



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

Estudo Magnetohidrodinâmico da Camada Limite de um Fluido Condutor

Matheus Araújo Aguilar

Brasília, Abril de 2022

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

Estudo Magnetohidrodinâmico da Camada Limite de um Fluido Condutor

Matheus Araújo Aguilár

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica
como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Francisco Ricardo da Cunha
Orientador

Prof. Dr. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues
Avaliador, ENM/UnB

Prof. Dr. Andre von Borries Lopes
Avaliador, ENM/UnB

RESUMO

No presente trabalho é examinado o problema de camada limite bidimensional incompressível em regime permanente de um fluido eletricamente condutor sob uma placa plana. O escoamento recai no contexto da magnetohidrodinâmica (MHD) envolvendo um acoplamento das equações contínuas hidrodinâmicas de Navier-Stokes na presença da força eletromagnética de Lorentz. O problema é explorado por meio de uma solução teórica do escoamento de camada limite laminar baseada no método de similaridade, quando uma adimensionalização apropriada das equações governantes da camada limite MHD é proposta. Duas configurações são analisadas: quando há ausência de um campo de pressão, e quando há um campo de pressão e um campo magnético representados por uma lei de potência. As variáveis similares são resolvidas usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem acoplado ao método de Newton-Raphson resultando no método do tiro. Com esta metodologia transforma-se um problema de valor de contorno em um problema de valor inicial. Em adição, os resultados numéricos são validados pela solução analítica em série de potência para o caso clássico de Blasius, e comparados com resultados disponíveis na literatura para o caso MHD. Conclui-se que o campo magnético desacelera o escoamento no primeiro caso, já no segundo caso o efeito é de aceleração desse. Essa aceleração aumenta o coeficiente de fricção tendendo assim a suprimir o descolamento da camada limite. Portanto, esse efeito pode usado para controle ativo de camada limite.

Palavras-Chave: Camada limite; Fluido condutor; Magnetohidrodinâmica; Método de similaridade; Solução assintótica; Solução numérica; Controle ativo de camada limite.

ABSTRACT

In this work, the problem of a two-dimensional incompressible steady-state boundary layer of an electrically conductive fluid under a flat plate is examined. The flow falls within the context of magnetohydrodynamics (MHD) involving a coupling of the Navier-Stokes hydrodynamic continuum equations in the presence of the Lorentz electromagnetic force. The problem is explored through a theoretical solution of the laminar boundary layer flow based on the similarity method, when an appropriate nondimensionalization of the governing equations of the MHD boundary layer is proposed. Two configurations are analyzed: when there is no pressure field, and when there is a pressure field and a magnetic field represented by a power law. Similar variables are solved using the fourth order Runge-Kutta method coupled with the Newton-Raphson method resulting in the shooting method. With this methodology, a boundary value problem is transformed into an initial value problem. In addition, the numerical results are validated by the analytical power series solution for the classic case of Blasius, and compared with results available in the literature for the MHD case. It is concluded that the magnetic field decelerates the flow in the first case, in opposition to it, in the second case the effect is of acceleration. This acceleration increases the coefficient of friction, then tending to suppress boundary layer separation. Therefore, this effect can be used for active boundary layer control.

Keywords: Boundary layer; Conducting fluid; Magnetohydrodynamics; Similarity method; Asymptotic solution; Numerical solution; Active boundary layer control.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	INTRODUÇÃO	1
1.1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
1.2	OBJETIVOS	2
2	FUNDAMENTAÇÃO DA TEORIA MAGNETOHIDRODINÂMICA	3
2.1	TEORIA ELETROMAGNÉTICA	3
2.1.1	LEI DE GAUSS ELÉTRICA	3
2.1.2	LEI DE GAUSS MAGNÉTICA	3
2.1.3	LEI DE FARADAY	4
2.1.4	LEI DE AMPÈRE-MAXWELL	5
2.1.5	CONSERVAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA	6
2.1.6	LEI DE OHM GENERALIZADA	6
2.1.7	FORÇA DE LORENTZ	7
2.1.8	POTENCIAL ESCALAR E POTENCIAL VETOR	8
2.1.9	EQUAÇÃO DO TRANSPORTE MAGNÉTICO	9
2.2	MHD	11
2.2.1	ACOPLAMENTO DO ELETROMAGNETISMO COM A DINÂMICA DOS FLUIDOS	11
2.3	EQUAÇÕES MHD	12
3	CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA COM EFEITOS MHD SOB UMA PLACA PLANA	14
3.1	CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA	14
3.1.1	MÉTODO DE SOLUÇÃO POR SIMILARIDADE	19
3.1.2	TENSÃO DE CISALHAMENTO	21
3.1.3	COEFICIENTES DE ARRASTO	21
3.1.4	DESCOLAMENTO DA CAMADA LIMITE	22
3.1.5	PROBLEMA DE BLASIUS	22
3.1.6	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BLASIUS POR SÉRIE DE POTÊNCIAS	23
3.1.7	CAMADA LIMITE COM DESACELERAÇÃO DA CORRENTE LIVRE	24
3.2	CAMADA LIMITE MAGNETOHIDRODINÂMICA	25
3.2.1	CAMADA DE HARTMANN	26
3.3	SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE CAMADA LIMITE MHD	29
3.3.1	PROBLEMA DE BLASIUS NO CONTEXTO MHD	30
3.3.2	CAMADA LIMITE MHD COM DESACELERAÇÃO DA CORRENTE LIVRE	31
4	IMPLEMENTAÇÃO DA METODOLOGIA NUMÉRICA	33
4.1	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA	33

4.2	MÉTODO DO TIRO.....	34
4.3	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.....	34
4.4	ALGORITMO DO PROGRAMA	34
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	36
5.1	PROBLEMA DE BLASIUS MHD.....	37
5.1.1	VALIDAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO USADO PARA O PROBLEMA DE BLASIUS COM EFEITOS MHD	37
5.1.2	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE BLASIUS COM EFEITOS MHD	38
5.1.3	ANÁLISE DA VIABILIDADE DO USO DE UM CAMPO MAGNÉTICO TRANSVERSAL PARA O CONTROLE DA CAMADA LIMITE	41
5.1.4	PROBLEMA DE CAMADA LIMITE COM DESACELERAÇÃO DA CORRENTE LIVRE	42
5.2	PROBLEMA DE BLASIUS MHD COM DESACELERAÇÃO DA CORRENTE LIVRE	45
5.2.1	VALIDAÇÃO DA SOLUÇÃO DE BLASIUS MHD COM DESACELERAÇÃO DA COR- RENTE LIVRE	46
5.2.2	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE BLASIUS COM EFEITOS MHD COM DESACELERA- ÇÃO DA CORRENTE LIVRE.....	48
5.2.3	EFEITOS DO CAMPO MAGNÉTICO NO DESCOLAMENTO DA CAMADA LIMITE LAMINAR	50
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	53
6.1	CONCLUSÃO.....	53
6.2	TRABALHOS FUTUROS	53
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54

LISTA DE FIGURAS

3.1	Esquema de camada limite hidrodinâmica reproduzido do livro-texto de [23].....	14
3.2	Esquema de camada limite magnetohidrodinâmica adaptado do livro-texto de [23]	26
5.1	Comparação entre a solução numérica desenvolvida nesse trabalho e a solução analítica em termos de série de potência desenvolvida por Blasius	36
5.2	Comparação entre os coeficientes de fricção em relação ao parâmetro de interação magnética local I obtidos no trabalho e propostos pela equação (5.4)	38
5.3	Solução da equação de Blasius com efeitos MHD, para os parâmetros de interação magnética $I = 0$, $I = 0,02$ e $I = 0,05$	39
5.4	Espessura da camada limite laminar para um $I = 0$, $I = 0,02$ e $I = 0,05$	40
5.5	Coefficiente de fricção ao longo da placa para valores de $I = 0$, $I = 0,02$ e $I = 0,05$	41
5.6	Solução da equação de Blasius com desaceleração do escoamento no interior da camada limite para valores de $m = 0$, $m = 0,122$ e $m = -0,122$	43
5.7	Coefficiente de fricção ao longo da placa plana para valores de $m = 0$, $m = 0,122$ e $m = -0,122$	44
5.8	Comportamento de f'' ao longo da placa em relação a η para valores de $m = 0$, $m = 0,122$ e $m = -0,122$	45
5.9	Comparação entre o método numérico proposto no trabalho e os métodos semi-analíticos disponíveis em [15]	47
5.10	Solução da equação de Blasius com efeitos MHD com desaceleração da camada limite para valores de $m = -0,6$ e $I = 2,45$, $I = 2,64$ e $I = 2,82$	48
5.11	Espessura da camada limite laminar para valores de $m = -0,6$ e $I = 2,45$, $I = 2,64$ e $I = 2,82$	49
5.12	Coefficiente de fricção ao longo da placa plana para valores de valores de $m = -0,6$ e $I = 2,45$, $I = 2,64$ e $I = 2,82$	50
5.13	Solução da equação de Blasius com efeitos MHD com desaceleração da camada limite para valores de $m = -0,09$ e $I = 0$, $I = 1,41$ e $I = 1,73$	51
5.14	Solução da equação de Blasius com efeitos MHD com desaceleração da camada limite para $f''(\eta)$ e para valores de $m = -0,09$ e $I = 0$, $I = 1,41$ e $I = 1,73$	52

LISTA DE TABELAS

5.1	Comparação entre os diferentes métodos de solução disponíveis em [15]	46
5.2	Resultados obtidos para o parâmetro M^2 utilizando o método de solução proposto no presente trabalho	47

LISTA DE SÍMBOLOS

E	Campo elétrico
B	Campo magnético
ρ_e	Densidade de cargas elétricas
Q_e	Carga envolvida
q	Carga elétrica
ϵ_0	Permissividade do vácuo
μ_0	Permeabilidade do vácuo
V	Volume
S	Área de superfície
t	Tempo
ϵ	Força eletromotriz movida em um circuito
φ	Fluxo magnético
J	Densidade de corrente
l	Comprimento de arco
l_0	Comprimento inicial
v_0	Velocidade inicial
c	Velocidade da luz no vácuo
K_e	Densidade elétrica
F	Força elétrica
ϕ	Potencial elétrico
A	Potencial vetor
u	Velocidade do escoamento
U	Velocidade de corrente livre
D	Tensor taxa de deformação
W	Tensor taxa de rotação
ω	Vorticidade
P	Pressão
μ	Viscosidade dinâmica
ρ	Densidade de massa
ν	Viscosidade cinemática
λ	Coefficiente de de difusão magnética
x	Coordenada x
y	Coordenada y
v	Componente y da velocidade do escoamento
u	Componente x da velocidade do escoamento
G	Propriedade qualquer do escoamento
ν	Viscosidade cinemática

λ	Coeficiente de de difusão magnética
$\frac{\partial}{\partial t}$	Operador derivada temporal
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada material
Φ	Função de corrente
η	variável similar
D	Força de arrasto
C_D	Coeficiente de arrasto
C_f	coeficiente de fricção
C_{fx}	Coeficiente de fricção em um ponto x
m	Constante associada ao termo de pressão
B_0	Campo magnético constante
$\frac{D}{Dt}$	Operador derivada material
δ	Espessura da camada limite
δ_h	Espessura da camada de Hartmann
m	Constante associada ao termo de pressão
B_x	Componente x do campo magnético
Re	Parâmetro adimensional número de Reynolds
Re_l	Parâmetro adimensional número de Reynolds em um ponto l
Re_x	Parâmetro adimensional número de Reynolds em um ponto x
Ma	Parâmetro adimensional número de Mach
Re_m	Parâmetro adimensional número de Reynolds magnético
Ha	Parâmetro adimensional número de Hartmann
I_g	Parâmetro adimensional número de interação magnética global
I	Parâmetro adimensional número de interação magnética local
M^2	Parâmetro adimensional número de interação magnética local $M^2 = I$

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

1.1.1 Motivação

A magnetohidrodinâmica (MHD) não possui apenas um apelo teórico, mas modela muitos problemas práticos em várias áreas de estudo, como geradores MHD, reatores nucleares, extração de energia geotérmica, redução de arrasto aerodinâmico, problemas de fluxo sanguíneo, entre outros [1]. Na metalurgia, a qualidade do produto final depende majoritariamente do líquido de resfriamento utilizado e da taxa de resfriamento. Os efeitos combinados de transferência de calor e de magnetohidrodinâmica são bastante úteis para alcançar as características desejadas do produto final, pois é possível usar um campo magnético para suprimir a convecção natural, tendo assim um controle melhor do resfriamento do líquido, essa e outras aplicações em metalurgia podem ser encontradas em [2]. Na aerodinâmica os efeitos magnetohidrodinâmicos podem ser usados para alterar o fluxo externo sobre a aeronave, uma vez que o coeficiente de fricção pode ser reduzido utilizando um campo magnético com o intuito de inibir a transição para o regime turbulento ou para alterar o perfil da camada limite. Uma discussão detalhada acerca da turbulência em regime MHD pode ser encontrada em [3].

O tema possui uma grande relevância, pois possui uma vasta aplicação em diversos campos da engenharia e que geralmente não é explorado por exigir conhecimento em áreas aparentemente distintas: o eletromagnetismo e a dinâmica de fluidos. Contudo, elas são, na verdade, campos de estudos profundamente relacionados e que seguem a mesma formulação teórica (a de uma teoria de campo). Como será mostrado nesse trabalho, muitas vezes, o efeito do eletromagnetismo se dá apenas pelo acréscimo de um termo de campo na equação de Navier-Stokes; porém, essa adição traz como consequência uma considerável ampliação do espectro de aplicações dessa teoria.

1.1.2 Revisão Bibliográfica

A camada limite pode ser definida como uma região em que a velocidade vai de zero na superfície até a velocidade de corrente livre no topo, de forma que os gradientes de velocidade podem ser observados mesmo quando a viscosidade é pequena. Determinar o campo de velocidades e o campo de fricção é de fundamental importância para a solução das equações da camada limite. Blasius em 1908 foi o primeiro a resolver o problema da camada limite de um escoamento sobre uma placa plana usando técnicas de similaridade [4]. Seguindo seu trabalho pioneiro, muitos autores estudaram esse problema sob diferentes situações.

Posteriormente, o estudo do escoamento magnetohidrodinâmico sobre uma placa plana foi tema de um grande número de trabalhos, sendo Hartmann em 1937 o primeiro a discuti-lo [5]. E, desse trabalho, surgiram outros diversos sobre as diferentes aplicações do escoamento magnetohidrodinâmico.

A diferença fundamental entre os escoamentos estudados por Hartmann daqueles estudados por Blasius

é a existência de uma força eletromagnética conhecida como força de Lorentz. Quando um fluido condutor se move na presença de um campo magnético, ele produz um campo elétrico, que gera uma corrente elétrica. A interação entre essa corrente induzida e o campo eletromagnético gera uma força eletromagnética chamada de força de Lorentz, mencionada anteriormente. Uma vez que a força de Lorentz tende a suprimir a velocidade do escoamento até um certo ponto, pode ser possível utilizá-la para controlar o perfil da camada limite.

As primeiras propostas para o controle da camada limite usando forças eletromagnéticas tiveram origem em [6,7]. Com o passar dos anos e com o aumento das aplicações da teoria MHD [1], o interesse no assunto cresceu e vários trabalhos foram feitos sobre o tema, variando entre os mais diversos parâmetros do escoamento, como, por exemplo, o tipo de fluido. Vários autores estudaram o efeito de um escoamento MHD de um fluido não-Newtoniano para compreender melhor técnicas de processamento de polímeros [8,9], bem como, em trabalhos mais recentes [10,11]. Outros autores mantiveram o mesmo tipo do fluido, mas estudaram efeitos de radiação em camada limite MHD e transferência de calor [12,13,14]. Ademais, existem vários trabalhos publicados revisando o problema de um escoamento MHD em uma placa plana utilizando as mais diferentes ferramentas matemáticas para encontrar soluções analíticas ou semi-analíticas para configurações similares às abordadas no presente trabalho, são exemplos [15,16].

1.2 OBJETIVOS

Este projeto tem como objetivo principal investigar, do ponto de vista teórico, a influência de efeitos magnéticos de força de Lorentz no escoamento em uma camada limite incompressível bidimensional de um fluido condutor incompressível sujeito a um campo magnético transversal e a um gradiente de pressão. Alguns pontos principais que esse projeto pretende abordar são:

- Validar a solução numérica desenvolvida com a solução de Blasius em série de potência, e igualmente validar a solução para o parâmetro de interação pequeno, mas diferente de zero, com a solução assintótica válida para pequenos valores do parâmetro de interação.
- Verificar que quando o parâmetro de interação magnética é desprezível e a velocidade de corrente livre possui uma dependência em x (i.e a presença de um gradiente de pressão) a solução hidrodinâmica é de fato recuperada.
- Explorar a influência do campo magnético no perfil de velocidades na camada limite, na espessura da camada limite e no coeficiente de fricção.
- Explorar a interação do campo magnético com o gradiente de pressão e verificar como isso afeta o perfil de velocidades na camada limite, a espessura da camada limite e o coeficiente de fricção.
- A partir do modelo apresentado, explorar que a presença de um campo magnético transversal externo permite o controle e o monitoramento do escoamento magnetohidrodinâmico em camada limite, bem como o perfil de velocidades, a espessura da camada limite e o efeito da fricção.

