

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

MIGUEL CITELI DE FREITAS

**RELAÇÕES DE INCERTEZA DE ALTAS ORDENS E OS
CONCEITOS DE “INTELIGÊNCIA” E
NÃO-GAUSSIANIDADE DE ESTADOS PUROS E
MISTOS**

BRASÍLIA
27 DE MAIO DE 2021

Miguel Citeli de Freitas

**Relações de Incerteza de Altas Ordens e os Conceitos de
“Inteligência” e Não-Gaussianidade de Estados Puros e
Mistos**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Viktor Dodonov

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

27 de Maio de 2021

Miguel Citeli de Freitas

Relações de Incerteza de Altas Ordens e os Conceitos de “Inteligência” e Não-Gaussianidade de Estados Puros e Mistos/ Miguel Citeli de Freitas. – Brasília, 27 de Maio de 2021-

64 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Viktor Dodonov

Monografia – Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física, 27 de Maio de 2021.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade de Brasília. III. Instituto de Física. IV. Relações de Incerteza de Altas Ordens e os Conceitos de “Inteligência” e Não-Gaussianidade de Estados Puros e Mistos

CDU 02:141:005.7

Miguel Citeli de Freitas

Relações de Incerteza de Altas Ordens e os Conceitos de “Inteligência” e Não-Gaussianidade de Estados Puros e Mistos

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 27 de Maio de 2021:

Viktor Dodonov
Orientador

Ademir Eugênio de Santana
Convidado 1

Antonio Carlos Pedroza
Convidado 2

Brasília
27 de Maio de 2021

Este trabalho é dedicado aos meus pais e aos meus avós.

Agradecimentos

Não seria possível concluir esta etapa da vida sem o apoio constante dos meus pais em todas as minhas escolhas e sem o ambiente favorável que me proporcionaram para que eu sempre me dedicasse aos estudos. Agradeço à minha mãe por me ensinar como me portar em meios acadêmicos, mas também por me convencer que às vezes é preciso descansar e descontraír um pouco. Obrigado ao meu pai pelos escritores que me mostrou e pelos desafios matemáticos que propôs na minha infância e adolescência.

Obrigado à minha tia Nathalie por todas as brincadeiras, conversas e perrengues que tivemos, além do seu entusiasmo à medida que o fim da graduação se aproximava. Agradeço ao meu irmão Pedro, ao meu tio Rafael, à minha tia Patrícia e a todos os familiares que estiveram comigo nesta jornada.

Se concluo a graduação preparado para dar os próximos passos é graças aos excelentes professores que tive. Ao professor Dodonov agradeço não só pela orientação nesses últimos dois anos, mas também por estimular minha intuição física. Ao professor Arsen agradeço por me ensinar que a Matemática é feita para simplificar os cálculos, e não dificultá-los. Também gostaria de incluir nesta lista os professores Clovis, Tarcísio Castro, Fabrício e Geraldo pelas diversas contribuições para minha formação.

Agradeço aos meus amigos Pedro, Valeriano, Lorena, Patrick, Danielle, Mariana, Caio, Leandro e a tantos outros que me acompanharam ao longo da graduação. Obrigado por todas as conversas, caronas, ajudas com computação, almoços e jantares no RU e pelas tardes e noites de estudo no PET. Além disso, a companhia inestimável da minha namorada Giovanna, seu interesse em conceitos de Física e sua paciência em semanas de prova foram essenciais para me manter equilibrado nos momentos mais difíceis.

Por fim, deixo um agradecimento especial a dois grandes amigos. João Augusto, obrigado por todas as nossas conversas sobre Física, Literatura, Música e Ciências Humanas. Saber que existem pessoas como você em um mundo em crise mantém a esperança em dias melhores. Vitor, sua coragem em sempre buscar novos desafios acadêmicos e extrair da universidade tudo que de melhor ela pode oferecer me fez também não sentir medo. Seu interesse em diversas áreas da Física e sua vontade de aprender sozinho assuntos complexos sempre me servirão de estímulo contra a conformidade. Obrigado aos dois pela amizade e pela lembrança de todos os nossos bons momentos na UnB e no Guaramóvel.

*“Dure a vida,
pois com ela tudo se alcança.”
(Miguel de Cervantes)*

Resumo

Uma das implicações mais importantes da Mecânica Quântica é o *princípio da incerteza de Heisenberg*, que impõe limites na precisão da medida de duas grandezas que não comutam entre si. No presente trabalho, tratamos do problema de minimização da relação de incerteza para diversos estados quânticos. Inicialmente calculamos os valores médios dos momentos e das variâncias, grandezas que aparecem na incerteza de Heisenberg, de quarta ordem para o estado Gaussiano e uma superposição de estados de Fock. Em seguida, estudamos dois outros conceitos introduzidos ao longo dos anos nos estudos de minimização: a “inteligência” e a não-Gaussianidade. O conceito de inteligência foi analisado para o caso em que os estados supracitados eram puros e mistos. Já a não-Gaussianidade foi estudada para uma superposição de estados comprimidos e uma superposição de estados coerentes.

Palavras-chaves: princípio de Heisenberg. estado inteligente. não-Gaussianidade. estado Gaussiano. estado de Fock. estado coerente. estado comprimido.

Abstract

One of the most important implications of Quantum Mechanics is the *Heisenberg uncertainty principle*, which imposes limits on the precision of the measurement of two quantities that do not commute. In the present work, we deal with the problem of minimizing the uncertainty relation for several quantum states. Initially, we calculated the mean values of the moments and variances, quantities that appear in Heisenberg's principle, of fourth order for the Gaussian state and a superposition of Fock states. Then, we studied two other concepts introduced over the years in minimization studies: "intelligence" and non-Gaussianity. The concept of intelligence was analyzed for the case in which the mentioned states were pure and mixed. Non-Gaussianity, on the other hand, was studied for a superposition of squeezed states and a superposition of coherent states.

Palavras-chaves: Heisenberg's principle. intelligent state. non-Gaussianity. Gaussian state. Fock state. coherent state. squeezed state.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Distribuição de probabilidade para estados coerentes.	33
Figura 2 – Gráficos das quantidades D (esquerda) e R (direita) em função de β para diferentes valores de μ_0	49
Figura 3 – Gráfico da quantidade Z em função de β para diferentes valores de μ_0 (a), Z_{min} em função de μ_0 para β_{min} (b) e o gráfico de β_{min} (c).	49
Figura 4 – Gráfico do produto das variâncias para a superposição de estados de Fock (esquerda) e sua ampliação (direita) em função de β e para diferentes valores de r	51
Figura 5 – Densidade de Probabilidade para a) $\theta = 0$, b) $\theta = \pi/4$ e c) $\theta = \pi/2$	54
Figura 6 – Valor médio $\langle \hat{x}^4 \rangle$ (esquerda) e o produto dos valores médios (direita) para a superposição de estados comprimidos.	55
Figura 7 – Função de Wigner $W_z(q, q)$ (esquerda) e $W_z(q, 0)$ (direita) para $\theta = \pi/2$	55
Figura 8 – Fatores de não-Gaussianidade (esquerda) e Curtose (direita) para a superposição de estados comprimidos.	56
Figura 9 – Valor médio $\langle \hat{x}^4 \rangle$ (esquerda) e o produto dos valores médios (direita) com $\phi = \pi/4$ para a superposição de estados coerentes.	57
Figura 10 – Função de onda para $\phi = 0$ (esquerda) e $\phi = \pi/4$ (direita) para diferentes valores de a	58
Figura 11 – Função de Wigner $W_{4\alpha}(q, 0)$ (esquerda) e $W_{4\alpha}(q, q)$ (direita) para diferentes valores de a quando $\phi = 0$	59
Figura 12 – Função de Wigner $W_{4\alpha}(q, 0)$ (esquerda) e $W_{4\alpha}(q, q)$ (direita) para diferentes valores de a quando $\phi = \pi/4$	59
Figura 13 – Fatores de não-Gaussianidade (esquerda) e Curtose (direita) para a superposição de estados coerentes.	60

Lista de tabelas

Tabela 1 – Minimização do produto das variâncias para diferentes valores de r . . . 52

Lista de abreviaturas e siglas

OIS	Estados Inteligentes Ordinários
RSIS	Estados Inteligentes de Robertson-Schrödinger

Lista de símbolos

\hbar	Constante de Planck
σ_A	Variância de A
σ_{AB}	Covariância de AB
$\Pi^{(n)}$	Produto dos momentos de ordem n
$\Pi_\sigma^{(2n)}$	Produto das variâncias de ordem n
$ n\rangle$	Estado de Fock
$ \alpha\rangle$	Estado Coerente
$\Psi(x)$	Função de Onda
$\rho(x, y)$	Matriz densidade
$W(x, p)$	Função de Wigner

Sumário

	Introdução	25
1	NOÇÕES PRELIMINARES	29
1.1	Estados Quânticos	29
1.1.1	Estado de Fock (ou Estado de Número)	29
1.1.2	Estado Coerente	31
1.1.3	Estado Comprimido	33
1.2	Matriz Densidade	34
1.3	Função de Wigner	36
1.4	Estados de Quatro Fótons	38
2	RELAÇÕES DE INCERTEZA PARA ESTADOS PUROS	41
2.1	Estado Gaussiano	41
2.2	Superposição do Estado de Vácuo e do Quarto Estado Excitado de Fock	44
3	RELAÇÕES DE INCERTEZA PARA ESTADOS MISTOS	47
3.1	Estado Gaussiano	47
3.2	Superposição do Estado de Vácuo e do Quarto Estado Excitado de Fock	50
4	NÃO-GAUSSIANIDADE	53
4.1	Superposição de Estados Comprimidos	53
4.2	Superposição de Estados Coerentes	57
	Conclusão	61
	REFERÊNCIAS	63

Introdução

Um dos principais resultados da Mecânica Quântica é o *princípio de Heisenberg*, que estabelece um limite na precisão da medida de duas grandezas que não comutam entre si. O problema da minimização desta incerteza tem sido amplamente estudado nas últimas décadas e sua aplicabilidade tanto teórica quanto experimental é de grande interesse para diversas áreas da Física. Como poderá ser visto no decorrer desta seção, conceitos como “inteligência” e não-Gaussianidade foram introduzidos ao longo dos anos a fim de investigar estados com incertezas mínimas sob diferentes perspectivas. Visamos apresentar no Capítulo 1 algumas definições que serão úteis nos capítulos seguintes, fazendo uma revisão dos estados quânticos presentes neste trabalho, além de uma breve introdução à matriz densidade e à função de Wigner, que nos permitirão calcular a incerteza de estados puros e mistos.

