



Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

Modelagem Multifractal dos Retornos Financeiros

Gustavo Garcia de Melo

Trabalho apresentado ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Brasília
2022

Gustavo Garcia de Melo

Modelagem Multifractal dos Retornos Financeiros

Orientador(a): Prof. Raul Yukihiro Matsushita

Trabalho apresentado ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Brasília
2022

Agradecimentos

Aos meus pais e irmão, as pessoas mais importantes da minha vida.

Às professoras e aos professores do Departamento de Estatística da UnB pelas ótimas aulas, em especial ao professor Raul Matsushita pela presteza e orientação neste trabalho.

Ao Instituto de Física da UnB, pela liberação, e aos colegas de laboratório, pela paciência durante a Licença Capacitação.

Resumo

O Modelo Multifractal dos Retornos Financeiros (MMAR) busca descrever o comportamento de escala dos retornos que – entre outros traços característicos – apresentam memória longa na volatilidade e caudas pesadas. Essas propriedades podem ser obtidas compondo-se o movimento Browniano fracionário, que possui memória longa, com o tempo de transação estocástico, dilatações aleatórias em todas as escalas de tempo que geram volatilidade. Os momentos de um processo multifractal estão associados com a escala de tempo através de uma lei de potência. Dada a série de preços de um ativo financeiro, o uso dos momentos, pelo método da função de partição, permite estimar os parâmetros do modelo. Com os parâmetros, simulações podem comparar o desempenho do MMAR com modelos da família GARCH em replicar as transformações de escala dos retornos.

Palavras-chave: Modelo multifractal, multifractalidade, MMAR, lei de escala, lei de potência, séries temporais.

Lista de Tabelas

1	Medidas para o movimento Browniano	30
2	Medidas para o movimento Browniano fracionário com $H = 0,4$	32
3	Medidas para o movimento Browniano fracionário com $H = 0,8$	33
4	Parâmetros estimados do MMAR para taxas de câmbio	54
5	Parâmetros dos modelos GARCH e FIGARCH para taxa de câmbio DM/USD	60
6	Média e desvio padrão das funções de escala simuladas.	64
7	Probabilidade da inclinação simulada subestimar a observada.	65
8	Percentis das simulações	65

Lista de Figuras

1	Medida multifractal binomial	25
2	Comportamento de escala para o Movimento Browniano simples	30
3	Comportamento de escala do movimento Browniano fracionário, $H = 0,4$	31
4	Comportamento de escala do movimento Browniano fracionário, $H = 0,8$	32
5	Medida binomial e Tempo de transação Estocástico	34
6	Comportamento e Função de escala de θ	35
7	Comportamento de escala da taxa de câmbio DM/USD	36
8	Função de escala $\tau(q)$ da taxa de câmbio DM/USD	37
9	Comportamento de escala da taxa de câmbio BRL/USD	38
10	Função de escala $\tau(q)$ da taxa de câmbio BRL/USD	39
11	Comportamento de escala da taxa de câmbio BRL/USD - dados intradiários	40
12	Comportamento de escala da taxa de câmbio BRL/USD - dados intradiários com corte	41
13	Função de escala $\tau(q)$ da taxa de câmbio BRL/USD - dados intradiários	42
14	Comportamento de escala da taxa de câmbio CHF/USD	43
15	Função de escala $\tau(q)$ da taxa de câmbio CHF/USD	44
16	Comportamento e Função de escala da taxa de câmbio BRL/EUR	45
17	Comportamento e Função de escala da taxa de câmbio BRL/GBP	46
18	Espectro Multifractal - câmbio BRL/GBP	54
19	Simulação da medida log-normal	56
20	Simulação para a taxa de câmbio BRL/GBP	58
21	Simulações com e sem ajuste para a taxa de câmbio BRL/USD	59
22	Comportamento de escala de longo prazo - câmbio DM/USD - MMAR	61
23	Comportamento de escala de longo prazo - câmbio DM/USD - GARCH	62
24	Comportamento de escala de longo prazo - câmbio DM/USD - FIGARCH	63

Sumário

1	Introdução	8
2	Noções de Séries Temporais	10
2.1	Modelagem de volatilidade e o modelo GARCH	11
2.2	Processos fracionalmente integrados	16
3	Modelagem Multifractal dos Retornos Financeiros	21
3.1	Multifractalidade	21
3.2	O Modelo Multifractal	23
3.3	Aplicações	29
4	O Espectro Multifractal e Simulação	47
4.1	Espectro Multifractal	47
4.2	Simulação	52
4.3	Comparação com os modelos GARCH e FIGARCH	60
5	Conclusão	66
	Referências	69
	Anexo	70

1 Introdução

Dados de séries temporais financeiras necessitam de métodos estatísticos específicos, pois muitas suposições dos modelos clássicos não são atendidas. Por exemplo, a distribuição dos retornos de ativos financeiros é leptocúrtica, de cauda pesada (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997), não sendo satisfatória a modelagem por distribuição normal. Um exemplo de distribuição de cauda pesada usada nessa situação são as distribuições estáveis de Lévy, em que o segundo momento pode não ser finito (MANTEGNA; STANLEY, 1998).

Modelos que presumem independência e igualdade em distribuição ao longo do tempo também falham, pois a volatilidade de séries financeiras é de memória longa (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997), onde a autocorrelação declina com o tempo de forma mais lenta que exponencialmente. A distribuição dos retornos pode mudar ao longo do tempo (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997). Por exemplo, após um período de mercado estável, com retornos de pequena magnitude, ocorre uma crise financeira onde os retornos do mercado são fortemente negativos. A alternância entre períodos de baixa e alta variância dos retornos é conhecido como *clustering* de volatilidade.

Em estatística, heteroscedasticidade é o termo que se usa para denominar variância não-constante. O modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), proposto por Engle em 1982, e depois o modelo GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), generalização proposta por Bollerslev em 1986, estão entre os modelos mais utilizados na prática de finanças para modelagem de volatilidade e que conseguem explicar sua variação no tempo (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997). Vários outros modelos foram derivados do GARCH, como os modelos EGARCH, FIGARCH e MRS-GARCH (GÜNAY, 2016). Entretanto, o modelo GARCH especificamente não consegue descrever ou replicar com simulações as características de memória longa da volatilidade e os comportamentos de escala dos retornos (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997), isto é, quando os retornos são vistos em diferentes horizontes de tempo, como retornos diários, mensais ou anuais.

Fractais são objetos matemáticos que exibem autossimilaridade. Simplificadamente, são objetos em que há simetrias de escala. Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997) estabeleceram o Modelo Multifractal dos Retornos Financeiros - MMAR (*Multifractal Model of Asset Returns*) - baseado em estudos anteriores do primeiro, como um modelo que leve em conta as caudas pesadas e memória longa, e que consiga explicar as mudanças de escala na distribuição e nos momentos dos retornos ao usar diferentes janelas temporais.

Neste trabalho vamos revisar a literatura acerca do MMAR e comparar seu desempenho com os modelos tradicionais GARCH e FIGARCH. Para tanto vamos recorrer a trabalhos que versam sobre as propriedades estatísticas de sistemas, os processos e as distribuições que se caracterizam por propriedades de escala.

No capítulo 2 apresentam-se noções básicas de séries temporais, com ênfase nos modelos para volatilidade e processos integrados fracionários, que apresentam característica de memória longa. O capítulo 3 aborda autossimilaridade e multifractalidade, e como Mandelbrot e colaboradores usaram este conceito para estabelecer o modelo multifractal com ênfase nas propriedades de escala dos momentos. O capítulo 4 trata do espectro multifractal e como usá-lo para poder simular uma série temporal de acordo com o MMAR para poder comparar com os modelos GARCH e FIGARCH. As conclusões estão no capítulo 5.

2 Noções de Séries Temporais

Uma série temporal X_t pode ser entendida como a realização de um processo estocástico, definida no conjunto de tempos $t \in \mathcal{T}$, podendo ser contínua (quando se preferirá a notação $X(t)$) ou discreta. A forma de dependência dos dados para instantes distintos pode ser modelada de diversas formas, como os modelos de Alisamento Exponencial, ARIMA, GARCH, de Vetor Autorregressivo ou usando Redes Neurais Recorrentes (HYNDMAN; ATHANASOPOULOS, 2018).

Como facilitador da modelagem, muitas vezes é útil considerar que o processo gerador da série é estacionário.

Definição 1 *Um processo estocástico $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ é dito fortemente ou estritamente estacionário se as distribuições finito-dimensionais são invariantes por translação temporal, isto é:*

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1+h} \leq x_1, \dots, X_{t_n+h} \leq x_n)$$

sempre que os índices pertencerem à \mathcal{T} .

A estacionariedade forte é tipicamente difícil de ser provada. Adota-se em geral o conceito de estacionariedade fraca.

Definição 2 *Um processo estocástico $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ é dito fracamente estacionário se e somente se:*

1. *Sua esperança é constante no tempo, $\mathbb{E}(X_t) = \mu, \forall t \in \mathcal{T}$,*
2. *Sua variância é finita, $\text{Var}(X_t) < \infty$,*
3. *Sua covariância depende apenas da diferença entre os instantes, $\text{Cov}(X_t, X_s) = \gamma(|t - s|)$*

Pela item 3 acima, num processo fracamente estacionário a variância será constante pois $\gamma(0) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \text{Var}(X_t)$, assim o processo também pode ser chamado de estacionário de segunda ordem. Um processo estacionário de n -ésima ordem possui os momentos de ordem 1 até n finitos e constantes. Todo processo estacionário forte é estacionário fraco caso $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ (MORETTIN, 2017).

A série de preços de um ativo financeiro P_t geralmente não é estacionária, com $\mathbb{E}(P_t)$ variando no tempo. Para que a série do ativo de interesse passe a ser estacionária geralmente se usa o log-retorno,

$$X_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = \ln P_t - \ln P_{t-1}.$$

Para pequenas variações percentuais no preço do ativo, o log-retorno é muito próximo do retorno percentual,

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

$$X_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = \ln(1 + R_t),$$

pois para $|x| \ll 1$ vale a aproximação de Taylor $\ln(1 + x) \approx x$.

A seção 2.1 trata da modelagem de retornos cuja variância condicional varia no tempo. Na seção 2.2 fala-se sobre modelos de séries temporais fracionalmente integrados, que tem como característica a memória longa caracterizada por decaimento hiperbolico da função de autocorrelação.

2.1 Modelagem de volatilidade e o modelo GARCH

O modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) foi proposto por Engle em 1982 como uma forma de permitir que a variância condicional dos retornos, chamada de volatilidade, seja heterocedástica, podendo variar no tempo. Para isso a volatilidade é especificada de forma autorregressiva, em termos dos quadrados dos retornos que a antecederam. Logo, neste modelo grandes retornos, positivos ou negativos, antecedem o aumento de volatilidade (MORETTIN, 2017).

Definição 3 Se y_t é o retorno e h_t a volatilidade, as equações que caracterizam o modelo ARCH(p) são:

$$y_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2.$$

em que $\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ são parâmetros e ε_t é um ruído branco, uma v.a. i.i.d. com $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ e $\text{Var}(\varepsilon_t) = 1$.

Para que a volatilidade seja positiva e que os retornos sejam estacionários de

segunda ordem é necessário que:

$$\begin{aligned}\omega, \alpha_p &> 0 \\ \alpha_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p-1 \\ \sum_{i=1}^p \alpha_i &< 1\end{aligned}$$

Dadas estas condições, mostra-se abaixo que h_t de fato é a variância condicional do processo e que os retornos neste modelo são não-autocorrelacionados.

$$\text{Var}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = \text{Var}_{t-1}(y_t) = \text{Var}_{t-1}(\sqrt{h_t} \varepsilon_t),$$

como h_t está completamente definida em termos do retornos que antecederam y_t ,

$$\text{Var}_{t-1}(y_t) = h_t \text{Var}_{t-1}(\varepsilon_t) = h_t,$$

e de fato h_t é a variância condicional do processo dos retornos.

A esperança condicional é

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) &= \mathbb{E}_{t-1}(y_t) \\ &= \mathbb{E}_{t-1}(\sqrt{h_t} \varepsilon_t) \\ &= \sqrt{h_t} \mathbb{E}_{t-1}(\varepsilon_t) = 0\end{aligned}$$

consequentemente, usando a propriedade de esperança condicional $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(y_t) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}_{t-1}(y_t)) \\ &= \mathbb{E}(0) \\ &= 0,\end{aligned}$$

logo o processo ARCH é estacionário com retornos esperados 0.

A autocorrelação dos retornos, com $h > 0$, é:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(y_t, y_{t+h}) &= \mathbb{E}(y_t y_{t+h}) \\ &= \mathbb{E}(\sqrt{h_t} \varepsilon_t \sqrt{h_{t+h}} \varepsilon_{t+h}).\end{aligned}$$

Os termos h_t , ε_t , e h_{t+h} , este último composto por p defasagens de y_{t+h}^2 , estão todos defasados em relação à ε_{t+h} , que é independente deles. Pela independência, a esperança

pode ser separada no produto,

$$\mathbb{E} \left(\sqrt{h_t} \varepsilon_t \sqrt{h_{t+h}} \varepsilon_{t+h} \right) = \mathbb{E} \left(\sqrt{h_t} \varepsilon_t \sqrt{h_{t+h}} \right) \mathbb{E} (\varepsilon_{t+h}) = 0,$$

pois ε_{t+h} é um ruído branco de média 0. Assim, os retornos no modelo ARCH são não-autocorrelacionados.

Quando $h = 0$, usando que os retornos esperados são 0, e que ε é ruído branco de média zero e variância 1, a variância incondicional do processo é:

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t) &= \mathbb{E}(y_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}_{t-1}(y_t^2)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}_{t-1}(h_t \varepsilon_t^2)) \\ &= \mathbb{E}(h_t) \\ &= \mathbb{E}(\omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p y_{t-p}^2) \end{aligned}$$

pela estacionariedade fraca, $\mathbb{E}(y_t^2)$ é constante no tempo, então

$$\text{Var}(y_t) = \frac{\omega}{1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_p)}.$$

Supondo distribuição normal de ε_t e que o processo é estacionário de quarta ordem, para o modelo ARCH(1) a curtose é (MORETTIN, 2017):

$$K = \frac{\mathbb{E}(y_t^4)}{(\mathbb{E}(y_t^2))^2} = 3 \left(\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} \right) > 3.$$

A curtose da distribuição normal é 3, chamada de mesocúrtica. Distribuições com curtose maior que 3 são leptocúrticas, característica de distribuições de caudas pesadas.

Usando outras distribuições para o ruído, é possível gerar caudas mais pesadas como variações da t de Student ou a distribuição generalizada do erro. Morettin (2017) indica que para o ARCH(1), usando uma distribuição t de Student com $\nu > 4$ graus de liberdade, padronizada para ter variância 1, a curtose é:

$$K = \lambda \left(\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - \lambda \alpha_1^2} \right) > 3.$$

com $\lambda = 3(\nu - 2)/(\nu - 4)$ e $\alpha_1 < \sqrt{1/\lambda}$.

Na prática, modelos ARCH precisam de ordens altas para fazer bom ajuste dos dados. O modelo GARCH(p, q) foi estabelecido por Bollerslev em 1986 como uma generalização do modelo ARCH, sendo tipicamente mais parcimonioso em quantidade de

parâmetros (MORETTIN, 2017). A extensão se baseia em incluir na equação da volatilidade, além dos quadrados dos retornos, seus próprios valores anteriores.

Definição 4 *As equações do modelo GARCH são:*

$$y_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (2.1.1)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_q h_{t-q} \quad (2.1.2)$$

em que ω , $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ e β_1, \dots, β_q são parâmetros e ε_t é um ruído branco, uma v.a. i.i.d. com $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ e $\text{Var}(\varepsilon_t) = 1$.

Para gerar caudas mais pesadas, costuma-se usar em vez da distribuição normal a distribuição t de Student padronizada ou a t de Student assimétrica, por exemplo.

Assim como no modelo ARCH, os retornos tem média 0 e são não-autocorrelacionados. Para garantir a existência da variância condicional e incondicional dos retornos, $\text{Var}_{t-1}(y_t) > 0$ e $\text{Var}(y_t) > 0$, as seguintes condições devem ser atendidas (MORETTIN, 2017):

$$\begin{aligned} \omega, \alpha_p, \beta_q &> 0 \\ \alpha_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p-1 \\ \beta_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, q-1 \\ \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j &< 1 \end{aligned}$$

Para o processo GARCH geral, sob estacionariedade fraca, a variância é:

$$\text{Var}(y_t) = \frac{\omega}{1 - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j \right)}$$

e é o valor esperado da volatilidade para um horizonte de previsão muito grande,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}(h_{t+h} | y_t, y_{t-1}, \dots) = \text{Var}(y_t) = \frac{\omega}{1 - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j \right)}.$$

Especificamente para o modelo GARCH(1, 1), com $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$, supondo estacionariedade de quarta ordem, a curtose é:

$$K = \frac{\mathbb{E}(y_t^4)}{(\mathbb{E}(y_t^2))^2} = \frac{3[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3$$

e o modelo é capaz de gerar retornos com distribuição de caudas pesadas.

A quantidade $\alpha_1 + \beta_1$ é chamada de persistência do GARCH(1, 1), pois está diretamente relacionada à velocidade do decaimento exponencial das correlações de y_t^2 (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997). Para isto, reescreve-se o modelo como um ARMA(1, 1) em y_t^2 fazendo:

$$h_t = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)y_{t-1}^2 - \beta_1 v_{t-1}$$

com $v_t = y_t^2 - h_t$,

$$\begin{aligned} y_t^2 &= h_t + v_t \\ &= \omega + (\alpha_1 + \beta_1)y_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} \end{aligned}$$

comparando com um modelo ARMA(1, 1) com média μ ,

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

identificamos $\mu = \omega$, $\phi_1 = \alpha_1 + \beta_1$ e $\theta_1 = -\beta_1$. O erro v_t não é ruído branco, apesar de possuir esperança constante igual a 0 e ser não autocorrelacionado, está determinado pelos y_t^2 anteriores.

No processo ARMA(1, 1), pode-se mostrar que (RUPPERT; MATTESON, 2011):

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \frac{(1 + \phi_1 \theta_1)(\phi_1 + \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \theta_1}, \\ \rho(h) &= \phi_1 \rho(h-1) = \phi_1^{h-1} \rho(1), \quad h \in \{2, 3, 4, \dots\} \end{aligned}$$

substituindo pelos coeficientes do GARCH(1, 1), tem-se:

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1 \beta_1 - \beta_1^2)}{1 - 2\alpha_1 \beta_1 - \beta_1^2}, \\ \rho(h) &= (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1} \rho(1), \quad h \in \{2, 3, 4, \dots\} \end{aligned}$$

e a autocorrelação da volatilidade, medida pelos quadrados dos retornos, é de memória curta, decaindo exponencialmente com a defasagem h . Os modelos fracionalmente integrados são uma alternativa para gerar memória longa.

2.2 Processos fracionalmente integrados

ARFIMA

Em séries temporais, $\nabla^d = (1 - B)^d$ é o operador da d -ésima diferença, com d inteiro positivo. Por exemplo, a primeira diferença é $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$, a segunda diferença é $\nabla^2 X_t = (1 - B)^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$ e assim por diante. Esta operação de diferença serve, por exemplo, para transformar uma série não-estacionária X_t em uma série estacionária na d -ésima diferença.

A diferença entre um modelo ARMA (*Autoregressive Moving Average*) e um ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) se dá pelo último ser chamado de integrado por estacionário na série das diferenças. O modelo ARMA(p, q) é:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ (1 - \phi_1 B + \cdots + \phi_p B^p) X_t &= (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q) \varepsilon_t \end{aligned}$$

condensando os polinômios em B como $\Phi_p(B)$ e $\Theta_q(B)$,

$$\Phi_p(B) X_t = \Theta_q(B) \varepsilon_t,$$

e o ARIMA(p, d, q) é:

$$\Phi_p(B) \nabla^d X_t = \Theta_q(B) \varepsilon_t.$$

O que acontece caso se use uma diferença em que d não é um inteiro positivo? Tomando a expansão em série de Taylor do operador,

$$\begin{aligned} \nabla^d &= (1 - B)^d \\ &= 1 - d(1 - B)^{d-1} \Big|_{B=0} \cdot B + d(d-1)(1 - B)^{d-2} \Big|_{B=0} \cdot \frac{B^2}{2!} - \cdots \end{aligned}$$

A j -ésima derivada de $(1 - B)^d$ em $B = 0$ é $(-1)^j d(d-1) \cdots (d-j+1)$. Usando o símbolo de Pochhammer

$$(d)_j = d(d-1)(d-2) \cdots (d-j+1)$$

para $j \geq 1$ e $(d)_0 = 1$, a série de Taylor fica

$$\nabla^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (d)_j}{j!} B^j. \quad (2.2.1)$$

Se n e m são inteiros positivos,

$$(n)_m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

usando a mesma notação para d fracionário, a equação 2.2.1 fica

$$\nabla^d = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-B)^j.$$

Alternativamente, pode-se obter uma expressão usando a função gama, uma função especial definida para todos os números reais que não são inteiros negativos:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

que tem como propriedades:

1. $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$,
2. Se n for inteiro positivo, $\Gamma(n+1) = n!$.

Usando liberdade de notação para fazer $\Gamma(z) = (z-1)!$, com z real,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^j (d)_j}{j!} &= \frac{(-1)^j d(d-1)(d-2) \cdots (d-j+1)}{j!} \\ &= \frac{-d(1-d)(2-d) \cdots (j-d-1)}{j!} \\ &= \frac{(j-d-1) \cdots (2-d)(1-d)(-d)}{j!} \\ &= \frac{(j-d-1) \cdots (2-d)(1-d)(-d)(-d-1)!}{j! (-d-1)!} \\ &= \frac{(j-d-1)!}{j! (-d-1)!} \\ &= \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)}. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\nabla^d = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j B^j$$

em que

$$\begin{aligned} \xi_j &= \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} \\ &= \prod_{k=1}^j \frac{k-1-d}{k} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

para j inteiro positivo e $\xi_0 = 1$.

Definição 5 *O modelo ARFIMA(p, d, q) (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) é um modelo ARIMA onde o índice d pode ser fracionário,*

$$\Phi_p(B)\nabla^d X_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t.$$

Com $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ e todas as raízes de $\Phi_p(B)$ e $\Theta_q(B)$ fora do círculo unitário, o processo será estacionário e inversível (MORETTIN, 2017). Este modelo foi apresentado por Granger e Joyeux, em 1980, e por Hosking em 1981.