2 FUNDAMENTAÇÃO DA TEORIA MAGNETOHIDRODINÂMICA

2.1 TEORIA ELETROMAGNÉTICA

O eletromagnetismo modela as interações entre os campos elétricos \mathbf{E} e os magnéticos \mathbf{B} , onde cargas e correntes elétricas estão presentes. O eletromagnetismo é resumido em um conjunto de quatro equações conhecidas como as equações de Maxwell, que serão exploradas a seguir:

2.1.1 Lei de Gauss elétrica

A primeira equação de Maxwell é conhecida por Lei de Gauss elétrica, que é dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

em que \mathbf{E} é o campo elétrico, ρ_e é a densidade de cargas elétricas e ϵ_0 é a permissividade do vácuo. Integrando a equação (2.1) em um volume V e usando o teorema do divergente, tem-se que:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_e dV = \frac{Q_e}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_e}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

em que $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ é o fluxo de campo elétrico e Q_e é a carga envolvida por uma superfície S considerada. A equação (2.3) expressa que um fluxo do campo elétrico em uma dada superfície é proporcional à carga elétrica envolvida por essa, e é conhecida como Lei de Gauss para o campo elétrico.

2.1.2 Lei de Gauss magnética

A segunda equação de Maxwell é dita Lei de Gauss magnética

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

em que \mathbf{B} é o campo magnético induzido. A equação (2.4) descreve a natureza solenoidal do campo magnético, ou seja, as linhas de campo magnético sempre formam um circuito fechado. Para uma melhor visualização desse fenômeno, faz-se necessário integrar a equação (2.4) em um volume V e utilizar o teorema de Gauss, do qual se obtém:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.5)$$

Com maior clareza, a equação (2.5) nos mostra que o fluxo do campo magnético é nulo sobre uma superfície fechada, ou seja, as linhas de campo magnético nunca começam ou terminam, mas sim formam circuitos; com isso, inexistem monopolos magnéticos. Note que a natureza do campo magnético é bem diferente das linhas de campo elétrico, que têm origem na carga e vão para o infinito com fluxo não nulo em qualquer superfície fechada e sobre qualquer distribuição líquida de cargas.

2.1.3 Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é conhecida como a Lei de Faraday. Por motivos didáticos, primeiramente, consideraremos o caso em que os campos não variam com o tempo.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.7)$$

A equação (2.7) nos mostra que o campo eletrostático é irrotacional, ou seja, o campo eletrostático é conservativo e sua integral de linha independe do caminho escolhido. Voltando aos casos em que os campos variam com o tempo, tem-se que estes não são conservativos, e que, por isso, faz-se necessário definir uma força eletromotriz sobre um circuito fechado c :

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon \quad (2.8)$$

Sabemos que a variação de um campo magnético em um circuito fechado gera uma força eletromotriz (ε) induzida que é dada por [17]:

$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} \quad (2.9)$$

em que φ é o fluxo de campo magnético, dado por:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.10)$$

Juntando as equações (2.8), (2.9) e (2.10), obtém-se a forma integral da lei de Faraday.

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.11)$$

A equação (2.11) nos permite afirmar que a força eletromotriz induzida por uma variação de fluxo magnético será sempre formada em um sentido que se oponha a essa variação.

2.1.4 Lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é a Lei de Ampère-Maxwell, em que ρ_e é a densidade de carga, \mathbf{J} é a densidade de corrente, μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo, e o termo $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ é conhecido como corrente de deslocamento.

Integrando em uma superfície S e utilizando o teorema de Stokes, tem-se a forma integral da Lei de Ampère-Maxwell:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.13)$$

Essa lei nos revela que o campo magnético pode ser gerado por uma densidade de corrente ou por uma variação temporal do campo elétrico.

Com o intuito de demonstrar que o termo de corrente de deslocamento pode ser desprezado em regimes em que a velocidade do escoamento é muito menor que a velocidade da luz, que é o caso MHD, proporemos a seguinte adimensionalização:

$$B^* = \frac{B}{B_0}$$

$$t^* = t \frac{v_0}{l_0}$$

$$E^* = \frac{E}{E_0}$$

$$J = \frac{J^*}{J_0}$$

Para definir um campo elétrico e uma densidade de corrente adimensional é necessário usar as equações de Maxwell.

Da Lei de Faraday (equação (2.6)):

$$E_0 = l_0 \frac{B_0}{t_0} = v_0 B_0$$

Da Lei de Ampère (equação (2.12)):

$$J_0 = \frac{B_0}{l_0 \mu_0}$$

Com isso, torna viável propor:

$$E^* = \frac{E}{B_0 v_0}$$

$$J^* = J \frac{l_0 \mu_0}{B_0}$$

Substituindo em (2.12):

$$\frac{B_0}{l_0} \nabla^* \times \mathbf{B}^* = \mathbf{J}^* \frac{\mu_0 B_0}{\mu_0 l_0} + \frac{v_0^2}{c^2} \frac{B_0}{l_0} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} \quad (2.14)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{l_0}{B_0}$:

$$\nabla^* \times \mathbf{B}^* = \mathbf{J}^* + \frac{v_0^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} \quad (2.15)$$

Definindo o termo $\frac{v_0}{c}$ como o número de Mach magnético, resta-nos que:

$$\nabla^* \times \mathbf{B}^* = \mathbf{J}^* + (Ma)_{mag}^2 \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} \quad (2.16)$$

Em escoamentos MHD, tem-se que as velocidades características do escoamento são muito menores que a velocidade da luz. Com isso, o número de Mach magnético tende a 0, logo:

$$\nabla^* \times \mathbf{B}^* = \mathbf{J}^* \quad (2.17)$$

Voltando às variáveis sem asteriscos, obtemos a Lei de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.18)$$

2.1.5 Conservação da carga elétrica

As equações de Maxwell já carregam consigo a conservação da carga elétrica, para demonstrar isso tomaremos o divergente da lei da Ampere-Maxwell, equação (2.12):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (2.19)$$

Usando a lei de Gauss pro campo elétrico, equação (2.1), obtém-se que:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_e) = 0 \quad (2.20)$$

A equação (2.20) é conhecida como a conservação da carga elétrica.

Para o caso em que ρ_e não varia com o tempo, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.21)$$

2.1.6 Lei de Ohm generalizada

A Lei de Ohm é uma relação constitutiva entre a densidade de corrente \mathbf{J} e o campo elétrico \mathbf{E} para condutores lineares. Se o condutor é anisotrópico, a condutividade elétrica do material será não uniforme, e será necessário considerar o tensor condutividade elétrica. No caso do presente trabalho, a condutividade

será considerada constante.

$$\mathbf{J} = k_e \mathbf{E} \quad (2.22)$$

Vamos considerar que o campo elétrico da equação (2.22) seja medido no referencial se movendo com o fluido condutor, com isso tem-se que:

$$\mathbf{J} = k_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.23)$$

2.1.7 Força de Lorentz

Um objeto condutor se movendo com velocidade \mathbf{u} na presença de um campo eletromagnético está submetido às seguintes forças [18].

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_e + q\mathbf{E}_i + q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.24)$$

O primeiro termo da direita é a força eletrostática, ou força de Coulomb, que surge da mútua repulsão ou atração de cargas elétricas. \mathbf{E}_e é o campo eletrostático. O segundo é a força que a carga experimenta na presença de um campo magnético. \mathbf{E}_i é o campo elétrico induzido pela variação do campo magnético. O terceiro termo é a força de Lorentz, que surge do movimento das cargas através do campo magnético. Definiremos o campo elétrico total \mathbf{E} como sendo a soma do campo elétrico induzido e do campo elétrico eletrostático, logo:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.25)$$

Na teoria MHD geralmente estamos interessados na força exercida em um volume de fluido, não em cargas individuais, então somaremos a equação (2.25) em todo o volume. Fazendo essa soma, temos que:

$$\sum q = \rho_e \quad (2.26)$$

$$\sum q\mathbf{u} = \mathbf{J} \quad (2.27)$$

Ou seja, a soma das cargas no volume nos oferta a densidade volumétrica dessas, e a soma do produto da carga com a velocidade nos dá a densidade de corrente \mathbf{J} . Com isso, torna-se possível escrever a expressão para a força de Lorentz por unidade de volume:

$$\mathbf{F} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.28)$$

Nas escalas de escoamento magnetohidrodinâmico abordado nesse trabalho, a contribuição do elétrico é muito pequena em relação ao termo do $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Frisa-se que na grande maioria dos escoamentos magnetohidrodinâmicos isso também é verdade, como mostra [18]. Portanto, podemos desprezar o termo de

campo elétrico da equação (2.28), logo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.29)$$

2.1.8 Potencial escalar e potencial vetor

A equação (2.8) expressa que o campo eletrostático é irrotacional, assim como o potencial de velocidades na mecânica dos fluidos. Portanto, podemos definir um potencial elétrico por:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.30)$$

Com a definição do potencial elétrico na equação (2.30) e a Lei de Gauss em (2.1), podemos chegar à equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (2.31)$$

Para um caso em que a densidade de carga é desprezível, podemos definir a equação de Laplace para o potencial elétrico como:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (2.32)$$

As equações (2.30) e (2.32) são equações bastante úteis por possuírem soluções conhecidas.

A natureza solenoidal do campo magnético nos permite definir um potencial para o campo magnético [19].

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.33)$$

Em que \mathbf{A} é definido como potencial vetor. Note que diferentemente do caso da Lei de Gauss para o campo elétrico, para o campo magnético a Lei não se altera; ou seja, a definição (2.33) é válida tanto para a magnetostática quanto para a eletrodinâmica. Agora se faz necessário encontrar uma relação do campo elétrico e dos potenciais válida para a eletrodinâmica, o que será feito com a definição de potencial vetor e a Lei de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.34)$$

Reescreveremos a equação (2.34) de forma que o rotacional seja nulo:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.35)$$

Logo, essa grandeza cujo o rotacional se anula pode ser definida como o gradiente de um escalar. Com isso, tem-se que:

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \phi \quad (2.36)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.37)$$

A formulação potencial é relevante, primeiramente, por nos permitir a redução de um problema de 6 variáveis, 3 direções de \mathbf{E} e 3 direções de \mathbf{B} em um problema de 4 variáveis. Em segundo lugar, outra vantagem dessa formulação potencial é a liberdade de calibre que ela nós trás. Especificamente na equação (2.37), podemos adicionar qualquer gradiente de uma função a \mathbf{A} , desde que para isso subtraímos a derivada parcial temporal sem alterar os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , ou seja:

$$\begin{cases} \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda \end{cases} \quad (2.38)$$

Essa transformação é chamada de transformação de calibre e é muito útil na resolução de problemas em eletrodinâmica e em magnetohidrodinâmica, porque nos permite ajustar as equações, simplificando-as, e que, por isso, facilita a resolução de muitos problemas.

2.1.9 Equação do transporte magnético

Vamos tirar o rotacional da Lei de Ohm generalizada:

$$\nabla \times \mathbf{J} = k_e (\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})) \quad (2.39)$$

Usando a Lei de Faraday (equação (2.6)) e a Lei de Ampère (equação (2.12)), tem-se que:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 k_e \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right) \quad (2.40)$$

Usando a identidade:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.41)$$

E sabendo que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, ficamos com a seguinte equação:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.42)$$

em que $\lambda = \frac{1}{\mu_0 k_e}$ é o coeficiente de difusão magnética.

O primeiro termo da equação (2.42) é o advectivo, e o segundo, o difusivo. Fazendo o balanço desses dois termos, chega-se a [20]:

$$|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})| \sim \frac{uB}{l} \quad (2.43)$$

$$|\lambda \nabla^2 \mathbf{B}| \sim \frac{\lambda B}{l^2} \quad (2.44)$$

Analogamente à mecânica dos fluidos, pode-se definir o número de Reynolds como sendo a razão entre o termo de advecção e o termo de difusão:

$$R_{em} = \frac{ul}{\lambda} \quad (2.45)$$

Para um $R_{em} \ll 1$, o termo difusivo domina, observe:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.46)$$

Focando na equação (2.46), percebe-se que existe uma analogia à equação do calor para um sólido homogêneo, isotrópico e sem fontes:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \mathbf{T} \quad (2.47)$$

Observando essa semelhança, pode-se afirmar que, como o calor, os campos magnéticos se difundem através de um meio condutor, resultando em um decaimento desse campo. Com uma análise dimensional é possível determinar o tempo desse decaimento:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right| \sim \frac{B}{\tau} \quad (2.48)$$

$$|\lambda \nabla^2 B| \sim \frac{\lambda B}{l^2} \quad (2.49)$$

Com isso, tem-se que:

$$\tau \sim \frac{l^2}{\lambda} \sim l^2 \mu_0 k_e \quad (2.50)$$

Para $R_{em} \gg 1$, o termo advectivo domina a equação (3.137), restando:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.51)$$

Para um escoamento MHD incompressível:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.52)$$

Para compreender melhor o significado da equação do transporte do campo magnético em (2.52), faz-se necessário compará-la à equação da vorticidade (considerando um fluido invíscido em regime permanente) para $R_e \gg 1$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.53)$$

Percebe-se que existe uma analogia entre as duas equações - ainda que essa analogia não seja perfeita, porque \mathbf{B} não possui uma dependência na velocidade da mesma maneira de ω -, de forma que se pode interpretar a dinâmica de \mathbf{B} de maneira similar à dinâmica de vorticidade. Logo, é factível que escrevamos o gradiente de velocidades do seguinte modo:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \quad (2.54)$$

em que \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação e \mathbf{W} é o tensor taxa de rotação. Como o tensor taxa de rotação é antissimétrico, é viável usar a relação dual e escrever a equação (2.54) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} - \omega \times \mathbf{B} \quad (2.55)$$

O primeiro termo da direita mostra-nos que \mathbf{B} é advectado pelas partículas fluidas do próprio escoamento; o termo do meio mostra-nos que o campo magnético sofre distorção por alongamento das linhas de campo (conhecida em dinâmica de vórtice como "stretching"); e o último termo da direita mostra-nos que o campo ainda pode sofrer distorção por rotação das linhas de campo.

Devido à semelhança da vorticidade e do campo magnético, os teoremas aplicáveis à vorticidade podem ser aplicados no contexto do MHD e reinterpretados com o \mathbf{B} fazendo o papel de ω . Ou seja, a primeira Lei de Helmholtz pode ser reinterpretada como sendo:

- Em um fluido altamente condutor (ideal), as linhas de campo magnético se movem exatamente com o fluido, em vez de simplesmente se espalharem, sendo possível dizer que essas linhas de campo estão congeladas no fluido condutor. Ou seja, o fluido condutor pode fluir livremente ao longo das linhas do campo magnético, mas qualquer movimento do fluido condutor, perpendicular às linhas de campo, as arrasta consigo.

E o teorema de Kelvin pode ser reinterpretado como sendo:

- O fluxo magnético em um caminho fechado, movendo-se com a velocidade do fluido \mathbf{u} , é constante.

Esses dois resultados são conhecidos como teorema de Alfvén.

2.2 MHD

2.2.1 Acoplamento do Eletromagnetismo com a Dinâmica dos fluidos

As equações que descrevem a dinâmica de um fluido newtoniano incompressível são dadas por [21]:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (2.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.57)$$

em que \mathbf{P} é a pressão, μ é a viscosidade dinâmica, \mathbf{u} é a velocidade do fluido e o operador $\rho \frac{D}{Dt}$ é conhecido como derivada material e é dado por:

$$\frac{D}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.58)$$

Para casos em que não exista uma condição de contorno para pressão, pode-se definir uma pressão modificada que englobe os efeitos gravitacionais. Desta feita:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.59)$$

A força eletromagnética (força de Lorentz) é uma força de campo, assim como a força gravitacional, de maneira que seu efeito pode ser diretamente incluído por meio de um termo adicional de força por unidade de volume:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (2.60)$$

em que ν é a viscosidade cinemática dada por $\frac{\mu}{\rho}$.

2.3 EQUAÇÕES MHD

O conjunto de equações que descrevem a magnetohidrodinâmica é uma combinação das equações de Navier-Stokes, com o termo da força de Lorentz e as equações de Maxwell. Como demonstrado nas seções anteriores, algumas considerações são feitas nas equações de Maxwell para o regime magnetohidrodinâmico.

Lei de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.61)$$

Continuidade da carga elétrica:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.62)$$

Lei de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.63)$$

Lei de Gauss para o campo magnético:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.64)$$

Lei de Ohm:

$$\mathbf{J} = k_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.65)$$

Força de Lorentz:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.66)$$

Equação do transporte magnético:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.67)$$

Equações de Navier-Stokes com o termo de Lorentz:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (2.68)$$

3 CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA COM EFEITOS MHD SOB UMA PLACA PLANA

3.1 CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA

Todos os desenvolvimentos feitos nessa seção foram feitos como auxílio das notas de aulas do curso de Mecânica dos Fluidos 2, do professor Dr. Francisco Ricardo Cunha [22]).