Mostrou-se em (KENNARD, 1927) que a relação da incerteza para momentos de segunda ordem podia ser escrita como

$$\langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (1)$$

onde $\hbar = 1,05457 \times 10^{-34} J.s$ é a constante de Planck. Sabemos que a igualdade em (1) é obtida para o estado de vácuo $|0\rangle$. Usando a desigualdade para operadores Hermitianos $\langle \hat{A}^2 \rangle \geq \langle \hat{A} \rangle^2$, vemos que o produto dos momentos de quarta ordem (em coordenadas adimensionais) deve obedecer a desigualdade

$$\Pi^{(4)} \equiv \langle \hat{x}^4 \rangle \langle \hat{p}^4 \rangle \geq 1/16, \quad (2)$$

porém, para o estado de vácuo esta desigualdade é nove vezes maior que o esperado, pois $\langle \hat{x}^4 \rangle_{vac} = 3 \langle \hat{x}^2 \rangle_{vac}^2$ e $\langle \hat{p}^4 \rangle_{vac} = 3 \langle \hat{p}^2 \rangle_{vac}^2$, e, assim, $\Pi_{vac}^{(4)} = 9/16 = 0,5625$. Considerando momentos estatísticos de quarta ordem, foi obtida em (DODONOV; MAN'KO, 1989) a desigualdade $\langle \hat{x}^4 \rangle \langle \hat{p}^4 \rangle \geq 0,3857$. Desde então, diversos estados quânticos vêm sendo estudados a fim de obter um mínimo entre 0,39 e 0,56. Em (LYNCH; MAVROMATIS, 1990), foram considerados estados tais que $\langle \hat{x}^n \rangle = \langle \hat{p}^n \rangle$, onde para uma superposição de estados de quatro fótons foi obtido o mínimo de 0,4878, sendo o menor valor já encontrado. Outra relação interessante é o produto das variâncias,

$$\Pi_{\sigma}^{(2n)} \equiv \sigma_{x^n} \sigma_{p^n} \geq \left(\frac{\hbar^2}{4} \right)^n, \quad (3)$$

onde

$$\sigma_A = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2. \quad (4)$$

Conforme foi mostrado também em (KENNARD, 1927), o mínimo de (3) era obtido quando $n = 1$, contudo ordens mais altas não haviam sido analisadas. Em nosso recente trabalho (CITELI; DANTAS; DODONOV, 2020), calculamos a minimização do produto dos valores médios, bem como do produto das variâncias para momentos de quarta ordem. Alguns dos sistemas quânticos lá estudados, a saber, o estado Gaussiano e a superposição do estado de vácuo com o quarto estado excitado de Fock, estão presentes no Capítulo 2, onde tratamos de estados puros, e no Capítulo 3, onde consideramos estados mistos.

Conforme mencionamos, uma das generalizações do princípio da incerteza se deu com a introdução do conceito de estados “inteligentes”. Inicialmente este conceito foi proposto nos estudos sobre spin, quando (ARAGONE et al., 1974) chamou de “estados inteligentes de spin” os estados que minimizavam a relação

$$Z \equiv \sigma_A \sigma_B - Y_{AB}^2, \quad (5)$$

onde

$$Y_{AB} = \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle, \quad (6)$$

escrita em termos dos operadores de momento angular. Contudo, o conceito foi posteriormente estendido e empregado de forma geral. Outra classe de estado inteligente foi introduzida por (TRIFONOV, 1994) chamando de “estado inteligente generalizado” aquele que minimizava a *relação de incerteza de Robertson-Schrödinger*, definida em (SCHRÖDINGER, 1930) e (ROBERTSON, 1930) como

$$R \equiv \sigma_A \sigma_B - \sigma_{AB}^2 - |Y_{AB}|^2, \quad (7)$$

onde

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle. \quad (8)$$

Além disso, outra quantidade interessante introduzida ao longo do tempo foi

$$D \equiv \sigma_A \sigma_B - \sigma_{AB}^2, \quad (9)$$

que também será abordada em nosso trabalho. Discutimos nos Capítulos 2 e 3 para quais potências do par de operadores (\hat{x}, \hat{p}) o estado Gaussiano é um estado inteligente ou um estado inteligente generalizado, chamado por nós de *estado inteligente ordinário* (OIS) e *estado inteligente de Robertson-Schrödinger* (RSIS), respectivamente, além de mostrar que o estado de Fock é RSIS para todo n .

Por fim, também dedicamos nossos estudos a medir o grau de não-Gaussianidade de um estado, um método mais recente da investigação de estados minimizantes. Vimos

anteriormente que o produto de valores médios de quarta ordem é nove vezes maior que o esperado. É possível mostrar que essa relação vale para qualquer estado Gaussiano, seja ele puro ou misto. Por esta razão, verificar se um estado é não-Gaussiano ou medir o quanto este se afasta da Gaussianidade nos leva a consequentemente minimizar $\Pi^{(4)}$. Entretanto, seguiremos o caminho contrário: sabendo que um estado minimiza o produto dos momentos, gostaríamos de medir seu grau de não-Gaussianidade, a fim de conectar estes dois conceitos.

A primeira forma e a mais intuitiva de medir a não-Gaussianidade é através da curtose, definida como

$$K = \frac{\langle \hat{x}^4 \rangle}{3 \langle \hat{x}^2 \rangle^2} - 1. \quad (10)$$

Todavia, esta quantidade não é sempre eficaz, uma vez que pode depender da escolha da representação da função de onda. Para contornar este problema, se mostra útil empregarmos o formalismo da matriz densidade (ver seção 1.2) por não depender da escolha da representação. Uma forma alternativa de quantificar a não-Gaussianidade utilizando este formalismo foi introduzida em (MANDILARA; CERF, 2012) e é dada por

$$g = \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\rho}_G)}{\text{Tr}(\hat{\rho}_G^2)}, \quad (11)$$

onde $\hat{\rho}_G$ é a matriz densidade de referência, calculada com os mesmos momentos de primeira e segunda ordens de cada sistema sendo estudado¹. Contudo, (11) também possui uma desvantagem, pois, embora possamos ver que para estados Gaussianos tenhamos sempre $g = 1$, a recíproca não é verdadeira. Assim, incluímos mais uma medida de não-Gaussianidade, introduzida por (GENONI; PARIS; BANASZEK, 2007),

$$\delta[\hat{\rho}] = \frac{\text{Tr}(\hat{\rho} - \hat{\rho}_G)^2}{2\text{Tr}(\hat{\rho}^2)} = \frac{\text{Tr}(\hat{\rho}^2 + \hat{\rho}_G^2 - 2\hat{\rho}\hat{\rho}_G)}{2\text{Tr}(\hat{\rho}^2)}, \quad (12)$$

onde $\delta = 0$ apenas para estados Gaussianos. A equação (12) é baseada na ideia de distância de Hilbert-Schmidt, onde podemos calcular o afastamento de um dado estado em relação ao estado de referência. Tais medidas desempenham um importante papel na investigação da não-classicalidade de certos estados quânticos. Uma discussão mais detalhada sobre medidas de distância dentro da Ótica Quântica pode ser vista em artigos como (HILLERY, 1986), (ZYCZKOWSKI; SŁOMCZYŃSKI, 1998) e (DODONOV et al., 2000).

Estudamos o conceito de não-Gaussianidade no Capítulo 4 para uma superposição de dois estados comprimidos e uma superposição de quatro estados coerentes. Ambos os estados são casos específicos de superposições de estados de quatro fótons, e, além disso,

¹ Devido à equivalência entre os formalismos, a existência de uma matriz densidade de referência implica em uma função de Wigner de referência, nos permitindo calcular os fatores de não-Gaussianidade com o formalismo que melhor nos convir.

possuem características interessantes, como por exemplo, $\langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle$ e $\langle \hat{x}^4 \rangle = \langle \hat{p}^4 \rangle$. Estados com tais características são similares aos estudados em (LYNCH; MAVROMATIS, 1990), e, portanto, como são interessantes do ponto de vista da minimização da incerteza, podem também ser interessantes do ponto de vista da não-Gaussianidade. Discutimos sobre os estados de quatro fótons mais detalhadamente na seção 1.4.

1 Noções Preliminares

Nosso objetivo com este breve capítulo é reunir alguns conceitos fundamentais nos estudos sobre minimização da relação de incerteza. Embora tais conceitos possam ser facilmente encontrados em livros de Mecânica Quântica ou Ótica Quântica, tentamos direcioná-los de forma coerente ao que será apresentado nos capítulos seguintes, ora focando em aspectos físicos, ora criando familiaridade com os cálculos futuros.