Vamos analisar especificamente o ARFIMA(0, d , 0). Neste caso, o processo será inteiramente composto das diferenças fracionárias do ruído branco ε_t , v.a. i.i.d. de média zero e variância σ^2 constante:

$$\nabla^d X_t = \varepsilon_t,$$

então,

$$\begin{aligned} X_t &= (1-B)^{-d}\varepsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j^* B^j \varepsilon_t \end{aligned}$$

onde ξ_j^* é o mesmo da equação 2.2.2 trocando o sinal de d ,

$$\xi_j^* = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)}.$$

Logo o processo pode ser entendido como de média móvel de ordem infinita. Fisher, Calvet e Mandelbrot (1997) notam que assintoticamente, usando a aproximação de Stirling, os

coeficientes tendem a

$$\xi_j^* = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} \sim \frac{1}{\Gamma(d)} j^{d-1}, \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

e que portanto a autocorrelação para uma defasagem h de X_t será

$$\rho(h) \sim h^{2d-1} \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)}.$$

A autocorrelação diminui de forma hiperbólica em vez de exponencial, logo o processo é de memória longa.

FIGARCH

Usando o mesmo método do ARFIMA, Baillie, Bollerslev e Mikkelsen (1996) definem o modelo FIGARCH (*Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) como o modelo GARCH fracionalmente integrado, o que faz com que a volatilidade no modelo passe a ter memória longa.

Para obter o FIGARCH(p, d, q), a equação 2.1.2 que especifica a volatilidade no modelo GARCH(p, q) é modificada da seguinte forma (FISHER; CALVET; MANDELBROT, 1997; BAILLIE; BOLLERSLEV; MIKKELSEN, 1996):

$$\begin{aligned} h_t &= \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p y_{t-p}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_q h_{t-q} \\ &= \omega + (\alpha_1 B + \cdots + \alpha_p B^p) y_t^2 + (\beta_1 B + \cdots + \beta_q B^q) h_t \\ &= \omega + \alpha(B) y_t^2 + \beta(B) h_t, \end{aligned}$$

somando $y_t^2 - \beta(B) y_t^2$ nos dois lados da equação,

$$\begin{aligned} y_t^2 - \beta(B) y_t^2 + h_t &= \omega + \alpha(B) y_t^2 + \beta(B) h_t + y_t^2 - \beta(B) y_t^2 \\ y_t^2 - \alpha(B) y_t^2 - \beta(B) y_t^2 &= \omega + y_t^2 - h_t + \beta(B) h_t - \beta(B) y_t^2 \\ [1 - \alpha(B) - \beta(B)] y_t^2 &= \omega + [1 - \beta(B)] (y_t^2 - h_t). \end{aligned}$$

Se o polinômio $1 - \alpha(B) - \beta(B)$ possuir raiz unitária, o processo GARCH será integrado (IGARCH) e é possível fatorar o polinômio $1 - \alpha(B) - \beta(B)$ como $\phi(B)(1 - B)$, onde $\phi(B)$ é um polinômio de grau igual a $\max(p, q) - 1$. Assim

$$\phi(B)(1 - B) y_t^2 = \omega + [1 - \beta(B)] v_t$$

com $v_t = y_t^2 - h_t$. Trocando na equação acima $(1 - B)$ por $(1 - B)^d = \nabla^d$, com d fracionário, temos a seguinte definição:

Definição 6 *As equações do FIGARCH(p, d, q) são:*

$$y_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$\phi(B)(1 - B)^d y_t^2 = \omega + [1 - \beta(B)] v_t.$$

Nos estudos comparativos do MMAR, iremos avaliar o comportamento de escala de simulações baseadas no modelo FIGARCH(1, d , 1). Neste caso, o modelo é:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)^d y_t^2 = \omega + (1 - \beta_1 B) v_t.$$

A expansão de $(1 - B)^d$, com d fracionário, resultará numa expansão de Taylor com termos ξ_j iguais aos da Equação 2.2.2 do modelo ARFIMA. Quando $d = 0$ o FIGARCH simplifica no modelo GARCH simples, e quando $d = 1$ se torna o modelo IGARCH.

Baillie, Bollerslev e Mikkelsen (1996) notam que $0 \leq \beta_1 < d \leq 1$ é condição necessária e suficiente para que a variância condicional do modelo FIGARCH(0, d , 1) seja positiva. A conclusão é a mesma do modelo ARFIMA, a função de autocorrelação de y_t^2 diminui de forma hiperbolica com as defasagens, sendo de memória longa. A variância incondicional do modelo é indefinida.

3 Modelagem Multifractal dos Retornos Financeiros

Neste capítulo detalha-se o Modelo Multifractal dos Retornos Financeiros (MMAR), conforme os artigos de fundação de Mandelbrot, Fisher e Calvet (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997; FISHER; CALVET; MANDELBROT, 1997).

Definimos o que significa uma série temporal ser multifractal, quais são os postulados do modelo e respectivas consequências. Usando a metodologia da função de partição, busca-se replicar com o R os resultados obtidos por Fisher, Calvet e Mandelbrot (1997) a respeito da multifractalidade da taxa de câmbio Marco/Dólar. A mesma análise será feita para a taxa de câmbio Real/Dólar e para a cotação do índice Bovespa.

3.1 Multifractalidade

Uma série temporal é autossimilar se (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997):

$$X(\delta t) \stackrel{d}{=} \delta^H X(t), \tag{3.1.1}$$

com $\delta > 0$, $X(0) = 0$, t é o tempo e H é o expoente de Hurst, que mede o grau autossimilaridade. Se fizermos $\delta = t^{-1}$, tem-se

$$X(t) \stackrel{d}{=} t^H X(1). \tag{3.1.2}$$

Assim, a distribuição de uma série $X(t)$ autossimilar se relaciona com a de $X(1)$ dependendo do expoente de Hurst.

Exemplo 1 *Seja $B(t)$ é o movimento Browniano simples. Das suas propriedades sabe-se que $B(t) \sim N(0, t) = \sqrt{t} N(0, 1) \stackrel{d}{=} t^{1/2} B(1)$. Assim, pela equação 3.1.2, o movimento Browniano é autossimilar com expoente de Hurst igual a $\frac{1}{2}$.*

Uma série autossimilar é dita monofractal. Um processo multifractal geral é tal que (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997): i) seus incrementos são estacionários e ii) os momentos absolutos de ordem q satisfazem a lei de potência

$$\mathbb{E}(|X(t)|^q) = c(q)t^{\tau(q)+1}, \tag{3.1.3}$$

onde c e τ são funções determinísticas de q . $\tau(q)$ é chamada de função de escala e é o

objeto central de onde se estimam as estatísticas de multifractalidade de séries temporais. Fazendo $q = 0$ na equação acima, tem-se que em processos multifractais $\tau(0) = -1$. Usando a desigualdade de Hölder, Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997) mostram que a função de escala de um processo multifractal é côncava, isto é, está acima do segmento de reta que conecta dois pontos do seu gráfico.

Subjacente a estas condições, Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997) notam que a série $X(t)$ multifractal é caracterizada por:

$$X(\delta t) \stackrel{d}{=} M(\delta)X(t), \quad (3.1.4)$$

$$X(t + \delta h) - X(t) \stackrel{d}{=} M(\delta) [X(t + h) - X(t)], \quad (3.1.5)$$

$$M(ab) \stackrel{d}{=} M_1(a)M_2(b), \quad (3.1.6)$$

onde M é uma função aleatória da escala. A equação 3.1.4 é análoga à equação 3.1.1, que relaciona as distribuições usando diferentes escalas de tempo. A equação 3.1.5 descreve a transformação de escala dos incrementos. A equação 3.1.6 é uma consequência da Teoria da Medida para medidas autossimilares, com M_1 e M_2 independentes e com a mesma distribuição de M .

No caso da série ser autossimilar,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X(t)|^q) &= \mathbb{E}(|t^H X(1)|^q) \\ &= t^{Hq} \mathbb{E}(|X(1)|^q) \\ &= c(q) t^{\tau(q)+1}. \end{aligned}$$

Comparando as últimas duas linhas, $c(q) = \mathbb{E}(|X(1)|^q)$ e $\tau(q) = Hq - 1$. Assim, para um processo autossimilar

$$\tau(1/H) = 0. \quad (3.1.7)$$

Estabelecidos esses conceitos, vamos agora apresentar o modelo proposto por Mandelbrot e seus colaboradores que usa os conceitos de multifractalidade para gerar séries temporais de caudas pesadas, memória longa na volatilidade e que seja consistente entre diferentes escalas de tempo.

3.2 O Modelo Multifractal

Seja $\{P(t), 0 \leq t \leq T\}$ a série temporal do preço de um ativo financeiro. Se $X(t)$ é o log-retorno até o momento t ,

$$X(t) = \ln \left(\frac{P(t)}{P(0)} \right) = \ln P(t) - \ln P(0), \quad (3.2.1)$$

Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997) estabelecem MMAR partindo das seguintes condições:

Pressuposto 1 - $X(t) = B_H(\theta(t))$ é um processo composto,

- $B_H(t)$ é um movimento Browniano fracionário, com expoente de Hurst H ,
- $\theta(t)$ é o tempo de transação estocástico;

Pressuposto 2 - $\theta(t)$ é a função de distribuição acumulada da medida multifractal, definida no intervalo de tempo $[0, T]$;

Pressuposto 3 - Os processos $B_H(t)$ e $\theta(t)$ são independentes.

Sob as condições deste modelo, $X(t)$ será multifractal com incrementos estacionários.

O movimento Browniano fracionário foi estabelecido por Mandelbrot e van Ness em 1968 (MANDELBROT; NESS, 1968). É um processo estocástico gaussiano autosimilar, $B_H(t) \stackrel{d}{=} t^H B_H(1)$, com $0 < H < 1$ e trajetórias quase certamente contínuas. Seus incrementos são estacionários, com a seguinte função covariância (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997):

$$\mathbb{E}(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (3.2.2)$$

Quando $H = \frac{1}{2}$ o movimento Browniano fracionário é o movimento Browniano comum e os incrementos são independentes. Quando $\frac{1}{2} < H < 1$, os incrementos tem autocorrelação positiva, e visualmente se caracteriza por períodos de tendência. Quando $0 < H < \frac{1}{2}$, apresentam autocorrelação negativa, e visualmente possui característica de reversão à média (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997).

O processo ARFIMA(0, d , 0) descrito no capítulo anterior, com ϵ ruído branco gaussiano, é uma aproximação discreta de B_H , com $d = H - 1/2$ (FISHER; CALVET; MANDELBROT, 1997). Assim como o ARFIMA, o movimento Browniano fracionário é de memória longa (quando $H \neq 1/2$), com autocorrelação que decai hiperbolicamente.

Para verificar isso, vamos considerar o incremento com largura de uma unidade de tempo,

$$Y(t) = B_H(t+1) - B_H(t)$$

tal que $Y(0) \stackrel{d}{=} B_H(1)$. Da estacionariedade dos incrementos, sua função de autocovariância é:

$$\begin{aligned} \gamma_Y(h) &= \mathbb{E}(Y(t)Y(t+h)) \\ &= \mathbb{E}(Y(0)Y(h)) \\ &= \mathbb{E}[B_H(1)(B_H(h+1) - B_H(h))] \\ &= \mathbb{E}[B_H(1)B_H(h+1) - B_H(1)B_H(h)], \end{aligned}$$

substituindo a equação 3.2.2,

$$\gamma_Y(h) = \frac{1}{2} \left\{ [1 + (h+1)^{2H} - h^{2H}] - [1 + h^{2H} - (h-1)^{2H}] \right\}.$$

Fazendo a expansão de Taylor $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \dots$

$$\begin{aligned} (h \pm 1)^{2H} &= h^{2H} \left(1 \pm \frac{1}{h} \right)^{2H} \\ &\approx h^{2H} \left(1 \pm \frac{2H}{h} + \frac{2H(2H-1)}{2h^2} \right) \end{aligned}$$

obtem-se que a covariância entre os incrementos é

$$\begin{aligned} \gamma_Y(h) &= \frac{1}{2} \left\{ 2h^{2H} + h^{2H} \frac{2H(2H-1)}{h^2} - 2h^{2H} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ h^{2H} \frac{2H(2H-1)}{h^2} \right\} \\ &= H(2H-1)h^{2H-2} \end{aligned}$$

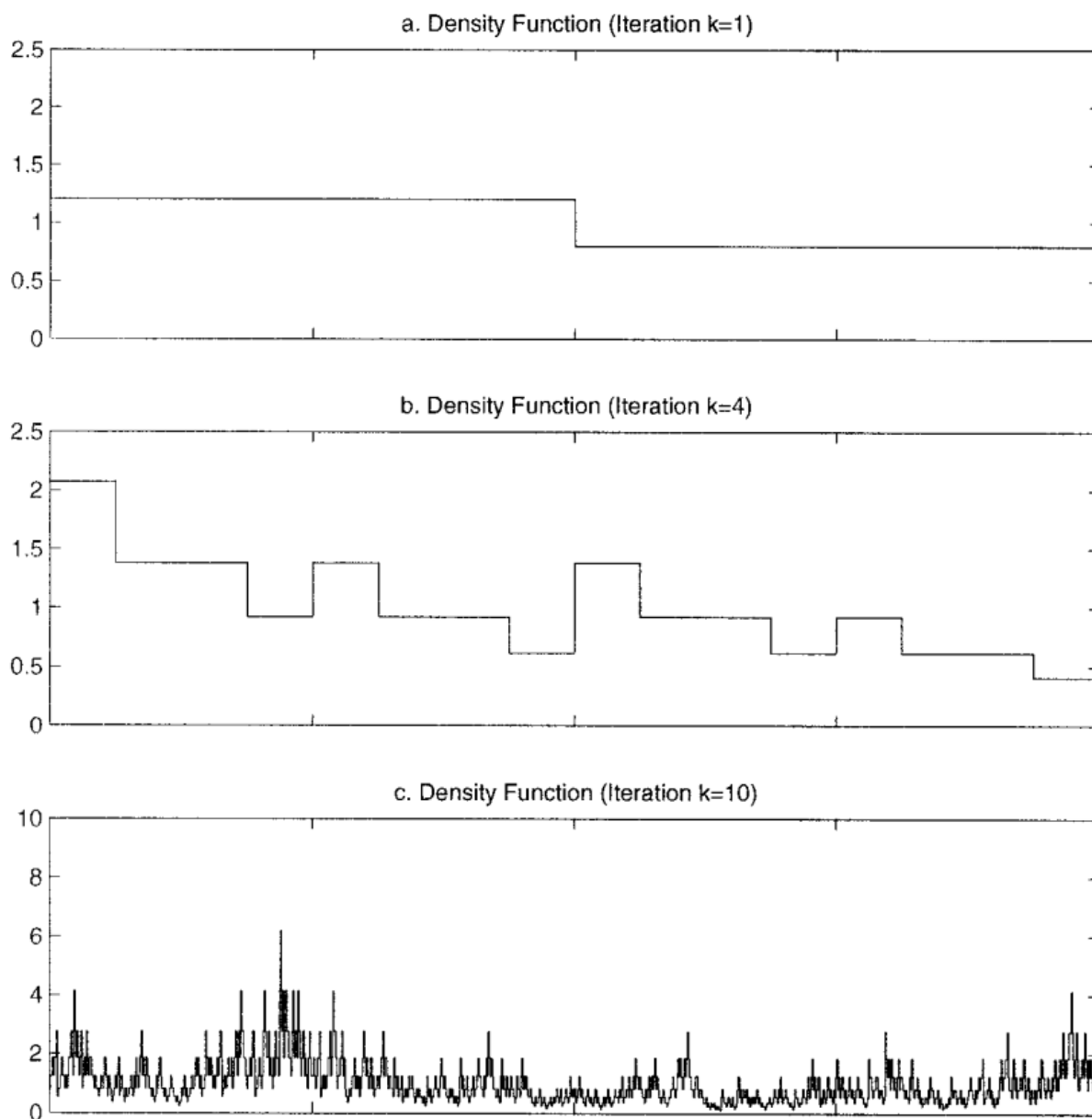
e as correlações decaem hiperbolicamente, sendo positivas para $1/2 < H < 1$ e negativas para $0 < H < 1/2$.

Comparando com a do processo ARFIMA do capítulo anterior,

$$\rho(h) \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} h^{2d-1}.$$

obtem-se a relação $d = H - \frac{1}{2}$.

Figura 1: Medida multifractal binomial



Fonte: Calvet e Fisher (2002)

Pelas propriedades acima, B_H pode reproduzir séries com tendência no preço. A autossimilaridade, uma dilatação ou contração única não-aleatória da escala, é uma forma muito restrita de simetria. Por exemplo, em dados reais a agregação dos retornos diários para gerar retornos semanais ou mensais leva à distribuições menos concentradas no pico e com caudas menos pesadas (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997; CALVET; FISHER, 2002). Além disso, pela gaussianidade sua distribuição não é de cauda pesada, e a memória longa está nos incrementos (retornos) e não no valor absoluto ou no quadrado dos incrementos (volatilidade). Estas características são obtidas pela composição com o tempo de transação estocástico, $\theta(t)$ (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997).

A medida multifractal inicia como uma medida uniforme em $[0, T]$. De forma iterativa, a medida é dividida em subintervalos e sua massa é redistribuída de acordo com algum multiplicador aleatório, num processo chamado de cascata multiplicativa, com origens na geofísica (CALVET; FISHER, 2002; MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997). A Figura 1 acima é um exemplo de como se dá esse processo, dividindo a massa de forma binomial.

Vamos descrever o exemplo de Calvet e Fisher (2002) a respeito da medida multifractal binomial. Considere uma medida uniforme no intervalo $[0, 1]$ de massa 1, $\mu[0, 1] = 1$, e duas quantidades $m_0, m_1 > 0$ com $m_0 + m_1 = 1$ e $m_0 \neq m_1$. Dividimos o intervalo original em $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$ e faz-se um ensaio da v.a. Bernoulli(p). Em caso de sucesso, o intervalo da esquerda receberá a massa m_0 , em caso de fracasso receberá a massa m_1 , ficando o intervalo da direita com o valor complementar. Em caso de sucesso, fica definida uma medida μ_1 com $\mu_1[0, 1/2] = m_0$ e $\mu_1[1/2, 1] = m_1$.

Na próxima etapa, os dois intervalos obtidos são subdivididos em quatro e se fazem dois ensaios de Bernoulli para distribuir a massa entre os novos intervalos à esquerda e direita. Supondo que ambos tenham sido sucesso, a medida μ_2 assim obtida é tal que:

$$\begin{aligned} \mu_2[0, 1/4] &= m_0 m_0, & \mu_2[1/4, 1/2] &= m_0 m_1, \\ \mu_2[1/2, 3/4] &= m_1 m_0, & \mu_2[3/4, 1] &= m_1 m_1. \end{aligned}$$

A Figura 1 ilustra esse processo após uma, quatro e dez iterações com $m_0 = 0,6$ e $p = 1/2$. O tempo de transação estocástico será a função de distribuição acumulada da medida definida por esse processo.

Os períodos de massa concentrada são os de maior volatilidade, dando origem às caudas pesadas. A sucessão temporal dos *clusters* de volatilidade leva à memória longa na volatilidade. Pelo processo de construção, estão presentes em todas as escalas de tempo (CALVET; FISHER, 2002).

Como o tempo de transação estocástico $\theta(t)$ é multifractal, ele possui uma função de escala própria τ_θ .

Sua relação com a função de escala τ do processo $X(t)$ do MMAR é (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997):

$$\tau(q) = \tau_\theta(Hq). \quad (3.2.3)$$

Reproduz-se abaixo a prova que está no apêndice do artigo, usando a propriedade de

esperança condicional que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|Y]]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X(t)|^q) &= \mathbb{E} [\mathbb{E} (|X(t)|^q | \theta(t) = u)] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} (|B_H(\theta(t))|^q | \theta(t) = u)]. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Pelo Pressuposto 3, B_H e θ são independentes, e vale que

$$\mathbb{E} [|B_H(\theta(t))|^q | \theta(t) = u] = \mathbb{E} [|B_H(u)|^q | \theta(t) = u],$$

como B_H é autossimilar, $B_H(u) \stackrel{d}{=} u^H B_H(1) \stackrel{d}{=} \theta(t)^H B_H(1)$, e

$$\mathbb{E} [|B_H(\theta(t))|^q | \theta(t) = u] = \theta(t)^{Hq} \mathbb{E} (|B_H(1)|^q).$$

Substituindo a equação acima em 3.2.4, usando a independência entre B_H e θ , usando a não-negatividade de θ , e também a equação 3.1.3 referente aos momentos de um processo multifractal, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (|X(t)|^q) &= \mathbb{E} (\theta(t)^{Hq}) \mathbb{E} (|B_H(1)|^q) \\ &= c_\theta(Hq) t^{\tau_\theta(Hq)+1} \mathbb{E} (|B_H(1)|^q) \\ &= c(q) t^{\tau(q)+1}. \end{aligned}$$

comparando as últimas duas linhas, prova-se que $\tau(q) = \tau_\theta(Hq)$, e também se obtém que $c(q) = c_\theta(Hq) \mathbb{E} (|B_H(1)|^q)$.

Dada uma série temporal financeira, como usar os dados observados para verificar que ela realmente é multifractal? Como dito na seção anterior, $\tau(q)$ é o objeto central de estimação. Usando a equação 3.1.3, que relaciona o momento absoluto com o tempo decorrido, podemos usar o método da função de partição para estimar a função de escala (FISHER; CALVET; MANDELBROT, 1997).

Seja $X(t, \Delta t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ um incremento da série. Como os incrementos são estacionários e $X(0) = 0$, temos:

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{d}{=} X(\Delta t),$$

portanto, usando a equação 3.1.3,

$$\mathbb{E} (|X(t, \Delta t)|^q) = c(q) \Delta t^{\tau(q)+1}. \tag{3.2.5}$$

Tomando uma série observada no intervalo $[0, T]$ e particionando em N intervalos iguais de largura Δt , a função de partição S_q é calculada como (FISHER; CALVET; MANDELBROT, 1997):

$$S_q(T, \Delta t) = \sum_{i=0}^{N-1} |X(i\Delta t, \Delta t)|^q. \quad (3.2.6)$$

Já que $X(t, \Delta t) \stackrel{d}{=} X(\Delta t)$, toma-se a esperança:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_q(T, \Delta t)) &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}(|X(\Delta t)|^q) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} c(q) \Delta t^{\tau(q)+1} \\ &= Nc(q) \Delta t^{\tau(q)+1}, \end{aligned}$$

e depois o logaritmo

$$\ln \mathbb{E}(S_q(T, \Delta t)) = \ln T + \ln c(q) + \tau(q) \ln \Delta t. \quad (3.2.7)$$

Assim, para cada ordem q e usando diversas janelas de tempo, pode-se estimar o valor da função de escala como o coeficiente angular da regressão linear simples de $\ln S_q$ contra $\ln \Delta t$.

