pôde observar uma identificação com erros da ordem de 1% sobre a média da amostra.



Ainda com esse objeto de estudo, por conta do grande número de graus de liberdade, as matrizes dinâmicas tornaram-se excessivamente custosas, de maneira que as técnicas de substruturação foram aplicadas, tendo em vista a redução dos domínios de análise, para reduzir esses custos, de maneira que sua aplicação resultou em subsistemas menores, com menos graus de liberdade, cuja resposta em frequência é comprovadamente factível, tendo se mostrado, portanto, uma ferramenta robusta para este tipo de sistema.

Em todos os casos, foram realizados os experimentos visando compreender a robustez do procedimento frente à exposição a ruídos aleatórios, tendo em vista uma possível evolução do processo para meios experimentais. De uma maneira geral, a metodologia respondeu de forma razoável, com erros proporcionais ao ruído, significativos, mas que não invalidariam as soluções, até ruídos de 10%, quando os erros passaram a causar discrepância visível.

Finalmente, reconhece-se que existe uma série de possíveis evoluções do procedimento, visando o aperfeiçoamento, para que seja definitivamente aplicável dentro de um contexto industrial, como por exemplo, a inserção de um modelo tridimensional para o sistema viga + parafuso, bem como a aplicação de ensaios experimentais, tendo em vista a identificação de danos nos prendedores.

# Referências Bibliográficas

- [1] IGLESIAS, A. *Investigating Various Modal Analysis Extraction Techniques to Estimate Damping Ratio*. Dissertação (Mestrado) — Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg - Virginia, 2000.
- [2] EWINS, D. *Modal testing: Theory and practice*. London, England: Research Studies Press Ltd, 1984.
- [3] SCHWARZ, B.; RICHARDSON, M. Experimental modal analysis. In: *CSI Reliability Week*. Orlando, FL: [s.n.], 1999. p. 1–12.
- [4] LUNDKVIST, A. *Modal Analysis Project*. Dissertação (Mestrado) — Luleå University of Technology, Luleå- Sweden, 2010.
- [5] SANTOS, J. *Análise Modal Experimental de Eixos Trincados*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2007.
- [6] HE, J.; FU, Z. *Modal Analysis*. 1st. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann, 2001.
- [7] BATISTA, F. *Identificação das Matrizes de Rigidez Elástica em Placas Finas de Materiais Compósitos*. Tese (Doutorado) — UNICAMP - Campinas, 2009.
- [8] LU, Y. *Comparison of Finite Element Method and Modal Analysis of Violin Top Plate*. Dissertação (Mestrado) — McGill University, Montreal, Canada, 2013.
- [9] KAVEH, A.; HOSSEINI, S.; ZAERREZA, A. Boundary Strategy for Optimization-Based Structural Damage Detection Problem Using Metaheuristic Algorithms. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, v. 65, n. 1, p. 150–157, 2020.
- [10] BOGRAD, S. et al. Modelling of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 25, p. 2801–2826, 2010.
- [11] OMAR, R. et al. Efficient finite element modelling for the investigation of the dynamic behaviour of a structure with bolted joints. *AIP Conference Proceedings*, v. 1952, n. 1, p. 1–7, 2018.
- [12] CHAVES, C. E.; WITTMANN, R. J.; SPINELLI, H. Analysis of fastened joints—part 1: The influence of secondary bending. In: COBEN-17 CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA. [S.l.], 2003.