1.1 Estados Quânticos

1.1.1 Estado de Fock (ou Estado de Número)

Conforme já foi mencionado, na Mecânica Quântica partículas podem se comportar como ondas. Entretanto, há também a possibilidade de ondas se comportarem como partículas, que é o caso, por exemplo, do campo eletromagnético, onde sua quantização gera os *fótons*, partículas de luz com massa de repouso igual a zero, porém com momento linear não-nulo. Durante a solução da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico quântico, surgem os chamados estados de Fock, estados ortonormais denotados por $|n\rangle$. Esta representação indica a quantidade de fótons que há no sistema: se $|n=0\rangle$, então este estado tem 0 fóton, e por isso recebe o nome de estado de vácuo. Para os estados $|1\rangle, |2\rangle, \dots$ o sistema terá 1, 2, ... fótons. Da ortonormalidade dos estados de Fock, podemos provar a equação

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \quad (1.1.1)$$

conhecida como relação de completeza. Os estados $|n\rangle$ aparecem como autovetores do operador número, definido como $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, onde \hat{a} e \hat{a}^\dagger são dados em coordenadas adimensionais por

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{p}). \quad (1.1.2)$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (1.1.3)$$

Sabemos que os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger atuam nos estados de Fock da seguinte maneira

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (1.1.4)$$

donde podemos ver que a atuação de \hat{a} em $|n\rangle$ diminui um fóton do sistema enquanto \hat{a}^\dagger atuando em $|n\rangle$ gera um fóton; por essa razão, estes operadores recebem o nome de *operadores de aniquilação e criação*, respectivamente. A partir de (1.1.4), podemos obter a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Além disso, podemos calcular os seguintes valores médios,

$$\langle \hat{n} \rangle = n, \quad \langle \hat{n}^2 \rangle = n^2, \quad \sigma_n = 0, \quad (1.1.5)$$

e, assim, o grau de coerência de segunda ordem é igual a

$$g^{(2)} = 1 + \frac{\sigma_n - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle^2} = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1. \quad (1.1.6)$$

O grau de coerência de segunda ordem representa a intensidade da correlação entre feixes de luz. O motivo da escolha desta grandeza é por mostrar que a luz caótica não pode ser coerente, o que não poderia ser visto apenas com o grau de coerência de primeira ordem. Quando $g = 1$ dizemos que a luz é coerente, enquanto que para $g = 0$, dizemos que a luz é incoerente. Já para valores entre 0 e 1, a luz é dita parcialmente coerente. Para uma discussão mais aprofundada sobre o grau de coerência de primeira e de segunda ordem, ver (LOUDON, 2000).

Um dos métodos para a criação em laboratórios de estados de Fock com baixo número de fótons pode ser feito da seguinte maneira. Inicialmente posicionamos um átomo em meio a dois espelhos bem polidos. Em seguida, disparamos um laser em sua direção de forma a excitá-lo e fazê-lo emitir um fóton. Este fóton permanecerá na cavidade mesmo depois da saída do átomo, gerando o primeiro estado excitado. Outros métodos de como gerar estados de Fock em laboratório podem ser vistos em (LOUDON, 2000) e (BACHOR, 2004).

Apesar da facilidade da álgebra dos estados de Fock e destes fornecerem um número bem definido de fótons, não há nenhuma informação quanto à fase do sistema, o que não se mostra útil para experimentos com lasers. Além disso, seguindo os argumentos apresentados em (SAKURAI, 1967), podemos calcular o valor médio de um campo eletromagnético com comprimento de onda $2\pi\lambda$ no estado de vácuo $|0\rangle$, obtendo

$$\langle 0 | E \cdot E | 0 \rangle \sim 1/\lambda^4, \quad (1.1.7)$$

enquanto que o valor médio clássico deste campo é igual a

$$E_{\text{médico}}^2 = \bar{n}/\lambda, \quad (1.1.8)$$

onde \bar{n} é o número médio de fótons por unidade de volume. Para que o resultado clássico seja distinto do quântico, é preciso que $\bar{n} \gg 1/\lambda^3$, ou seja, o número de fótons deve ser muito grande. Contudo, não é tão fácil obter grandes números de fótons experimentalmente. Neste contexto, surge o estado quântico “mais clássico”, o chamado *estado*

coerente, em que é possível obter informações sobre a fase do sistema e que possui um grande número de fótons, mas sem as mesmas dificuldades experimentais dos estados de Fock.

1.1.2 Estado Coerente

A primeira aparição dos estados coerentes ocorreu em 1926 quando Schrödinger mostrou em (SCHRÖDINGER, 1926) que um pacote de onda do oscilador harmônico não se dissipava à medida que evoluía no tempo. Quase 40 anos depois, este mesmo tema foi estudado por Sudarshan em (SUDARSHAN, 1963), porém foi apenas em (GLAUBER, 1963) que o termo “estado coerente” foi empregado pela primeira vez. Por esta razão, os estados coerentes também são conhecidos como estados de Glauber-Sudarshan.

A introdução dos estados coerentes pode ser feita de três maneiras: como estados minimizantes da relação de incerteza, a partir do operador de deslocamento ou dos operadores de aniquilação e criação. Utilizaremos o último método para preservar a intuição e não recorrer a muitas conveniências matemáticas. Consideremos o estado $|\alpha\rangle$ tal que

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.1.9)$$

Como \hat{a} não é um operador Hermitiano, segue que α será complexo. Vale dizer que \hat{a}^\dagger não atua em $|\alpha\rangle$, mas sim em $\langle\alpha|$, de forma que $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$. A partir de (1.1.9), podemos obter as seguintes expressões

$$\langle\hat{n}\rangle = |\alpha|^2, \quad \langle\hat{n}^2\rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2, \quad \sigma_n = |\alpha|^2 = \langle\hat{n}\rangle, \quad (1.1.10)$$

e, assim, o grau de coerência de segunda ordem de $|\alpha\rangle$ será

$$g^{(2)} = 1 + \frac{\sigma_n - \langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}^2\rangle} = 1,$$

sendo esta, portanto, a razão de $|\alpha\rangle$ ser chamado de estado coerente. Este resultado está em acordo com o que esperávamos, pois para o modelo idealizado de ondas clássicas estáveis, não há flutuações aleatórias, ou seja, o feixe de luz é coerente. Ainda de (1.1.9) podemos ver que

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{2}\text{Re}(\alpha), \quad \langle\hat{p}\rangle = \sqrt{2}\text{Im}(\alpha),$$

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1), \quad \langle\hat{p}^2\rangle = -\frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2|\alpha|^2 - 1),$$

e, portanto, $\sigma_x = \sigma_p = 1/2$, ou seja, os estados coerentes minimizam a relação de incerteza de Heisenberg para qualquer valor de α . Como os estados de Fock formam um conjunto completo, podemos expandir $|\alpha\rangle$ da seguinte maneira

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad (1.1.11)$$

cujos coeficientes da expansão podem ser obtidos com a atuação de \hat{a} em (1.1.11), sendo dados por

$$c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} c_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0.$$

Pela condição de normalização $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$, vemos que $c_0 = \exp\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\}$, e, desta forma, a expansão dos estados coerentes em termos dos estados de Fock pode ser escrita como

$$|\alpha\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right\} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.1.12)$$

A partir desta definição, observamos que os estados coerentes não são ortogonais, uma vez que

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp\left\{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2 + \beta^* \alpha\right\}. \quad (1.1.13)$$

Além disso, podemos substituir $|n\rangle = \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle = \hat{a}^{\dagger n} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle$ em (1.1.12) para obter

$$|\alpha\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right\} \sum_n \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} e^{-\alpha \hat{a}} |0\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha \hat{a}} |0\rangle,$$

e, tendo em vista que $[\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]] = [\hat{a}^\dagger, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]] = 0$, podemos usar a relação

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]},$$

concluindo finalmente que

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle, \quad D(\alpha) \equiv \exp\{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}\}. \quad (1.1.14)$$

É de fácil verificação que $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha)$ e também que $D(\alpha)$ é um operador unitário, ou seja, $D(\alpha) D^\dagger(\alpha) = 1$. Usando a relação

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!} [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots, \quad (1.1.15)$$

conhecida como *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*, é possível mostrar que

$$D^\dagger(\alpha) \hat{a} D(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad D^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (1.1.16)$$

Por esta razão, $D(\alpha)$ recebe o nome de *operador de deslocamento*. A representação dos estados coerentes no espaço das configurações é dada por

$$\langle x | \alpha \rangle = \pi^{-1/4} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}\right\}. \quad (1.1.17)$$

Esta fórmula será útil para encontrar a função de onda da superposição de quatro estados coerentes estudada na seção 4.2. Calculando a probabilidade de encontrar n fótons em um estado coerente, obtemos

$$p_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (1.1.18)$$

que é uma distribuição de Poisson. Contudo, para valores grandes de n , a distribuição (1.1.18) passará a ser Gaussiana, como pode ser verificado na Figura 1.

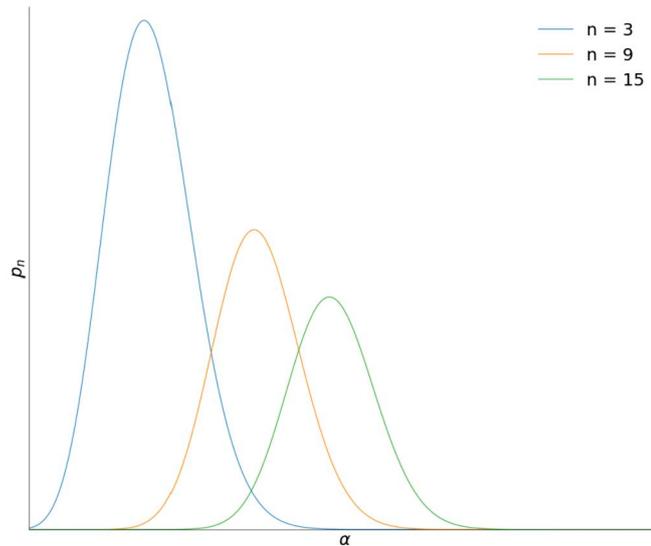


Figura 1 – Distribuição de probabilidade para estados coerentes.

Por fim, vale acrescentar que a relação de completeza para estados coerentes é dada por

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \mathbf{1}, \quad (1.1.19)$$

onde $d^2\alpha = dx dy$ e $\alpha = x + iy$. Esta relação pode ser facilmente provada utilizando a expressão (1.1.12).