Fisher, Calvet e Mandelbrot (1997) notam que, pela desigualdade de Jensen e pelo logaritmo ser uma função côncava, tratar a equação acima como uma regressão tem como consequência os erros da regressão terem valor esperado negativo.

O tempo de transação estocástico é multifractal, e por ser uma função de distribuição acumulada em $[0, T]$ é positivo e não-decrescente. Assim, seus incrementos são sempre maiores ou iguais a 0 e sua soma deve ser 1. Usando a função de partição para θ com $q = 1$, temos:

$$S_1^{(\theta)}(T, \Delta t) = \sum_{i=0}^{N-1} |\theta(i\Delta t + \Delta t) - \theta(i\Delta t)| = 1,$$

pela equação 3.2.7,

$$\ln \mathbb{E}\left(S_1^{(\theta)}(T, \Delta t)\right) = \ln T + \ln c_\theta(1) + \tau_\theta(1) \ln \Delta t = 0.$$

Como esta relação vale para qualquer escolha de $\Delta t = T/N$, com N inteiro positivo,

tem-se

$$\tau_\theta(1) = 0. \tag{3.2.8}$$

Retomando a equação 3.2.3

$$\tau_\theta(1) = \tau_\theta(Hq) = \tau(1/H) = 0 \tag{3.2.9}$$

assim, séries multifractais que atendem os pressupostos do MMAR também possuem a propriedade da equação 3.1.7 para séries autossimilares. Pela equação acima, o índice H de $X(t) = B_H(\theta(t))$ será o inverso do valor de q tal que o coeficiente angular da regressão 3.2.7 é 0.

3.3 Aplicações

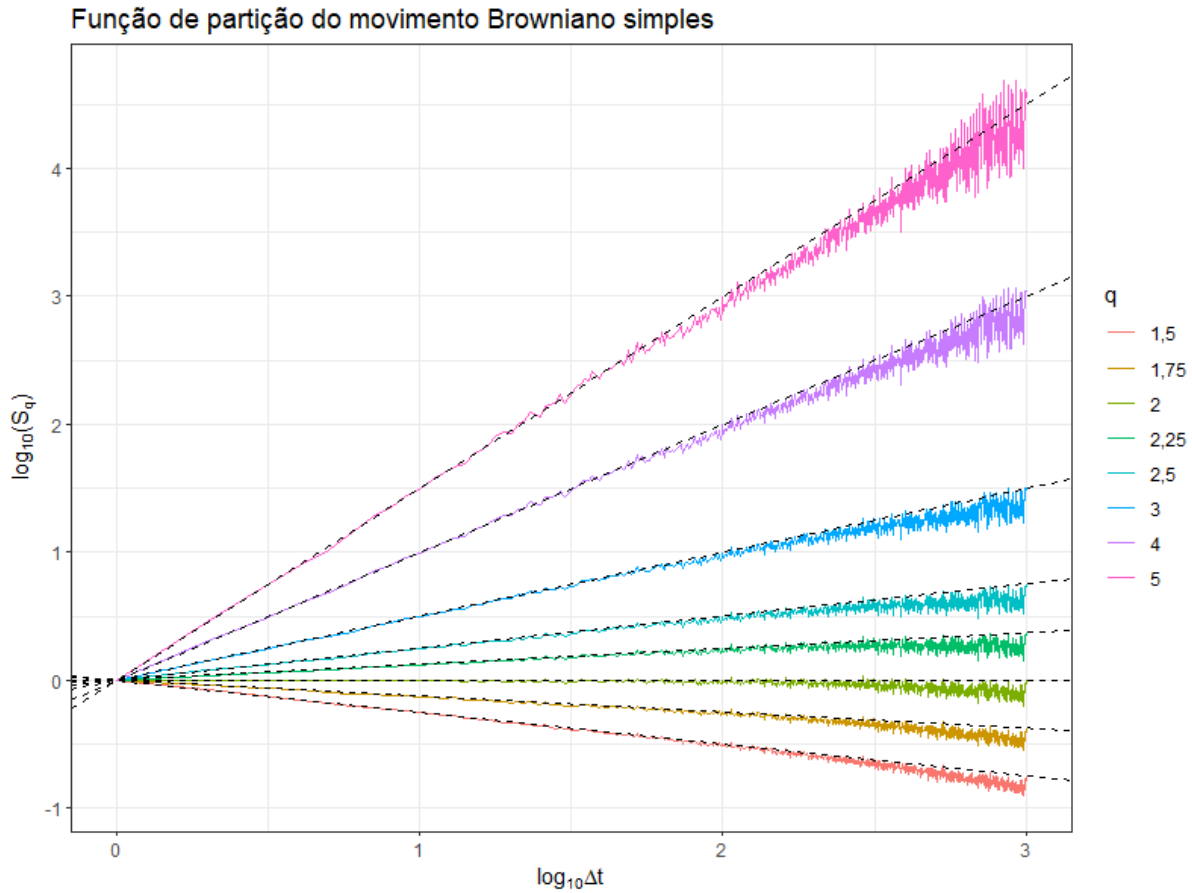
Funções de escala do movimento Browniano simples e fracionário

Usando a metodologia da função de partição, vamos reproduzir com o R a figura 2 e parte da figura 4 do artigo Fisher, Calvet e Mandelbrot (1997). Os autores simularam o movimento Browniano simples e o movimento Browniano fracionário, com $H = 0,4$ e $H = 0,8$, usando 10^5 incrementos de tamanhos iguais e usaram janelas de $\Delta t = 1$ até 1000 defasagens para alguns momentos de ordem $q = 1,5$ até 5. Os dados serão obtidos com funções que geram movimentos Brownianos do pacote *somebm* (HUANG, 2013), sempre usando a semente aleatória 0 para reprodutibilidade.

Para que todos os gráficos comecem no intercepto 0, para cada q o valor calculado da função de partição é padronizado dividindo pelo valor calculado em $\Delta t = 1$. As linhas tracejadas possuem a inclinação teórica prevista para o caso monofractal, $\tau(q) = Hq - 1$.

Começando com o movimento Browniano simples, com $H = 0,5$, temos:

Figura 2: Comportamento de escala para o Movimento Browniano simples



A tabela abaixo lista para cada ordem de momento q o valor estimado da função de escala e o valor previsto pelo caso monofractal.

Tabela 1: Medidas para o movimento Browniano

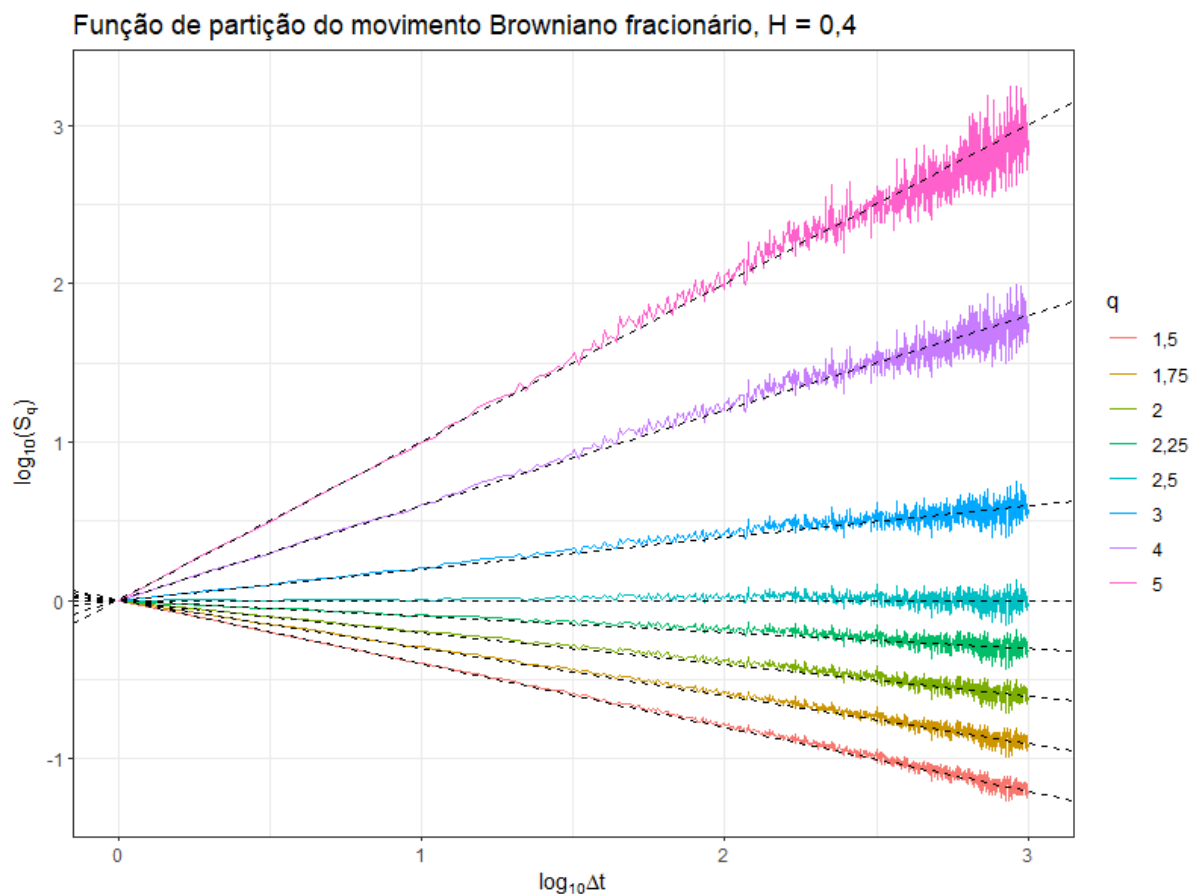
q	τ calculado	τ teórico
1,5	-0,306	-0,25
1,75	-0,186	-0,125
2	-0,066	0
2,25	0,056	0,125
2,5	0,178	0,25
3	0,426	0,5
4	0,929	1
5	1,439	1,5

A variabilidade da função de partição cresce com o aumento do tamanho das

janelas. Os valores calculados foram consistentemente abaixo do valor previsto pela teoria.

Passando para o movimento Browniano fracionário com $H = 0,4$, temos:

Figura 3: Comportamento de escala do movimento Browniano fracionário, $H = 0,4$



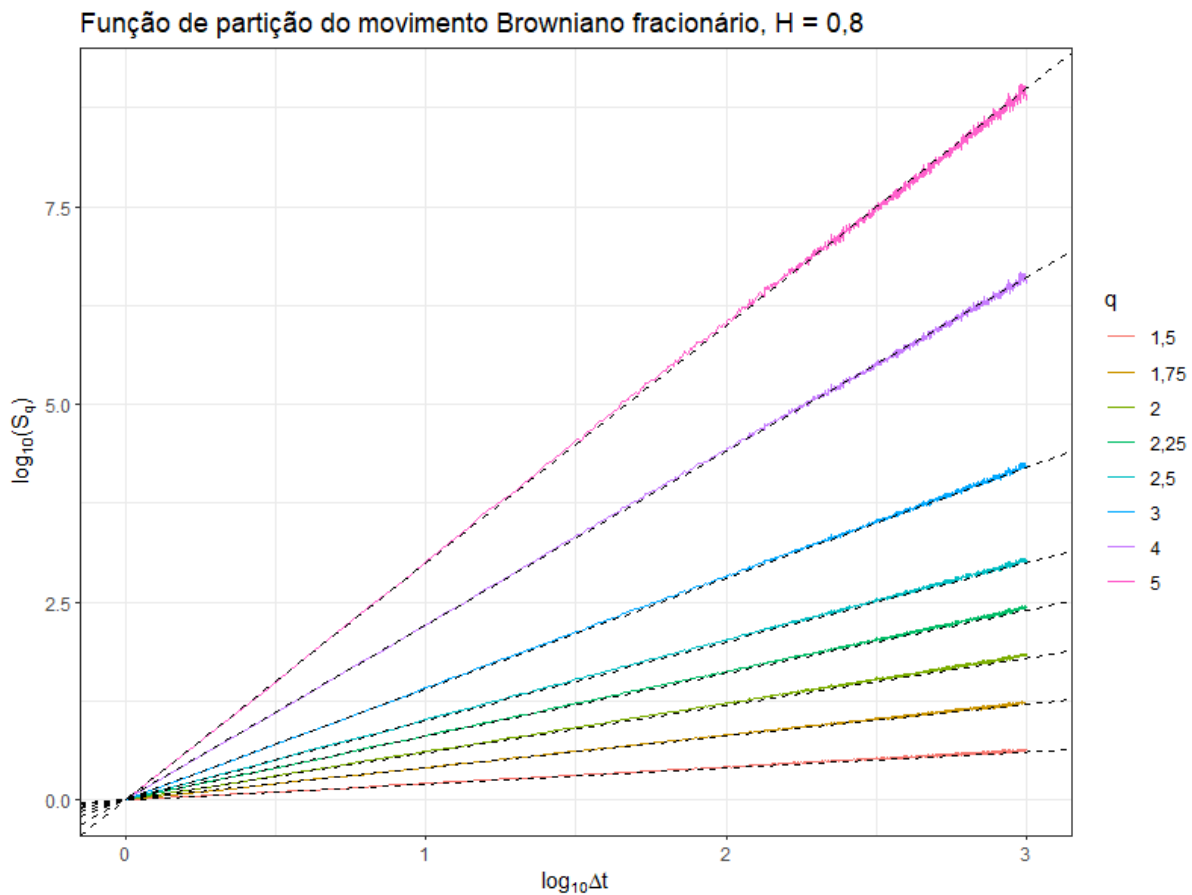
Fonte: Elaboração própria

Assim como antes, a variabilidade cresce com o número de defasagens. Em menor grau, os valores calculados também foram consistentemente abaixo do valor previsto pela teoria, sendo mais perceptível nos momentos de ordem mais alta.

Tabela 2: Medidas para o movimento Browniano fracionário com $H = 0,4$

q	τ calculado	τ teórico
1,5	-0,410	-0,4
1,75	-0,313	-0,3
2	-0,216	-0,2
2,25	-0,119	-0,1
2,5	-0,023	0
3	0,168	0,2
4	0,547	0,6
5	0,919	1

Por fim, para o caso $H = 0,8$:

Figura 4: Comportamento de escala do movimento Browniano fracionário, $H = 0,8$ 

Com H perto de 1 este movimento Browniano é o que apresenta maior grau de regularidade, e a função de partição é a menos variável e mais ajustada ao predito pela

teoria.

Tabela 3: Medidas para o movimento Browniano fracionário com $H = 0,8$

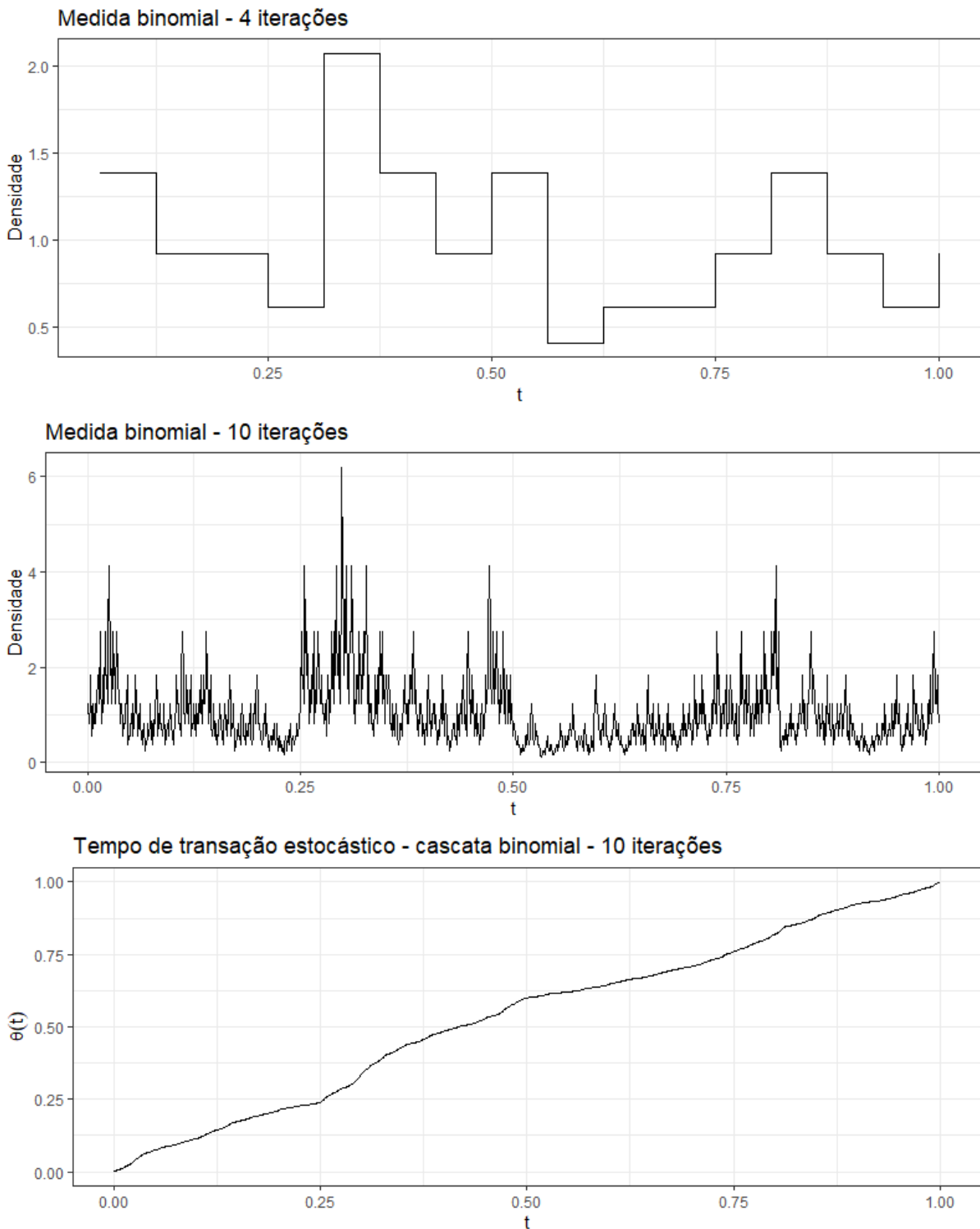
q	τ calculado	τ teórico
1,5	0,207	0,2
1,75	0,408	0,4
2	0,608	0,6
2,25	0,807	0,8
2,5	1,005	1
3	1,400	1,4
4	2,179	2,2
5	2,946	3

Tempo de transação estocástico usando a cascata binomial

Baseado na Figura 1 de Calvet e Fisher (2002), construímos $\theta(t)$ usando o processo da cascata binomial conservativa, com $m_0 = 0,6$ e alocação de massa equiprovável. Usando 4 e 10 iterações, o intervalo $[0,1]$ é particionado em 16 e 1024 subintervalos.

A densidade da medida binomial obtida e a respectiva função de densidade acumulada estão na página seguinte. Nota-se a sucessão de regiões concentradas de picos, associadas a maior volatilidade.

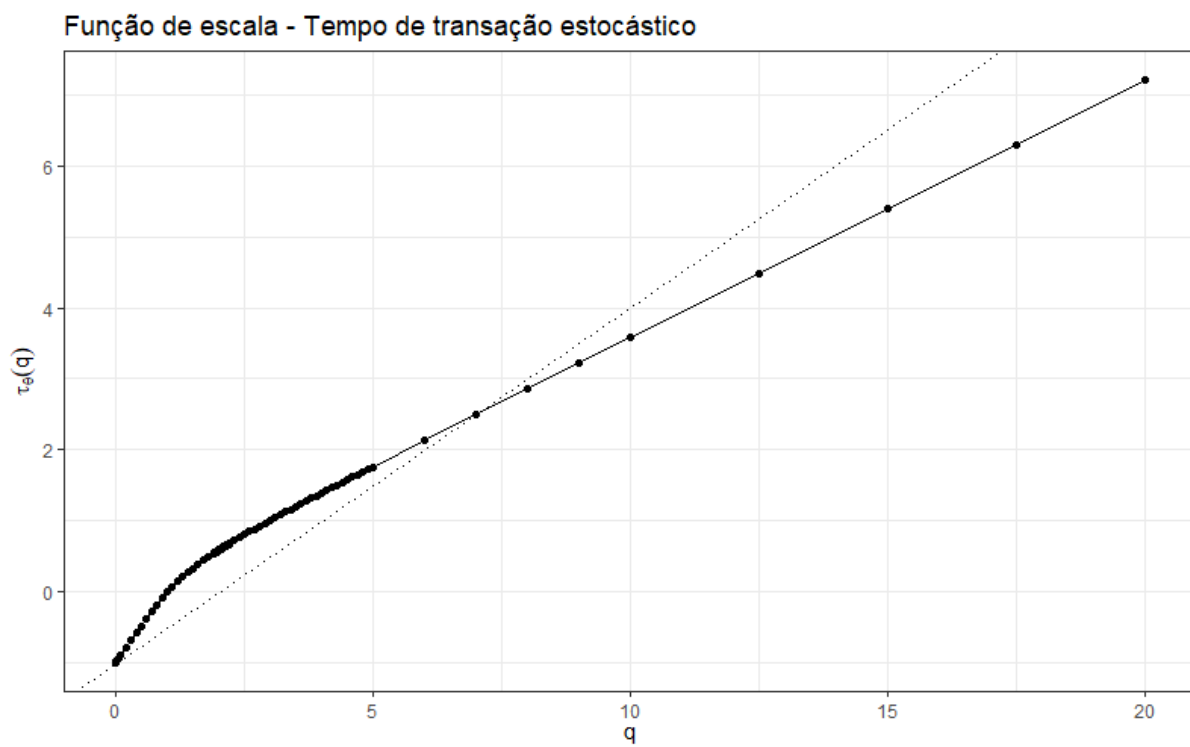
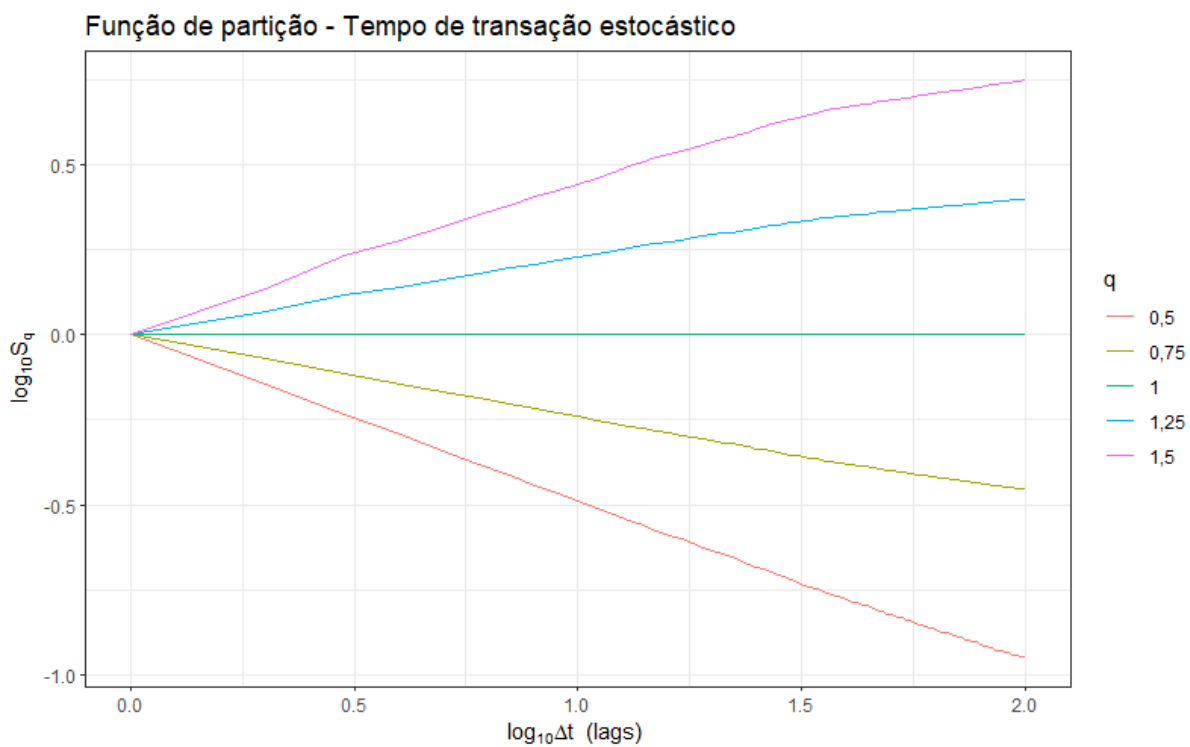
Figura 5: Medida binomial e Tempo de transação Estocástico



Fonte: Elaboração própria

Como posto pela equação 3.2.9, a função de escala $\tau_\theta(1)$ é 0 e sua forma côncava indica que o processo gera múltiplas simetrias de escala, e não apenas autossimilaridade.