A camada limite pode ser definida como uma região delgada no escoamento, adjacente à superfície, em que a velocidade varia do valor 0 até a velocidade do escoamento livre.

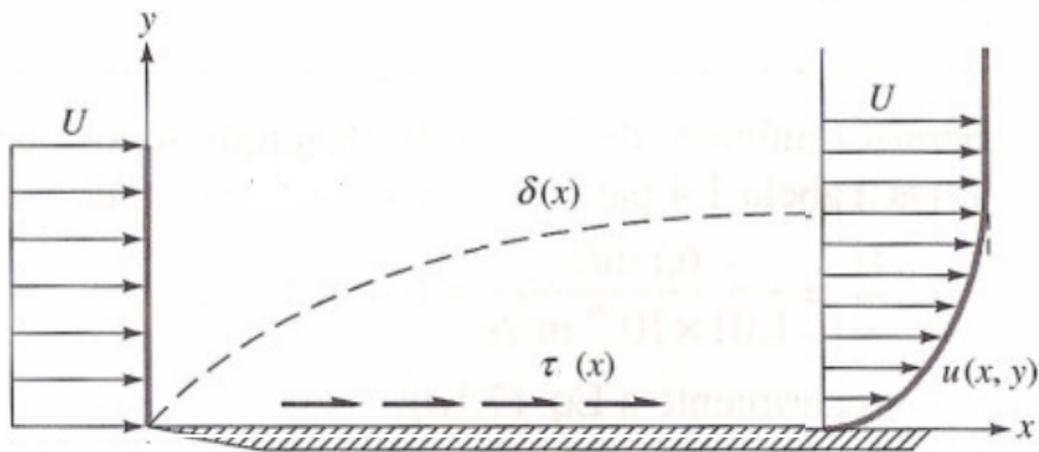


Figura 3.1: Esquema de camada limite hidrodinâmica reproduzido do livro-texto de [23]

Para o problema desse trabalho, concebe-se uma camada limite hidrodinâmica, laminar, bidimensional, incompressível e em regime permanente. Nesse caso as equações governantes se resumem a:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

Com o objetivo de simplificar as equações acima, faz-se a seguinte análise de escala:

$$l \rightarrow x$$

$$\delta \rightarrow y$$

$$U \rightarrow u$$

Considerando a hipótese de Prandtl, que é dada por:

$$\frac{\delta}{l} \ll 1$$

ou $\delta \ll l$

Parte-se à investigação das consequências no interior da camada limite: Considerando uma quantidade qualquer do escoamento denotada pela letra G e usando a análise de escala proposta, tem-se que:

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \sim \frac{G}{l} \quad (3.4)$$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| \sim \frac{G}{\delta} \quad (3.5)$$

Pela hipótese de Prandtl:

$$\frac{G}{\delta} \gg \frac{G}{l} \quad (3.6)$$

Com isso, conclui-se que as derivadas em relação a y são muito maiores que as na direção x . Ou seja, o transporte de momento por difusão na direção y domina o transporte na direção x .

Para adimensionalizar as equações de Navier-Stokes, precisamos definir uma forma para a componente y da velocidade V , com base nas variáveis adimensionais propostas. Para tal, faz-se necessário considerar a equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

A partir da equação da continuidade, realizando a análise de escala proposta, vemos que:

$$\frac{U}{l} \sim \frac{V}{\delta} \quad (3.8)$$

$$V \sim \frac{U\delta}{l} \quad (3.9)$$

Como $\frac{\delta}{l} \ll 1$, chega-se à conclusão que:

$$V \ll U \quad (3.10)$$

Logo:

$$U^2 \gg V^2$$

Da equação de Bernoulli para altos números de Reynolds:

$$P \sim (U^2 + V^2) \sim \rho U^2 \quad (3.11)$$

Voltando às equações de Navier-Stokes:

Na direção x temos:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

Analisando termo a termo da esquerda pra direita:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U^2}{l} \quad (3.13)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{VU}{l} = \frac{U^2 \delta}{l \delta} \sim \frac{U^2}{l} \quad (3.14)$$

Dispondo o resultado da equação (3.11) na equação (3.12), pode-se relacionar o termo de pressão da seguinte forma:

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \sim \frac{U^2}{l} \quad (3.15)$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{\nu U}{l^2} \quad (3.16)$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\nu U}{\delta^2} \quad (3.17)$$

Comparando os termos viscosos nas direções x e y e valendo-se da hipótese de Prandtl, pode-se concluir que:

$$\frac{\nu U}{l^2} \ll \frac{\nu U}{\delta^2} \quad (3.18)$$

Com isso, torna-se possível desconsiderar o termo $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Por definição a camada limite é a região em que os termos difusivos balanceiam os termos advectivos. Dessa forma, logra-se definir a espessura da camada limite:

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| \sim \left| \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \quad (3.19)$$

$$\frac{U^2}{l} \sim \frac{\nu U}{\delta^2} \quad (3.20)$$

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu l}{U}} \quad (3.21)$$

Alternativamente, há possibilidade de escrever a espessura da camada limite em termos do número de Reynolds global, que, por definição, é um número adimensional que avalia a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas e é dado por:

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} \quad (3.22)$$

Multiplicando e dividindo a equação (3.21) pelo comprimento característico l , e escrevendo-a em termos do número de Reynolds, obtém-se:

$$\frac{\delta}{l} \sim Re_l^{-1/2} \quad (3.23)$$

O resultado da equação (3.23) mostra-nos que para a camada limite o número de Reynolds tem que ser muito grande. Isso porque, se $\frac{\delta}{l} \ll 1$, a equação (3.23) impõe que o Re deve ser muito grande.

Na direção y temos:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U^2 \delta}{l^2} \quad (3.24)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U^2 \delta}{l^2} \quad (3.25)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \sim \frac{U^2}{\delta} \quad (3.26)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{\nu U \delta}{l^3} \quad (3.27)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\nu U}{\delta l} \quad (3.28)$$

Dividindo todos os termos pelo termo de pressão, começando pelo termo de inércia:

$$\frac{U^2 \delta}{l^2} \frac{\delta}{U^2} = \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 \quad (3.29)$$

Como $l \gg 1$, pode-se desprezar o termo de inércia com relação ao termo de pressão. Repetindo o processo para o termo viscoso, temos:

$$\frac{\nu U}{\delta l} \frac{\delta}{U} \sim \frac{\nu}{lU} \sim \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 \quad (3.30)$$

Analogamente ao caso anterior, pode-se desprezar o termo viscoso em relação ao termo de pressão. Com essa análise, conclui-se que o termo de pressão em Navier-Stokes domina o movimento completamente, ou seja:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3.31)$$

Conclui-se também que a pressão é constante na direção y e conseqüentemente:

$$P = P(x) \quad (3.32)$$

Como concluímos que a pressão não varia na direção y , podemos pegar qualquer ponto em y para descrever a pressão. Tendo em vista isso, vamos escolher um ponto fora da camada limite, já que nessa região podemos utilizar o resultado do escoamento potencial para o gradiente de pressão:

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.33)$$

Desse modo, as equações de Navier-Stokes do problema em tela são:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.36)$$

Com as seguintes condições de contorno:

O não deslizamento na parede, que é dado por:

$$u = v = 0 \quad (3.37)$$

Para $y = 0$.

E o fato de que na superfície da camada limite o perfil de velocidade só depende de x .

$$u(x, y) \rightarrow U \quad (3.38)$$

Para $y \rightarrow \infty$ (superfície da camada limite).

Podemos ainda escrever essa equação governante em termos da função de corrente Ψ , definida por:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (3.39)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.40)$$

Para facilitar os cálculos, consideremos, no primeiro momento, que a velocidade de corrente livre (U) é constante. Com essa simplificação e aplicando a definição de função de corrente na equação governante (3.34), temos que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (3.41)$$

3.1.1 Método de solução por similaridade

Para resolver o problema, vamos empregar o método de solução por similaridade, no intuito de escrever as equações diferenciais parciais em termos de uma única variável dependente, dita variável similar. Aqui chamaremos essa variável de η .

$$\eta(x, y) = \frac{y}{g(x)} \quad (3.42)$$

Em que $g(x)$ é uma função arbitrária que depende de x .

Tomando a diferencial de y , tem-se que:

$$dy = g(x)d\eta \quad (3.43)$$

Definindo a razão de velocidades u/U como uma função de η :

$$\frac{u}{U} = h(\eta) \quad (3.44)$$

Aplicando à equação (3.44), obtém-se que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = Uh(\eta) \quad (3.45)$$

Integrando em y :

$$\Psi(x, \eta) = \int_0^\eta Uh(\eta)dy \quad (3.46)$$

Substituindo a equação (3.43) em (3.46) temos:

$$\Psi(x, \eta) = Ug(x) \int_0^{\eta'} h(\eta)d\eta \quad (3.47)$$

Como $\int_0^\eta h(\eta)d\eta'$ é uma função de η , vamos chamá-lo de $f(\eta)$. Logo a equação (3.47) resta reescrita da seguinte forma:

$$\Psi(x, \eta) = Ug(x)f(\eta) \quad (3.48)$$

Com isso, encontramos as formas funcionais das variáveis de similaridade η e $f(\eta)$:

$$\eta(x, y) = \frac{y}{g(x)} \quad (3.49)$$

$$f(\eta) = \frac{\Psi(x, \eta)}{Ug(x)} \quad (3.50)$$

Agora basta-nos encontrar a função $g(x)$ por meio do processo de obter as derivadas da função de corrente adimensional:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u \left(\frac{dg}{dx} f(\eta) + g(x) \frac{df}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right) \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = g(x) U \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = g(x) U \frac{df}{d\eta} \frac{1}{g(x)} = U \frac{df}{d\eta} \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[U \frac{df}{d\eta} \right] \frac{d\eta}{dy} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{U}{g(x)} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right] \frac{d\eta}{dy} = \frac{d^3 f}{d\eta^3} \frac{U}{g(x)^2} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] = U \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{df}{d\eta} \right] \frac{d\eta}{dx} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{y}{g^2(x)} \frac{dg}{dx} \quad (3.56)$$

Como $y = \eta g(x)$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -U \frac{\eta}{g(x)} \frac{dg}{dx} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U \left(\frac{dg}{dx} f(\eta) + g(x) \frac{df}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right) = U \left(\frac{dg}{dx} f(\eta) - g(x) \frac{df}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right) = \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U \left(\frac{dg}{dx} f(\eta) - y \frac{df}{d\eta} \frac{1}{g(x)} \frac{dg}{dx} \right) = U \left(f(\eta) - \eta \frac{df}{d\eta} \right) \frac{dg}{dx} \quad (3.59)$$

Substituindo Ψ e suas derivadas em (3.90), tem-se que:

$$U \frac{df}{d\eta} \left[-U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{y}{g^2(x)} \frac{dg}{dx} \right] - U \left(f - \eta \frac{df}{d\eta} \right) \frac{dg}{dx} \left[\frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{U}{g(x)} \right] = \nu \frac{d^3 f}{d\eta^3} \frac{U}{g^2(x)} \quad (3.60)$$

Isolando o termo da derivada terceira, tem-se que:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} = -\frac{1}{\nu} \left(U g \frac{dg}{dx} \right) \left[\eta \frac{df}{d\eta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \left(f(\eta) - \eta \frac{df}{d\eta} \right) \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right] \quad (3.61)$$

Para admitir similaridade, o termo $\frac{1}{\nu} \left(U g \frac{dg}{dx} \right)$ tem que ser constante. Por conveniência, assumiremos que esse termo é igual a 1/2.

Com isso foi possível obter que o parâmetro $g(x)$ é igual a:

$$g(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (3.62)$$

Com isso, tem-se que:

$$\eta(x, y) = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U}} \quad (3.63)$$

E, conseqüentemente:

$$f(\eta) = \frac{\Psi(x, \eta)}{\sqrt{\nu x U}} \quad (3.64)$$

3.1.2 Tensão de cisalhamento

A tensão de cisalhamento sobre a placa a uma distância x do bordo de ataque é dada por:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.65)$$

Usando a definição de função de corrente, sabe-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{U}{g(x)} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{U}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}} \quad (3.66)$$

Substituindo (3.66) em (3.65), tem-se que:

$$\tau_{x\eta}|_{\eta=0} = \rho U^2 \frac{d^2 f(0)}{dx^2} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \quad (3.67)$$

Pode-se ainda escreve-la em termos do número de Reynolds:

$$\tau_{x\eta}|_{\eta=0} = \rho U^2 Re_x^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f(0)}{dx^2} \quad (3.68)$$

3.1.3 Coeficientes de arrasto

O arrasto exercido sobre os dois lados de uma placa de largura unitária e comprimento l é dado por:

$$D = 2 \int_0^l \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (3.69)$$

Em termos da variável similar η , tem-se que:

$$D = 2\rho U^2 \int_0^l \frac{d^2 f(0)}{dx^2} \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} dx \quad (3.70)$$

Resolvendo a integral:

$$D = 4\rho U^2 l \frac{d^2 f(0)}{dx^2} \sqrt{\frac{\nu}{Ul}} \quad (3.71)$$

Em termos do número de Reynolds:

$$D = 4\rho U^2 l Re_l^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f(0)}{dx^2} \quad (3.72)$$

Vamos adimensionalizar a força de arrasto para obter um coeficiente de arrasto adimensional:

$$C_D = \frac{D}{\rho U^2 l} = 4Re_l^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f(0)}{dx^2} \quad (3.73)$$

O coeficiente C_D é conhecido como coeficiente de arrasto global, mas é possível também definir um coeficiente de fricção como sendo :

$$C_f = \frac{\tau_{x\eta}}{\rho U^2 / 2} = 2Re_x^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 f(0)}{dx^2} \quad (3.74)$$

3.1.4 Descolamento da camada limite

Sabendo que na parede (superfície da placa plana) as velocidades são zero, e considerando um gradiente de pressão, nessa região tem-se que:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.75)$$

Percebe-se que o perfil de velocidade na região imediatamente sobre a parede é função apenas da pressão. Assim, o gradiente de pressão favorável ($\frac{\partial P}{\partial x} < 0$), implica em ($\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$) ao longo de toda a camada limite. Contudo, no caso em que o gradiente de pressão é adverso ($\frac{\partial P}{\partial x} > 0$), implica em existir um ponto em que ($\frac{\partial u}{\partial y} = 0$), ou seja um ponto de inflexão. Fisicamente esse ponto de inflexão nos mostra que existirá uma região na qual a camada limite pode descolar devido ao efeito desse gradiente de pressão.

3.1.5 Problema de Blasius

Com as variáveis de similaridade definidas, é viável escrever diversas configurações de camada limite, em termos dessas variáveis. Primeiramente, considerando o caso mais simples, em que a velocidade de corrente livre é constante (i.e. ausência do gradiente de pressão), a equação que descreve esse escoamento é dada por:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (3.76)$$

Escrevendo a equação (3.76) em termos das variáveis de similaridade η e $f(\eta)$, tem-se que:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f(\eta) \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (3.77)$$

Lembrando que $f'(\eta) = h(\eta) = \frac{u}{U}$.

Observando a forma funcional de η , percebe-se que y e η têm uma relação direta, quando $y = 0$ e $\eta = 0$, bem como, quando $y \rightarrow \infty$ e $\eta \rightarrow \infty$. Logo, as condições de contorno ficam da seguinte forma:

A condição de contorno de não deslizamento se torna:

quando $\eta = 0$, $f(\eta) = f'(\eta) = 0$

E a condição na superfície da camada limite $u \rightarrow U$ se torna:

$f'(\eta) = 1$ quando $\eta \rightarrow \infty$

Logo, as condições de contorno a serem satisfeitas são:

$$\begin{cases} f(\eta) = f'(\eta) = 0 \text{ para } \eta = 0 \\ f'(\eta) = 1 \text{ para } \eta = \infty \end{cases} \quad (3.78)$$

Essa equação é conhecida como equação de Blasius, em homenagem ao engenheiro alemão Paul Richard Heinrich Blasius, que foi o primeiro a resolver esse problema em 1908.

3.1.6 Solução da equação de Blasius por série de potências

Blasius obteve uma solução por série expandindo $f(\eta)$ em uma série infinita na forma:

$$f(\eta) = \sum_0^{\infty} \frac{A_k \eta^k}{k!} \quad (3.79)$$

em que A_k são coeficientes constantes determinados pelas condições de contorno.