1.1.3 Estado Comprimido

Como vimos na seção anterior, os estados coerentes atingem a igualdade de (1), uma vez que a incerteza em ambos os operadores é a menor possível, ou seja, $1/2$. Contudo, existe um estado tal que, para o operador \hat{x} , por exemplo,

$$0 \leq \sigma_x \leq \frac{1}{2},$$

ou seja, a incerteza em \hat{x} é menor que o esperado. Para que isso seja possível, porém, é necessário que $\sigma_p > 1/2$, de forma a preservar o princípio de Heisenberg. Desta maneira, podemos pensar que após uma transformação, temos

$$\hat{x}' = \hat{x}/\lambda, \quad \hat{p}' = \lambda\hat{p}.$$

Assim, quando a incerteza em um dos operadores diminuir, a incerteza do outro irá necessariamente aumentar. Consideremos agora o operador $\hat{A} = (2\mu)^{-1/2} (\hat{x}' + i\mu\hat{p}')$, onde μ é um número real e positivo. Este operador foi escolhido desta forma pois, como os estados coerentes minimizam a relação de incerteza e são autovetores do operador de aniquilação, é razoável pensar que um operador com estrutura semelhante a de \hat{a} também terá uma incerteza mínima. O termo $(2\mu)^{-1/2}$ é apenas por conveniência. Desta maneira, escrevendo o operador \hat{A} em termos de \hat{a} e \hat{a}^\dagger , obtemos

$$\hat{A} = \hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger \sinh r, \quad (1.1.20)$$

onde $\cosh r = (1/\lambda + \lambda\mu)/2\sqrt{\mu}$ e $\sinh r = (1/\lambda - \lambda\mu)/2\sqrt{\mu}$, pois podemos ver que com essa definição obtemos a conhecida relação $\cosh^2 r - \sinh^2 r = 1$. Foi mostrado por (STOLER, 1970) que a relação (1.1.20) podia ser obtida considerando o operador

$$\hat{S}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}(z\hat{a}^2 - z^*\hat{a}^{\dagger 2})\right\}, \quad (1.1.21)$$

onde $z = re^{i\theta}$. Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, é possível mostrar que

$$\hat{S}(z)\hat{a}\hat{S}^\dagger(z) = \hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r, \quad \hat{S}(z)\hat{a}^\dagger\hat{S}^\dagger(z) = \hat{a}^\dagger \cosh r + \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r.$$

Podemos ver que para z real obtemos justamente (1.1.20). O operador $\hat{S}(z)$ foi chamado de *operador de compressão*. Este operador pode ser aplicado a diversos estados, como o estado de vácuo, estado de Fock e estado coerente, gerando *estados de vácuo comprimidos*, *estados de Fock comprimidos* e *estados coerentes comprimidos*, respectivamente. A criação de estados comprimidos em laboratório pode ser feita através de métodos como amplificações paramétricas degeneradas (*degenerate parametric amplifications*) e mistura de quatro ondas (*four wave mixing*). Mais detalhes sobre os primeiros experimentos com estados comprimidos podem ser vistos em (YUEN; SHAPIRO, 1979), enquanto que métodos mais atuais estão presentes em (MA et al., 2020). Para uma revisão histórica sobre os estados comprimidos, ver (DODONOV et al., 2007).

1.2 Matriz Densidade

Na Mecânica Quântica usualmente descrevemos problemas a partir dos vetores de estados, ou funções de onda, $|\psi\rangle$. Estes vetores contêm diversas informações relevantes, por exemplo os possíveis valores a serem obtidos na medida de uma grandeza física, suas probabilidades e como o sistema evolui no tempo. Contudo, vetores de estado não fornecem informações sobre a interação deste sistema com o meio externo. Sabemos pelo princípio de Heisenberg que o próprio processo de medição interfere no estado em que o sistema se encontra, e, portanto, se essa interação não puder ser negligenciada, o formalismo

de vetores de estado se mostra ineficiente. Essa questão pode ser solucionada com a introdução de um operador $\hat{\rho}$ definido como

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.2.1)$$

onde p_i representa a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|\psi_i\rangle$. Chamamos $\hat{\rho}$ de *matriz densidade* (ou operador densidade). Como a soma total das probabilidades é igual a 1, temos

$$\sum_i p_i = 1. \quad (1.2.2)$$

Se a probabilidade de encontrar o sistema em um determinado estado $|\psi\rangle$ for máxima, isso significa que $\hat{\rho}$ será dado por

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (1.2.3)$$

Neste caso dizemos que o estado $|\psi\rangle$ é um estado *puro*. Quando não é possível descrever o sistema apenas com vetores de estados, dizemos se tratar de um estado *misto*.

A equação (1.2.2) pode ser equivalentemente escrita como

$$Tr(\hat{\rho}) = 1, \quad (1.2.4)$$

uma vez que definimos o traço de um operador como

$$Tr(\hat{A}) = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle. \quad (1.2.5)$$

Em geral, podemos escrever o valor médio de qualquer operador na forma

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (1.2.6)$$

Para provar essa equação, basta substituir (1.2.1) e (1.2.5) em (1.2.6) e usar a relação de completeza (1.1.1). Escolhendo $\hat{A} = \hat{\rho}$ em (1.2.6), obtemos

$$Tr(\hat{\rho}^2) = \sum_i p_i^2 \leq 1. \quad (1.2.7)$$

Como as probabilidades são sempre menores ou iguais a 1, concluímos que a igualdade em (1.2.7) será obtida apenas quando $p_i^2 = p_i$, isto é, para estados puros. Por essa razão, vemos que o traço de $\hat{\rho}^2$ é um bom indicativo da pureza do sistema. Definimos, portanto, a *pureza quântica* como

$$\mu = Tr(\hat{\rho}^2) \leq 1. \quad (1.2.8)$$

Além de ser limitada superiormente, a pureza quântica também terá um limite inferior. Um estado é dito em *máxima desordem* quando

$$\hat{\rho} = \frac{\mathbb{1}}{d},$$

onde d representa a dimensão do espaço. Assim, os limites de μ serão

$$\frac{1}{d} \leq \mu \leq 1.$$

1.3 Função de Wigner

Sabemos que determinando posição e velocidade iniciais de um sistema, podemos prever o comportamento deste ao longo do tempo. Para obter as equações de movimento, entretanto, é necessário resolver uma equação diferencial de segunda ordem, chamada *equação de Euler-Lagrange*, o que nem sempre é uma tarefa simples. Portanto, em muitos casos é preferível substituir a velocidade do sistema por seu *momento*. Esta substituição nos permite encontrar as equações de movimento a partir de duas equações diferenciais de primeira ordem, chamadas *equações de Hamilton*. O espaço definido por posição x e momento p recebe o nome de *espaço de fase*.

Tanto na Mecânica Clássica quanto na Física Estatística, é possível definir uma função de probabilidade no espaço de fase. Entretanto, na Mecânica Quântica, este é um problema de especial dificuldade, tendo em vista a não-comutatividade dos operadores \hat{x} e \hat{p} . A solução para essa questão foi proposta por Wigner em 1932 com a chamada *função de Wigner*. Apresentaremos a seguir uma dedução para esta função que pode ser vista com mais detalhes em (SCHLEICH, 2001).

Consideremos uma partícula que transita do estado $x - v/2$ para o estado $x + v/2$. Esta transição será descrita pelo elemento de matriz $\langle x - \frac{v}{2} | \hat{\rho} | x + \frac{v}{2} \rangle = \rho(x - \frac{v}{2}, x + \frac{v}{2})$, onde $\hat{\rho}$ é a matriz densidade. Sabemos que a transformada de Fourier de uma função no espaço das configurações nos dá o equivalente desta função no espaço dos momentos. Por essa razão, como no caso que está sendo considerado a variável responsável pelo movimento é v , podemos fazer uma transformada de Fourier com respeito a ela, obtendo

$$W(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(x - \frac{v}{2}, x + \frac{v}{2}\right) e^{ipv} dv. \quad (1.3.1)$$

A equação (1.3.1) é uma das definições da função de Wigner. Outras definições podem ser encontradas em (HAROCHE; RAIMOND, 2006). Antes de prosseguirmos, observamos que, em coordenadas adimensionais, $[p] = 1/[x]$, e, assim, $[v] = [x]$, de forma que o argumento da exponencial em (1.3.1) é adimensional. Caso não estivéssemos usando coordenadas adimensionais, seria necessário incluir a constante \hbar na exponencial de (1.3.1).

Para garantir a normalização da função de Wigner, temos que $W(x, p)$ deve cumprir a condição

$$\frac{1}{2\pi} \int \int W(x, p) dx dp = 1. \quad (1.3.2)$$

O fator de normalização $1/2\pi$ é comumente visto em Física Estatística e pode ser pensado como fruto da integração sob todo o espaço de fase.

A integração da função de Wigner em relação a cada uma de suas variáveis nos leva à

$$\frac{1}{2\pi} \int W(x, p) dp = \langle x | \hat{\rho} | x \rangle, \quad (1.3.3)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int W(x, p) dx = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle, \quad (1.3.4)$$

que é o conhecido resultado para a densidade de probabilidade.

Vemos de (1.3.1) que a matriz densidade pode ser obtida a partir de uma transformada de Fourier da função de Wigner. Por essa razão, como anteriormente a matriz densidade nos permitia calcular valores médios de operadores, o mesmo poderá ser feito com $W(x, p)$. No caso particular dos operadores \hat{x} e \hat{p} , temos

$$\langle \hat{x}^n \rangle_W = \frac{1}{2\pi} \int \int W(x, p) x^n dx dp, \quad (1.3.5)$$

$$\langle \hat{p}^n \rangle_W = \frac{1}{2\pi} \int \int W(x, p) p^n dx dp. \quad (1.3.6)$$

Para calcular o valor médio da multiplicação destes operadores, entretanto, devemos considerar a soma de todas as possíveis combinações de \hat{x} e \hat{p} , ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}\hat{p} \rangle_W &= \frac{1}{2} \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle \\ \langle \hat{x}^2\hat{p} \rangle_W &= \frac{1}{3} \langle \hat{x}^2\hat{p} + \hat{p}\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}\hat{x} \rangle \\ \langle \hat{x}^2\hat{p}^2 \rangle_W &= \frac{1}{6} \langle \hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}^2\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\hat{p}\hat{x} \rangle \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

Escrevendo os valores médios desta forma, vemos a correspondência clássica fornecida pelo formalismo da função de Wigner: tendo em vista que classicamente não há diferença na ordem em que as grandezas se apresentam, todas as equações seriam equivalentes. Esta representação foi chamada de *representação de Wigner-Weyl*. Ratificamos que a mencionada correspondência é apenas para ver como o comportamento da função de Wigner é similar ao de uma função de probabilidade na Física Clássica, mas lembramos que os resultados da função de Wigner são puramente quânticos.