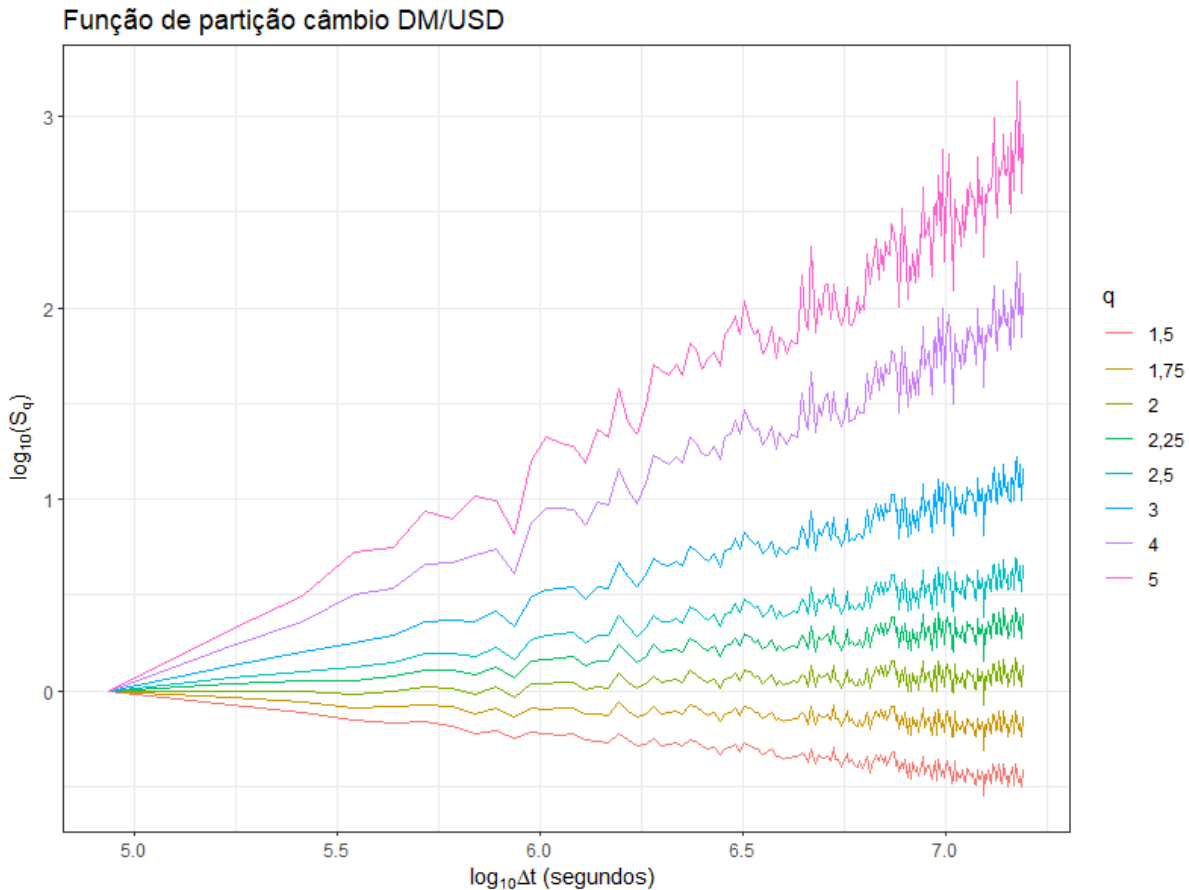
Figura 6: Comportamento e Função de escala de θ



Fonte: Elaboração própria

Função de escala para a taxa de câmbio DM/USD

Figura 7: Comportamento de escala da taxa de câmbio DM/USD



Fisher, Calvet e Mandelbrot (1997) analisam a multifractalidade da taxa de câmbio Marco alemão/Dólar americano (DM/USD), entre as datas de 04/06/1973 até 31/12/1996, num total de 6119 observações excluindo sábados, domingos e os feriados de natal e ano novo. Os dados deste trabalho foram obtidos do site do Bundesbank¹, o banco central alemão.

No mesmo artigo, a respeito do câmbio Iene japonês/Dólar americano (JPY/USD), os autores notam que removendo os dados faltantes ou substituindo o dado faltante com a cotação do dia anterior os resultados não são diferentes. Assume-se que o mesmo vale para a taxa DM/USD e substituímos 210 dados faltantes pela cotação do dia anterior.

Como na aplicação anterior, a Figura 7 acima é o gráfico da função de partição

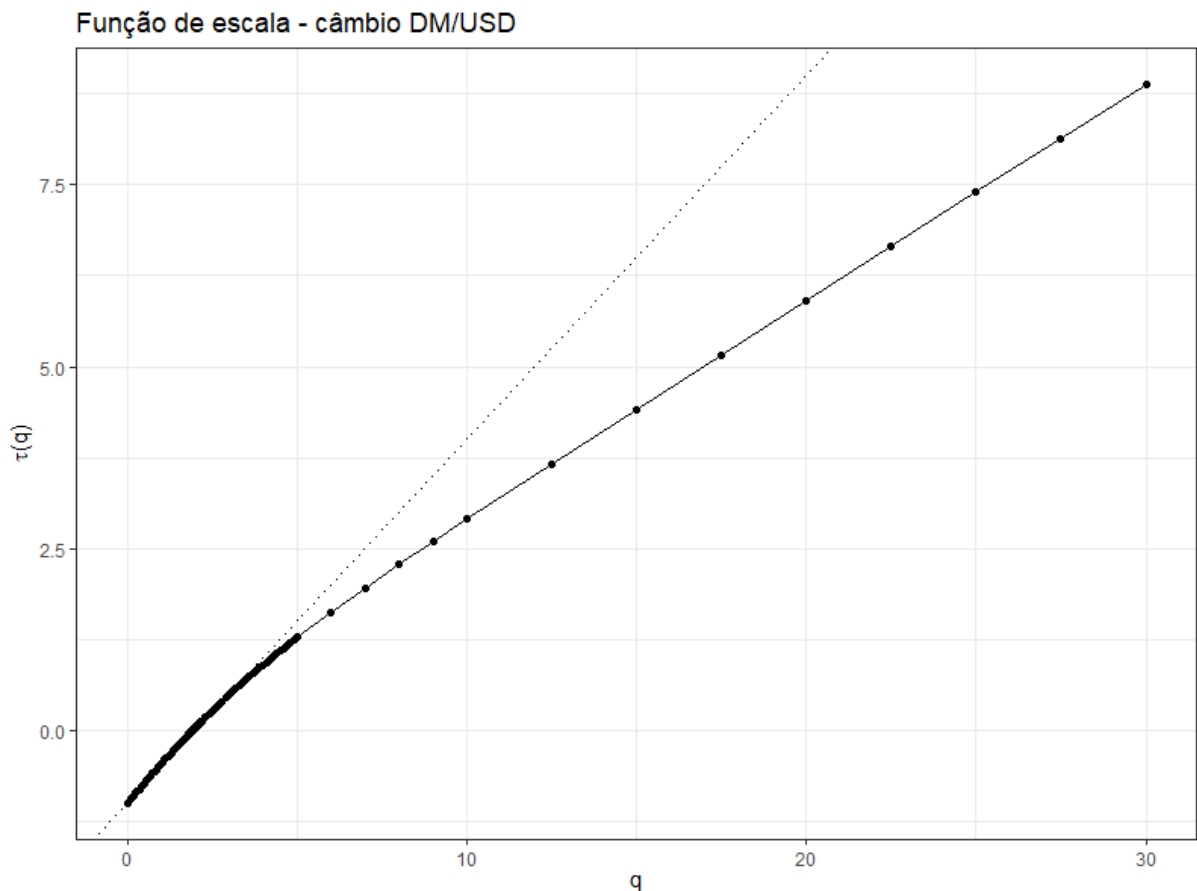
¹https://www.bundesbank.de/dynamic/action/en/statistics/time-series-databases/time-series-databases/759784/759784?listId=www_s331_b01011.3

padronizada, baseada na figura 7 dos autores, usando janelas de 1 até 180 dias e momentos de ordem 1,5 até 5. Como não se dispõe dos mesmos dados intradiários, o gráfico começa em $\Delta t = 1 \text{ dia} = 8,64 \times 10^4$ segundos.

Variando q entre 1,8 e 2 em incrementos de 0,001, estimamos $\tau(1,905) \approx 0$, então o expoente de Hurst do movimento Browniano fracionário para estes dados, de acordo com o MMAR, é $H = 1,905^{-1} = 0,525$, indício que a série de preços no período tinha comportamento de tendência. Os autores encontraram $H = 1,88^{-1}$, potenciais explicações para diferença são o uso de dados intradiários, os dados originais podem não estar faltando, e também a forma como se usam as janelas quando a janela Δt não divide exatamente a largura do intervalo.

Replicando abaixo a figura 10 do artigo dos autores, o gráfico da função de escala é côncavo, evidência de multifractalidade, estritamente crescente, com $\tau(0) = -1$, e afastado da reta pontilhada do movimento Browniano simples, $\tau(q) = q/2 - 1$. Os autores notam que usando o método de mínimos quadrados ponderados para estimar $\tau(q)$ as mudanças no valor são muito pequenas.

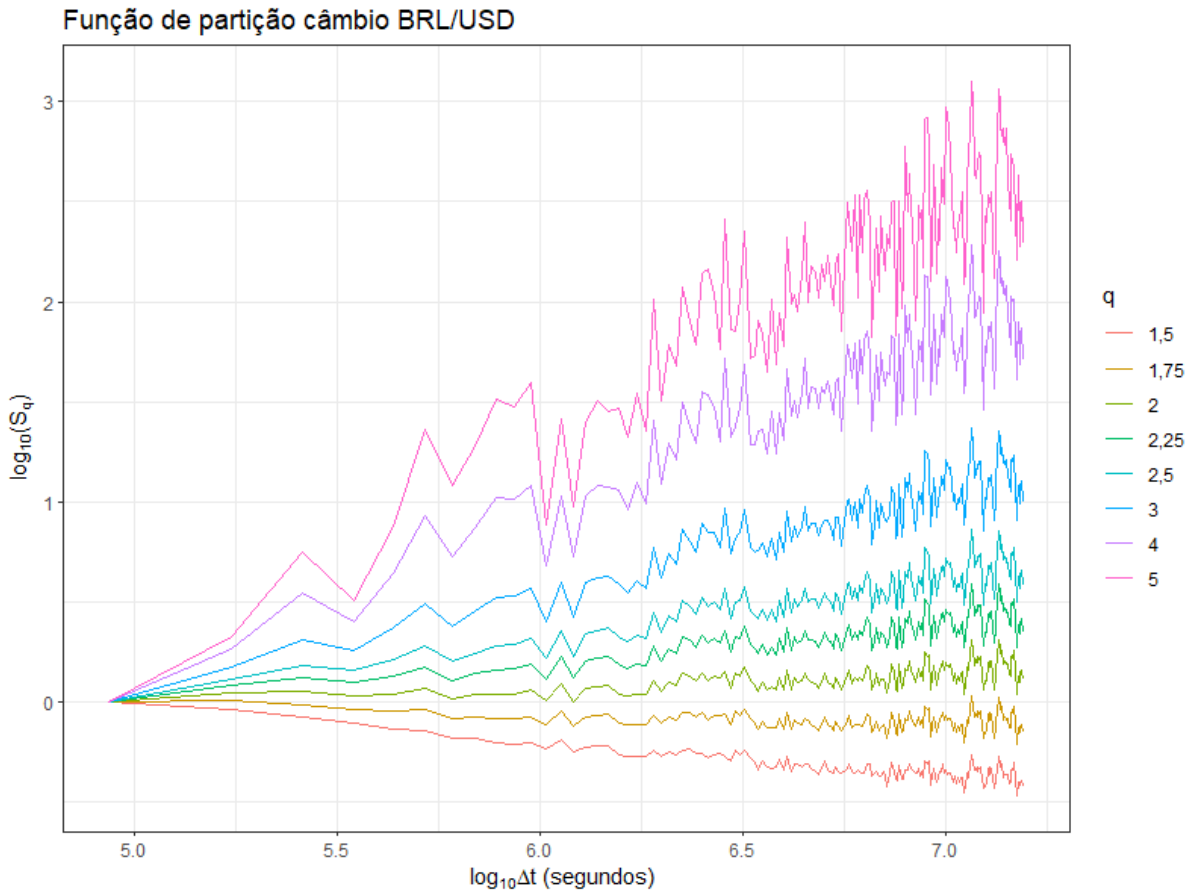
Figura 8: Função de escala $\tau(q)$ da taxa de câmbio DM/USD



Fonte: Elaboração própria

Função de escala para a taxa de câmbio BRL/USD - dados diários

Figura 9: Comportamento de escala da taxa de câmbio BRL/USD

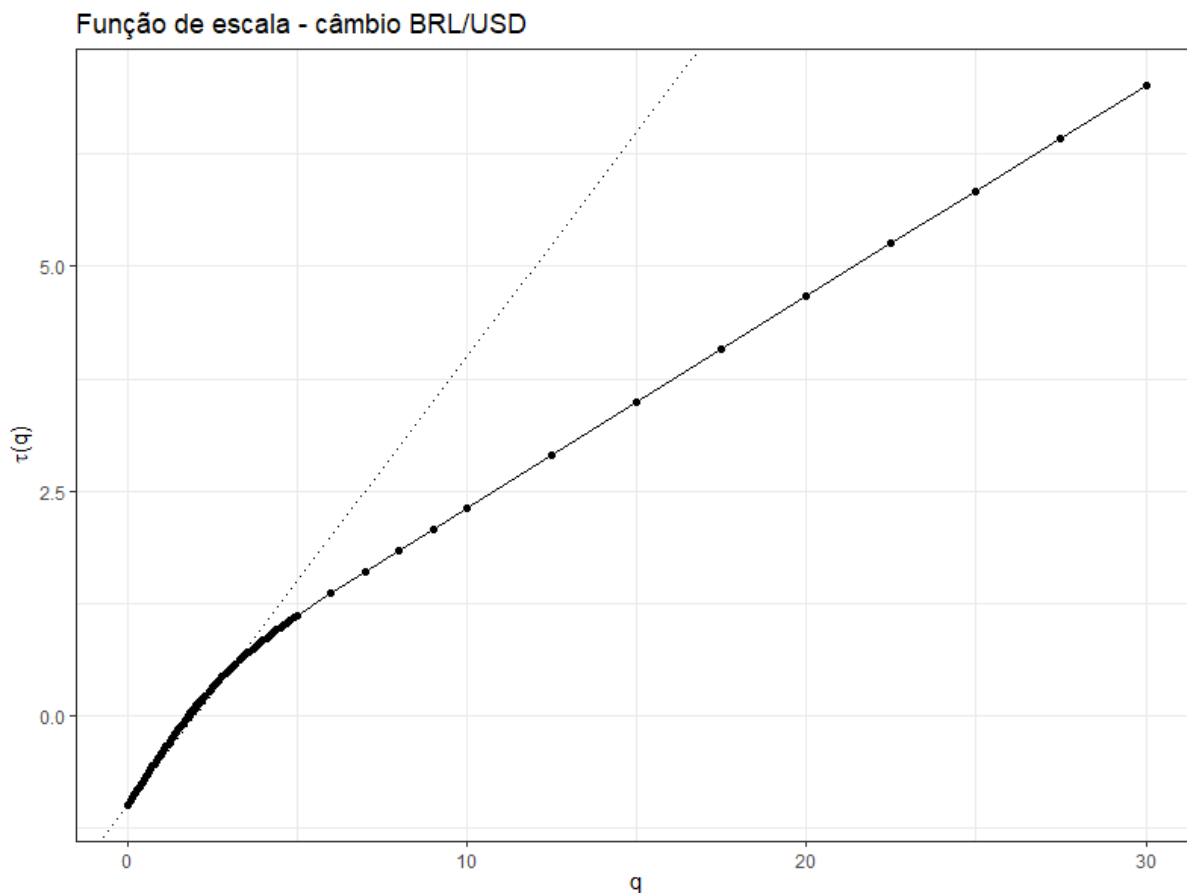


Para analisar a multifractalidade da taxa de câmbio Real brasileiro/Dólar americano (BRL/USD), toma-se os dados entre as datas de 18/01/1999, início do regime de câmbio flutuante, até 23/09/2021, num total de 5689 observações excluindo sábados, domingos e os feriados brasileiros. Os dados foram obtidos do sistema gerenciador de séries temporais do Banco Central do Brasil².

Como antes, a Figura 9 acima é o gráfico da função de partição padronizada, usando janelas de 1 até 180 dias e momentos de ordem 1,5 até 5. Estimamos $\tau(1,808) \approx 0$, então o expoente de Hurst estimado de acordo com o MMAR é $H = 1,808^{-1} = 0,553$, indício que no período o comportamento predominante da taxa de câmbio foi de tendência em vez de reversão à média.

²(<https://www3.bcb.gov.br/sgspub/>)

Figura 10: Função de escala $\tau(q)$ da taxa de câmbio BRL/USD



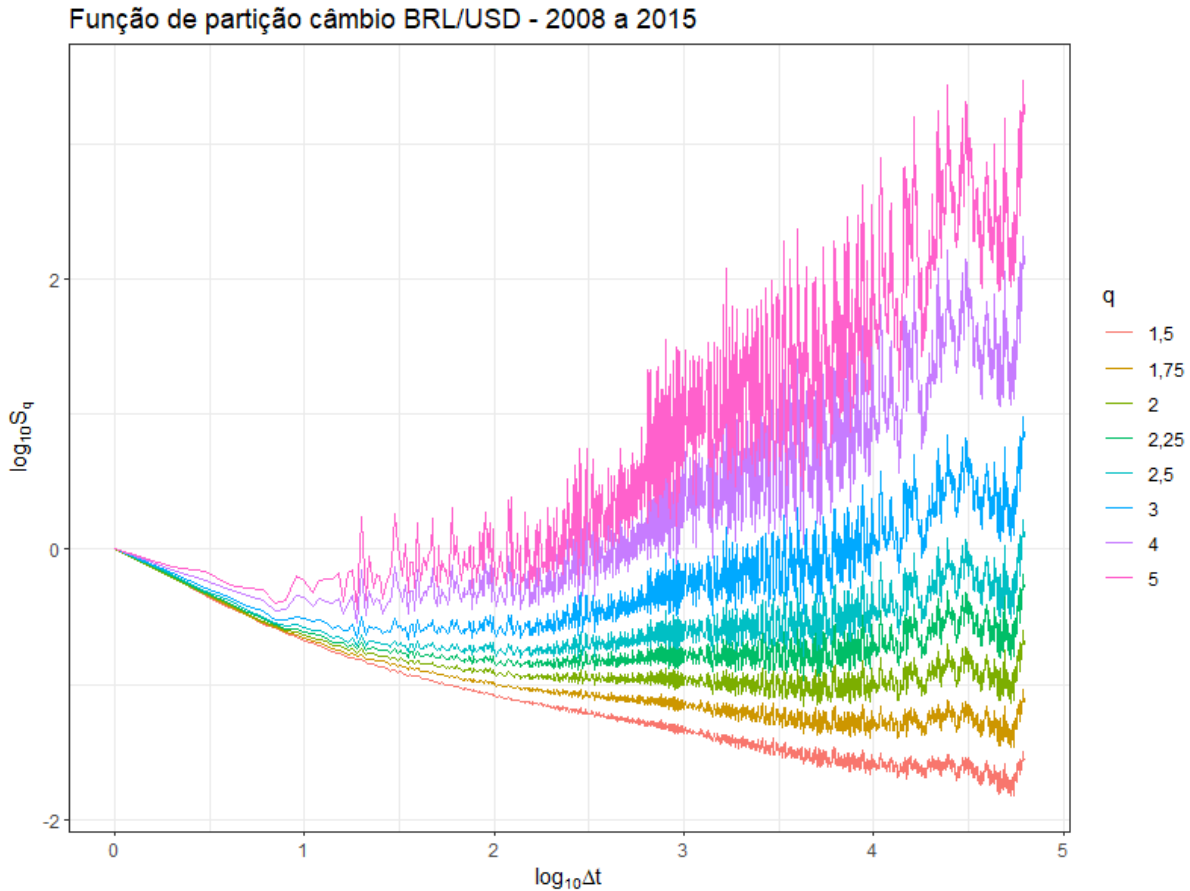
Fonte: Elaboração própria

Função de escala para a taxa de câmbio BRL/USD - dados intradiários

O banco de dados intradiário foi fornecido por Tick Data³ e consiste do registro de 1,7 milhões de negócios ocorridos entre os anos de 2008 a 2015. Cada negociação intradiária é chamada de um *tick*. Por simplicidade, vai-se adotar como unidade temporal $\Delta t = 1$ adimensional, o intervalo entre dois negócios consecutivos.