Das condições $f(\eta) = 0$ e $f'(\eta) = 0$, encontramos que $A_0 = 0$ e $A_1 = 0$. Substituindo esses resultados e escrevendo a equação de Blasius em termos da série (3.79), podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$A_3 + A_4 \eta + (A_2^2 + 2A_5) \frac{\eta^2}{2!} + (4A_2 A_3 + 2A_6) \frac{\eta^3}{3!} + \dots = 0 \quad (3.80)$$

Analisando a série (3.80) vemos que todos os coeficientes são 0, com exceção dos A_2 , A_5 , A_8 e etc. Ademais, percebe-se que esses podem ser escritos em termos de A_2 , com isso temos a seguinte série resultante:

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{A_2^{n+1} C_n}{(3n+2)!} \eta^{3n+2} \quad (3.81)$$

Todos os termos C_n podem ser obtidos comparando a série (3.81) e a série (3.79), de forma que temos os valores das constantes C_n :

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = 1 \\ C_2 = 11 \\ C_3 = 375 \\ C_4 = 27897 \end{cases} \quad (3.82)$$

Agora, basta-nos encontrar o valor de A_2 para resolver o problema, para isso vamos usar a condição de contorno $f'(\eta) = 1$ para $\eta = \infty$, logo:

$$A_2 = 0.332 \quad (3.83)$$

3.1.7 Camada limite com desaceleração da corrente livre

Agora, vamos considerar um caso mais geral, em que a velocidade de corrente livre possui uma dependência em x no formato de uma lei de potência da seguinte forma:

$$U(x) = cx^m \quad (3.84)$$

Nesse caso, o termo do gradiente de pressão não pode ser desprezado, pois a velocidade de corrente livre possui uma dependência em x . Consequentemente, as equações governantes do escoamento passam a apresentar a forma mais geral, dada por:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.86)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = U \frac{dU}{dx} \quad (3.87)$$

Agora, para estudar a solução desse escoamento de camada limite com o efeito do gradiente de pressão, deve-se usar como antes a variável similar η e $f(\eta)$. Funções estas que definem o espaço adimensional de similaridade. Novamente temos:

$$\eta(x, y) = \frac{y}{\sqrt{\nu x / U}} \quad (3.88)$$

$$\Psi(x, \eta) = \sqrt{\nu x U} f(\eta) \quad (3.89)$$

reescrevendo a equação governante em termos da função de corrente, tem-se que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = c^2 m x^{2m-1} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (3.90)$$

As derivadas da função de corrente adimensional são bastante similares ao caso de Blasius (em que a velocidade de corrente livre é constante), com exceção dos seguintes termos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u \frac{df}{d\eta} \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{df}{d\eta} \right] \frac{d\eta}{dy} = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{U}{\sqrt{\nu x/U}} \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right] \frac{d\eta}{dy} = \frac{d^3 f}{d\eta^3} \frac{U}{\nu x/U} \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{y}{2} \left[\frac{m c x^{m-1}}{\sqrt{\nu U x}} - \frac{1}{x} \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} \right] \quad (3.94)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \sqrt{\nu x U} \frac{df}{d\eta} \frac{y}{2} \left[\frac{m c x^{m-1}}{\sqrt{\nu U x}} - \frac{1}{x} \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} \right] + \frac{f \nu c (m+1) x^m}{2 \sqrt{\nu U x}} \quad (3.95)$$

Substituindo as equações (3.91), (3.92), (3.93), (3.94) e (3.95), e fazendo algumas simplificações, obtém-se a seguinte equação:

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' - m f'^2 + m = 0 \quad (3.96)$$

Em que $f' = \frac{df}{d\eta}$.

Com as condições de contorno:

$$\begin{cases} f(\eta) = f'(\eta) = 0 \text{ para } \eta = 0 \\ f'(\eta) = 1 \text{ para } \eta = \infty \end{cases} \quad (3.97)$$

É importante observar que quando $m = 0$ o problema se reduz ao problema de Blasius, com a equação (3.96) se reduzindo a equação (3.77).

3.2 CAMADA LIMITE MAGNETOHIDRODINÂMICA

A camada limite magnetohidrodinâmica tem o mesmo significado que a hidrodinâmica, mas é considerada quando o fluido em escoamento é condutor. Esse fluido condutor pode ser um fluido naturalmente condutor, como um metal líquido ou um fluido tradicional que passou por um processo de ionização. No caso de um veículo se movendo a uma alta velocidade, por exemplo, o calor gerado pelo atrito do veículo e o fluido faz com que as partículas desse sejam ionizadas, transformando-o, assim, em um fluido condutor.

Todos os conceitos desenvolvidos nessa seção têm fundamentação nas Notas do Curso de Fundamentos de Magnetohidrodinâmica [20].

3.2.1 Camada de Hartmann

Para investigar com precisão o efeito do campo magnético, estudaremos um caso em que um escoamento magnetohidrodinâmico está sob a influência de um campo magnético transversal ($\mathbf{B} = B\hat{y}$), e que os termos advectivos da equação de movimento existam puramente por efeitos magnéticos. A equação governante desse problema é dada por:

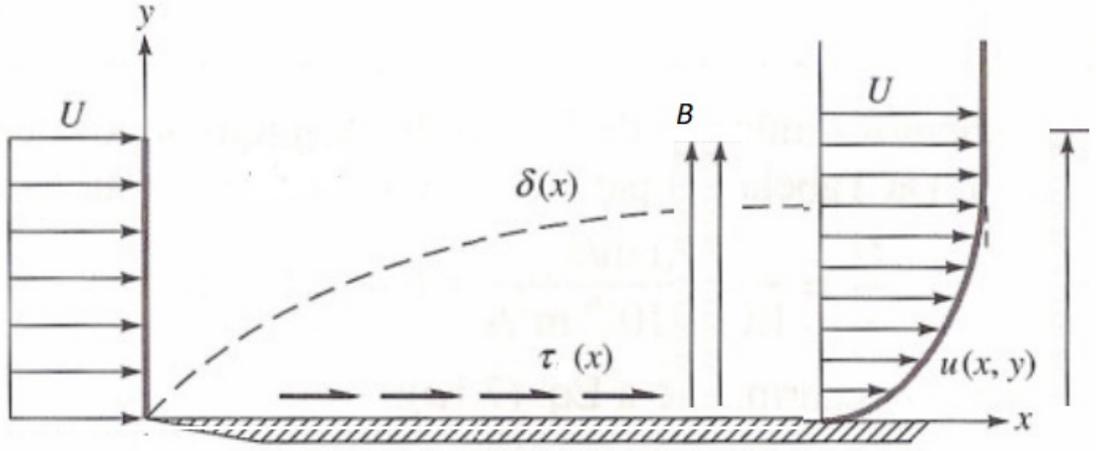


Figura 3.2: Esquema de camada limite magnetohidrodinâmica adaptado do livro-texto de [23]

Para o problema desse trabalho, concebe-se uma camada limite magnetohidrodinâmica, laminar, bi-dimensional, incompressível e em regime permanente. Nesse caso as equações governantes se reduzem a:

$$\rho\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_x = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.98)$$

Portanto, faz-se necessário apenas definir o termo $(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_x$, calculando a densidade de corrente \mathbf{J} :

$$\mathbf{B} = B_0\hat{y} \quad (3.99)$$

$$\mathbf{J} = k_e\mathbf{u} \times \mathbf{B} = k_e u B_0\hat{z} \quad (3.100)$$

Em que k_e é a condutividade elétrica. Com isso, a força de Lorentz é dada por:

Ademais:

$$\mathbf{F} = -k_e u B^2\hat{x} \quad (3.101)$$

È importante ressaltar que a força de Lorentz é contrária à direção de movimento do fluido, podendo inclusive desacelera-lo.

Logo, as equações governantes do problema são:

$$\rho\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k_e B_0^2 u = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3.103)$$

Pela definição de camada limite, sabe-se que os termos advectivos são balanceados pelos termos difusivos, dessa forma:

$$\left| \rho\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \sim |k_e B_0^2 u| \quad (3.104)$$

Com isso, é possível estimar a espessura da camada limite, que, nesse caso, leva o subíndice h em referencia ao Dr. Julius Hartmann, que foi o primeiro a investigar esse tipo de escoamento.

$$\delta_h^2 \sim \frac{\rho\nu}{k_e B_0^2} \quad (3.105)$$

Dividindo os dois lados pelo comprimento característico ℓ :

$$\frac{\delta_h}{\ell} \sim \left(\frac{\rho\nu}{k_e B_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ell} \sim \frac{1}{H_a} \quad (3.106)$$

Em que H_a é o número de Hartmann, dado por:

$$H_a = \left(\frac{k_e}{\rho\nu} \right)^{\frac{1}{2}} B_0 \ell \quad (3.107)$$

$$f_m \sim k_e B_0^2 U \quad (3.108)$$

$$f_v \sim \rho \frac{\nu U}{\ell^2} \quad (3.109)$$

Por analogia ao caso hidrodinâmico, define-se a razão entre as forças magnéticas e as forças viscosas como:

$$\frac{f_m}{f_v} = \frac{k_e B_0^2 U}{\rho \frac{\nu U}{\ell^2}} = \frac{k_e \ell^2 B_0^2}{\mu} = Re_m \quad (3.110)$$

Em que Re_m é conhecido como o número de Reynolds magnético. Frisa-se que é viável relacionar esse número como o número de Hartmann da seguinte forma:

$$H_a = \sqrt{Re_m} \quad (3.111)$$

Ademais, é possível definir a razão entre as espessuras das camadas limites de Hartmann e de hidrodinâmica em termos dos números adimensionais:

$$\frac{\delta_h}{\delta} \sim \frac{H_a}{\sqrt{Re}} \sim \sqrt{\frac{Re_m}{Re}} \quad (3.112)$$

Em geral, trabalha-se com um parâmetro adimensional de interação magnética (I_g), que facilita a visualização do efeito magnético no escoamento MHD. Esse parâmetro é definido como a razão entre os números de Reynolds magnético e hidrodinâmico:

$$\left(\frac{\delta_h}{\delta}\right)^2 \sim \frac{H_a^2}{Re} \sim \frac{Re_m}{Re} \sim \frac{k_e B_0^2 \ell}{\rho U} \sim I_g \quad (3.113)$$

Dividindo a equação (3.102) por $\rho\nu$ e usando a definição da espessura de Hartmann:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{u}{\delta_h^2} = \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.114)$$

Como a pressão não varia com y , a pressão fora da camada limite é igual à pressão na camada limite. Partiremos, então, a analisar a pressão quando $u = U$, com a equação governante reduzida à:

$$-\frac{U}{\delta_h^2} = \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.115)$$

Usando o resultado obtido na equação (3.115) na equação governante (3.114), tem-se que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{u}{\delta_h^2} + \frac{U}{\delta_h^2} = 0 \quad (3.116)$$

Como U é uma constante em relação a y , pode-se escrever a equação (3.116) da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - U) - \frac{(u - U)}{\delta_h^2} = 0 \quad (3.117)$$

Como isso, tem-se que a velocidade no caso em tela é de:

$$u(y) = U(1 - e^{-y/\delta_h}) \quad (3.118)$$

Analisando a solução dada na equação (3.118), percebe-se que y e δ_h estão relacionados por uma relação exponencial, deixando claro que a velocidade no interior da camada limite se aproxima da velocidade de corrente livre muito mais rápido do que em uma camada limite puramente hidrodinâmica. Portanto, esse resultado nos mostra que pode ser utilizado um campo magnético externo para alterar o perfil de velocidades no interior da camada limite em questão.

3.3 SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE CAMADA LIMITE MHD

Tendo definido os números adimensionais relevantes na seção anterior, agora consideraremos um caso mais geral que envolve tanto um campo magnético mais geral, quanto termos de transporte hidrodinâmico advectivos e difusivos. Então, vamos examinar o seguinte campo magnético:

$$B = B(x, y)\hat{x} + B_0\hat{y} \quad (3.119)$$

Para contabilizar a influência desse campo magnético no escoamento da camada limite MHD, precisaremos da equação do transporte magnético:

$$B_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \nu_m \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} = 0 \quad (3.120)$$

Em que ν_m é a viscosidade cinemática magnética, dada por: $\nu_m = (\mu_0 k_e)^{-1}$.

E da Lei de Ampere, obtém-se que:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = B_0 \frac{\partial B_x}{\partial y} \hat{x} - B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} \hat{y} \quad (3.121)$$

Integrando a equação (3.120) em y :

$$B_0 u + \nu_m \frac{\partial B_x}{\partial y} + c = 0 \quad (3.122)$$

Com a condição de que na parede a velocidade é 0, e o campo magnético é 0, tem-se que $c = 0$.

Da equação (3.122), tem-se que:

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{B_0 u}{\nu_m} \quad (3.123)$$

Substituindo na lei de Ohm:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{B_0^2 u}{\nu_m} \hat{x} + B_x \frac{B_0^2 u}{\nu_m} \hat{y} \quad (3.124)$$

Com isso, torna-se possível escrever as equações governantes do problema das seguintes formas:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k_e \frac{B_0^2 u}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.125)$$

$$\frac{1}{\rho \mu_0} \frac{B_0 B_x u}{\nu_m} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3.126)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.127)$$

Analisando essas equações governantes, vemos que o termo B_x nos leva a um problema totalmente diferente dos casos anteriores, pois a pressão não é mais constante na direção y , então não é mais possível

utilizar a apenas a equação de Euler para definir uma forma para a pressão que dependa somente da velocidade de corrente livre e da sua derivada.

Vamos usar as mesmas considerações sobre a velocidade de corrente livre da seção anterior, mas agora exploraremos a influência do campo magnético nesses dois casos.

3.3.1 Problema de Blasius no contexto MHD

Como feito anteriormente, consideraremos que a velocidade de corrente livre é constante, o que implica que não teremos a presença do termo de pressão. Como nesse trabalho pretendemos simular uma placa plana com um campo magnético fixo a ela, esse campo magnético não pode existir infinitamente na direção y , pois não corresponderia a um problema real, causando inclusive problemas nas condições de contorno, pois em $y = \infty$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -k_e \frac{B_0^2}{\rho}$, logo fora da camada limite $\frac{\partial v}{\partial y} = k_e \frac{B_0^2}{\rho}$, portanto, $v \rightarrow \infty$ quando $y \rightarrow \infty$. Logo vamos considerar que o campo magnético se estenda apenas nas vizinhanças da superfície da placa plana, que é bem razoável pois esse campo magnético é gerado por um um circuito, e o mesmo decai rapidamente com a distancia.

Logo, as equações governantes do nosso problema são dadas por:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -k_e \frac{B_0^2 u}{\rho} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.129)$$

De modo a obter uma equação governante mais conveniente, introduziremos a função de corrente na seguinte forma:

$$\Psi(x, y) = f(x, \eta) \sqrt{\nu U x} \quad (3.130)$$

Em que

$$\eta = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} y \quad (3.131)$$

Usando as transformações de similaridade nas equações governante, temos que:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' - I f' = 0 \quad (3.132)$$

Em que I é o parâmetro adimensional de interação magnética local, que é dado por $I = \frac{k_e B_0^2 x}{\rho U}$, e as condições de contorno a serem satisfeitas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\eta) = f'(\eta) = 0 \text{ para } \eta = 0 \\ f'(\eta) = 1 \text{ para } \eta = \infty \end{array} \right. \quad (3.133)$$

É importante salientar que quando fazemos $I = 0$ recuperamos a EDO do problema de Blasius para

um fluido Newtoniano não condutor:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (3.134)$$

3.3.2 Camada limite MHD com desaceleração da corrente livre

Agora, consideraremos um caso mais geral que se baseia em um perfil de velocidade variável $U = cx^m$ e um campo magnético na forma $B_y = B_0x^{(m-1)/2}$. Para isso, levaremos em conta um gradiente de pressão atuando ao longo da direção x , logo:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k_e \frac{B_0^2 u}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.135)$$

quando $u \rightarrow U$, temos:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -k_e \frac{B_0^2 U}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.136)$$

Substituindo a equação (3.136) na equação (3.135) podemos obter as equações governantes do problema da seguinte forma:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} - k_e \frac{B_0^2}{\rho} (u - U) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.137)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.138)$$

Analisando a (3.137) vemos que esse problema representa um escoamento magnetohidrodinâmico, na presença de um gradiente de pressão, em que a placa possui um movimento relativo a direção do fluxo.

Nesse caso, vamos propor a variável similar η da seguinte forma:

$$\eta = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} y \quad (3.139)$$

Dessa maneira a função de corrente é dada por:

$$\sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{\Psi}{\sqrt{\nu x U}} = f(\eta) \quad (3.140)$$

Repetindo o procedimento feito na seção (3.1.7), chegamos a seguinte equação governante em termos da variável similar $f(\eta)$:

$$f''' + ff'' + \frac{2m}{m+1}(1 - f'^2) - M^2(f' - 1) = 0 \quad (3.141)$$

Em que o $M^2 = \frac{2k_e B_0^2}{\rho c(1+m)}$ e está relacionado ao número de interação magnética local da seguinte forma:

$$M^2 = I \quad (3.142)$$

E as condições de contorno a serem satisfeitas são:

$$\begin{cases} f(\eta) = f'(\eta) = 0 \text{ para } \eta = 0 \\ f'(\eta) = 1 \text{ para } \eta = \infty \end{cases} \quad (3.143)$$

4 IMPLEMENTAÇÃO DA METODOLOGIA NUMÉRICA

Para a integração numérica do problema de camada limite examinado no presente trabalho , as equações diferenciais de terceira ordem são decompostas em três equações diferenciais de primeira ordem do seguinte modo:

$$\begin{cases} f' = w \\ f'' = v = w' \\ f''' = v' \end{cases} \quad (4.1)$$

Com as condições iniciais:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = k \end{cases} \quad (4.2)$$

em que k é um uma condição inicial a ser encontrada. Para a resolução numérica desse problema foi usado o Matlab.