Algumas propriedades importantes da função de Wigner podem ser obtidas a partir da definição (1.3.1). Primeiro, vemos que $W(x, p)$ é real, ou seja,

$$W^*(x, p) = W(x, p), \quad (1.3.7)$$

o que se espera para toda função de probabilidade. Além disso, a função de Wigner é limitada inferior e superiormente,

$$-2 \leq W(x, p) \leq 2. \quad (1.3.8)$$

A equação (1.3.8) é extremamente curiosa: a função de Wigner pode assumir valores negativos! Este resultado, porém, é essencial para a compreensão da função de Wigner como uma função de probabilidade na Mecânica Quântica. Sabemos que no oscilador harmônico quântico os valores médios $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$ são iguais a zero, e, neste caso, as equações (1.3.3) e (1.3.4) devem também ser iguais a zero, o que seria impossível se $W(x, p)$ fosse definida apenas para valores positivos. Como uma função de probabilidade não pode assumir valores negativos, a função de Wigner é dita uma função de *quasi-probabilidade*. Por essa razão, dizemos que quando a função de Wigner é positiva em todo ponto, então temos um estado *quasi-clássico*. Por outro lado, se ela for negativa, temos um estado *não-clássico*.

Por fim, acrescentamos a seguinte relação para estados Gaussianos

$$W(x, p) = \frac{1}{\sqrt{\det \sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2 \det \sigma} \mathbf{r}^T \sigma^{-1} \mathbf{r}\right\}, \quad (1.3.9)$$

onde

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xp} \\ \sigma_{xp} & \sigma_p \end{pmatrix}. \quad (1.3.10)$$

A dedução desta equação pode ser verificada em (SERAFINI, 2017). Vejamos a seguir um exemplo de função de Wigner. Consideremos um estado em que $\sigma_x = \sigma_p = \langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\sigma_{xp} = 0$. Temos, portanto,

$$W(q, p) = \frac{1}{\langle \hat{x}^2 \rangle} \exp\left\{-\frac{q^2 + p^2}{2 \langle \hat{x}^2 \rangle}\right\}. \quad (1.3.11)$$

Nesse ponto optamos por escrever a variável q em vez de x para não haver confusão com o operador de posição. Tornaremos a escrever desta forma no Capítulo 4.

1.4 Estados de Quatro Fótons

Quando tratamos de superposições como

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |4n\rangle, \quad (1.4.1)$$

algumas características interessantes podem ser verificadas para os valores médios de \hat{x} e \hat{p} . Vemos facilmente que

$$\langle \hat{a} \rangle = 2 \sum_{n,m} \sqrt{n} c_m^* c_n \langle 4m | 4n - 1 \rangle = 0 = \langle \hat{a}^\dagger \rangle, \quad (1.4.2)$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = 2 \sum_{n,m} \sqrt{n(4n-1)} c_m^* c_n \langle 4m | 4n - 2 \rangle = 0 = \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle. \quad (1.4.3)$$

Das equações (1.4.2) e (1.4.3) e fazendo um cálculo um pouco mais trabalhoso para a quarta potência dos operadores \hat{x} e \hat{p} , é possível obter as seguintes relações

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0, \quad \langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle, \quad \langle \hat{x}^4 \rangle = \langle \hat{p}^4 \rangle. \quad (1.4.4)$$

Ainda podemos verificar que $\langle \hat{x}\hat{p} \rangle = i/2$, e, assim, $\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle = 0$. Desta maneira, concluímos que para as superposições de estados de quatro fótons, temos

$$\sigma_x = \sigma_p, \quad \sigma_{x^2} = \sigma_{p^2}, \quad \sigma_{xp} = 0. \quad (1.4.5)$$

Portanto, para os casos específicos da superposição de dois estados comprimidos e da superposição de quatro estados coerentes, a função de Wigner de referência será dada por (1.3.11). Contudo, utilizaremos esta fórmula apenas para calcular os fatores de não-Gaussianidade da primeira superposição mencionada, já que para a segunda superposição será mais fácil obtê-los a partir de $\hat{\rho}_G$, que será calculado a seguir.

Lembramos da Física Estatística que a matriz densidade para o oscilador harmônico quântico é dada por

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta H}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}} = \frac{e^{-\beta(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)}} = (1 - e^{-\beta}) e^{-\beta \hat{a}^\dagger \hat{a}}. \quad (1.4.6)$$

Calculando o valor médio de \hat{x}^2 , obtemos

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = Tr(\hat{x}^2 \hat{\rho}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} \right).$$

Fazendo $\sigma \equiv 2 \langle \hat{x}^2 \rangle$, vemos que

$$e^{-\beta} = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}, \quad (1.4.7)$$

e, assim, escrevendo $\hat{\rho}$ na base de Fock, temos

$$\hat{\rho} = (1 - e^{-\beta}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} |n\rangle \langle n| = \frac{2}{\sigma + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right)^n |n\rangle \langle n|. \quad (1.4.8)$$

A matriz densidade (1.4.8) será a referida matriz densidade de referência para o caso da superposição de estados coerentes. Podemos ver de (1.4.8) que

$$Tr(\hat{\rho}^2) = \sigma^{-1}. \quad (1.4.9)$$

Esta relação será válida para ambas as famílias de estados quânticos presentes no Capítulo 4.

2 Relações de Incerteza para Estados Puros

2.1 Estado Gaussiano

Sabemos que um estado Gaussiano puro é descrito pela função

$$\psi(x) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}(a+ib)x^2 + (c+id)x - \frac{c^2}{2a}\right], \quad (2.1.1)$$

onde a, b, c, d são números reais com $a > 0$. Quando $a = 1$ e $b = 0$, o estado descrito por (2.1.1) é conhecido como pacote de onda de Schrödinger não-dispersivo, posteriormente chamado de estado coerente de Glauber–Sudarshan, conforme foi dito na seção 1.1.2. Os estados com a e $b \neq 0$ arbitrários foram chamados de “estados coerentes correlatos” em (DODONOV; KURMYSHEV; MAN’KO, 1980). Os estados com $c = d = 0$ são os “estados comprimidos de vácuo” (ver seção 1.1.3). A seguir deduziremos fórmulas para momentos de ordem n que nos auxiliarão nos cálculos futuros.

O valor médio $\langle \hat{x}^n \rangle$ é dado por

$$\langle \hat{x}^n \rangle = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-2ax^2+2cx} dx. \quad (2.1.2)$$

Fazendo a substituição

$$2ax^2 - 2cx = \left(\sqrt{2a}x - \frac{c}{\sqrt{2a}}\right)^2 - \frac{c^2}{2a},$$

obtemos¹

$$\langle \hat{x}^n \rangle = \frac{1}{(2i\sqrt{2a})^n} H_n\left(\frac{ic}{2\sqrt{2a}}\right), \quad (2.1.3)$$

onde $H_n(z)$ são os polinômios de Hermite, definidos como

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \left(\frac{d^n}{dz^n}\right) e^{-z^2}.$$

Podemos reescrever os coeficientes de (2.1.1) como

$$a = (4\sigma_x)^{-1}, \quad c = \langle \hat{x} \rangle / (2\sigma_x), \quad b = -\sigma_{xp} / \sigma_x, \quad d = \langle \hat{p} \rangle - \langle \hat{x} \rangle \sigma_{xp} / \sigma_x. \quad (2.1.4)$$

Desta maneira, a equação (2.1.3) fica na forma

$$\langle \hat{x}^n \rangle = i^{-n} (\sigma_x/2)^{n/2} H_n\left(i \langle \hat{x} \rangle / \sqrt{2\sigma_x}\right). \quad (2.1.5)$$

¹ Ver (GRADSHTEIN; RYZHIK, 2007), pág. 365, equação EH II 195(31).

Dada a simetria $x - p$, concluímos que

$$\langle \hat{p}^n \rangle = i^{-n} (\sigma_p/2)^{n/2} H_n \left(i \langle \hat{p} \rangle / \sqrt{2\sigma_p} \right). \quad (2.1.6)$$

No caso particular quando $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$, as equações (2.1.5) e (2.1.6) se tornam

$$\langle \hat{x}^{2n} \rangle = \frac{(2n-1)!!}{(2a)^n}, \quad \langle \hat{p}^{2n} \rangle = \frac{(2n-1)!!}{(2a)^n} (a^2 + b^2)^n. \quad (2.1.7)$$

Além disso, vemos também que²

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^n \hat{p}^n \rangle &= i^n |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} x^n (-1)^n e^{(a+ib)x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} \right) e^{-(a+ib)x^2} dx \\ &= i^n (a+ib)^{n/2} \langle x^n H_n(\sqrt{a+ib}x) \rangle \\ &= i^n n! [(a+ib)/2a]^{n/2} P_n \left(\sqrt{(a+ib)/2a} \right), \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

onde $P_n(z)$ são os polinômios de Legendre, definidos por

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n].$$

Como estamos interessados em verificar as relações de incerteza para momentos de quarta ordem, devemos fazer $n = 4$ em (2.1.5) e (2.1.6). Para $\langle \hat{x}^4 \rangle$, obtemos

$$\langle \hat{x}^4 \rangle = \frac{3}{4a^2} + \frac{3c^2}{a^3} + \frac{c^4}{a^4}. \quad (2.1.9)$$

Calculando também $\langle \hat{x}^2 \rangle$, concluímos que a variância será

$$\sigma_{x^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2c^2}{a^3} = 2\sigma_x^2 + 4\sigma_x \langle \hat{x} \rangle^2. \quad (2.1.10)$$

Lembrando novamente da simetria $x - p$, temos

$$\sigma_{p^2} = 2\sigma_p^2 + 4\sigma_p \langle \hat{p} \rangle^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{2a^2} + \frac{2}{a^3} (a^2 + b^2)(ad - bc)^2. \quad (2.1.11)$$

Assim, podemos ver que o produto das variâncias será mínimo quando $b = c = d = 0$, ou seja, para estados de vácuo comprimidos não-correlatos, onde temos em coordenadas adimensionais

$$\left(\Pi_{\sigma}^{(4)} \right)_{Gauss} = \left(\Pi_{\sigma}^{(2)} \right)_{min} = \frac{1}{4}. \quad (2.1.12)$$

A fim de verificar o conceito de “inteligência” para o par (\hat{x}^2, \hat{p}^2) no estado Gaussiano, devemos calcular também a covariância. Usando a fórmula (2.1.8), obtemos

$$\langle \hat{x}^2 \hat{p}^2 \rangle = \frac{a+ib}{2a} - 3 \left(\frac{a+ib}{2a} \right)^2. \quad (2.1.13)$$

² Para a solução da integral seguinte ver (GRADSHTEIN; RYZHIK, 2007), pág. 805, equação EH II 195(29).