³{tickdata.com}

Figura 11: Comportamento de escala da taxa de câmbio BRL/USD - dados intradiários

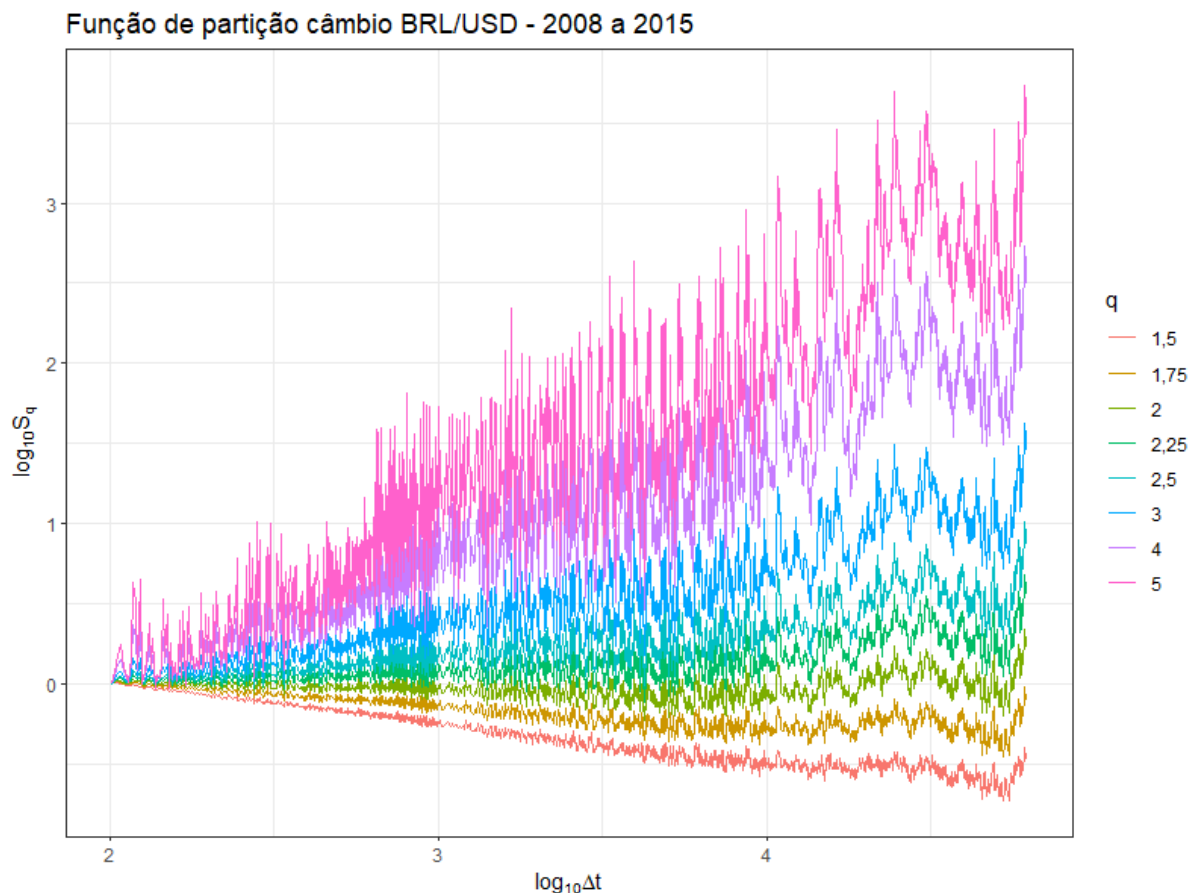


Fonte: Elaboração própria

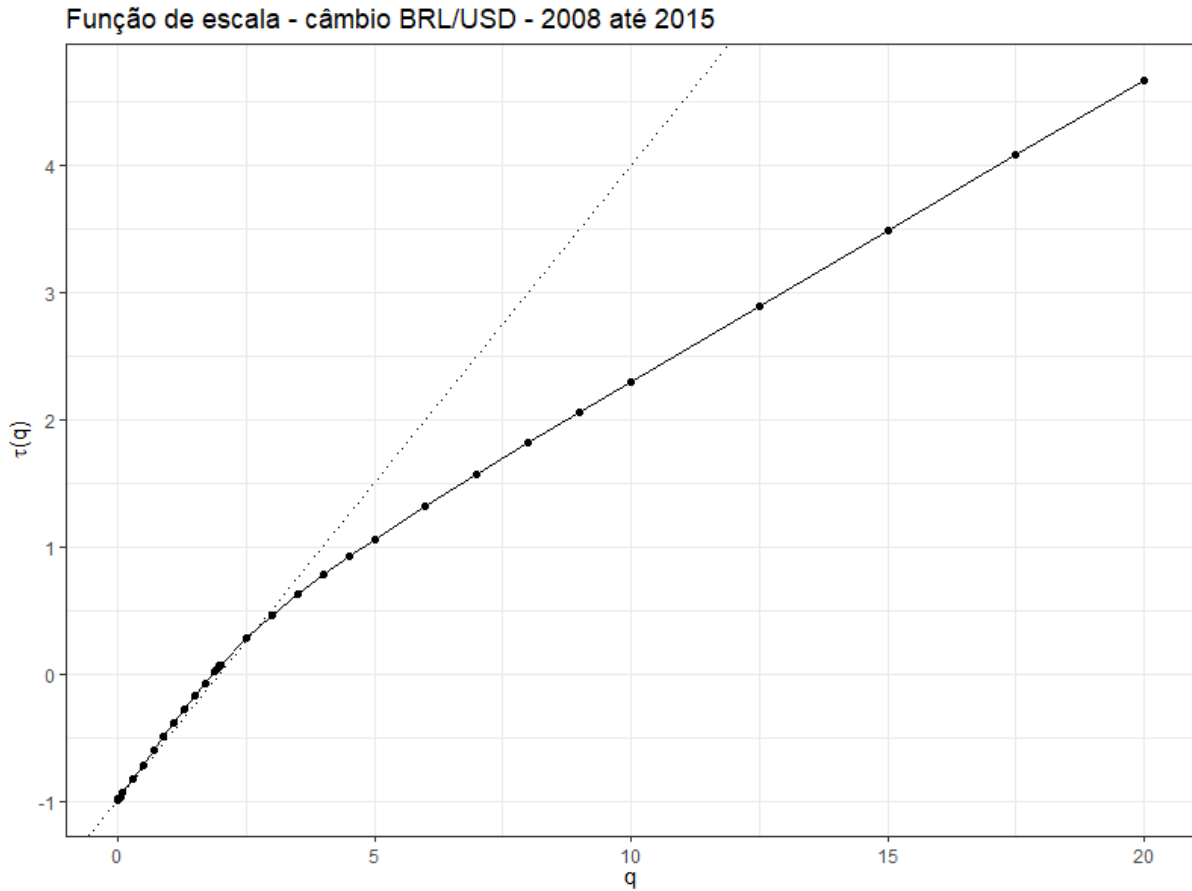
A função de partição padronizada calculada para essa série está representada na Figura 11, assim como antes a variabilidade aumenta com a ordem do momento devido ao maior efeito de retornos extremos nas caudas da distribuição.

Calvet e Fisher (2002) notam que a forma não-linear do gráfico pode ser explicada principalmente pela forte autocorrelação negativa de dados em alta frequência que afetaria a lei de escala global do processo. Em curtíssimo prazo e por reversão à média, uma variação de poucos centavos na cotação tende a ser sucedida por outra de magnitude similar e sinal contrário. Como os autores citados, será adotada uma faixa de corte para remover dados de alta frequência, a partir da qual o gráfico acima passa para o regime linear. No caso dos autores essa faixa era de 1,4 horas. Aqui adota-se $\Delta t = 100$, e por inspeção do banco de dados a janela máxima de 180 dias está associada a $\Delta t = 6,2 \times 10^4$. O gráfico com este corte está abaixo, e as curvas traçadas parecem oscilar em torno de retas com a mesma origem.

Figura 12: Comportamento de escala da taxa de câmbio BRL/USD - dados intradiários com corte



Calculando a função de escala, estima-se $\tau(1,842) \approx 0$, então o expoente de Hurst de acordo com o MMAR é $H = 1,842^{-1} = 0,543$, indício que no período o comportamento de tendência foi predominante para essa taxa de câmbio. Usando os dados diários do Banco Central do exemplo anterior para esse mesmo período de tempo, o expoente de Hurst estimado foi $H = 1,722^{-1} = 0,581$, valendo a mesma conclusão e proximidade de estimativas.

Figura 13: Função de escala $\tau(q)$ da taxa de câmbio BRL/USD - dados intradiários

Fonte: Elaboração própria

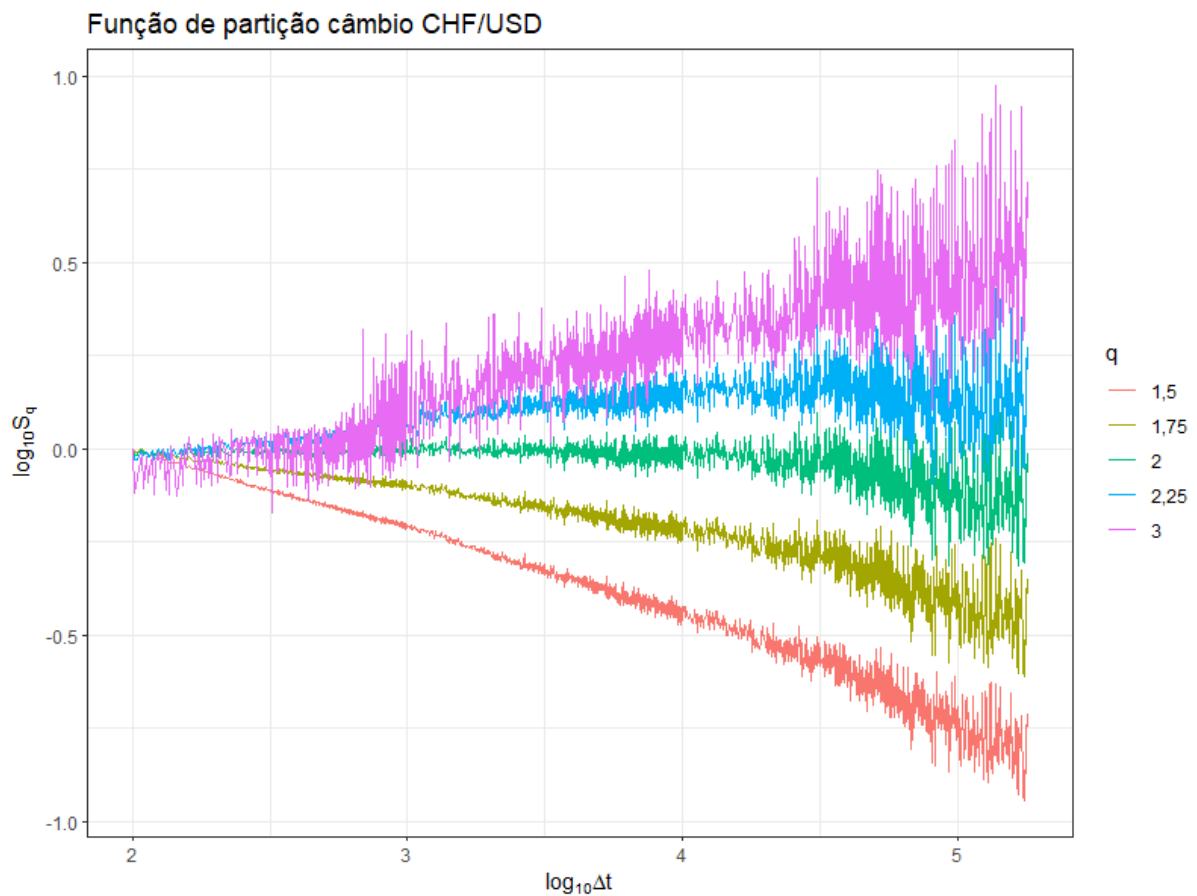
A função de escala, na Figura 13, também é côncava e afastada da reta que seria um movimento Browniano simples.

Função de escala para a taxa de câmbio CHF/USD

Como no exemplo anterior, este banco de dados foi fornecido por Tick Data e consiste de 4,8 milhões de negócios ocorridos entre 2000 e 2015 para a taxa de câmbio Franco suíço/Dólar americano (CHF/USD).

Usando como janela de corte $\Delta t = 100$ e janela máxima $\Delta t = 180000$, a função de partição calculada está abaixo, na Figura 14. Momentos de ordem maior foram removidos pois em janelas de maior amplitude a alta variabilidade ocultava o gráfico dos momentos de ordem menor.

Figura 14: Comportamento de escala da taxa de câmbio CHF/USD

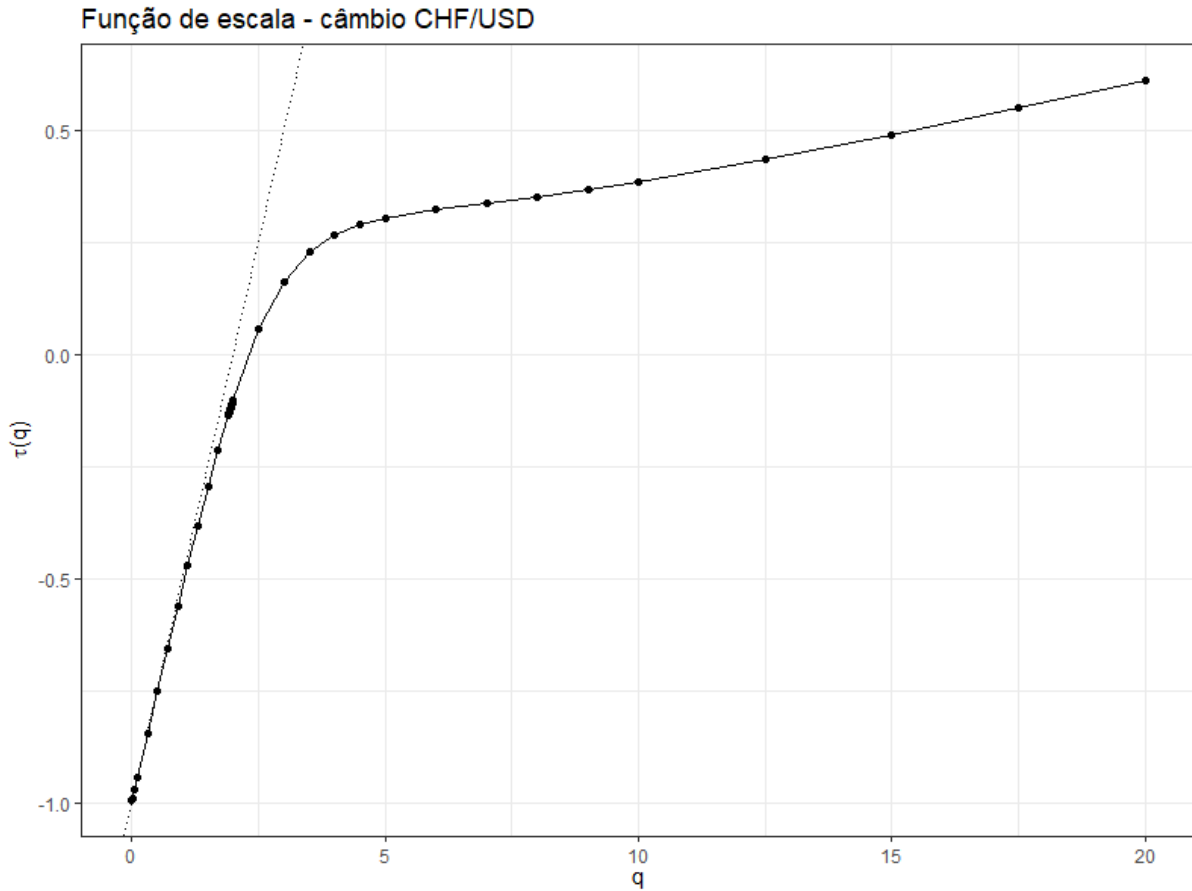


Fonte: Elaboração própria

O expoente de Hurst calculado para o período é $H = 2,301^{-1} = 0,435$, com comportamento predominante de reversão à média. A função de escala desvia do esperado pelo modelo, ficando convexa para momentos de ordem $q \geq 5$. Uma potencial explicação é que em 15 de janeiro de 2015 o Banco Nacional da Suíça abandonou a política de não permitir grandes valorizações frente ao Euro, adotada em 2011⁴, e neste dia o Franco valorizou 25% frente ao dólar⁵.

⁴<https://www.nytimes.com/2011/09/07/business/global/swiss-franc.html>

⁵<https://www.reuters.com/article/us-markets-franc-idUSKBN0KO16Y20150115>

Figura 15: Função de escala $\tau(q)$ da taxa de câmbio CHF/USD

Fonte: Elaboração própria

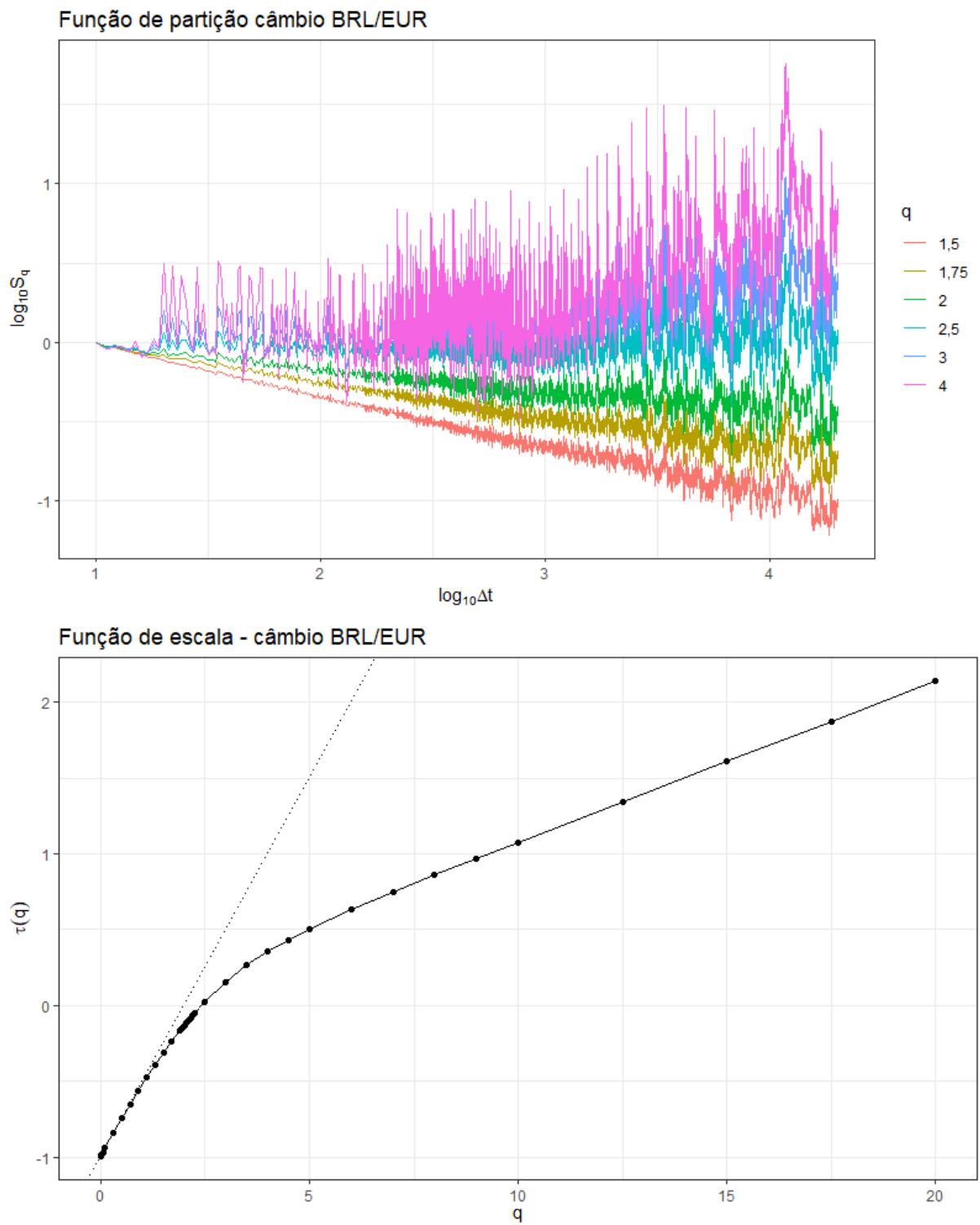
Função de escala para as taxas de câmbio BRL/EUR e BRL/GBP

Os dados intradiários da taxa de câmbio Real/Euro (BRL/EUR) e Real/Libra Esterlina (BRL/GBP) também foram obtidos de Tick Data. Os bancos possuem cerca de 245 mil observações cada e vão dos anos de 2008 até 2015.

Para o cálculo da função de partição foram adotadas janelas de $\Delta t = 10$ até $\Delta t = 20000$. Também foram omitidos alguns momentos para evitar que momentos maiores sobreponham e ocultem os gráficos de momentos menores.