- [13] SPINELLI, H. *Análise Estrutural de Juntas Rebitadas de Uso Aeronáutico*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá - SP, 2004.
- [14] SAVI, M.; PAULA, A. *Vibrações Mecânicas*. 1st. ed. [S.l.]: LTC, 2017.
- [15] RAO, S. *Mechanical Vibrations in SI units*. 6th. ed. [S.l.]: Pearson, 2018.
- [16] BEER, F.; JOHNSTON, E. *Resistência dos Materiais*. 3<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2008.
- [17] SOEIRO, N. *Análise Modal Experimental*. Pará, Brasil: Grupo de Vibrações e Acústica, 2001.
- [18] INMAN, D. *Engineering Vibration*. 4th. ed. [S.l.]: Pearson Education Inc., 2014.
- [19] ANTON, H.; RORRES. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8th. ed. [S.l.]: Bookman, 2002.
- [20] SCHUëLLER, G.; JENSEN, H. Computational methods in optimization considering uncertainties – an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, p. 2–13, 2008.
- [21] BARTILSON, D. *Model Updating in Structural Dynamics: Advanced Parametrization, Optimal Regularization, and Symmetry Considerations*. Tese (Doutorado) — Columbia University - New York, 2019.
- [22] MOTTERSHEAD, J.; FRISWELL, M. Model updating in structural dynamics: a survey. *Journal of Sound and Vibration*, v. 167, n. 2, p. 347–375, 1993.
- [23] MARWALA, T. *Finite-Element-Model Updating Using Computational Intelligence Techniques - Applications to Structural Dynamics*. [S.l.]: Springer-Verlag London Limited, 2010.
- [24] AZIZI, S. et al. A bfgs-based method for designing a decentralized lq controller for industrial robot manipulators. In: *Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Applications*. Toronto, Canada: [s.n.], 2005. p. 1558–1562.
- [25] LEVIN, R.; LIEVEN, N. Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 12, n. 1, p. 91–120, 1997.
- [26] ZAPICO, J. et al. Finite element model updating of a small steel frame using neural networks. *Smart Materials and Structures*, v. 17, p. 1–11, 2008.
- [27] KAVEH, A.; ZAERREZA, A. Shuffled shepherd optimization method: A new meta-heuristic algorithm. *Engineering Computations*, v. 37, n. 7, p. 2357–2389, 2020.

- [28] PASCUAL, R. et al. A robust frf-based technique for model updating. *Proceedings of the 2002 International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA*, 01 2002.
- [29] MOTTERSHEAD, J.; LINK, M.; FRISWELL, M. The sensitivity method in finite element model updating: a tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 25, p. 2275–2296, 2010.
- [30] HOLTZ, G. *Traçado automático de envoltórias de esforços em estruturas planas utilizando um algoritmo evolucionário*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUCRJ, Rio de Janeiro - RJ, 2005.
- [31] BIONDI, L. et al. *Técnicas de Inteligência Computacional Inspiradas na Natureza: Aplicações em Problemas Inversos em Transferência Radiativa*. São Carlos, SP: SBMAC, 2005.
- [32] DARWIN, C. *On the Origin of the Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favored Races in the Struggle for Life*. New York: D. Appleton and Company, 1859.
- [33] COLHERINHAS, G. *Ferramenta de otimização via algoritmos genéticos com aplicações em engenharia*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade de Brasília - UnB, Brasília - DF, 2016.
- [34] JONG, K. D. *An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems*. Tese (Doutorado) — University of Michigan, 1975.
- [35] GOLDBERG, D. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. [S.l.]: Alabama: Addison Wesley, 1989.
- [36] COSTA, D. An evolutionary tabu search algorithm and the nhl scheduling problem. *Information Systems and Operational Research*, v. 33, n. 2, p. 161–178, 1995.
- [37] MUHLENBEIN, H.; GORGES-SCHELEUTER, M.; KRAMER, O. Evolution algorithms in combinatorial optimization. *Parallel Computing*, v. 7, n. 1, p. 65–85, 1998.
- [38] MICHALEWICZ, Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. 3rd. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1998. ISBN 3540606769,9783540606765.
- [39] MOLGA, M.; SMUTNICKI, C. *Test functions for optimization needs*. 2005.
- [40] MAIA, R. *Resolução de Problemas de Estimação de Parâmetros Utilizando o Algoritmo de Otimização Topográfica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA, Santarém - PA, 2014.
- [41] SEIJS, M. *Experimental Dynamic Substructuring: Analysis and Design for Vehicle Development*. Tese (Doutorado) — Technische Universiteit Delft, 2016.