Contudo, vemos em (8) que apenas a parte real de (2.1.13) contribui para o cálculo da covariância, e, assim,

$$\frac{1}{2} \langle \hat{x}^2 \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{x}^2 \rangle = \frac{3b^2}{a^2} - \frac{1}{4} = 3(4\sigma_{xp})^2 - \frac{1}{4}. \quad (2.1.14)$$

Portanto,

$$\sigma_{x^2p^2} = 4 \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle \sigma_{sp} + 2\sigma_{xp}^2 - \frac{1}{2}. \quad (2.1.15)$$

Assim, a quantidade D (ver 9) pode ser escrita como

$$D = 4(\sigma_{xp} + \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle)^2 + 8\sigma_x \sigma_p (\sigma_x \langle \hat{p} \rangle^2 + \sigma_p \langle x \rangle^2 - 2\sigma_{xp} \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle), \quad (2.1.16)$$

cujo mínimo é $D^{(min)} = 0$ quando $b = c = d = 0$.

Podemos notar que, usando a relação de comutação

$$[\hat{x}^2, \hat{p}^2] = 2i(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}), \quad (2.1.17)$$

podemos escrever a quantidade $Y_{x^2p^2}$, definida em (6), como

$$Y_{x^2p^2} = 2(\sigma_{xp} + \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle). \quad (2.1.18)$$

Desta forma, obtemos

$$R = \frac{1}{a^3} (a^2 + b^2) (c^2 + d^2). \quad (2.1.19)$$

Vemos que $R = 0$ quando $c = d = 0$, e, assim, concluímos que qualquer estado comprimido de vácuo é um estado RSIS não apenas para o par (\hat{x}, \hat{p}) , mas também para (\hat{x}^2, \hat{p}^2) . Deste resultado vemos que, embora a presença de termos lineares na exponencial de (2.1.1) não comprometa a “inteligência” de segunda ordem, o mesmo não ocorre para a “inteligência” de quarta ordem.

Por fim, para verificar se o estado Gaussiano é OIS, temos que, pelas equações (2.1.10), (2.1.11) e (2.1.15),

$$Z = 4(\sigma_x^2 \sigma_p^2 - \sigma_{xp}^2) = \frac{1}{4a^4} (a^2 - b^2)^2. \quad (2.1.20)$$

A quantidade Z é igual a zero quando $b = \pm a$. Este resultado implica que, se o estado for correlato do ponto de vista do par (\hat{x}, \hat{p}) , com fator de correlação $r \equiv \sigma_{xp} / \sqrt{\sigma_x \sigma_p} = \mp 1/\sqrt{2}$, o estado Gaussiano será OIS para o par (\hat{x}^2, \hat{p}^2) . Contudo, o estado não será correlato do ponto de vista deste par, uma vez que nesse caso $\sigma_{x^2p^2} = 0$.

2.2 Superposição do Estado de Vácuo e do Quarto Estado Excitado de Fock

Obter explicitamente as expressões de \hat{x}^4 e \hat{p}^4 não é uma tarefa fácil, pois, tendo em vista a não-comutatividade dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger , não seria possível aplicar fórmulas como o Binômio de Newton para obter estas expressões. Por essa razão, em vez de resolver diretamente o problema calculando $\langle \hat{x}^4 \rangle$ e $\langle \hat{p}^4 \rangle$, vemos ser menos trabalhoso calcular $\hat{x}^2 |n\rangle$ e $\hat{p}^2 |n\rangle$ e posteriormente multiplicar por seus respectivos conjugados, obtendo assim o resultado desejado. Desta forma,

$$\begin{aligned}\hat{x}^2 |n\rangle &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2\rangle + (2n+1) |n\rangle \right), \\ \hat{p}^2 |n\rangle &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)} |n+2\rangle - (2n+1) |n\rangle \right).\end{aligned}$$

Multiplicando por seus conjugados obtemos

$$\langle \hat{x}^4 \rangle = \langle \hat{p}^4 \rangle = \frac{1}{4} (6n^2 + 6n + 3). \quad (2.2.1)$$

Para $\langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$ vemos facilmente que

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle = n + \frac{1}{2}. \quad (2.2.2)$$

A partir de (2.2.1) e (2.2.2), concluímos que as variâncias e a covariância serão

$$\sigma_{x^2} = \sigma_{p^2} = \frac{1}{2} (n^2 + n + 1), \quad \sigma_{x^2 p^2} = -\frac{1}{2} (n^2 + n + 1). \quad (2.2.3)$$

Como $Y_{x^2 p^2} = 0$, temos que $D = R = 0$ para todo n , ou seja, o estado de Fock é um estado inteligente de Robertson-Schrödinger para o par (\hat{x}^2, \hat{p}^2) . Contudo, o estado de Fock não é um estado inteligente ordinário para este par, tendo em vista que a grandeza Z é não-nula para qualquer n .

Nesta seção, estamos interessados na seguinte superposição de estados de Fock

$$|\psi_4\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |4\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.2.4)$$

A escolha destes estados não é por acaso: os operadores \hat{x} e \hat{p} elevados à quarta potência são proporcionais a \hat{a}^4 e $\hat{a}^{\dagger 4}$, e com isso, aplicando-os no estado de vácuo, vemos que o estado resultante será alguma combinação dos estados que aparecem em (2.2.4).

Calculando $\hat{x}^2 |\psi\rangle$ e $\hat{p}^2 |\psi\rangle$ temos

$$\hat{x}^2 |\psi_4\rangle = \frac{1}{2} \left(\alpha |0\rangle + (\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{12}) |2\rangle + 9\beta |4\rangle + \beta\sqrt{30} |6\rangle \right), \quad (2.2.5)$$

$$\hat{p}^2 |\psi_4\rangle = -\frac{1}{2} \left(\alpha |0\rangle + (\alpha\sqrt{2} + \beta\sqrt{12}) |2\rangle - 9\beta |4\rangle - \beta\sqrt{30} |6\rangle \right). \quad (2.2.6)$$

Desta forma, usando a condição de normalização que $|\alpha|^2 = 1 - |\beta|^2$,

$$\langle \hat{x}^4 \rangle = \langle \hat{p}^4 \rangle = \frac{1}{4} \left(3 + 120|\beta|^2 + 4\sqrt{6}Re(\alpha^*\beta) \right). \quad (2.2.7)$$

Para obter $\langle \hat{x}^2 \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$ basta aplicar $|\psi\rangle$ nas equações (2.2.5) e (2.2.6), resultando em

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(|\alpha|^2 + 9|\beta|^2 \right). \quad (2.2.8)$$

Em posse das equações (2.2.7) e (2.2.8), podemos calcular a variância,

$$\sigma_{x^2} = \sigma_{p^2} = \frac{1}{2} \left(1 + 52|\beta|^2 - 32|\beta|^4 + 2\sqrt{6}Re(\alpha^*\beta) \right). \quad (2.2.9)$$

Escrevendo $\alpha^*\beta = |\alpha||\beta|e^{i\phi}$ e minimizando com respeito a ϕ , vemos que o mínimo de (2.2.9) será dado quando $Re(\alpha^*\beta) = -|\alpha||\beta| = -|\beta|\sqrt{1 - |\beta|^2}$. Desta forma, obtemos uma função apenas em termos do parâmetro β ,

$$f(|\beta|) = \frac{1}{2} \left(1 + 52|\beta|^2 - 32|\beta|^4 - 2|\beta|\sqrt{6(1 - |\beta|^2)} \right). \quad (2.2.10)$$

A minimização da função (2.2.10) no intervalo $0 < |\beta| < 1$ é feita numericamente e o resultado obtido é

$$\sigma_{x^2}^{(min)} = \sigma_{p^2}^{(min)} = 0.4424, \quad |\beta| = 0.0471. \quad (2.2.11)$$

Por consequência, o mínimo do produto das variâncias será $\left(\Pi_{\sigma}^{(4)} \right)_{min} = 0.1957$ para o mesmo valor de β .