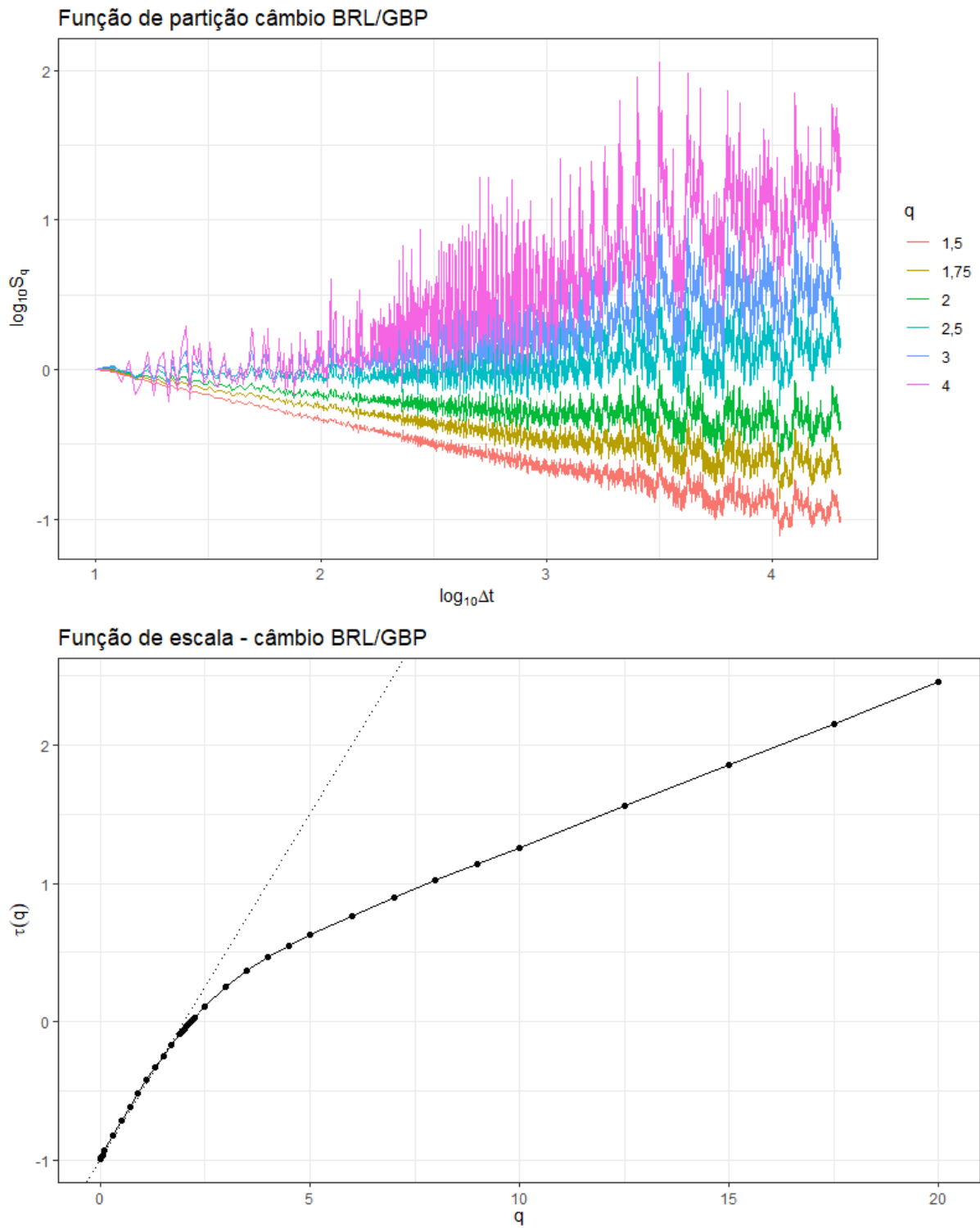
Na cotação do Real contra o Euro estima-se $H = 2,404^{-1} = 0,416$. Na cotação do Real contra a Libra estima-se $H = 2,156^{-1} = 0,464$. Em ambos os casos, durante este período, as funções de escala são côncavas e o comportamento das séries foi de reversão à média.

Figura 16: Comportamento e Função de escala da taxa de câmbio BRL/EUR



Fonte: Elaboração própria

Figura 17: Comportamento e Função de escala da taxa de câmbio BRL/GBP



Fonte: Elaboração própria

4 O Espectro Multifractal e Simulação

No capítulo anterior o movimento Browniano fracionário B_H foi caracterizado como um processo autossimilar ou monofractal, e que ao ser composto com o tempo de transação estocástico θ a série temporal $X(t) = B_H(\theta(t))$ é multifractal. A autossimilaridade era caracterizada por um único expoente de Hurst, H .

O espectro multifractal é a forma de caracterizar as diferentes formas de fractalidade do processo. Cada tipo de multiplicador da cascata está associado com um formato de espectro, e existe uma relação entre o espectro e a função de escala τ que descreve a lei de escala dos momentos. Conhecer o espectro permitirá simular θ , que composta com B_H permitirá simular uma trajetória de $X(t)$.

4.1 Espectro Multifractal

Seja g uma função bem-definida em uma vizinhança de t . O expoente de Hölder local α é definido como supremo do conjunto (CALVET; FISHER, 2002):

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Sup} \left\{ \beta \geq 0 : |g(t + \Delta t) - g(t)| = O(|\Delta t|^\beta) \right\}. \quad (4.1.1)$$

O expoente de Hurst definido na Equação 3.1.1 conectava a distribuição de duas variáveis aleatórias. Aqui, o expoente de Hölder caracteriza a escala de crescimento local.

Pontos de descontinuidade de uma função possuem expoente de Hölder igual a 0. Por exemplo, na função degrau

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

em $x = 0$ o módulo da diferença da função é 0 para Δt positivo e é 1 quando Δt negativo. A diferença é sempre um número inteiro constante ($O(|\Delta t|^0)$). De forma reversa, em pontos de continuidade de funções suaves o expoente de Hölder é 1, pois vale a expansão em série de Taylor. Nas trajetórias dos movimentos Brownianos simples e fracionário o expoente de Hölder coincide com o expoente de Hurst, $\frac{1}{2}$ e H , respectivamente (CALVET; FISHER, 2002).

Em um processo multifractal a escala de crescimento local α irá variar com o tempo. O espectro multifractal é a função que descreve a distribuição de α no processo. No processo de construção do tempo de transação estocástico, a multifractalidade foi

obtida pelo processo da cascata multiplicativa, quando se dividia cada intervalo em b subintervalos de mesmo comprimento e a massa de cada um é multiplicada por uma v.a. M i.i.d.. Usando a definição da Equação 4.1.1, após k iterações o expoente de Hölder aproximado α_k da medida, no subintervalo $[t, t + \Delta t]$, será:

$$\alpha_k(t) = \frac{\ln \mu[t, t + \Delta t]}{\ln \Delta t}.$$

Após k iterações, o comprimento de cada intervalo será $\Delta t = b^{-k}$ e a massa da medida, inicialmente 1, será $\mu[t, t + \Delta t] = \prod_{i=1}^k M_i$. Logo:

$$\alpha_k(t) = -\frac{\sum_{i=1}^k \ln M_i}{k \ln b} = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log_b M_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_i, \quad (4.1.2)$$

com $V = -\log_b M$. Como os multiplicadores são i.i.d., pela Lei dos Grandes Números $\alpha_0 = -\mathbb{E}(\log_b M)$ será o expoente de Hölder mais frequente do processo (CALVET; FISHER, 2002).

Dividindo a amplitude observada dos expoentes aproximados α_k obtidos em subintervalos de largura $\Delta\alpha$ e com $N_k(\alpha)$ sendo a contagem de quantos α_k estão no intervalo $[\alpha, \Delta\alpha)$, a frequência relativa $N_k(\alpha)/b^k$ poderia ser uma aproximação para o espectro. Fisher, Calvet e Mandelbrot (1997) notam que as frequências relativas de intervalos que não contém α_0 convergem para 0 quando o número de iterações cresce, e a frequência do intervalo que contém α_0 diverge.

O espectro da medida multifractal, e por consequência do tempo de transação estocástico, é definido como a seguinte frequência relativa renormalizada (CALVET; FISHER, 2002):

$$f_\theta(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln N_k(\alpha)}{\ln b^k}.$$

Usando o Teorema de Cramér, da Teoria dos Grandes Desvios, pode-se mostrar que o espectro e a função de escala estão relacionados através da Transformada de Legendre (FISHER; CALVET; MANDELBROT, 1997):

$$f_\theta(\alpha) = \min_q (\alpha q - \tau_\theta(q)) \quad (4.1.3)$$

Em Física, a Transformada de Legendre é conhecida por transformar variáveis em suas conjugadas, como em Termodinâmica na transformação de potenciais (KUBO, 1968) ou a passagem da formulação Lagrangeana para a Hamiltoniana da Mecânica Clássica

(GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002).

Para obter a relação entre o espectro da série de retornos, f , e o espectro da medida multifractal, f_θ , calculamos

$$f_\theta(\beta) = \min_q (\beta q - \tau_\theta(q)),$$

derivando em q a expressão a ser minimizada,

$$\begin{aligned} \beta - \tau'_\theta(q) &= 0 \\ q &= \tau'^{-1}_\theta(\beta), \end{aligned}$$

substituindo na expressão do espectro, obtem-se:

$$f_\theta(\beta) = \beta \tau'^{-1}_\theta(\beta) - \tau_\theta(\tau'^{-1}_\theta(\beta)). \quad (4.1.4)$$

Pela equação 3.2.3, $\tau(q) = \tau_\theta(Hq)$, e o espectro do preço será

$$f(\alpha) = \min_q (\alpha q - \tau(q)) = \min_q (\alpha q - \tau_\theta(Hq)).$$

Derivando a expressão a ser minimizada,

$$\alpha - \frac{d}{dq} \tau_\theta(Hq) = \alpha - H \tau'_\theta(\tilde{q}) = 0$$

onde $\tilde{q} = Hq$. Logo, o mínimo irá ocorrer em

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= Hq = \tau'^{-1}_\theta\left(\frac{\alpha}{H}\right) \\ q &= \frac{1}{H} \tau'^{-1}_\theta\left(\frac{\alpha}{H}\right), \end{aligned}$$

substituindo na equação do espectro:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{H} \tau'^{-1}_\theta\left(\frac{\alpha}{H}\right) - \tau_\theta\left(\tau'^{-1}_\theta\left(\frac{\alpha}{H}\right)\right). \quad (4.1.5)$$

Comparando as equações 4.1.4 e 4.1.5, a igualdade irá ocorrer quando $\beta = \alpha/H$. Deste modo, o espectro dos retornos se relaciona com o espectro da medida multifractal através da relação:

$$f(\alpha) = f_\theta\left(\frac{\alpha}{H}\right). \quad (4.1.6)$$

Na prática, a análise com MMAR pressupõe que o multiplicador M da medida multifractal possui distribuição log-normal, que gera um espectro em forma de parábola com concavidade para baixo (CALVET; FISHER, 2002; FISHER; CALVET; MANDELBROT, 1997; GÜNAY, 2016). Outras distribuições com forma fechada conhecida para o espectro ocorrem quando V tem distribuição Binomial, Poisson ou Gama.

A definição usual da distribuição log-normal (LN) é que se $M \sim LN(\lambda, \sigma^2)$, então $V = \ln M$ terá distribuição $N(\lambda, \sigma^2)$. Para conveniência nas demonstrações, no artigo original Fisher, Calvet e Mandelbrot (1997) utilizaram uma definição alternativa, onde $V = -\log_b M \sim N(\lambda, \sigma^2)$. Por consequência, $M = e^{-V \ln b}$.

Como restrição ao modelo, os autores estabelecem que em média o processo gerador da cascata conserve a massa da medida do intervalo $[0, T]$, isto é, seja uma medida canônica. Como em cada iteração do processo cada subintervalo se parte em b intervalos de igual comprimento,

$$\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}(e^{-V \ln b}) = \frac{1}{b} \quad (4.1.7)$$

A função geradora de momentos de uma v.a. $V \sim N(\lambda, \sigma^2)$ é

$$M_V(t) = \mathbb{E}(e^{tV}) = \exp\left(t\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right),$$

logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M) &= M_V(-\ln b) \\ &= \exp\left(-\lambda \ln b + \frac{1}{2}\sigma^2 (\ln b)^2\right) = \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Tomando o logaritmo,

$$\begin{aligned} -\lambda \ln b + \frac{1}{2}\sigma^2 (\ln b)^2 &= -\ln b \\ \frac{1}{2}\sigma^2 \ln b &= \lambda - 1 \end{aligned}$$

Portanto, para que a medida seja canônica o parâmetro σ^2 do multiplicador log-normal deve satisfazer

$$\sigma^2 = \frac{2(\lambda - 1)}{\ln b}. \quad (4.1.8)$$

Agora vamos verificar que o espectro associado possui forma de parábola. Calvet

e Fisher (2002) demonstram que a função de escala da cascata está associada à distribuição dos multiplicadores M através de $\tau_\theta(q) = -\log_b \mathbb{E}(M^q) - 1$. Analogamente ao cálculo da esperança na equação 4.1.7, para calcular a função de escala usa-se novamente a definição da função geradora de momentos $\mathbb{E}(M^q) = M_V(-q \ln b)$. Assim:

$$\begin{aligned} \tau_\theta(q) &= -\log_b \exp\left(-\lambda q \ln b + \frac{1}{2}q^2\sigma^2(\ln b)^2\right) - 1 \\ &= -\left(\frac{-\lambda q \ln b + \frac{1}{2}q^2\sigma^2(\ln b)^2}{\ln b}\right) - 1 \\ &= \lambda q - \frac{1}{2}q^2\sigma^2 \ln b - 1. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

A função de escala da medida multifractal é parabólica.

Para obter o espectro multifractal associado, usa-se a transformada de Legendre:

$$\begin{aligned} f_\theta(\alpha) &= \min_q (\alpha q - \tau_\theta(q)) \\ &= \min_q \left(\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \ln b\right) q^2 + (\alpha - \lambda) q + 1 \right) \end{aligned}$$

Em uma parábola genérica $y = ax^2 + bx + c$, seu valor mínimo ou máximo, no vértice, é dado por

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Assim, o espectro multifractal também será parabólico:

$$\begin{aligned} f_\theta(\alpha) &= -\frac{(\alpha - \lambda)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \ln b\right)}{4\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \ln b\right)} \\ &= 1 - \frac{(\alpha - \lambda)^2}{2\sigma^2 \ln b}. \end{aligned}$$

Substituindo a restrição de σ^2 da equação 4.1.8,

$$f_\theta(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - \lambda)^2}{2\left(\frac{2(\lambda-1)}{\ln b}\right) \ln b} = 1 - \frac{(\alpha - \lambda)^2}{4(\lambda - 1)}.$$

Com dados de séries financeiras o que efetivamente se observa é o espectro multifractal dos preços, f . Para obter a relação com o espectro da medida, f_θ , usa-se a equação

4.1.6:

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= f_{\theta} \left(\frac{\alpha}{H} \right) \\
 &= 1 - \frac{\left(\frac{\alpha}{H} - \lambda \right)^2}{4(\lambda - 1)} \\
 &= 1 - \frac{(\alpha - \lambda H)^2}{4H^2(\lambda - 1)} \\
 &= 1 - \frac{(\alpha - \lambda H)^2}{4H(\lambda H - H)}.
 \end{aligned}$$

O máximo desta parábola ocorre em $\alpha_0 = \lambda H$, e este será o expoente de Hölder mais provável do espectro dos preços. Assim, usando multiplicadores log-normais para a cascata, o espectro de preços previsto pelo MMAR é:

$$f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{4H(\alpha_0 - H)}. \quad (4.1.10)$$

4.2 Simulação

Ajuste do Espectro Multifractal

Pela equação 3.2.7 pode-se obter estimativas da função de escala $\hat{\tau}(q)$. Fazendo uma regressão linear da forma

$$\hat{\tau}(q) = \beta_2 q^2 + \beta_1 q + \beta_0$$

o espectro multifractal pode ser obtido via transformada de Legendre,

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\alpha) &= \min_q (\alpha q - \beta_2 q^2 - \beta_1 q - \beta_0) \\
 &= \min_q (-\beta_2 q^2 - (\beta_1 - \alpha) q - \beta_0).
 \end{aligned}$$

Repetindo o método do vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

o espectro multifractal estimado será:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\alpha) &= -\frac{(\beta_1 - \alpha)^2 - 4(-\beta_2)(-\beta_0)}{4(-\beta_2)} \\ &= \frac{(\beta_1 - \alpha)^2}{4\beta_2} - \beta_0.\end{aligned}$$

Comparando com a equação 4.1.10, identificamos $\beta_1 = \alpha_0 = \lambda H$, além de $\beta_0 = -1$ e $\beta_2 = -H(\alpha_0 - H)$.

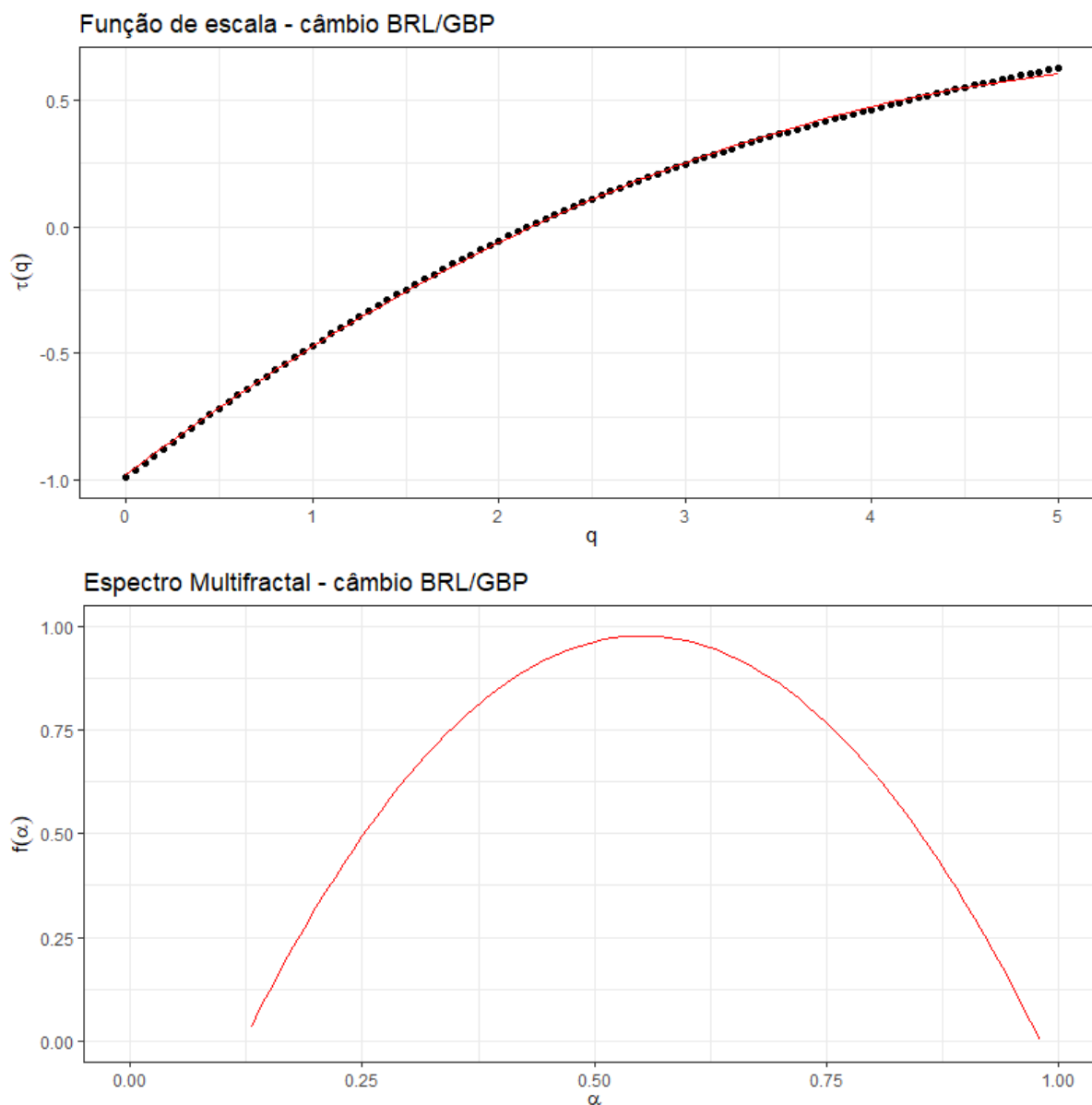
Com essa estimativa para o expoente de Hölder mais provável e H já estimado através de $\hat{\tau}(1/H) = 0$, pode-se obter estimativas de λ e pela equação 4.1.8 obter a estimativa de σ^2 :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\alpha_0}{H}, \\ \sigma^2 &= \frac{2(\lambda - 1)}{\ln 2},\end{aligned}$$

onde por simplicidade será presumido que de um passo para outro na cascata do processo cada intervalo se subdivide em $b = 2$ subintervalos.

Por exemplo, vamos considerar o último caso do capítulo anterior, do câmbio BRL/GBP. Havia-se estimado $H = 0,464$. Para a regressão, opta-se por usar densidade maior momentos, com ordem q entre 0 e 5 e intervalo de 0,05, pois como ilustra a Figura 17 para momentos de ordem superior à essa a função de escala se afasta da forma de parábola e passa a ser linear. Abaixo, na Figura 18, estão os gráficos da função de escala calculada e o respectivo espectro multifractal estimado. Estimou-se $\alpha_0 = \beta_1 = 0,551$. Os demais parâmetros do modelo de cascata com multiplicadores log-normais são $\lambda = 1,189$ e $\sigma^2 = 0,545$. Os parâmetros estimados para as diversas taxas de câmbio deste trabalho estão na Tabela 4.

Figura 18: Espectro Multifractal - câmbio BRL/GBP



Fonte: Elaboração própria

Tabela 4: Parâmetros estimados do MMAR para taxas de câmbio

Câmbio	H	α_0	λ	σ^2
DM/USD	0,525	0,559	1,064	0,186
BRL/USD (diário)	0,553	0,630	1,138	0,399
BRL/USD (intradiário)	0,543	0,617	1,134	0,392
CHF/USD (diário)	0,435	0,576	1,323	0,932
CHF/USD (intradiário)	0,435	0,590	1,357	1,029
BRL/EUR	0,416	0,512	1,232	0,669
BRL/GBP	0,464	0,551	1,189	0,545

Em particular, no artigo original de Fisher, Calvet e Mandelbrot (1997), sobre a taxa de câmbio DM/USD, as estimativas foram:

$$\begin{bmatrix} H \\ \alpha_0 \\ \lambda \\ \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,532 \\ 0,589 \\ 1,107 \\ 0,310 \end{bmatrix}.$$

No comparativo, os parâmetros H , α_0 e λ foram subestimados em cerca de 5%. A estimativa mais distante foi a de σ^2 , subestimada em 40%.