4.1 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Para resolução do sistema acima, utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Esse método consiste em comprar um polinômio de Taylor de quarta ordem para eliminar o cálculo das derivadas e é comumente utilizado para resolver equações diferenciais ordinárias em problemas de valor inicial. Desta feita:

Seja um problema de valor inicial especificado como:

$$y' = f(t, y) \quad (4.3)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (4.4)$$

Então o método Runge-Kutta de quarta ordem para este problema é dado pelas seguintes equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.5)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (4.6)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (4.7)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + k_1 \frac{h}{2}\right) \quad (4.8)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + k_2 \frac{h}{2}\right) \quad (4.9)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3 h) \quad (4.10)$$

em que k_1, k_2, k_3 e k_4 são as inclinações em diferentes pontos do intervalo e h é o tamanho do intervalo. O erro desse método é dado por $e \simeq kh^5$, no presente trabalho o passo de integração foi de $h = 0,01$.

Observa-se que este método utiliza as informações do ponto precedente, mas como no problema em tela não há a informação sobre $f''(\eta)$ em $\eta = 0$, foi necessário utilizar um método de refinamento para transformar o problema em um de valor inicial. O método de refinamento utilizado foi o método do tiro.

4.2 MÉTODO DO TIRO

Esse método consiste em estimar um valor desconhecido do problema, de forma a torná-lo um problema de valor inicial e integrá-lo pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. No caso do problema em discussão, foi estimado $f''(\eta)$ em $\eta = 0$ e integrado, encontrando um valor para $f'(\eta) = w$ em $\eta = \infty$. Enquanto o valor de $f'(\eta)$ foi diferente do valor no contorno, uma nova estimativa para $f''(\eta)$ foi feita utilizando o método de Newton-Raphson.

4.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Esse método consiste em, dada uma estimativa inicial para a raiz x_n , a próxima estimativa x_{n+1} será dada pela tangente da curva no ponto x_n . Ou seja:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.11)$$

O cálculo da derivada $f'(x_n)$ foi feito usando novamente o método de Runge-Kutta.

4.4 ALGORITMO DO PROGRAMA

- 1º Passo - Estimar o valor de f'' em $\eta = 0$.
- 2º Passo - Integrar o problema de valor inicial usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.
- 3º Passo - Comparar o resultado de $f'(\eta \rightarrow \infty)$ obtido na integração com a condição de contorno que se conhece.

- 4º Passo - Se $|1 - f'(\eta \rightarrow \infty)| < Tol$, na qual a tolerância imposta é de $O(10^{-6})$, imprimir os resultados e parar.
- 5º Passo - Caso contrário, incrementar f'' de um $\delta f''$, resolver o problema de valor inicial para determinar $F(f'' + \delta f'')$ da forma:

$$|F(f'')'| = \frac{F(f'' + \delta f'') - F(f'')}{\delta f''},$$

- 6º Passo - Utilizar o método de Newton-Raphson para calcular o novo f'' como:

$$f''_{novo} = f''_{velho} - \frac{F(f''_{velho})}{F'(f''_{velho})},$$

- 7º Passo - Retornar ao passo 2.

No presente trabalho o infinito foi tratado como o valor 7, pois como $f'(\eta) = \frac{u}{U}$, a velocidade de corrente livre sempre atinge o valor da velocidade do escoamento interno antes de $\eta = 7$.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Inicialmente, o código numérico desenvolvido nesse trabalho é validado para o caso de um fluido não condutor (problema clássico de camada limite laminar), usando a solução em série de potências proposta por Blasius, que foi mostrada na seção (3.1.6).

Solução da Equação de Blasius

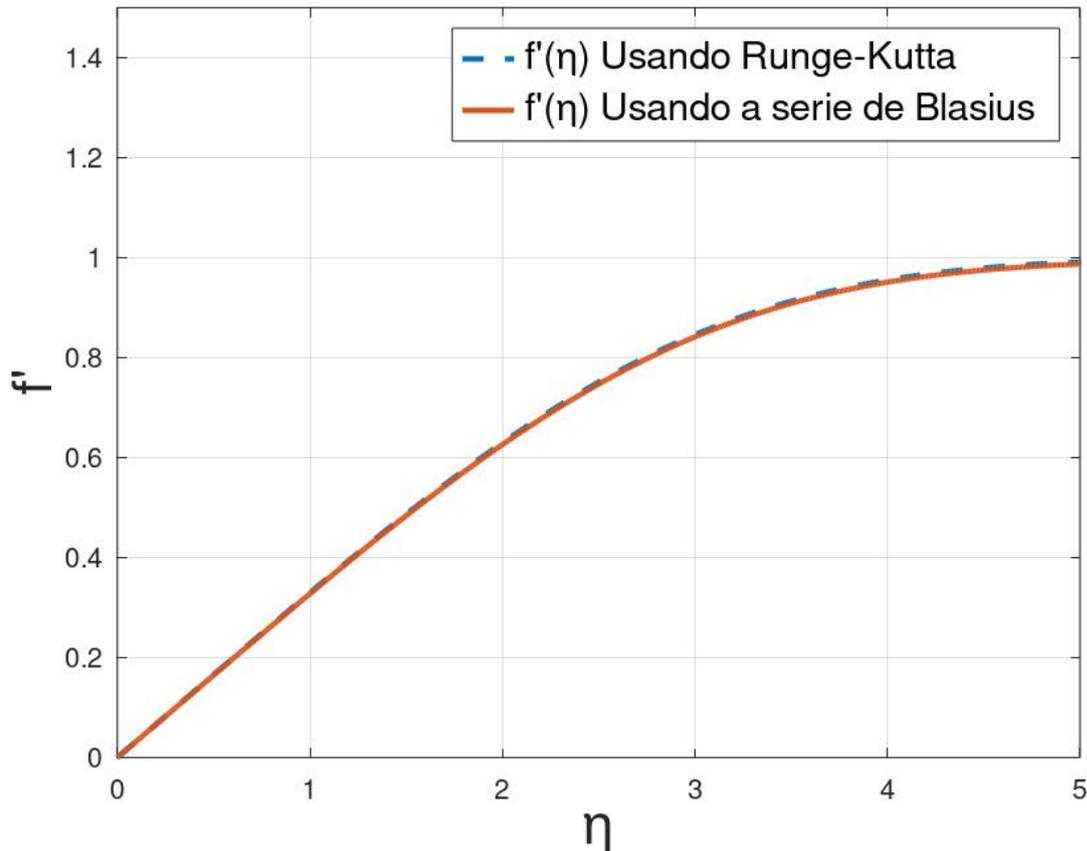


Figura 5.1: Comparação entre a solução numérica desenvolvida nesse trabalho e a solução analítica em termos de série de potência desenvolvida por Blasius

A Figura (5.1) mostra uma comparação entre o perfil de velocidades obtido numericamente utilizando os métodos propostos nesse trabalho e a solução analítica em termos de série de potências proposta por Blasius (que foi apresentada na seção (3.1.6) por meio da equação (3.81)). Essa Figura nos revela que existe uma excelente convergência entre as duas metodologias de resolução, aumentando a credibilidade da solução numérica proposta.

5.1 PROBLEMA DE BLASIUS MHD

Os problemas das seções (3.1.5) e (3.3.1) foram resolvidos em conjunto, uma vez que quando $I = 0$, eles se tornam o mesmo problema. Como já demonstrado anteriormente, esse problema é dado por:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' - If' = 0 \quad (5.1)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} f(\eta) = f'(\eta) = 0 \text{ para } \eta = 0 \\ f'(\eta) = 1 \text{ para } \eta = \infty \end{cases} \quad (5.2)$$

Visando à aplicação do método de Runge-Kutta, foi necessária a decomposição da EDO principal (5.1), em um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem, de acordo com:

$$\begin{cases} f'(\eta) = w \\ f''(\eta) = w' = v \\ f'''(\eta) = v' = -\frac{1}{2}fv + Iw \end{cases} \quad (5.3)$$

5.1.1 Validação do método numérico usado para o problema de Blasius com efeitos MHD

Para validar a metodologia usada nesse trabalho para pequenos valores de I , desde que diferentes de zero, vamos comparar os resultados obtidos aqui com os resultados disponíveis em [24]. Rossow em 1957 mostra que o coeficiente de fricção para um escoamento MHD sobre uma placa plana com um campo magnético fixo à placa e transversal a ela é dado por:

$$C_{fx}Re^{1/2} \simeq 0,664 - 1,789I + 0,706I^2 \quad (5.4)$$

Conforme mostrado na seção (3.1.2), o coeficiente de fricção para esse trabalho é obtido da seguinte forma:

$$C_{fx}Re^{1/2} = 2f''(0) \quad (5.5)$$

Comparando os resultados para o coeficiente de fricção, obtidos utilizando o método numérico proposto nesse trabalho em função de I , com a equação (5.4) para os mesmo valores de I , temos:

Comparação entre os métodos usando o coeficiente de fricção

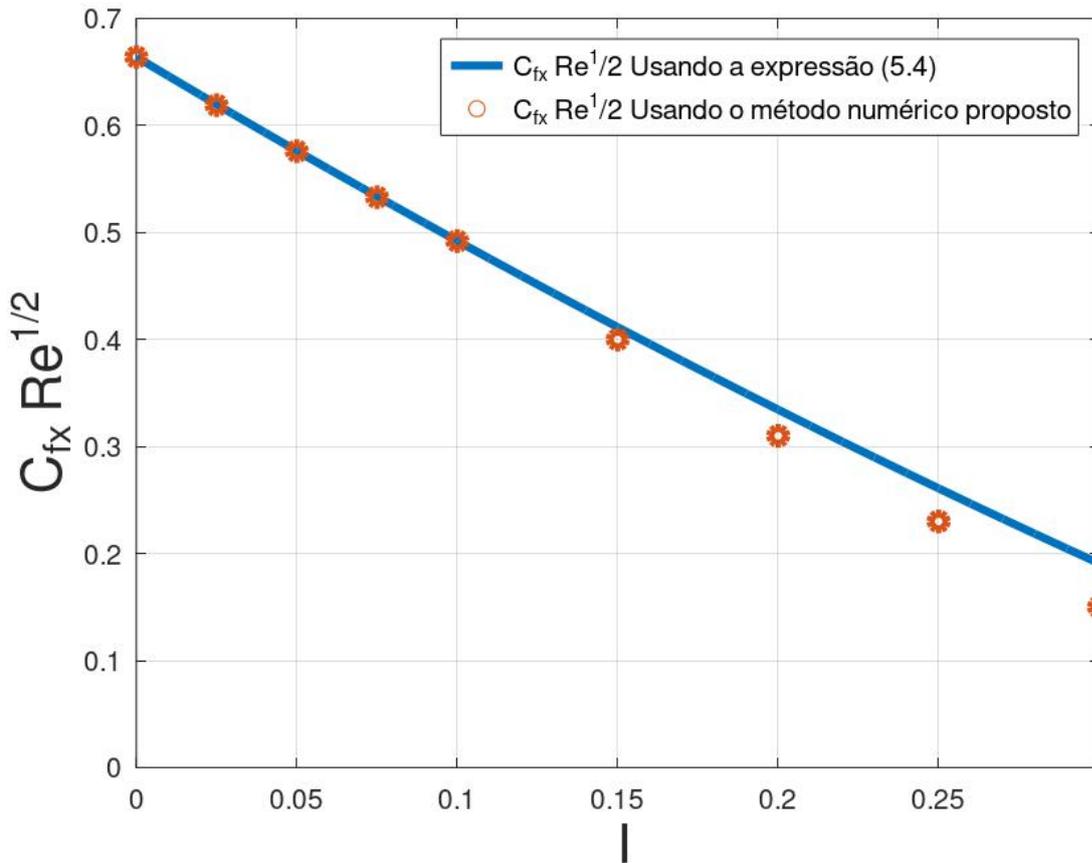


Figura 5.2: Comparação entre os coeficientes de fricção em relação ao parâmetro de interação magnética local I obtidos no trabalho e propostos pela equação (5.4)

A Figura (5.2) nos revela que, para valores menores de $I = 0, 1$, a solução proposta está de acordo com a equação (5.4), mostrando um erro relativo insignificante (i.e. menor que 1%). Para valores maiores que $I = 0, 1$, percebe-se que existe um aumento do erro entre as duas metodologias, o que pode ser devido ao fato de que para valores maiores de I , os termos de ordem superior da equação (5.4) se tornam relevantes e não podem ser desprezados.

5.1.2 Solução do problema de Blasius com efeitos MHD

Para investigar o efeito do campo magnético no interior da camada limite, o sistema de equações (5.3) foi resolvido para os casos em que $I = 0$, $I = 0,02$ e $I = 0,05$.

Solução da Equação de Blasius

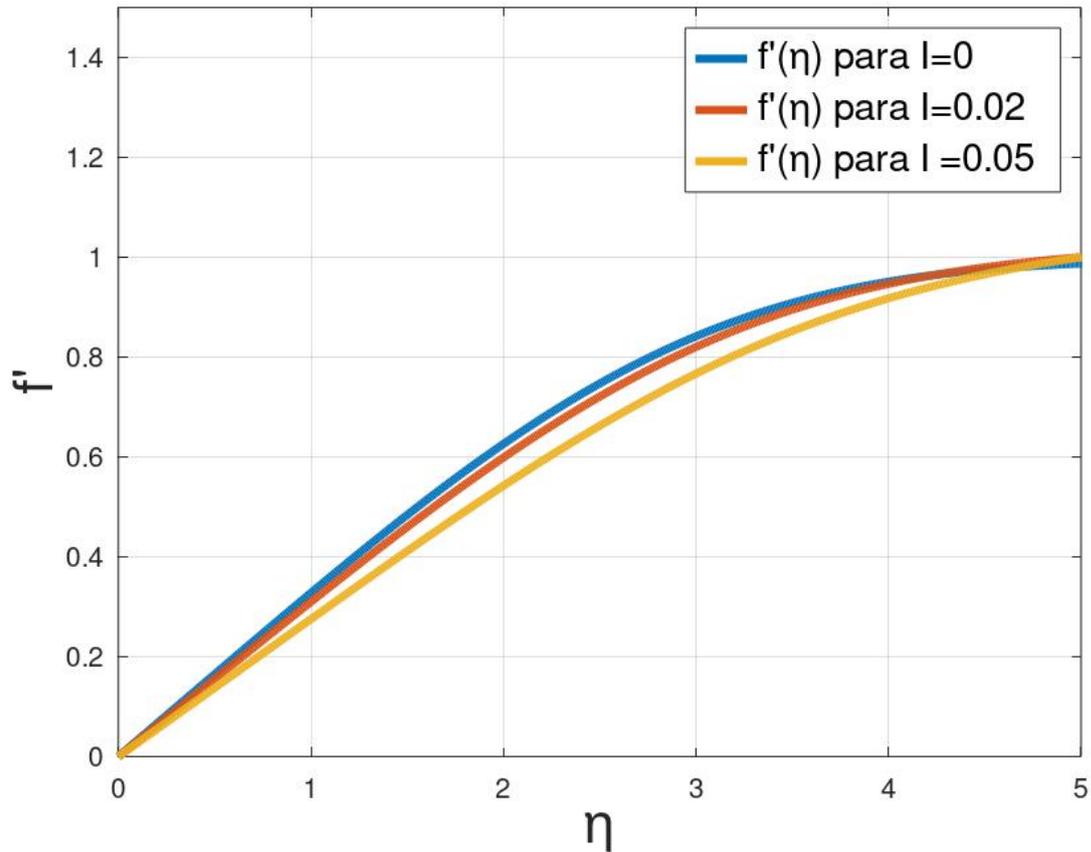


Figura 5.3: Solução da equação de Blasius com efeitos MHD, para os parâmetros de interação magnética $I = 0$, $I = 0,02$ e $I = 0,05$.

A Figura (5.3) fornece a solução da equação governante em termos das variáveis de similaridade. Pode-se observar que as condições de contorno foram satisfeitas, pois quando $\eta \rightarrow \infty$, vemos que $f' \rightarrow 1$. Ou, em termos das variáveis originais, a velocidade tende à velocidade de corrente livre quando $y \rightarrow \infty$ (superfície da camada limite). Observa-se também que o aumento do parâmetro de interação magnético local I acarreta uma desaceleração do escoamento no interior da camada limite, uma vez que $f' = u/U$, uma inclinação mais sutil da curva de f' nos diz que u (que é a velocidade do escoamento interno a camada limite) demora mais para alcançar a velocidade de corrente livre U , evidenciando assim uma desaceleração.