3 Relações de Incerteza para Estados Mistos

3.1 Estado Gaussiano

Consideremos um estado Gaussiano misto cuja matriz densidade é dada por

$$\rho(x, y) = \sqrt{\frac{2\operatorname{Re}(a) - b}{\pi}} \exp\{-ax^2 + bxy - a^*y^2\}, \quad (3.1.1)$$

Pela definição da pureza quântica em (1.2.8), vemos que¹

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2\operatorname{Re}(a) - b}{2\operatorname{Re}(a) + b}}. \quad (3.1.2)$$

Podemos obter de (3.1.2) a seguinte relação para o parâmetro b

$$b = 2\operatorname{Re}(a) \frac{(1 - \mu_0^2)}{(1 + \mu_0^2)}. \quad (3.1.3)$$

Substituindo (3.1.1) em (1.3.1), concluímos que a função de Wigner em um estado Gaussiano misto tem a forma

$$W(x, p) = 2\mu_0 \exp\{-\alpha x^2 - \beta xp - \gamma p^2\}, \quad (3.1.4)$$

onde

$$\alpha = \frac{4|a|^2 - b^2}{2\operatorname{Re}(a) + b}, \quad \beta = \frac{4\operatorname{Im}(a)}{2\operatorname{Re}(a) + b}, \quad \gamma = \frac{1}{2\operatorname{Re}(a) + b}.$$

Calculando $\langle \hat{x}^n \rangle$ (ver 1.3.5), temos

$$\langle \hat{x}^n \rangle_W = \frac{\mu_0}{\pi} \int \int x^n \exp\{-\alpha x^2 - \beta xp - \gamma p^2\} dx dp. \quad (3.1.5)$$

Da equação (3.1.5) podemos ver que, resolvendo inicialmente a integral em relação a p , obtemos uma exponencial de x^2 . Assim, se n for ímpar, temos que $\langle \hat{x}^n \rangle = 0$. Por outro lado, para $n = 2m$, temos que

$$\langle \hat{x}^{2m} \rangle_W = \frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{\gamma}{\mu_0^2} \right)^m,$$

onde usamos que $\alpha\gamma - \beta^2/4 = \mu_0^2$. Seguindo os mesmos passos para $\langle \hat{p}^n \rangle$, obtemos

$$\langle \hat{p}^{2m} \rangle_W = \frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{\alpha}{\mu_0^2} \right)^m.$$

¹ Nesta seção e na seguinte optamos por escrever μ_0 em vez de μ para fortalecer a ideia de estados com purezas fixas.

Assim, as variâncias serão dadas por

$$\begin{aligned}\sigma_{x^2} &= \langle \hat{x}^4 \rangle - \langle \hat{x}^2 \rangle^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\mu_0^2} \right)^2, \\ \sigma_{p^2} &= \langle \hat{p}^4 \rangle - \langle \hat{p}^2 \rangle^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\mu_0^2} \right)^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Pi_\sigma^{(4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha\gamma}{\mu_0^4} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_0^2} + \frac{\beta^2}{4\mu_0^4} \right)^2,$$

onde podemos verificar facilmente que o mínimo é $\Pi_\sigma^{(4)} = 1/4$ quando $\beta = 0$ e $\mu_0 = 1$. Para o cálculo da covariância, antes devemos observar que, de acordo com a representação de Wigner-Weyl, temos

$$\langle \hat{x}^2 \hat{p}^2 \rangle_W = \sigma_{x^2 p^2} + \langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle + \frac{1}{2},$$

onde usamos relações de comutação entre \hat{x} e \hat{p} . Calculando então $\langle \hat{x}^2 \hat{p}^2 \rangle_W$, obtemos

$$\langle \hat{x}^2 \hat{p}^2 \rangle_W = \frac{1}{4\mu_0^2} \left(1 + \frac{3\beta^2}{4\mu_0^2} \right), \quad (3.1.6)$$

e, portanto,

$$\sigma_{x^2 p^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta^2}{4\mu_0^2} - 1 \right).$$

Calculando as quantidades D , R e Z , segue que

$$D = \frac{1}{4\mu_0^4} \left[\left(1 + \frac{\beta^2}{4\mu_0^2} \right)^2 - \mu_0^4 \left(1 - \frac{\beta^2}{4\mu_0^2} \right)^2 \right], \quad (3.1.7)$$

$$R = \frac{1}{4\mu_0^4} \left[\left(1 + \frac{\beta^2}{4\mu_0^2} \right)^2 - \mu_0^4 \left(1 - \frac{\beta^2}{4\mu_0^2} \right)^2 - \beta^2 \right], \quad (3.1.8)$$

$$Z = \frac{1}{4\mu_0^4} \left[\left(1 + \frac{\beta^2}{4\mu_0^2} \right)^2 - \beta^2 \right]. \quad (3.1.9)$$

Calculando analiticamente o mínimo de Z , obtemos que $\beta_{min} = 0$ se $\mu_0 < 1/\sqrt{2}$ e $\beta_{min}^2 = 4\mu_0^2(2\mu_0^2 - 1)$ se $\mu_0 > 1/\sqrt{2}$, e, desta forma², $Z_{min} = 1/4\mu_0^4$ quando $\mu_0 < 1/\sqrt{2}$ e $Z_{min} = 1/\mu_0^2 - 1$ quando $\mu_0 > 1/\sqrt{2}$. Os gráficos das quantidades D , R e Z , bem como de Z_{min} e β_{min} , estão representados nas Figuras 2 e 3.

² Embora haja diferença nas expressões de Z_{min} em torno do ponto $\mu_0 = 1/\sqrt{2}$, tanto Z_{min} quanto sua derivada são contínuas neste ponto.

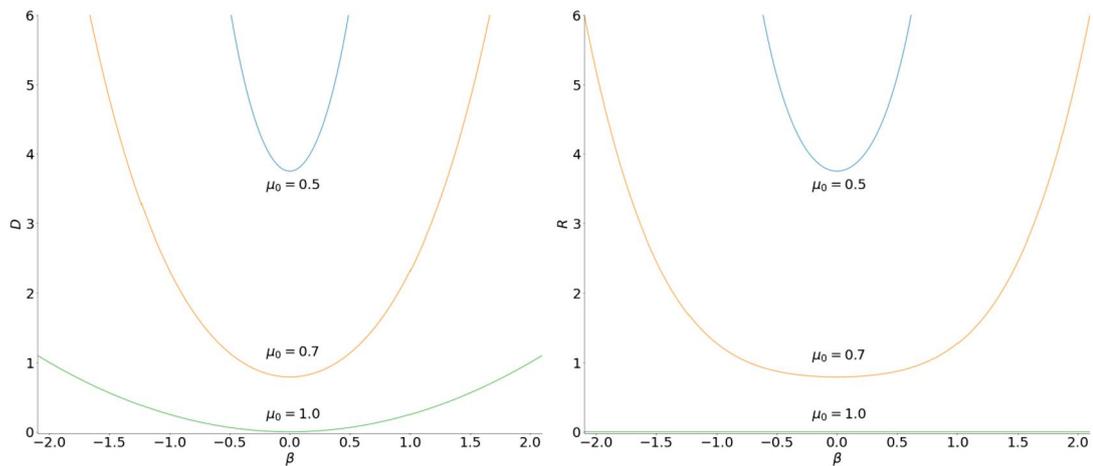


Figura 2 – Gráficos das quantidades D (esquerda) e R (direita) em função de β para diferentes valores de μ_0 .

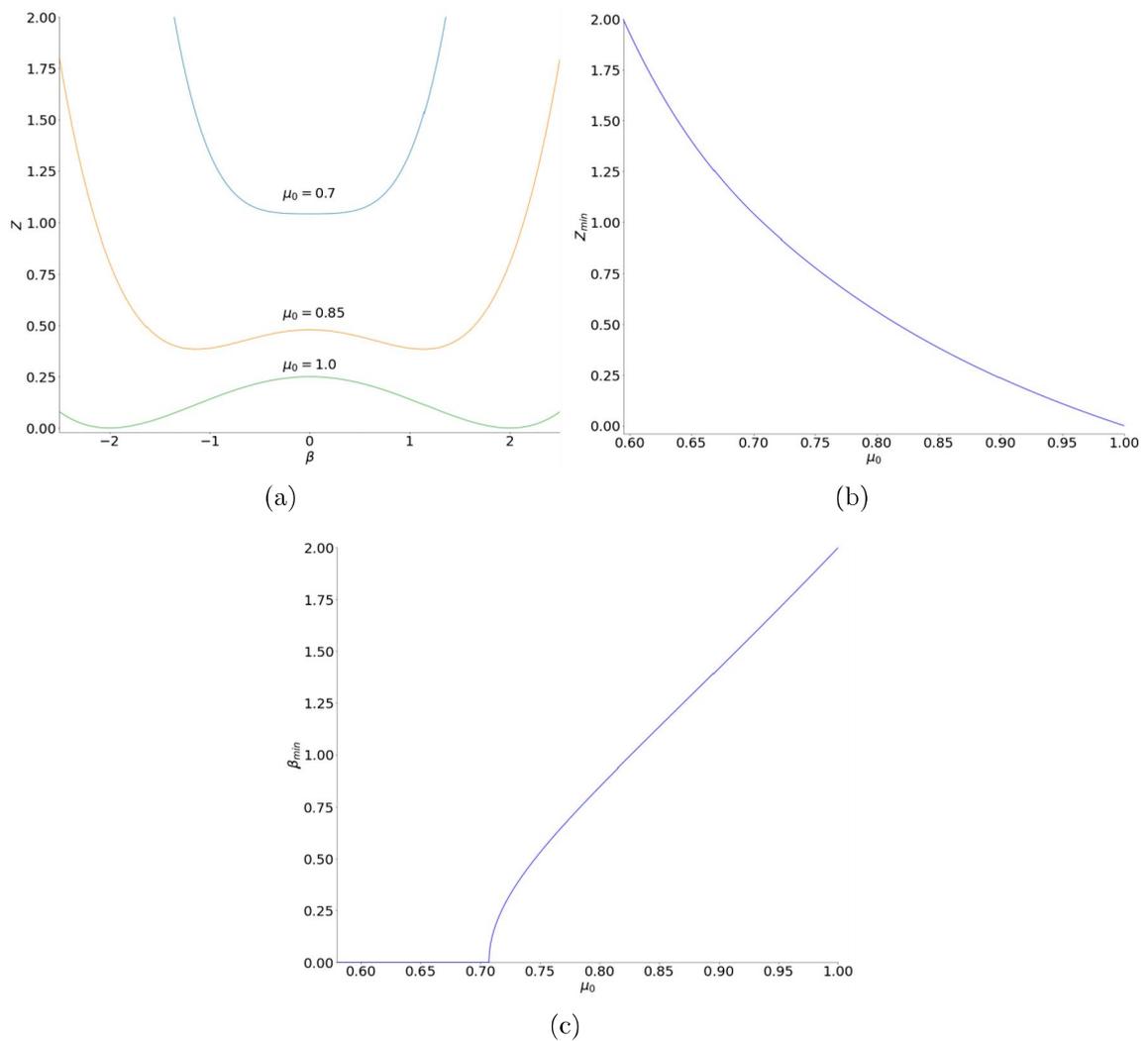


Figura 3 – Gráfico da quantidade Z em função de β para diferentes valores de μ_0 (a), Z_{min} em função de μ_0 para β_{min} (b) e o gráfico de β_{min} (c).