- [42] RIXEN, D. et al. *Substructuring in Engineering Dynamics: Emerging Numerical and Experimental Techniques*. [S.l.]: Springer, 2020.
- [43] KLERK, D. de; RIXEN, D.; VOORMEEREN, S. General framework for dynamic substructuring: History, review, and classification of techniques. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 46, p. 1169–1181, 05 2008.
- [44] SOLEIMANI, H.; CIGERUGLU, E.; ÖZGÜVEN, H. 3d linear identification of mechanical joint using frf decoupling and inverse structural modification methods. In: *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Virtual, Online: [s.n.], 2021. p. 1–8.
- [45] SCHWARZ, H. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. [S.l.]: Springer, 1890.
- [46] FRISWELL, M.; PENNY, J.; GARVEY, S. A combined genetic and eigensensitivity algorithm for the location of damage in structures. *Computers and Structures*, v. 69, n. 1, p. 547–556, 1998.
- [47] RITTO, T.; SAMPAIO, R.; CATALDO, E. Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences & Engineering*, v. 30, n. 4, p. 295–303, 2008.
- [48] MATHWORKS. *Documentação BoxPlot*. 2021. Disponível em <https://www.mathworks.com/help/stats/boxplot.html>. Acessado em 01/09/2021.
- [49] MONTGOMERY, D.; RUNGER, G. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 7th. ed. [S.l.]: LTC, 2018.
- [50] ALLEMANG, R. The modal assurance criterion - twenty years of use and abuse. *Sound & vibration*, v. 37, p. 14–23, 08 2003.
- [51] PASCUAL, R.; GOLINVAL, J. C.; RAZETO, M. A frequency domain correlation technique for model correlation and updating. *Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC*, v. 1, 01 1997.
- [52] SECO, L.; PATRÃO, M. *Equações Diferenciais Ordinárias e Séries de Potências*. Brasília, Brasil: MAT-UnB, 2018.

# Apêndice A

## Transformada de Laplace

No campo das Equações Diferenciais, uma técnica, comumente utilizada no âmbito de vibrações mecânicas, a qual é eficiente para a elaboração de soluções analíticas, notável é a Transformada de Laplace. Trata-se de uma função que insere um variável auxiliar na equação, que transforma as EDOs em equações algébricas [52]. Define-se a Transformada segundo a Equação (A.1):

$$\mathfrak{L}\{y(t)\}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-st} y(t) dt \quad (\text{A.1})$$

O domínio da transformada é o conjunto dos  $s \in \mathbb{R}$  que forneçam condições para que a integral exista e seja finita. Neste trabalho, a transformada foi utilizada, também, em derivadas, o que resulta em:

$$\mathfrak{L}\{y'(t)\}(s) = s\mathfrak{L}\{y(t)\}(s) - y(0) \quad (\text{A.2})$$

De fato, a Equação (A.2) é demonstrada aplicando a derivada de uma função no argumento principal da definição da transformada (A.1), conforme a Equação (A.3):

$$\mathfrak{L}\{y'(t)\}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-st} y'(t) dt \quad (\text{A.3})$$

Assume-se, por hipótese, que a variável  $s$  valida a expressão da integral, tornando-a finita. Assim, é possível utilizar a técnica de integração por partes, de onde extrai-se:

$$\mathfrak{L}\{y'(t)\}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[ e^{-st} y(t) \right] \Big|_0^n - \int_0^n -s e^{-st} y(t) dt \right\} \quad (\text{A.4})$$

Avaliando os extremos da função  $e^{-st} y(t)$ , bem como extraindo  $-s$  do integrando, já que é variável independente, a Equação (A.1) é facilmente delimitada. De maneira semelhante,

a Transformada de Laplace para a derivada segunda segue o mesmo padrão. Basta que o argumento da transformada na Equação (A.2) seja a segunda derivada, de forma que se pode escrever:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy(0) - y'(0) \quad (\text{A.5})$$

# Apêndice B

## Construção das Principais Matrizes para FBS

No capítulo dos resultados, na seção do conjunto aparafusado surgiu a necessidade da aplicação da Substruturação Dinâmica, para redução de custos operacionais. Para uso dessa ferramenta, é necessário compreender a construção das matrizes dinâmicas combinadas, bem como as matrizes Booleanas correspondentes. Aqui será mostrado todo o procedimento de construção dessas matrizes, para acoplamento e desacoplamento dinâmicos, utilizando a decomposição discreta do modelo utilizada neste trabalho.