Espessura da camada limite

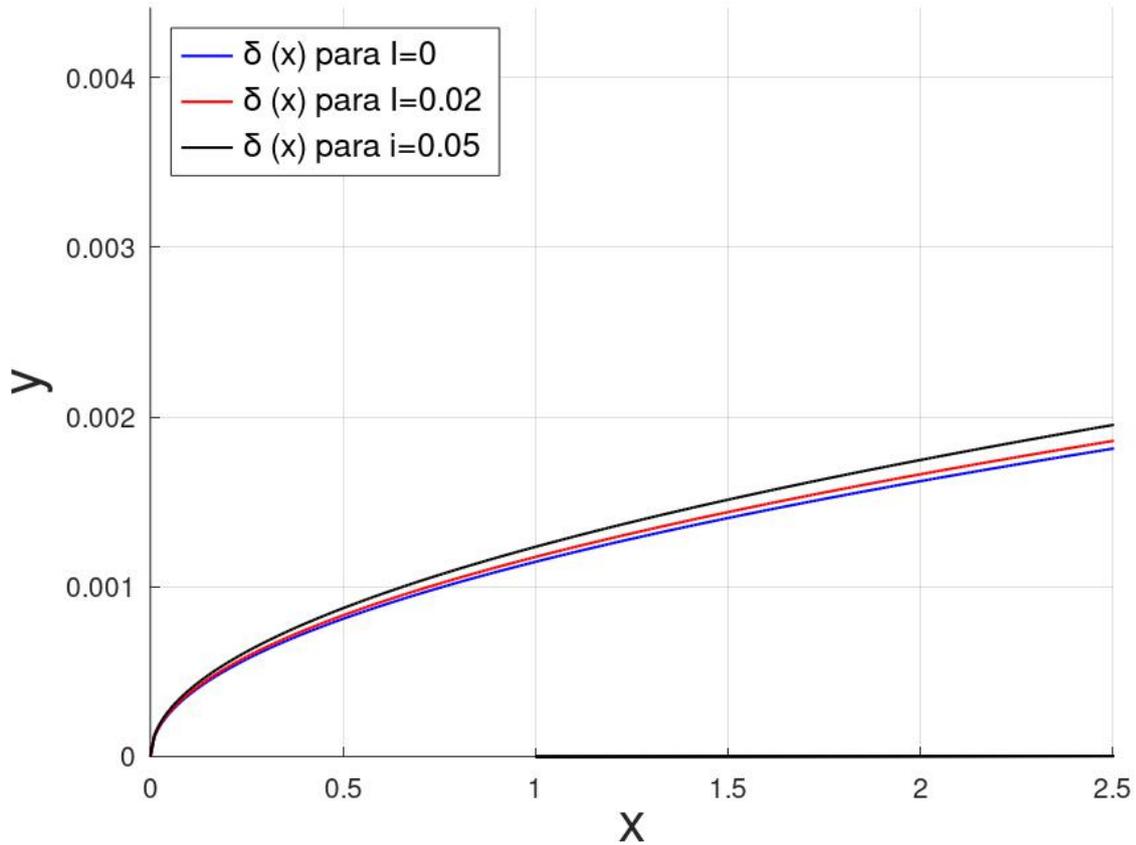


Figura 5.4: Espessura da camada limite laminar para um $I = 0$, $I = 0,02$ e $I = 0,05$

A Figura (5.4) nos mostra a espessura da camada limite em relação ao parâmetro de interação magnética local I . Vemos que existe uma tendência de aumento da camada limite com o aumento de I , o que se dá pelo fato de o campo magnético aumentar os efeitos inerciais em relação aos viscosos, diminuindo o tempo característico de difusão de vorticidade, o que reflete em um aumento da espessura da camada limite.

Coeficiente de fricção ao longo da placa

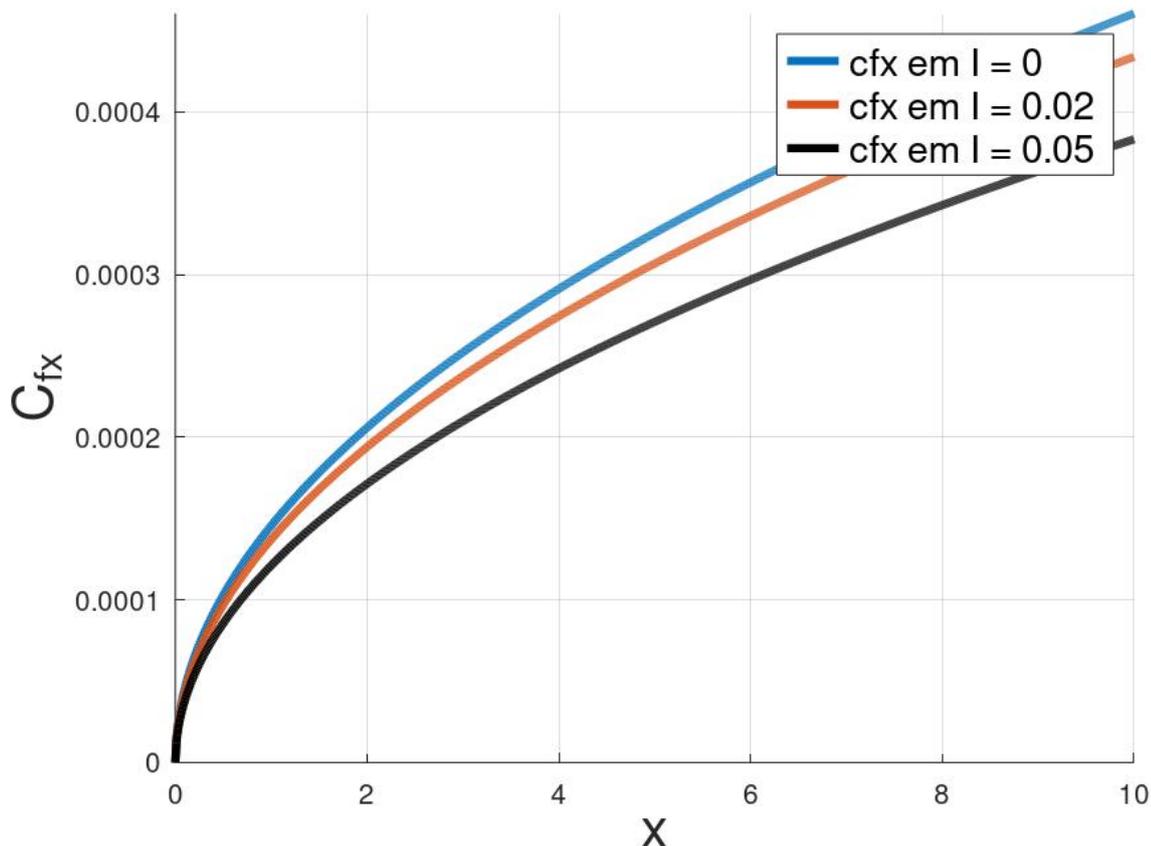


Figura 5.5: Coeficiente de fricção ao longo da placa para valores de $I = 0, I = 0,02$ e $I = 0,05$

Na Figura (5.5) vemos que o aumento do parâmetro de interação magnética local I está associado a uma redução do coeficiente de fricção. Essa redução ocorre devido ao fato de que, como o campo magnético está fixo na placa plana, esse exerce uma força na direção contrária ao movimento do escoamento, causando assim uma desaceleração do escoamento e, conseqüentemente, uma redução do seu coeficiente de fricção.

5.1.3 Análise da viabilidade do uso de um campo magnético transversal para o controle da camada limite

Vimos que o efeito do campo magnético no escoamento MHD depende do parâmetro de interação magnética I , dado por:

$$I = \frac{K_e B_0^2}{\rho U} x \quad (5.6)$$

o x pode ser compreendido como uma distância de ajustamento, ou seja, uma distância mínima para que o fluido responda às linhas de campo magnético. Portanto, é conveniente que o valor de x seja bem pequeno. Como visto nas seções anteriores, quanto maior for a intensidade do parâmetro I , melhor será a resposta do fluido ao campo magnético, já que esse começa a influenciar o escoamento significativamente para $I > 0.03$. Se consideramos que o fluido possui uma condutividade elétrica aproximada de $150 S/m$ (que somente é encontrada nas camadas mais altas da atmosfera), uma densidade de $1 kg/m^3$ e uma velocidade

$U = 300m/s$, para um $I = 0.05$, temos:

$$B_0^2 x = 0.1 \quad (5.7)$$

Com isso, para conseguirmos um $x = 0.1m$ precisaríamos de um campo magnético de $1T$, o que pode ser relativamente caro. Entretanto, a importância de explorar os conceitos abordados nesse tipo de escoamento é fundamental para a compreensão de casos mais complexos.

5.1.4 Problema de camada limite com desaceleração da corrente livre

Como já demonstrado na seção (3.1.7), esse problema é dado pela seguinte equação:

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' - f'^2 m + m = 0 \quad (5.8)$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{cases} f(\eta) = f'(\eta) = 0 \text{ para } \eta = 0 \\ f'(\eta) = 1 \text{ para } \eta = \infty \end{cases} \quad (5.9)$$

De maneira similar à seção anterior, a EDO principal, dada pela equação (5.8), foi decomposta em um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem, de acordo com:

$$\begin{cases} f'(\eta) = w \\ f''(\eta) = w' = v \\ f'''(\eta) = v' = m(w^2 - 1) - \frac{m+1}{2} f v \end{cases} \quad (5.10)$$

O problema foi resolvido para os casos em que $m = 0$, $m = 0,122$ e $m = -0,122$.

Solução da Equação de Blasius

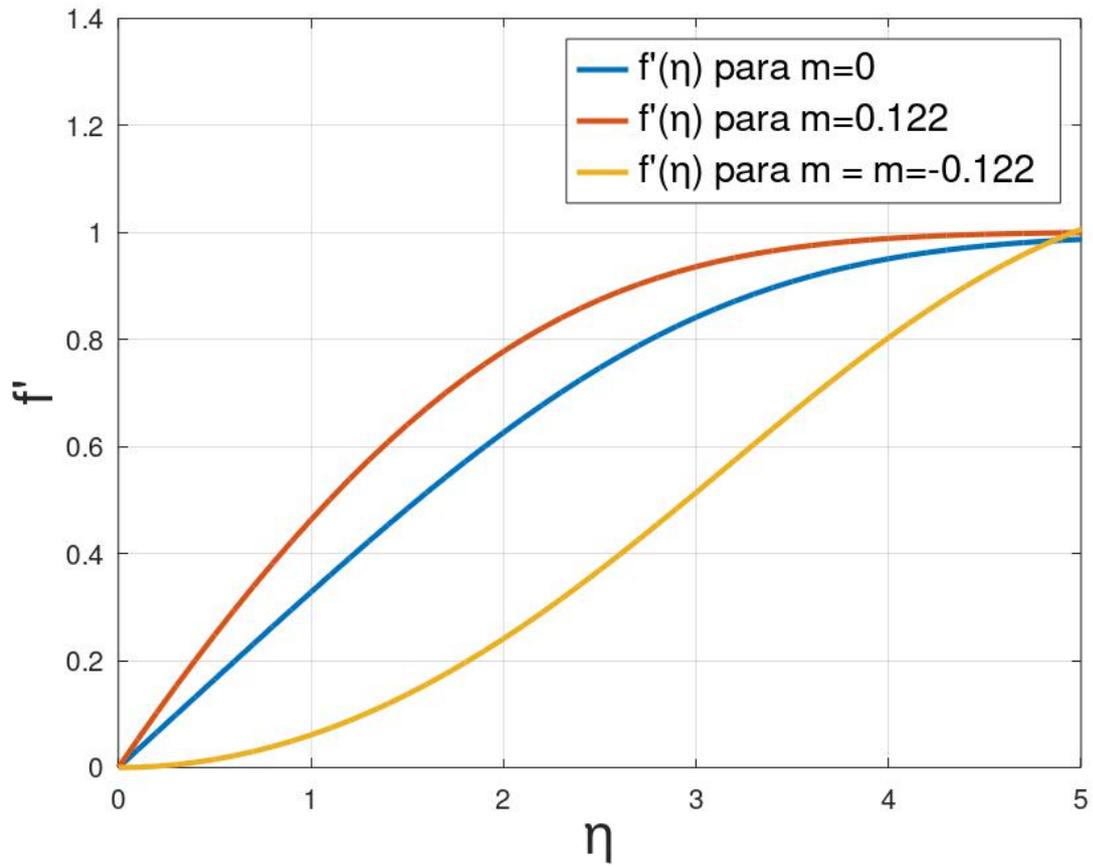


Figura 5.6: Solução da equação de Blasius com desaceleração do escoamento no interior da camada limite para valores de $m = 0$, $m = 0,122$ e $m = -0,122$

Coeficiente de fricção ao longo da placa

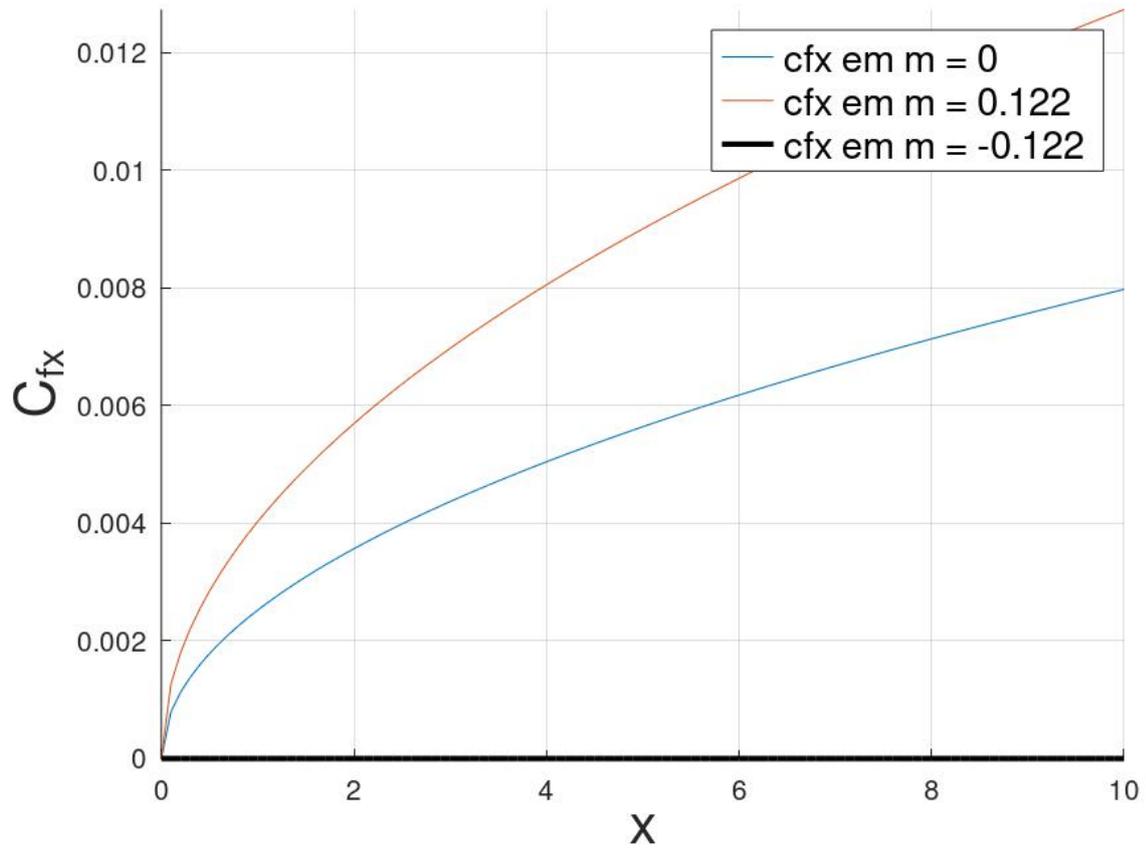


Figura 5.7: Coeficiente de fricção ao longo da placa plana para valores de $m = 0$, $m = 0,122$ e $m = -0,122$

Solução da Equação de Blasius

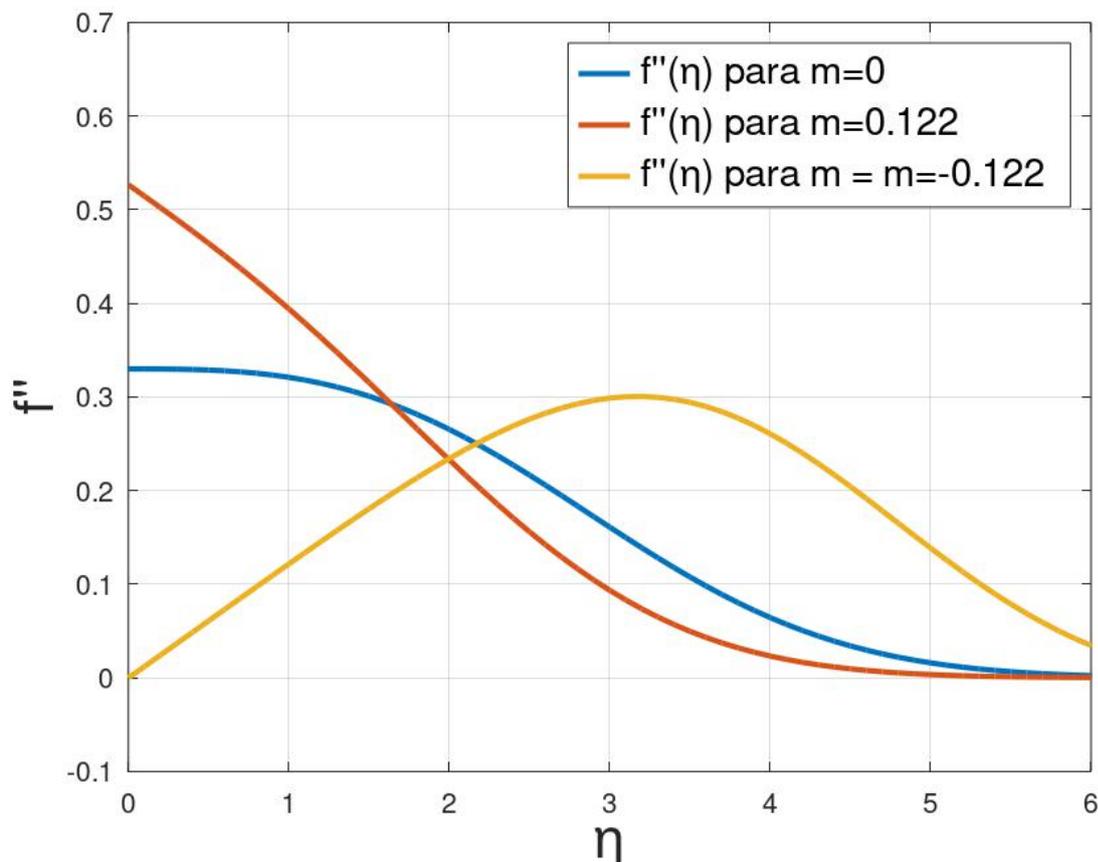


Figura 5.8: Comportamento de f'' ao longo da placa em relação a η para valores de $m = 0$, $m = 0,122$ e $m = -0,122$

As Figuras (5.6), (5.7) e (5.8) demonstram que a presença de um gradiente de pressão adverso ($m < 0$) de fato descola a camada limite, como discutido na seção (3.1.4). Na Figura (5.8) é possível ver claramente o ponto de inflexão quando $m = -0.122$. Na Figura (5.7) é possível constatar que o coeficiente de fricção ao longo da placa é zero, indicando que houve um descolamento da camada limite. Esse resultado foi apresentado nesse projeto porque este tem o objetivo de investigar a interação do gradiente de pressão com o campo magnético, bem como, determinar sob quais configurações o campo magnético pode alterar o efeito do gradiente adverso de pressão.