Simulação da Cascata log-normal

Como citado, os autores definiram a log-normal como $V = -\log_2 M \sim N(\lambda, \sigma^2)$. A simulação com o software estatístico R se baseia na definição $Z = \ln M' \sim N(\lambda', \sigma'^2)$. Podemos conectar ambas através da relação:

$$-V \ln 2 = \ln M \sim N(-\lambda \ln 2, (\sigma \ln 2)^2).$$

Assim, a função do R $rlnorm()$, que gera números aleatórios de uma distribuição log-normal, terá como parâmetros $meanlog = -\lambda \ln 2$ e $sdlog = \sigma \ln 2$.

Para simular, começamos com uma medida uniforme no intervalo $[0, 1]$ com massa igual a 1. Em cada iteração do processo cria-se um vetor com duas cópias da massa de cada intervalo e cada componente é multiplicada por uma v.a. M i.i.d. com distribuição log-normal com os parâmetros definidos no parágrafo anterior. Por exemplo, a primeira e a segunda iterações fazem:

$$m_0 = 1 \rightarrow (1, 1) \rightarrow m_1 = (M_1, M_2),$$

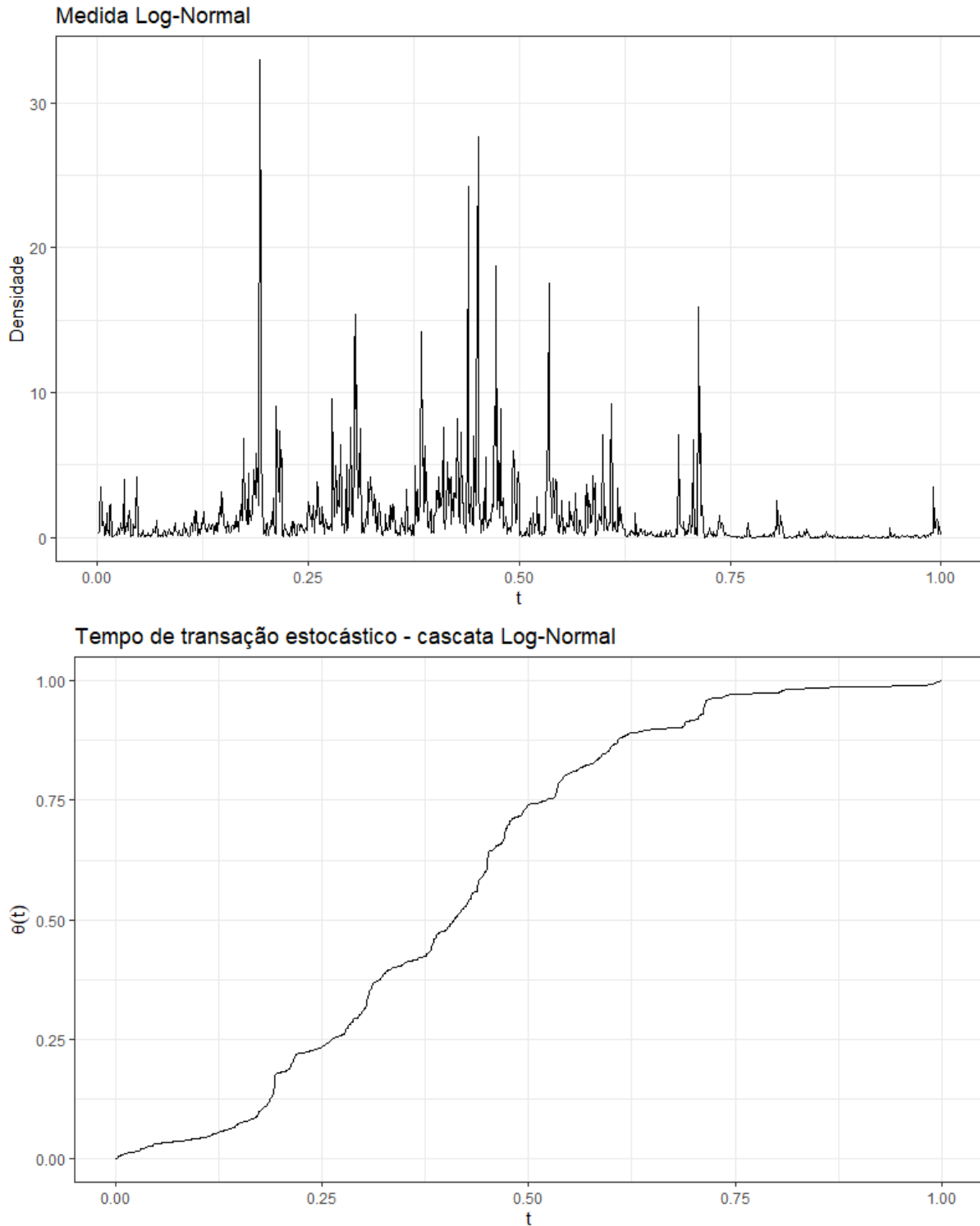
$$m_1 = (M_1, M_2) \rightarrow (M_1, M_1, M_2, M_2) \rightarrow m_2 = (M_1 M_{11}, M_1 M_{12}, M_2 M_{21}, M_2 M_{22}).$$

E assim por diante. Na k -ésima iteração cada subintervalo terá comprimento 2^{-k} , e para obter a densidade divide-se a medida de cada subintervalo por esse comprimento. Como $\mathbb{E}(M) = \frac{1}{2}$, a esperança da soma de todos os componentes de m_k é igual a 1, a massa original de $[0, 1]$.

O tempo de transação estocástico θ , função de distribuição acumulada da medida, é obtido dividindo as somas acumuladas da densidade pela soma total. Na Figura 19 da página seguinte está uma simulação com 10 iterações usando os parâmetros obtidos para a

taxa de câmbio BRL/GBP. Nesta simulação é possível observar os *clusters* de volatilidade e no fim um período prolongado de baixa volatilidade.

Figura 19: Simulação da medida log-normal



Fonte: Elaboração própria

Simulação de uma série temporal pelo MMAR

Uma série temporal $X_{sim}(t)$ simulada de acordo com o MMAR pode ser obtida simulando valores de um movimento Browniano fracionário B_H que recebe como argumentos os valores simulados de $\theta(t)$. Usando 10 iterações é possível simular até 1024 valores de $X_{sim}(t)$. Caso se deseje gerar mais simulações para T instantes distintos é necessário simular a cascata log-normal com k -iteraões, onde $2^k \geq T$.

A função *somebm* do *R* simula observações de B_H equidistantes no tempo no intervalo $[0, 1]$. A diferença média entre valores simulados sucessivos de $\theta(t)$ é da ordem de $2^{-10} \approx 10^{-3}$. Assim, simulando 10^5 valores para B_H , para acomodar duas casas decimais, a quantidade $10^5 \cdot \theta(t)$ será um número real com parte inteira $i = \lfloor 10^5 \cdot \theta(t) \rfloor$ e parte decimal $d = 10^5 \cdot \theta(t) - \lfloor 10^5 \cdot \theta(t) \rfloor$, com $\lfloor \cdot \rfloor$ sendo a função piso.

$X_{sim}(t)$ será então a interpolação linear:

$$X_{sim}(t) = (1 - d) B_H(i) + d B_H(i + 1).$$

Por exemplo, se $\theta(1) = 1,23 \times 10^{-4}$, então $X_{sim}(1) = 0,7 B_H(12) + 0,3 B_H(13)$. Pela definição do processo, $X_{sim}(0) = 0$ e $X_{sim}(2^{10}) = B_H(10^5)$.

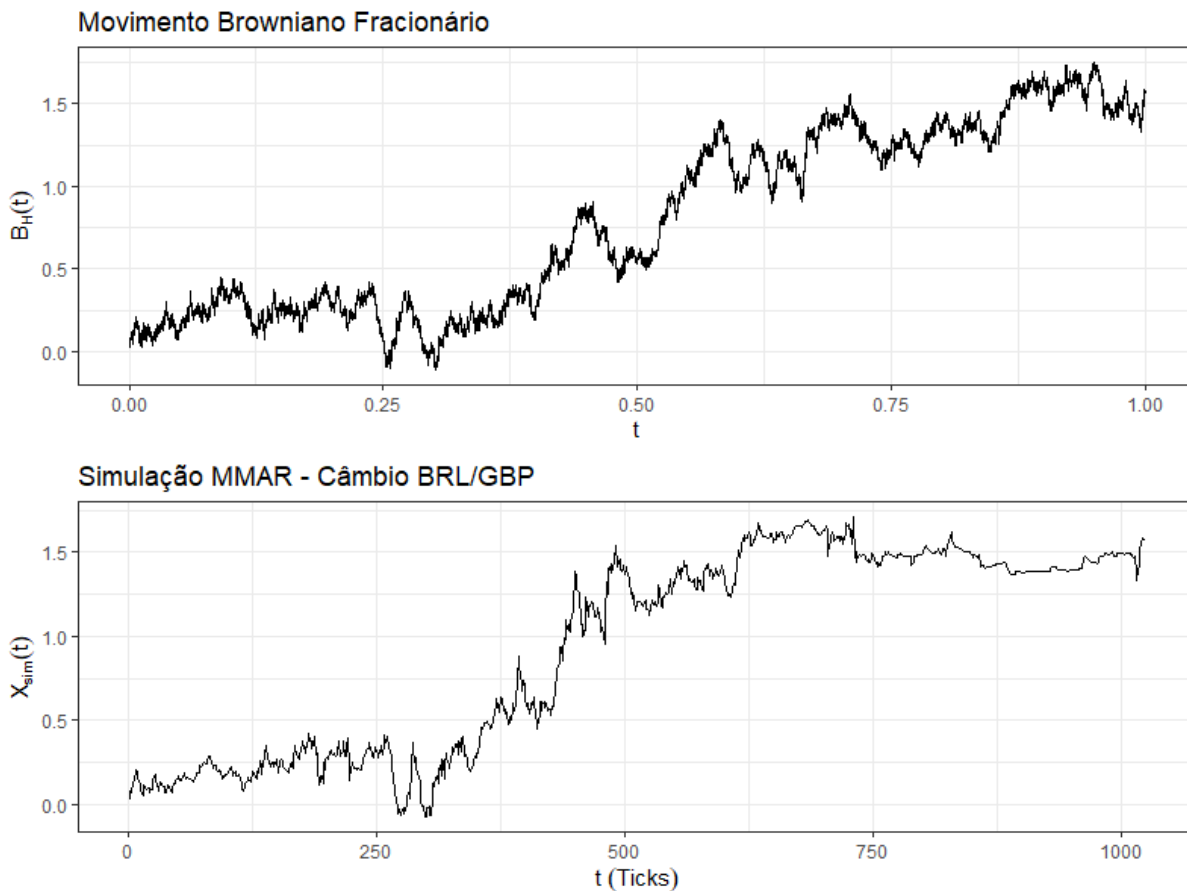
Na Figura 20 está o gráfico de uma simulação para a taxa de câmbio BRL/GBP que ilustra como θ obtido na Figura 19 deforma B_H . Nos dados de negociação, 1024 *ticks* correspondem a um período médio de 15 dias. Pela simulação, a Libra esterlina teria apreciado 348,2% contra o Real, uma apreciação muito grande em curto período de tempo ($e^{1,5} \approx 4,482$).

Pela construção na Equação 3.2.1, ao fim do período simulado $X_{sim}(T)$ terá a mesma distribuição de $B_H(1)$, independente do quão volátil for a série original. Uma alternativa para acomodar séries de ativos financeiros com diferentes volatilidades seria multiplicar o termo do movimento Browniano fracionário pelo desvio padrão dos retornos de mesmo período.

$$X'_{sim}(t) = \ln \left(\frac{P(t)}{P(0)} \right) = \sigma_T B_H(\theta(t))$$

No caso, o desvio padrão dos retornos de 1024 *ticks* de intervalo é aproximadamente 0,025, que resultaria em uma apreciação de 3,8%, uma previsão mais razoável para o prazo de 15 dias ($e^{0,025 \times 1,5} \approx 1,038$). O valor de um retorno observado X no modelo original de Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997) poderia então ser entendido como um retorno múltiplo do desvio padrão dos retornos de período T da série original, como forma do modelo ser

Figura 20: Simulação para a taxa de câmbio BRL/GBP



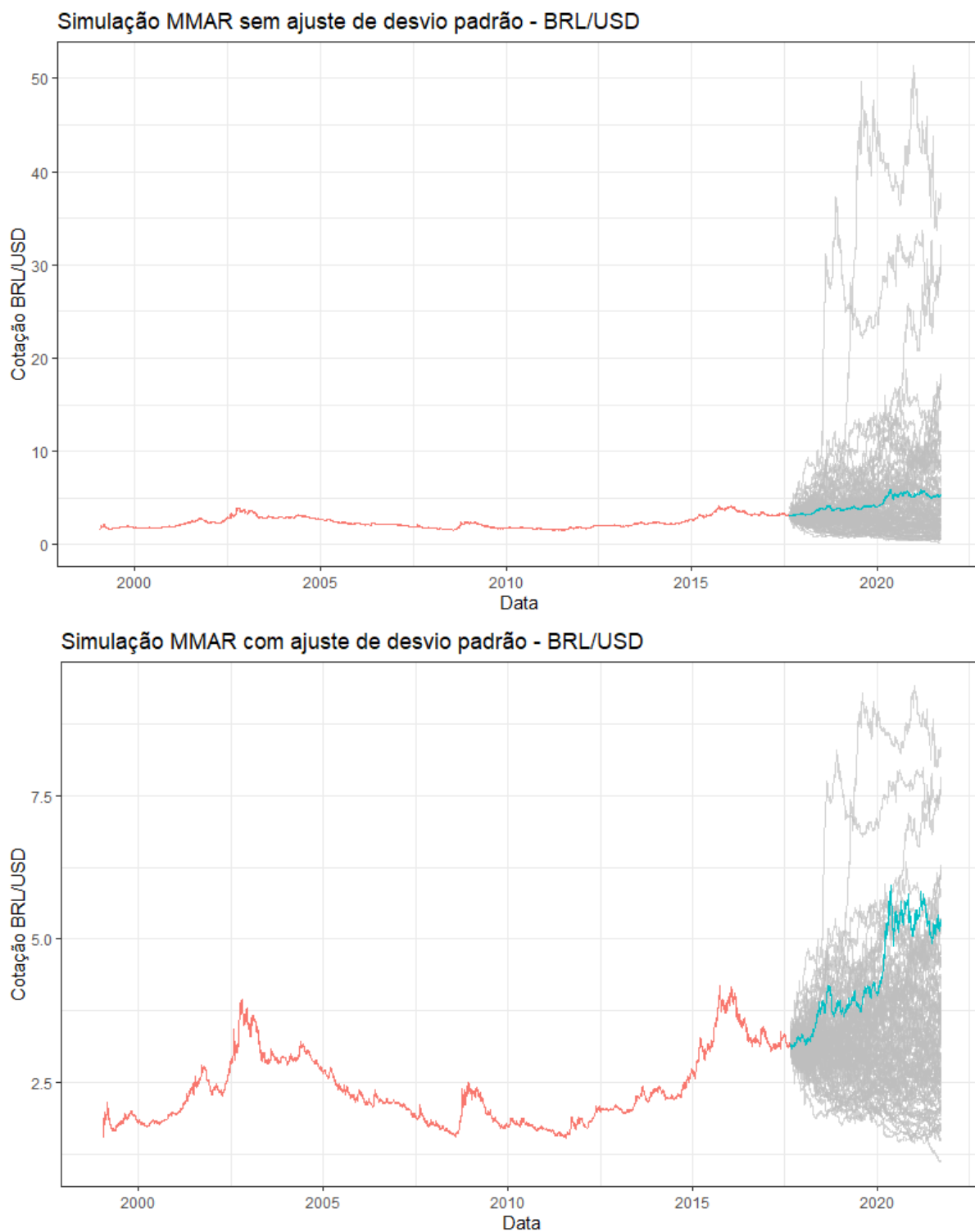
Fonte: Elaboração própria

aplicado a períodos de duração arbitrária. Para obter uma previsão monetária para um prazo maior que a duração dos dados originais seria necessário concatenar simulações menores para as quais é possível calcular o desvio padrão necessário dos retornos. Por exemplo, para um conjunto de dados original de 7500 dias a simulação de preço por um prazo de 10 mil dias iria necessitar de 3 simulações de $2^{12} = 4096$ dias cada.

Na Figura 21 a seguir usamos os dados diários do Banco Central para a taxa de câmbio BRL/USD entre janeiro de 1999 e agosto de 2017 para ajustar os parâmetros do MMAR e simulamos os próximos 1024 dias até setembro de 2021 para comparar com a cotação real. A cotação até 2017 está em vermelho, a cotação entre 2017 e 2021 está em azul, e 100 simulações estão em cinza.

Na série até 2017, o desvio padrão dos retornos de 1024 dias é $\sigma_{1024} = 0,392$. Com este ajuste, a maior cotação simulada é R\$ 9,41/US\$ e a menor é R\$ 1,10/US\$, com cotação média final de R\$ 3,34/US\$. Sem o ajuste, a maior cotação simulada é R\$ 51,35/US\$ e a menor é R\$ 0,21/US\$, e média final R\$ 4,97/US\$. As simulações com ajuste tem volatilidade mais similar à dinâmica cambial efetivamente observada.

Figura 21: Simulações com e sem ajuste para a taxa de câmbio BRL/USD



Fonte: Elaboração própria

4.3 Comparação com os modelos GARCH e FIGARCH

Retomamos os dados da taxa de câmbio DM/USD dos artigos de Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997) e Calvet e Fisher (2002) para comparar o comportamento de escala de longo prazo e a consistência na estimação da função de escala τ comparando o MMAR com os modelos GARCH(1,1) e FIGARCH(1, d ,1). As simulações destes últimos dois modelos serão com o pacote *rugarch* do *R* (GHALANOS, 2022). Os artigos originais comparavam com o FIGARCH(1, d ,0), caso que ainda não é coberto pelo pacote. Para os 6118 retornos diários entre os anos de 1973 e 1996, os parâmetros obtidos para os modelos estão resumidos na tabela abaixo:

Tabela 5: Parâmetros dos modelos GARCH e FIGARCH para taxa de câmbio DM/USD

Parâmetros Ajustados					
Modelo	ω	α_1	β_1	ϕ_1	d
GARCH(1,1)	$5,551 \times 10^{-7}$	$1,111 \times 10^{-1}$	$8,862 \times 10^{-1}$	-	-
FIGARCH(1, d ,1)	$8,357 \times 10^{-7}$	-	$6,510 \times 10^{-1}$	$1,788 \times 10^{-1}$	$5,655 \times 10^{-1}$

Como $\alpha_1 + \beta_1 \approx 0,9973$ o modelo GARCH estimado está muito próximo de ser um modelo de raiz unitária (IGARCH).

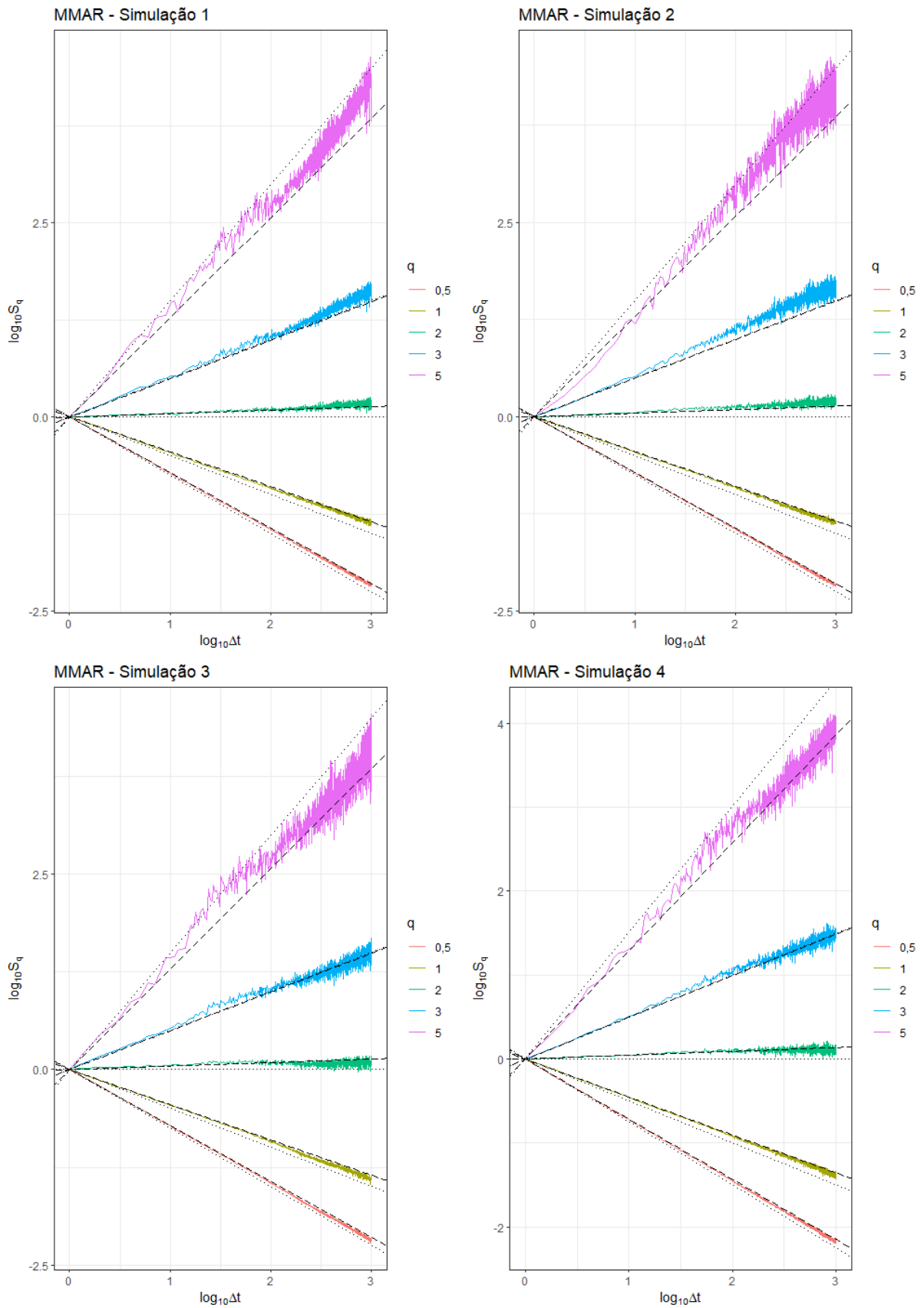
A primeira comparação se baseia em gerar 4 simulações de período $T = 10^5$ dias e calcular τ usando janelas de 1 até 1000 dias para cinco ordens distintas de momento absoluto: $q = 0,5, 1, 2, 3$ e 5 . Espera-se que os modelos da família GARCH tenham comportamento de escala, avaliada pela regressão linear da Equação 3.2.7, mais próximo do movimento Browniano simples que o MMAR.