### Acoplamento

Retomando a Figura 5.11, e considerando conexões rígidas entre os nós 4 e 5, bem como entre 6 e 7, a matriz dinâmica combinada vai constar, em ordem, as matrizes de receptância de cada um dos subsistemas. Como o vetor de frequências tem 2500 divisões, a matriz combinada terá as dimensões  $10 \times 10 \times 2500$ . A matriz resultante será confeccionada segundo a Equação (4.5), como mostrado a seguir:

$$Z_{ABC} = \begin{bmatrix} Z_{1,1}^A & Z_{1,2}^A & Z_{1,3}^A & Z_{1,4}^A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{2,1}^A & Z_{2,2}^A & Z_{2,3}^A & Z_{2,4}^A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{3,1}^A & Z_{3,2}^A & Z_{3,3}^A & Z_{3,4}^A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{4,1}^A & Z_{4,2}^A & Z_{3,4}^A & Z_{4,4}^A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{1,1}^C & Z_{1,2}^C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{2,1}^C & Z_{2,2}^C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{1,1}^B & Z_{1,2}^B & Z_{1,3}^B & Z_{1,4}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{2,1}^B & Z_{2,2}^B & Z_{2,3}^B & Z_{2,4}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{3,1}^B & Z_{3,2}^B & Z_{3,3}^B & Z_{3,4}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{4,1}^B & Z_{4,2}^B & Z_{4,3}^B & Z_{4,4}^B \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

Agora, a matriz Booleana computa as condições de compatibilidade física entre os subsistemas, ou seja, monitora os nós que estão sob contato rígido. As equações de compati-



lidade para esse caso são:

$$\begin{cases} u_4 - u_5 = 0 \\ u_6 - u_7 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Como a matriz Booleana satisfaz  $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , tem-se:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

## Desacoplamento

No desacoplamento, a matriz combinada será composta, em ordem, pela matriz de receptância do conjunto, considerando que conexões rígidas aglutinam nós, e depois, as matrizes de receptância dos subsistemas que serão retirados, com sinal negativo. Nesse caso, como o sistema completo possui 10 nós, com duas conexões rígidas, para a confecção da matriz combinada, será considerado que o sistema completo possui 8 nós (1,2,3,4+5,6+7,8,9,10). Essa matriz terá, portanto a dimensão  $16 \times 16 \times 2500$  e será descrita como a seguir, de maneira simbólica, devido ao tamanho extenso dela:

$$Z_{ABC}^{AB} = \begin{bmatrix} Z_{8 \times 8}^{ABC} & \mathbf{0}_{8 \times 4} & \mathbf{0}_{8 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 8} & -Z_{4 \times 4}^A & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 8} & \mathbf{0}_{4 \times 4} & -Z_{4 \times 4}^B \end{bmatrix}_{16 \times 16} \quad (\text{A.9})$$

A Booleana segue o mesmo princípio do acoplamento, a questão aqui é localizar os nós correspondentes, porque agora o trabalho será realizado em uma matriz que tem mais nós do que o sistema. Segundo essa representação, a viga A estará ocupando os nós de 9 a 12, e a viga B estará ocupando os nós de 13 a 16. Sendo assim, as compatibilidades serão descritas segundo a equação:

$$\begin{cases} u_4 - u_{12} = 0 \\ u_5 - u_{13} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Assim, a Booleana correspondente será descrita como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.11})$$