5.2 PROBLEMA DE BLASIUS MHD COM DESACELERAÇÃO DA CORRENTE LIVRE

Vamos agora resolver o problema proposto na seção (3.3.2) com o intuito de examinar a interação entre o gradiente de pressão adverso e o campo magnético, de forma a verificar qual é o efeito do campo magnético no ponto de descolamento da camada limite laminar. Aqui não estamos mais limitados a valores pequenos de I , podendo este assumir qualquer valor. A EDO governante desse problema é dada por:

$$f''' + ff'' + \frac{2m}{m+1}(1 - f'^2) - M^2(f' - 1) = 0 \quad (5.11)$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{cases} f(\eta) = f'(\eta) = 0 \text{ para } \eta = 0 \\ f'(\eta) = 1 \text{ para } \eta = \infty \end{cases} \quad (5.12)$$

Esse problema também pode ser escrito em termos do parâmetro de interação magnética local - que já vem sendo trabalhado no presente projeto - da seguinte forma:

$$f''' + ff'' + \frac{2m}{m+1}(1 - f'^2) - I(f' - 1) = 0 \quad (5.13)$$

A princípio vamos deixar essa equação escrita em termos de M^2 para facilitar a comparação com soluções disponíveis em [15], com o intuito de validar a solução aqui proposta.

Como já feito anteriormente, a EDO governante (5.11) para aplicação do método de Runge-Kutta foi decomposta em três equações diferenciais de primeira ordem, da seguinte forma:

$$\begin{cases} f'(\eta) = w \\ f''(\eta) = w' = v \\ f'''(\eta) = v' = -fv - \frac{2m}{m+1}(1 - w^2) + M^2(w - 1) \end{cases} \quad (5.14)$$

5.2.1 Validação da solução de Blasius MHD com desaceleração da corrente livre

Para validação da solução usando os métodos numéricos descritos no Capítulo 4, vamos comparar os resultados obtidos aqui com a solução semi-analítica proposta em [15]. Em 2009, Abbasbandy propôs diferentes soluções a um problema equivalente ao abordado nesse trabalho. Primeiramente, usando um método HAM (homotopy analysis method), depois com as transformações de Crocco's e, por fim, valendo-se do método de Runge-Kutta. A seguir comparou seus resultados, com o qual chegou-se a seguinte tabela, para um parâmetro $m = -\frac{3}{5}$:

Tabela 5.1: Comparação entre os diferentes métodos de solução disponíveis em [15]

M	Métodos de solução		
	Método (HAM)	Transformações de Crocco's	Método de Runge-Kutta
3	2,2734	2,2655	2,2734
4	3,4881	3,4837	3,4881
5	4,6007	4,5975	4,6007

Agora, vamos gerar uma tabela para os mesmos valores de $m = -\frac{3}{5}$ utilizando a solução proposta nesse trabalho:

Tabela 5.2: Resultados obtidos para o parâmetro M^2 utilizando o método de solução proposto no presente trabalho

M	Método de Runge-Kutta
3	2,2735
3.5	2,9014
4	3,4884
4.5	4,0522
5	4,6013

Comparando as tabelas acima, vemos que existe uma convergência excelente entre os resultados, com uma precisão de três casas decimais.

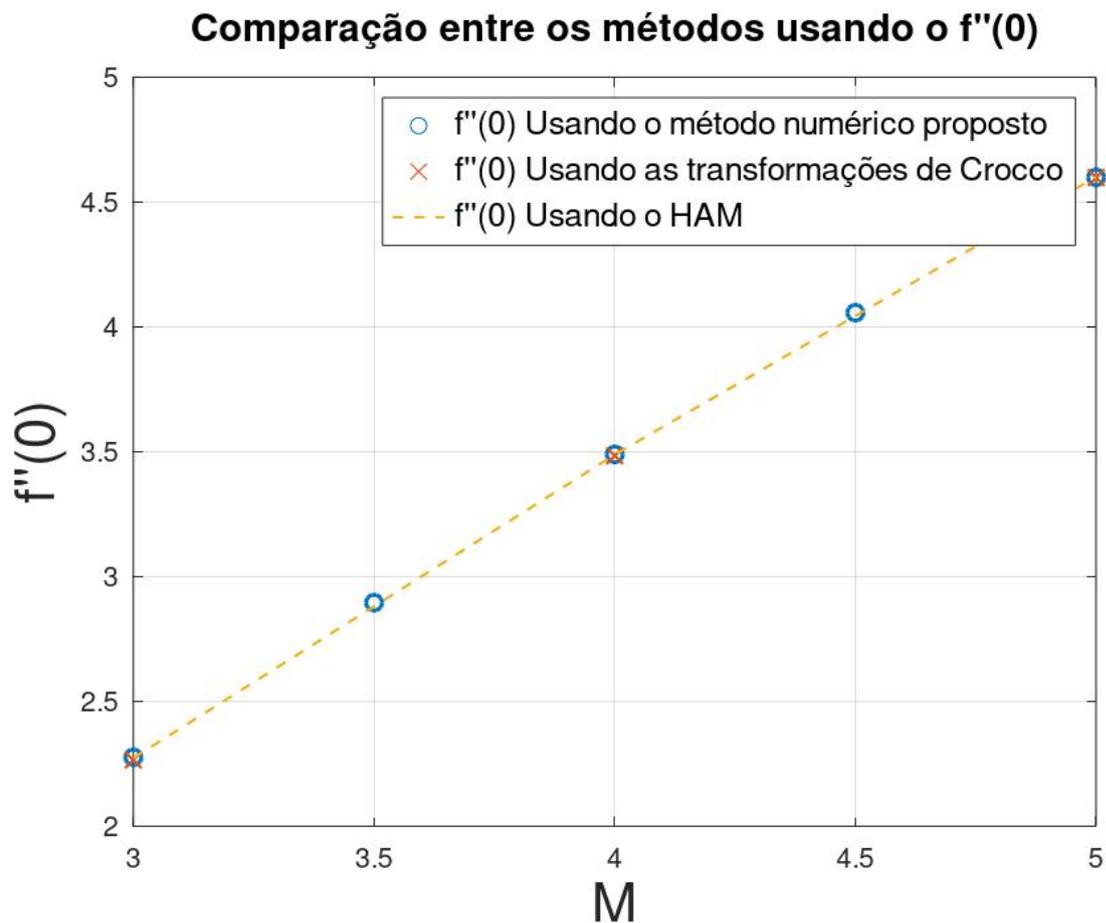


Figura 5.9: Comparação entre o método numérico proposto no trabalho e os métodos semi-analíticos disponíveis em [15]

A Figura (5.9) foi obtida plotando os resultados fornecidos pelas tabelas acima, na qual os resultados obtidos pelo método de Runge-Kutta fornecidos pelo trabalho de Abbasbamy [15], foram omitidos por terem os mesmos valores do método HAM. Essa Figura nos aclara ainda mais sobre uma convergência entre as soluções obtidas, dando credibilidade às análises feitas na próxima seção usando o método numérico proposto no presente trabalho.

5.2.2 Solução do problema de Blasius com efeitos MHD com desaceleração da corrente livre

Para manter a linha do trabalho, a equação governante a ser usada será em termos do parâmetro de interação magnética local I (equação (5.13)), ao invés de em termos do parâmetro M^2 (equação (5.11)), bem como, as análises serão feitas para valores de I . Para examinar a interação entre o campo magnético e o gradiente adverso de pressão, vamos considerar um $m = -0,6$ para os valores de $I = 2,45$, $I = 2,64$ e $I = 2,82$. Com isso temos as seguintes Figuras:

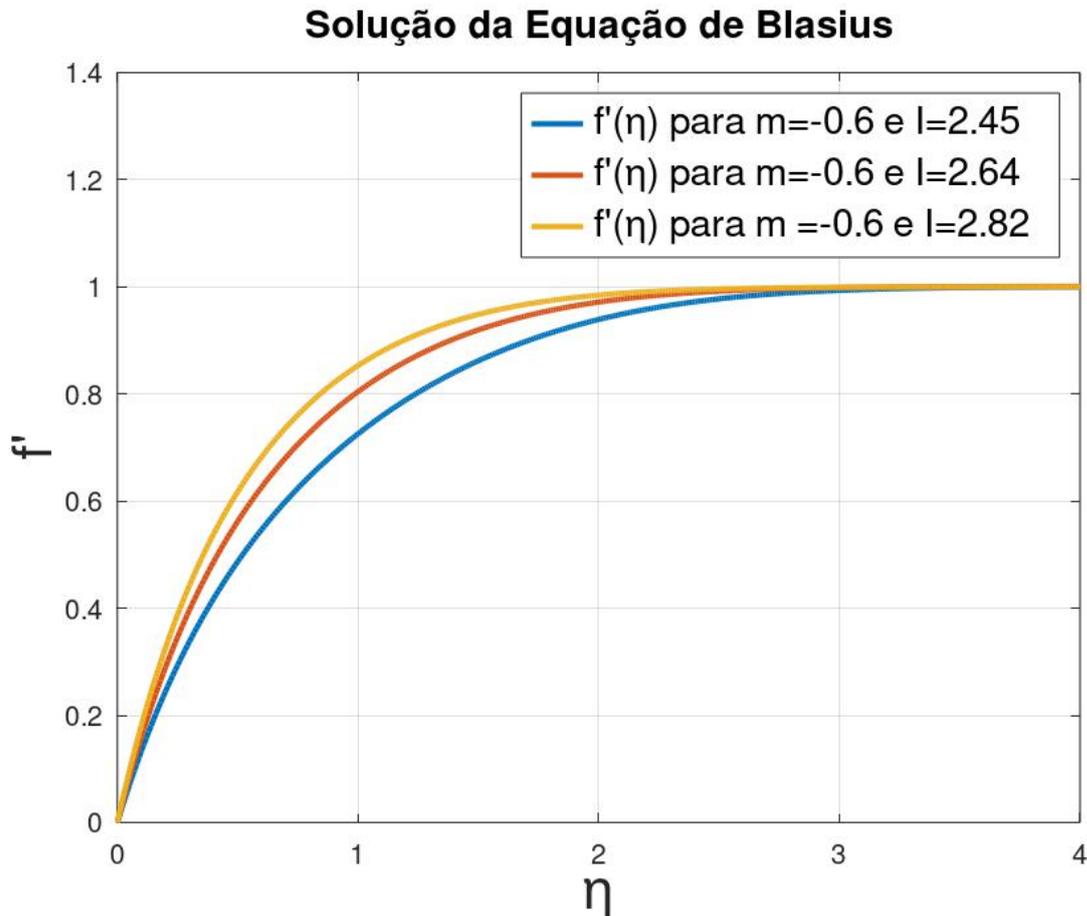


Figura 5.10: Solução da equação de Blasius com efeitos MHD com desaceleração da camada limite para valores de $m = -0,6$ e $I = 2,45$, $I = 2,64$ e $I = 2,82$.

A Figura (5.10) nos revela que o aumento do parâmetro de interação magnética local I está associada à aceleração do escoamento, lembrando que $f'(\eta) = \frac{u}{U}$, em que u é a velocidade do escoamento interno, e U é a velocidade de corrente livre. Vemos que para valores maiores de I , o u se aproxima de U mais rapidamente, evidenciando assim uma aceleração do escoamento interno. Esse resultado é contrário ao exposto no caso do escoamento de Blasius com efeitos MHD, demonstrando-nos que diferentes configurações de campo magnético podem ser usadas para diferentes objetivos.

Espessura da camada limite

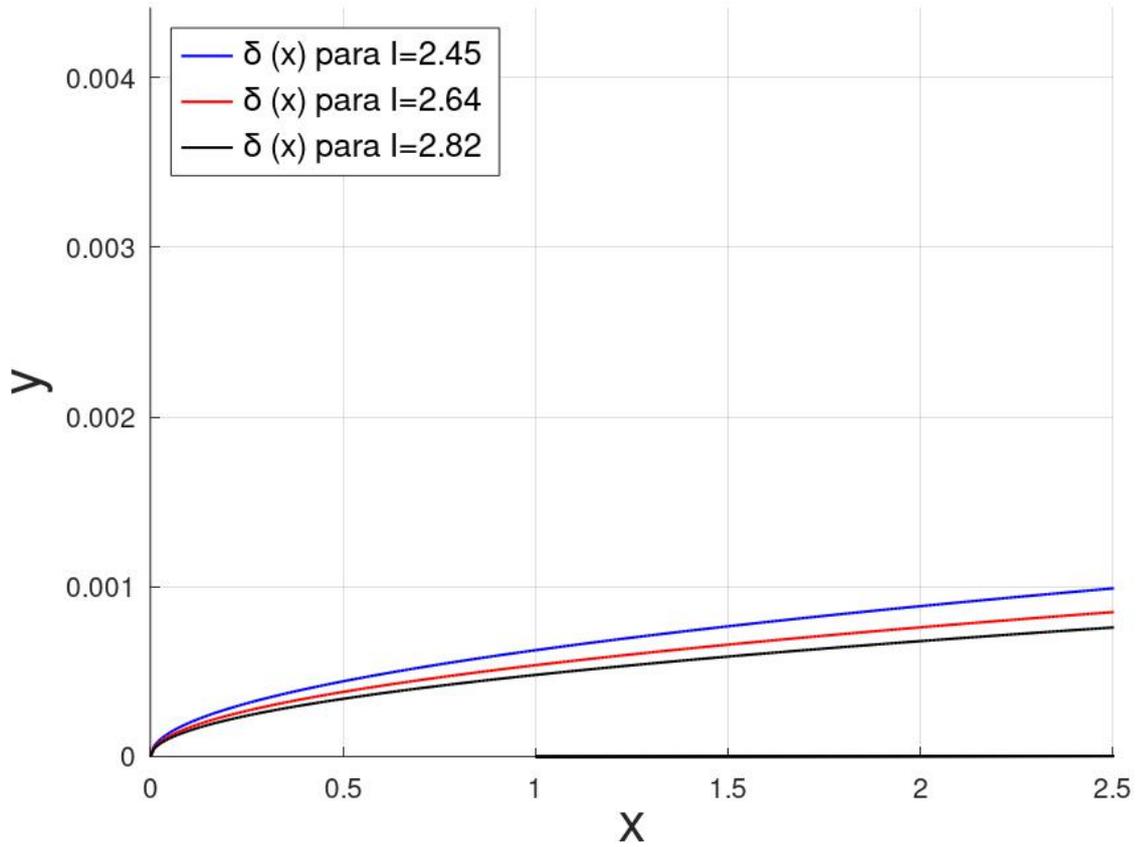


Figura 5.11: Espessura da camada limite laminar para valores de $m = -0,6$ e $I = 2,45$, $I = 2,64$ e $I = 2,82$.