Na três figuras seguintes, uma para cada modelo, análogas à figura 9 do artigo de Calvet e Fisher (2002), as linhas pontilhadas são as do comportamento de escala de um movimento Browniano simples, e as tracejadas tem a inclinação observada dos dados.

As simulações do MMAR se mantém lineares com o aumento da janela e oscilam ao redor da inclinação empírica dos dados, estando pouco acima para $q = 5$.

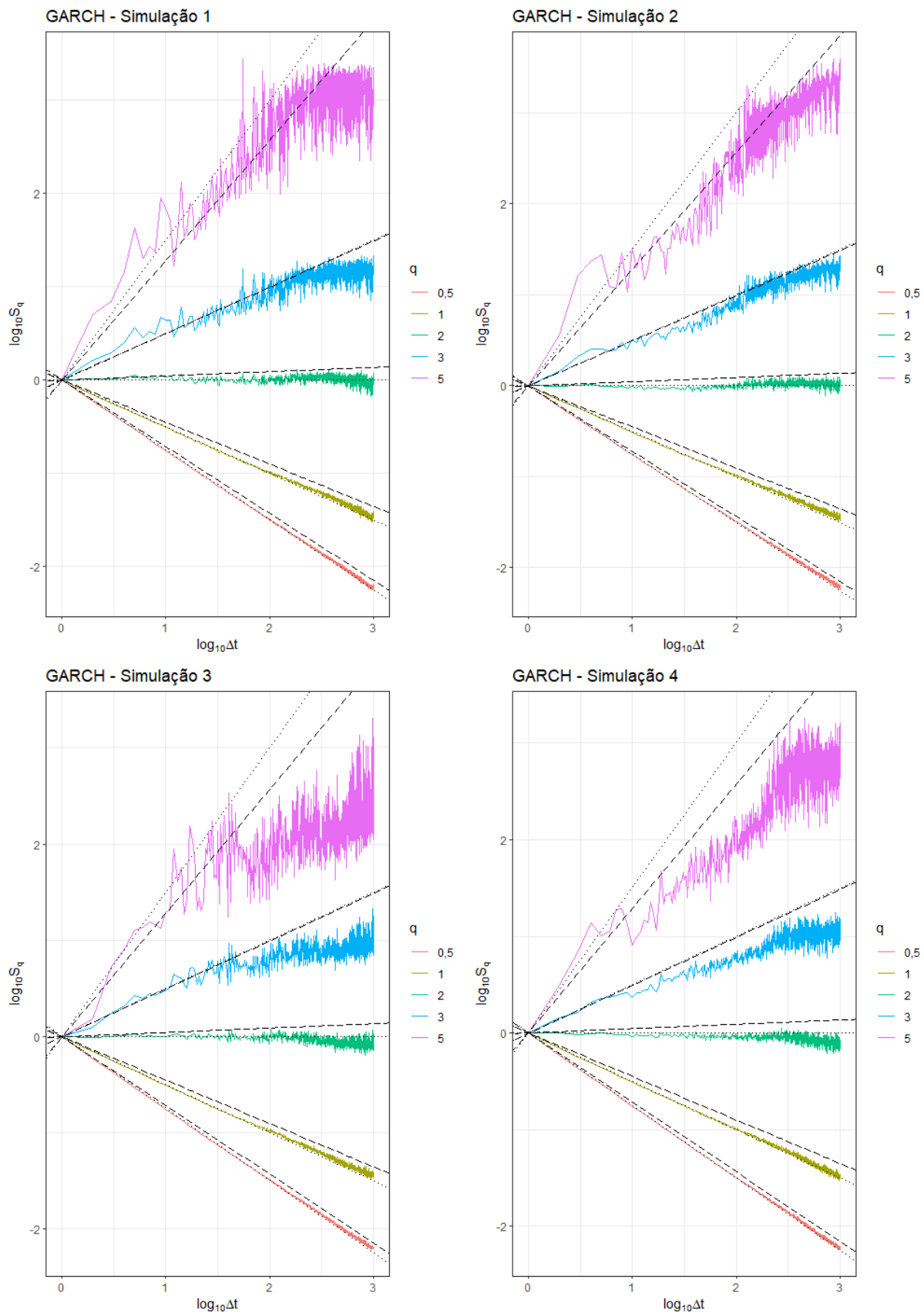
Para os três momentos de ordem menor, ambos GARCH e FIGARCH estão mais próximos da linha pontilhada do movimento Browniano simples. Para os momentos de ordem 3 e 5, a função de partição do modelo GARCH se afasta da forma linear e se torna mais côncava, o que não se percebe no FIGARCH.

Figura 22: Comportamento de escala de longo prazo - câmbio DM/USD - MMAR



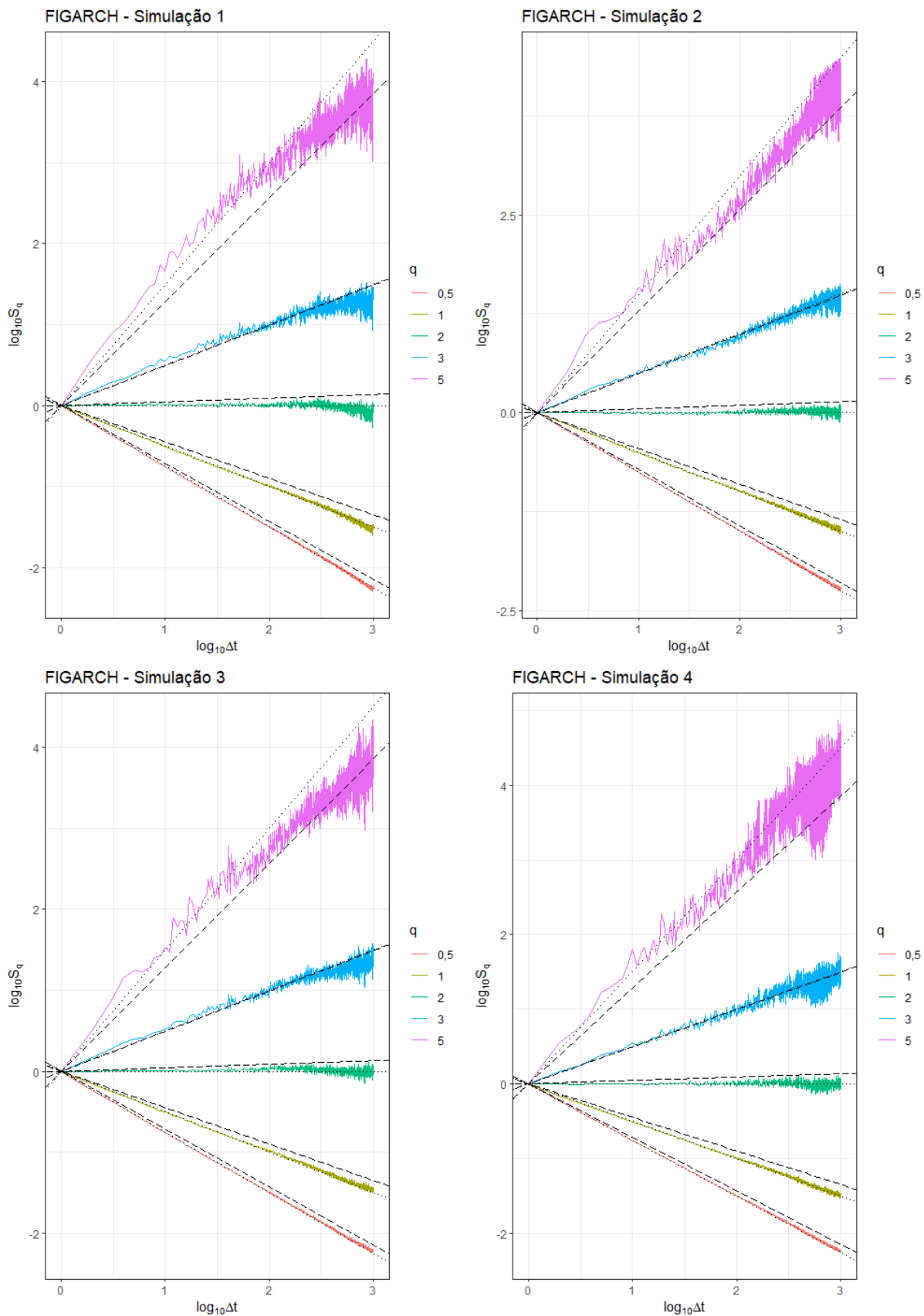
Fonte: Elaboração própria

Figura 23: Comportamento de escala de longo prazo - câmbio DM/USD - GARCH



Fonte: Elaboração própria

Figura 24: Comportamento de escala de longo prazo - câmbio DM/USD - FIGARCH



Fonte: Elaboração própria

Em seguida, geram-se 10 mil amostras de 6118 retornos para cada modelo e calculamos a função de escala usando a regressão linear da Equação 3.2.7, onde τ será a inclinação da reta ajustada usando janelas de 1 até 180 dias, para obter resultados análogos à Tabela 3 de Calvet e Fisher (2002).

Comparamos com a função de escala dos dados originais, $\hat{\tau}$, e a função de escala teórica, τ_0 , baseado nos parâmetros ajustados na Tabela 4 e partindo da hipótese que o espectro é gerado pela cascata log-normal, dado pelas Equações 4.1.9 e 3.2.3.

Tabela 6: Média e desvio padrão das funções de escala simuladas.

Inclinação observada dos dados, $\hat{\tau}$, inclinação prevista pelo MMAR, τ_0 , e inclinação média das simulações, $\bar{\tau}_{sim}$.								
q	Dados DM/USD	MMAR			GARCH(1,1)		FIGARCH(1,d,1)	
	$\hat{\tau}$	τ_0	$\bar{\tau}_{sim}$	d.p.	$\bar{\tau}_{sim}$	d.p.	$\bar{\tau}_{sim}$	d.p.
0,5	-0,716	-0,725	-0,724	0,017	-0,738	0,017	-0,742	0,017
1	-0,450	-0,459	-0,461	0,033	-0,488	0,037	-0,492	0,033
2	0,045	0,047	0,035	0,072	-0,024	0,105	-0,014	0,077
3	0,496	0,517	0,485	0,125	0,374	0,203	0,424	0,139
5	1,285	1,350	1,253	0,263	1,021	0,421	1,179	0,295

Em todos os modelos a inclinação simulada média $\bar{\tau}_{sim}$ subestima a inclinação dos dados, que pode ser causada em parte pela inversão entre o logaritmo e a esperança da Equação 3.2.7 (MANDELROT; FISHER; CALVET, 1997). No caso do MMAR, a inclinação simulada média também é menor que a inclinação teórica. A menor variabilidade, medida pelo desvio padrão, é a do MMAR, seguida pelas simulações do modelo FIGARCH e depois pelo modelo GARCH.

Aproximamos a probabilidade de cada modelo subestimar a inclinação pela proporção das 10 mil funções de escala simuladas que foram menores que $\hat{\tau}$. Em todas as ordens o MMAR subestimou menos que os modelos GARCH e FIGARCH, estando mais próximo de 0,5, quando seria igualmente provável sub ou superestimar. O modelo GARCH tem desempenho melhor que o FIGARCH para os três primeiros momentos, sendo pior que o FIGARCH para $q = 3$ ou 5.

Tabela 7: Probabilidade da inclinação simulada subestimar a observada.

Probabilidade da inclinação simulada ser menor que a observada: $\mathbb{P}(\tau_{sim} < \hat{\tau})$.			
q	MMAR	GARCH(1,1)	FIGARCH(1, d ,1)
0,5	0,6800	0,8975	0,9416
1	0,6225	0,8459	0,8968
2	0,5518	0,7617	0,7847
3	0,5411	0,7390	0,7101
5	0,5555	0,7402	0,6449

Na Tabela 8 estão os três quartis e alguns percentis selecionados das inclinações simuladas nos modelos. O MMAR é o que possui Intervalos de Confiança de 99%, simulados, de menor comprimento. Por esta métrica, seria o modelo mais consistente para estimar as simetrias de escala dos dados originais.

Tabela 8: Percentis das simulações

Percentis das inclinações simuladas, τ_{sim} .									
q	0,5%	2,5%	5%	25%	50%	75%	95%	97,5%	99,5%
i. MMAR									
0,5	-0,768	-0,757	-0,751	-0,735	-0,724	-0,713	-0,697	-0,692	-0,683
1	-0,547	-0,523	-0,516	-0,483	-0,460	-0,437	-0,408	-0,398	-0,380
2	-0,150	-0,105	-0,084	-0,014	0,036	0,083	0,154	0,175	0,221
3	0,164	0,244	0,283	0,401	0,484	0,566	0,693	0,737	0,817
5	0,538	0,738	0,833	1,085	1,251	1,420	1,687	1,782	1,971
ii. GARCH(1,1)									
0,5	-0,781	-0,771	-0,766	-0,750	-0,738	-0,727	-0,710	-0,705	-0,695
1	-0,583	-0,560	-0,549	-0,512	-0,488	-0,463	-0,427	-0,414	-0,391
2	-0,331	-0,237	-0,196	-0,086	-0,023	0,041	0,147	0,183	0,273
3	-0,284	-0,055	0,034	0,257	0,379	0,503	0,693	0,757	0,909
5	-0,365	0,114	0,287	0,776	1,043	1,298	1,665	1,788	2,067
iii. FIGARCH(1, d ,1)									
0,5	-0,783	-0,774	-0,769	-0,753	-0,742	-0,730	-0,715	-0,710	-0,701
1	-0,578	-0,558	-0,547	-0,514	-0,492	-0,470	-0,438	-0,428	-0,410
2	-0,222	-0,166	-0,140	-0,064	-0,015	0,036	0,110	0,139	0,196
3	0,034	0,147	0,202	0,336	0,424	0,513	0,651	0,700	0,827
5	0,329	0,582	0,693	0,998	1,180	1,369	1,653	1,757	1,967

5 Conclusão

Um bom modelo de séries temporais para ativos financeiros deve conseguir replicar características típicas dos retornos, notoriamente caudas pesadas, e que a volatilidade tenha memória longa e agrupe-se em *clusters*, pela sucessão de períodos de tranquilidade e turbulência nos mercados. O modelo GARCH é um dos mais utilizados, pois prevê que os retornos possam ter caudas pesadas, com curtose maior que 3, além de especificar a volatilidade como um processo dinâmico, conseguindo reproduzir os agrupamentos, mas não a memória longa.

O modelo pode ser estendido para o FIGARCH e possuir memória longa. Esta propriedade é obtida através de diferenças fracionárias. A expansão em série de Taylor do operador de diferenciação resulta em uma expansão tal que os termos passados da série são multiplicados por fatores ξ^* , associados com a função Γ , que para uma grande quantidade de defasagens pode ser aproximada por um termo que decai hiperbolicamente. O FIGARCH, assim como o modelo anterior, também tem parâmetros sensíveis à periodicidade dos retornos sobre os quais é ajustado, e a lei de escala de ambos é mais próxima à prevista pelo movimento Browniano do que a dos dados reais.

Como alternativa, o MMAR trata de séries temporais à tempo contínuo, modeladas compondo um movimento Browniano fracionário B_H com um tempo de transação estocástico θ , tendo como propriedade marcante suas simetrias de escala. Pelas hipóteses de Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997), a multifractalidade se expressa como uma lei de potência dos momentos absolutos da série. A estrutura de correlação de B_H também implica em decaimento hiperbólico, descrevendo processos de memória longa. O processo multifractal que gera θ é análogo aos *clusters* de volatilidade, permeando todas as escalas de tempo. A combinação de ambas componentes gera retornos que possuem caudas pesadas. As simulações com o MMAR são visualmente parecidas com séries de preços de ativos reais.

O objeto central da estimação do MMAR é a função de partição S_q , a partir da qual, pela Equação 3.2.7, se estima a função de escala τ , o expoente de Hurst H , e o espectro multifractal. Os resultados obtidos neste trabalho dependem do pressuposto que o espectro é gerado por multiplicadores log-normais. Ao analisar dados reais, deve-se avaliar se os valores calculados da função de escala para momentos de ordem menor, geralmente até $q \leq 5$, podem ser bem aproximados por uma parábola.

Como ilustra o caso das cotações BRL/USD e CHF/USD na Tabela 4, seja no

caso de dados diários ou intradiários, com negócios ocorrendo em intervalos de segundos ou minutos, os parâmetros estimados para o MMAR são muito parecidos. Em comparação, na literatura há registro do modelo GARCH ajustado ao índice S&P 500, capaz de descrever a distribuição de retornos de $\Delta t = 1$ minuto, com mesma variância e curtose empírica, mas que não atende às propriedades de escala de retornos de $\Delta t = 1000$ minutos (MANTEGNA; STANLEY, 1998).

Do ponto de vista negativo, a estimação do MMAR deixa aberta duas escolhas durante o processo de estimação para as quais não há critérios objetivos e que sejam funções claras das dimensões do conjunto de dados analisado.

A primeira delas diz respeito à quais são os tamanhos mínimos e máximos das janelas que devem ser usadas. Pelas hipóteses do modelo, em um gráfico com eixos logarítmicos a esperança da função de partição S_q deve seguir uma tendência linear contra a janela de tempo dos incrementos. A janela mínima, como no caso de dados intradiários, deve ser de tal tamanho que não sejam percebidos efeitos de microestrutura de mercado e a sazonalidade diária da ocorrência de negócios (FISHER; CALVET; MANDELROT, 1997; CALVET; FISHER, 2002). A janela máxima deve ser tal que a tendência da função de partição seja linear e que ela some um número suficiente de incrementos da forma $|X(t, \Delta t)|^q$ para ter menor variabilidade. Por exemplo, no estudo original da taxa DM/USD a janela máxima de 180 dias corresponde a soma de 34 incrementos. Não se pode aplicar a Lei dos Grandes Números pois quando $H \neq \frac{1}{2}$ os incrementos de B_H são correlacionados, apesar de terem todos a mesma esperança e distribuição.

A segunda escolha arbitrária é a interpretação do retorno. Ao fim do período T analisado, esteja ele em contagem de *ticks* ou dias, $X(T)$ terá a distribuição de $B_H(1)$, propriedade derivada do desenho do modelo, que tem como propósito a simetria de escala temporal. Como no caso da Libra esterlina, ilustrado na Figura 20, isto pode levar a uma mudança de preço pouco condizente com o tempo decorrido. A multiplicação proposta por σ_T no final da Seção 4.2 é uma forma de fazer essa adequação, mas não é a única opção. Por exemplo, poderia-se fazer o histograma dos retornos de período T dos dados históricos e o histograma de simulações de $X(T)$, a constante multiplicativa de ajuste seria aquela que faz a amplitude das simulações ser a mesma dos dados reais.

Obter métodos consistentes para determinar o tamanho das janelas e a forma de converter o retorno X em preço do ativo são potenciais linhas de pesquisa futura. Outra linha é como tratar o viés de subestimação da função de escala pela regressão da Equação 3.2.7, como foi visto na Tabela 6, devido à inversão da esperança com o logaritmo.

Por gerar retornos com as boas características de caudas pesadas, memória longa da volatilidade e simetria de escala, as simulações usando o MMAR são boas para fazer avaliação de risco e testes de estresse de um ativo. Entretanto, há menos resultados inferenciais e analíticos e métodos computacionais aplicados para o modelo quando se compara com os da família GARCH, o que dificulta sua maior adoção.

Referências

- BAILLIE, R. T.; BOLLERSLEV, T.; MIKKELSEN, H. O. Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 74, n. 1, p. 3–30, 1996.
- CALVET, L.; FISHER, A. Multifractality in asset returns: theory and evidence. *Review of Economics and Statistics*, MIT Press, v. 84, n. 3, p. 381–406, 2002.
- FISHER, A. J.; CALVET, L. E.; MANDELBROT, B. B. Multifractality of Deutschemark/US dollar exchange rates. Cowles Foundation discussion paper, 1997.
- GHALANOS, A. *rugarch: Univariate GARCH models*. [S.l.], 2022. R package version 1.4-7. Disponível em: [⟨https://CRAN.R-project.org/package=rugarch⟩](https://CRAN.R-project.org/package=rugarch).
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- GÜNAY, S. Performance of the Multifractal Model of Asset Returns (MMAR): evidence from emerging stock markets. *International Journal of Financial Studies*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 4, n. 2, p. 11, 2016.
- HUANG, J. *somebm: some Brownian motions simulation functions*. [S.l.], 2013. R package version 0.1. Disponível em: [⟨https://CRAN.R-project.org/package=somebm⟩](https://CRAN.R-project.org/package=somebm).
- HYNDMAN, R. J.; ATHANASOPOULOS, G. *Forecasting: principles and practice*. [S.l.]: OTexts, 2018.
- KUBO, R. *Thermodynamics: an advanced course with problems and solutions*. [S.l.]: North-Holland Publishing Company, 1968.
- MANDELBROT, B. B.; FISHER, A. J.; CALVET, L. E. A Multifractal Model of Asset Returns. Cowles Foundation discussion paper, 1997.
- MANDELBROT, B. B.; NESS, J. W. V. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, SIAM, v. 10, n. 4, p. 422–437, 1968.
- MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. Modeling of financial data: comparison of the truncated Lévy flight and the ARCH(1) and GARCH(1,1) processes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 254, n. 1-2, p. 77–84, 1998.
- MORETTIN, P. A. *Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras*. 3^a. ed. [S.l.]: Editora Blucher, 2017.
- RUPPERT, D.; MATTESON, D. S. *Statistics and data analysis for financial engineering*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 13.

Anexo

Códigos computacionais usados

Os códigos da linguagem de programação *R* com as funções e gráficos usados no trabalho podem ser acessados em <https://github.com/gustavogarciam/TCC-MMAR>.