A redução da espessura da camada limite laminar é evidenciada na Figura (5.11). Essa redução nos mostra que o campo magnético age reduzindo os efeitos viscosos em relação aos inerciais, ou seja, eleva-se o tempo característico de difusão de vorticidade.

Coeficiente de fricção ao longo da placa

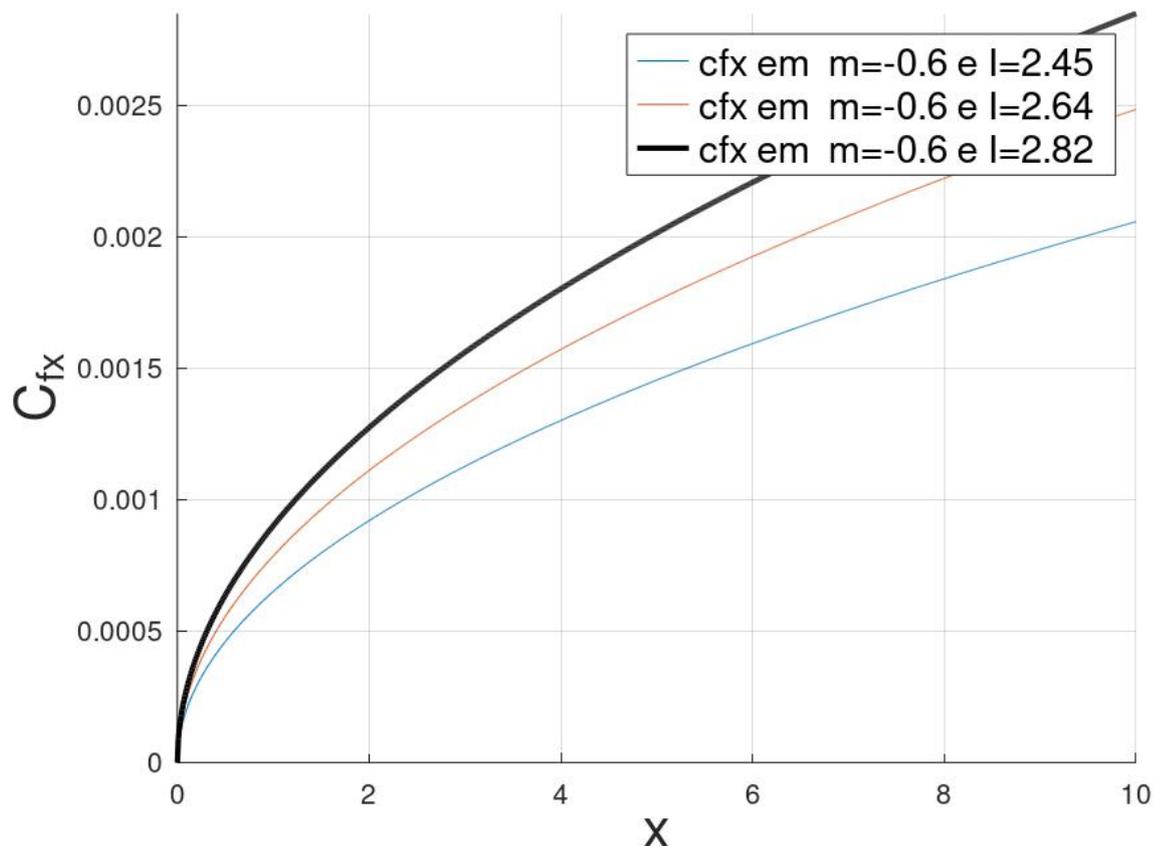


Figura 5.12: Coeficiente de fricção ao longo da placa plana para valores de valores de $m = -0,6$ e $I = 2,45$, $I = 2,64$ e $I = 2,82$.

Vemos, pela Figura (5.12), que o coeficiente de fricção ao longo da placa plana é aumentado pelo efeito do campo magnético, ou seja, a força de Lorentz está agindo no escoamento acelerando-o e aumentando o seu coeficiente de fricção.

5.2.3 Efeitos do campo magnético no descolamento da camada limite laminar

Para analisar o efeito do campo magnético no descolamento da camada limite, usaremos um caso extremo do parâmetro m , onde o gradiente de pressão adverso descola a camada limite. Para obter esse efeito vamos considerar um $m = -0,09$, inicialmente para um $I = 0$, depois vamos aumentar os valores de I para $I = 1,41$ e $I = 1,73$. Com isso temos as Figuras:

Solução da Equação de Blasius

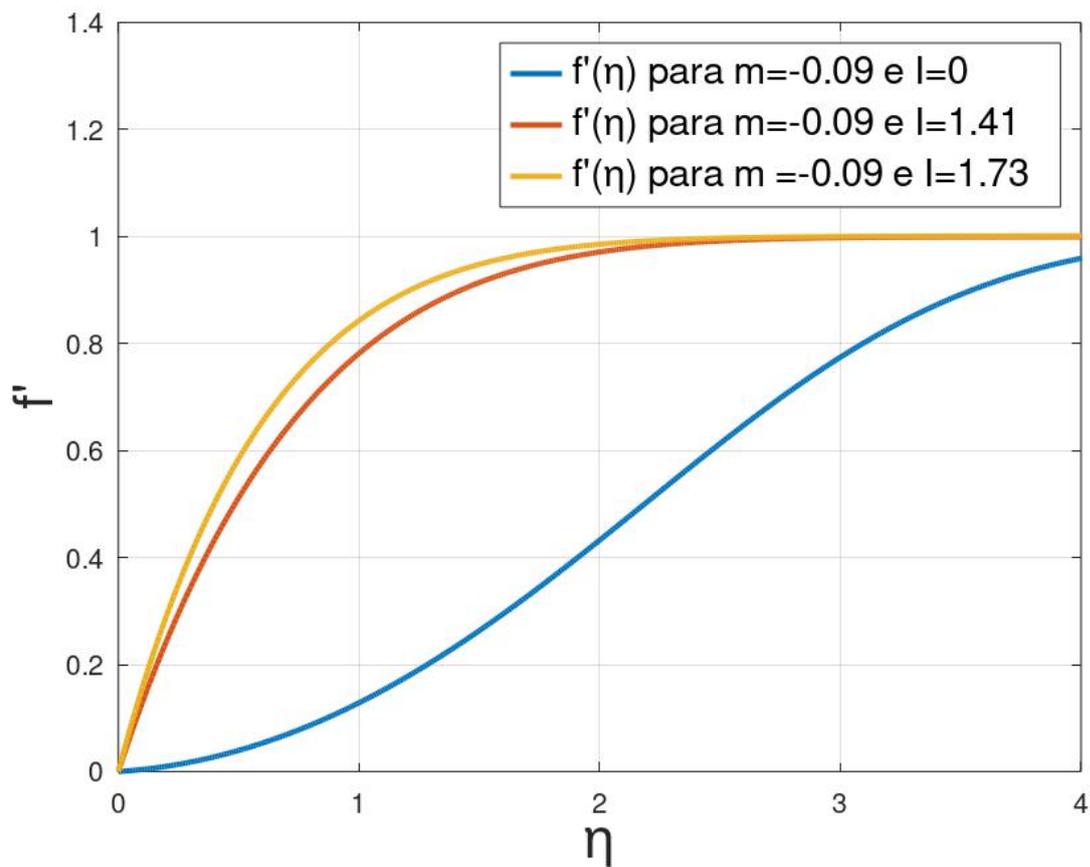


Figura 5.13: Solução da equação de Blasius com efeitos MHD com desaceleração da camada limite para valores de $m = -0,09$ e $I = 0, I = 1,41$ e $I = 1,73$.

Solução da Equação de Blasius

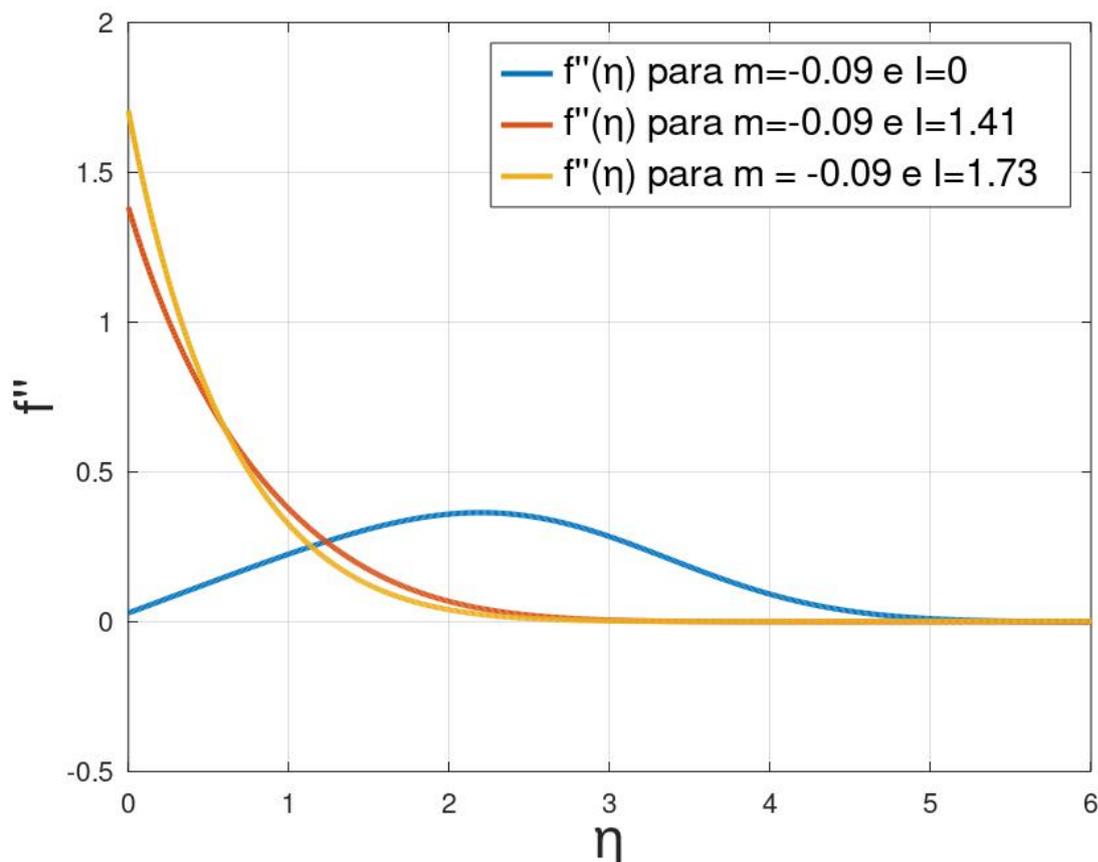


Figura 5.14: Solução da equação de Blasius com efeitos MHD com desaceleração da camada limite para $f''(\eta)$ e para valores de $m = -0,09$ e $I = 0$, $I = 1,41$ e $I = 1,73$.

As Figuras (5.13) e (5.14) evidenciam claramente a mudança de perfil causada pelo efeito do campo magnético sobre o escoamento submetido a um gradiente de pressão adverso. Na Figura (5.13) vemos que a aceleração causada no escoamento devido ao efeito do campo magnético tende a contrabalancear os efeitos do gradiente adverso de pressão e que valores mais altos de I podem até suprir o efeito do gradiente de pressão adverso do perfil de velocidades da camada limite. Pela Figura (5.14) vemos que o ponto de inflexão desaparece completamente, mostrando assim que o decolamento da camada limite laminar pode ser suprimido para um campo magnético adequado. Esses resultados nos mostram que um campo magnético com o perfil apropriado pode ser usado para o controle do decolamento da camada limite laminar. Apesar de ser caro gerar um campo magnético alto suficiente para produzir valores de $I \simeq 1$, o controle do decolamento da camada limite laminar é desejada em diversas áreas de aplicações da teoria MHD, tendo que ser feito um estudo específico para analisar a viabilidade do uso desse mecanismo de controle ativo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 CONCLUSÃO

Neste trabalho demonstrou-se que o problema de camada limite magnetohidrodinâmica se reduz ao problema hidrodinâmico quando o parâmetro de interação magnético I tende a 0. Como esse parâmetro é a razão dos números de Reynolds magnético e hidrodinâmico, pode-se dizer que quando o número de Reynolds hidrodinâmico é muito maior que o número de Reynolds magnético, a camada limite magnetohidrodinâmica se torna apenas hidrodinâmica.

Aqui investigou-se a interação entre um campo magnético externo transversal e o escoamento magnetohidrodinâmico. Obtendo-se que o campo magnético externo desacelera o escoamento, reduzindo o coeficiente de fricção do escoamento sobre a placa e aumentando a espessura da camada limite.

Examinou-se também um problema mais geral, no qual a velocidade de corrente livre e o campo magnético aplicado possuíam uma dependência em x , ficando demonstrado que nesse caso o efeito do campo magnético era o oposto do caso anterior. Por outro lado, o efeito do campo magnético no controle do descolamento da camada limite é nítido, tornando uma alternativa viável para as mais diferentes aplicações da teoria MHD.

6.2 TRABALHOS FUTUROS

Sugere-se como proposta de trabalhos futuros considerar o estudo de uma camada limite compressível eletromagnética, considerando também os efeitos da equação de energia. Propõe-se também considerar diferentes mecanismos de geração de interações eletromagnéticas, como plasmas atmosféricos, e analisar os efeitos desses mecanismo para o controle ativo da camada limite.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Moreau, R. (1990) *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, St. Martin d'Hères.
- [2] Davidson, P. A. (1999). *Magnetohydrodynamics in materials processing* (Annual Review of Fluid Mechanics). *Annu. Rev. Fluid Mech.* <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.31.1.273>
- [3] Moreau, R. (2008). *Magnetohydrodynamic Turbulence at Low Magnetic Reynolds Number* (Annual Review of Fluid Mechanics). *Annu. Rev. Fluid Mech.* <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110231>
- [4] Blasius, H. (1908) *Grenrschichten in Flussigkeiten mit Kleiner Reibung*. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 56, 1-37.
- [5] Hartmann, J. (1937) *Theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field*. *Fys. Med.*, 15, 1-27.
- [6] Gailitis, A. and Lielausis, O. (1961) *On a Possibility to Reduce the Hydrodynamic Resistance of a Plate in Aelectro-Lyte*. *Applied Magnetohydrodynamics*, 12, 143-146.
- [7] Moffatt, H. K. (1967). *On the suppression of turbulence by a uniform magnetic field*. *Journal of Fluid Mechanics*, 28, 571-592.
- [8] Andersson, H. I. (1992). *MHD flow of a viscoelastic fluid past a stretching surface*. *Acta Mechanica*, 95(1), 227-230.
- [9] Siddiqui, A. M., Haroon, T., Hayat, T., Asghar, S. (2001). *Unsteady MHD flow of a non-Newtonian fluid due to eccentric rotations of a porous disk and a fluid at infinity*. *Acta mechanica*, 147(1), 99-109.
- [10] Chamkha, A. (2010). *Heat and mass transfer of a non-Newtonian fluid flow over a permeable wedge in porous media with variable wall temperature and concentration and heat source or sink*.
- [11] Turkyilmazoglu, M. (2012). *Dual and triple solutions for MHD slip flow of non-Newtonian fluid over a shrinking surface*. *Computers Fluids*, 70, 53-58.
- [12] Ishak, A. (2011). *MHD boundary layer flow due to an exponentially stretching sheet with radia-*

tion effect. *Sains Malaysiana*, 40(4), 391-395.

[13] Das, K. (2014). Radiation and melting effects on MHD boundary layer flow over a moving surface. *Ain Shams Engineering Journal*, 5(4), 1207-1214.

[14] Ali, F. M., Nazar, R., Arifin, N. M., Pop, I. (2011). MHD boundary layer flow and heat transfer over a stretching sheet with induced magnetic field. *Heat and Mass transfer*, 47(2), 155-162.

[15] Abbasbandy, S., Hayat, T. (2009). Solution of the MHD Falkner-Skan flow by homotopy analysis method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(9-10), 3591-3598.

[16] Parand, K., Rezaei, A. R., Ghaderi, S. M. (2011). An approximate solution of the MHD Falkner-Skan flow by Hermite functions pseudospectral method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(1), 274-283.

[17] Chicago. Griffiths, David J. (David Jeffery), 1942-. *Introduction to Electrodynamics*. Boston :Pearson, 2013

[18] Davidson, P. (2001). *An Introduction to Magnetohydrodynamics* (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511626333

[19] APA. Jackson, John David, 1925-2016. (1999). *Classical electrodynamics*. New York :Wiley,

[20] Cunha, F.R. (2021). *Notas do curso de Fundamentos de Magnetohidrodinâmica*. Departamento de Engenharia Mecânica. Universidade de Brasília.

[21] Batchelor, G. (2000). *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge Mathematical Library). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511800955

[22] Cunha, F.R. (2019). *Notas do curso de Mecânica dos fluidos 2*. Departamento de Engenharia Mecânica. Universidade de Brasília.

[23] WHITE, F. M. (1999) *Mecânica dos fluidos*. 4. ed. Rio de janeiro: McGraw-Hill, .

[24] Rossow, V. J.: *On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field*. NACA TN 3971 (1957).