3.2 Superposição do Estado de Vácuo e do Quarto Estado Excitado de Fock

Consideraremos nesta seção a mesma superposição de estados de Fock apresentada na seção 2.2, com a diferença que aqui estaremos interessados no caso em que o estado é misto. Por esta razão, a matriz densidade deste estado será

$$\rho = |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + \alpha\beta^* r |0\rangle \langle 4| + \alpha^* \beta r^* |4\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |4\rangle \langle 4|. \quad (3.2.1)$$

ou, na forma matricial,

$$\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* r \\ \alpha^* \beta r^* & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Perceba que o coeficiente r é responsável pela pureza do estado, de forma que, se $r = 1$, o estado passa a ser puro. Sabemos que a pureza quântica é dada por $Tr(\rho^2) = \mu_0$. Assim, sendo

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} |\alpha|^4 + |\alpha|^2 |\beta|^2 |r|^2 & \alpha\beta^* r \\ \alpha^* \beta r^* & |\beta|^4 + |\alpha|^2 |\beta|^2 |r|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.3)$$

calculando o traço, obtemos

$$\begin{aligned} Tr(\rho^2) &= |\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 |\beta|^2 |r|^2 + |\beta|^4 \\ &= 2|\alpha|^4 (1 - |r|^2) - 2|\alpha|^2 (1 - |r|^2) + 1 = \mu_0, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

e, assim,

$$|\alpha|^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2(1 - \mu_0)}{1 - |r|^2}}.$$

Como $|\alpha|^2$ é real, devemos ter

$$|r|^2 \leq 2\mu_0 - 1. \quad (3.2.5)$$

Para uma matriz densidade dada por

$$\rho = |\psi\rangle \langle \phi|,$$

podemos ver que o valor médio de um operador \hat{A} será

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{A}\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{A} \rho | n \rangle = \langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

Assim, para o caso da matriz densidade (3.2.1), temos

$$\langle \hat{A} \rangle = |\alpha|^2 \langle 0 | \hat{A} | 0 \rangle + \alpha\beta^* r \langle 4 | \hat{A} | 0 \rangle + \alpha^* \beta r^* \langle 0 | \hat{A} | 4 \rangle + |\beta|^2 \langle 4 | \hat{A} | 4 \rangle.$$

No caso de $\hat{A} = \hat{x}^4$ e $\hat{A} = \hat{p}^4$, podemos calcular os valores médios sem dificuldade, obtendo

$$\langle \hat{x}^4 \rangle = \langle \hat{p}^4 \rangle = \frac{1}{4} \left(3 + 120|\beta|^2 + 4\sqrt{6}Re(\alpha\beta^*r) \right). \quad (3.2.6)$$

Igualmente, podemos ver que

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(1 + 8|\beta|^2 \right), \quad (3.2.7)$$

e, assim,

$$\sigma_{x^2} = \sigma_{p^2} = \frac{1}{2} \left(1 + 52|\beta|^2 - 32|\beta|^4 + 2\sqrt{6}Re(\alpha\beta^*r) \right). \quad (3.2.8)$$

Portanto, o produto das variâncias será

$$\Pi_{\sigma}^{(4)} = \frac{1}{4} \left(1 + 52|\beta|^2 - 32|\beta|^4 + 2\sqrt{6}Re(\alpha\beta^*r) \right)^2. \quad (3.2.9)$$

Assim como feito para o caso de um estado puro, escrevemos $\alpha\beta^*r = |\alpha||\beta||r|e^{i\phi}$, obtendo que o mínimo será quando $Re(\alpha\beta^*r) = -|\alpha||\beta||r|$. Desta forma,

$$f(\beta, r) = \frac{1}{4} \left(1 + 52|\beta|^2 - 32|\beta|^4 - 2|\beta||r|\sqrt{6(1-|\beta|^2)} \right)^2. \quad (3.2.10)$$

O comportamento do produto das variâncias para diferentes valores de r está representado na Figura 4 enquanto a minimização numérica está disposta na tabela 1.

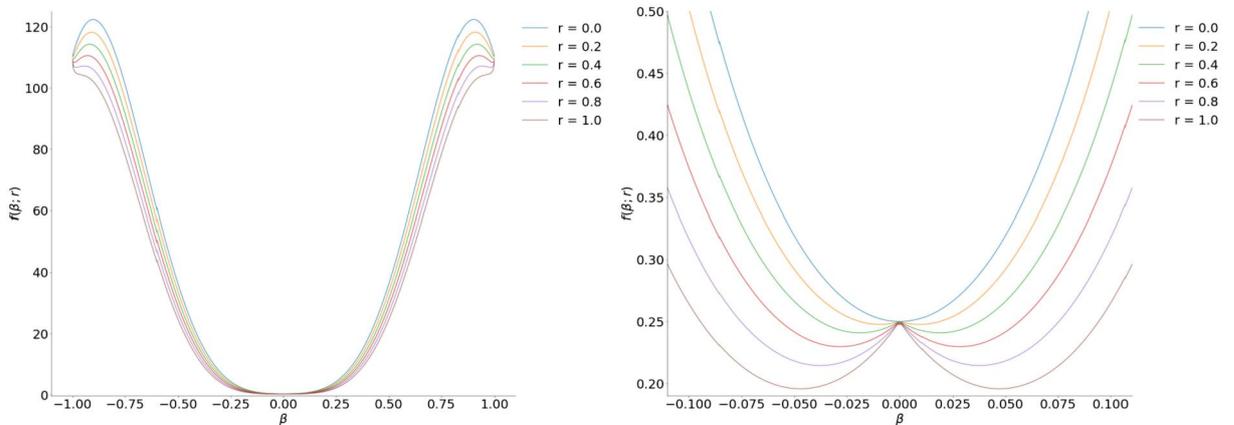


Figura 4 – Gráfico do produto das variâncias para a superposição de estados de Fock (esquerda) e sua ampliação (direita) em função de β e para diferentes valores de r .

r	β_{min}	$\Pi_{\sigma min}^{(4)}$
0,0000	0,0000	0,2500
0,2000	0,0090	0,2477
0,4000	0,0190	0,2409
0,6000	0,0290	0,2297
0,8000	0,0370	0,2145
1,0000	0,0471	0,1957

Tabela 1 – Minimização do produto das variâncias para diferentes valores de r .

Podemos ver na tabela 1 que para $r = 0$ obtemos o mínimo do vácuo e para $r = 1$ obtemos o mínimo encontrado no do Capítulo 2 quando estudamos o caso puro da superposição de estados de Fock.

4 Não-Gaussianidade

4.1 Superposição de Estados Comprimidos

Conforme discutimos, a não-Gaussianidade é um dos métodos utilizados para a verificação de estados que minimizam a relação de incerteza. Nesta seção estamos interessados em analisar a superposição de estados comprimidos definida por

$$\psi_z(x) = N \left(u_+^{-1/2} \exp\left\{-\frac{u_- x^2}{2u_+}\right\} + u_-^{-1/2} \exp\left\{-\frac{u_+ x^2}{2u_-}\right\} \right), \quad (4.1.1)$$

onde

$$u_{\pm} = \cosh |z| \pm \frac{z}{|z|} \sinh |z|, \quad z = r e^{i\theta}.$$

Escrevendo $c = \sqrt{\cosh(2r)}$, temos que a normalização será

$$|N|^2 = \frac{B}{2\sqrt{\pi}}, \quad B = \frac{c}{1+c}.$$

Calculando a densidade de probabilidade, temos

$$\begin{aligned} |\Psi_z(x)|^2 &= |N|^2 \left[\frac{1}{|u_+|} \exp\left\{-\frac{x^2}{|u_+|^2}\right\} + \frac{1}{|u_-|} \exp\left\{-\frac{x^2}{|u_-|^2}\right\} + \right. \\ &\quad \left. + 2\operatorname{Re} \left((u_- u_+^*)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{u_- u_+^*}\right\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Na Figura 5, é possível ver a perda da Gaussianidade conforme o parâmetro r assume valores maiores.

Antes de calcular os valores médios de \hat{x} e \hat{p} , primeiro notamos que, fazendo uma transformada de Fourier em (4.1.1), obtemos que a função de onda no espaço dos momentos será idêntica à função de onda no espaço das configurações. Com isso, os valores médios $\langle \hat{x}^n \rangle$ e $\langle \hat{p}^n \rangle$ serão iguais, facilitando nossos cálculos. Além disso, as seguintes relações também simplificarão as futuras contas

$$\operatorname{Re}(u_- u_+^*) = 1, \quad \operatorname{Re}(u_-^2 u_+^{*2}) = 1 - 4 \frac{\operatorname{Im}^2(z)}{|z|^2} \sinh^2 r \cosh^2 |z|,$$

$$|u_+|^2 + |u_-|^2 = 2 \cosh(2r), \quad |u_+|^4 + |u_-|^4 = 2 \cosh^2(2r) + 8 \frac{\operatorname{Re}^2(z)}{|z|^2} \sinh^2 |z| \cosh^2 |z|.$$

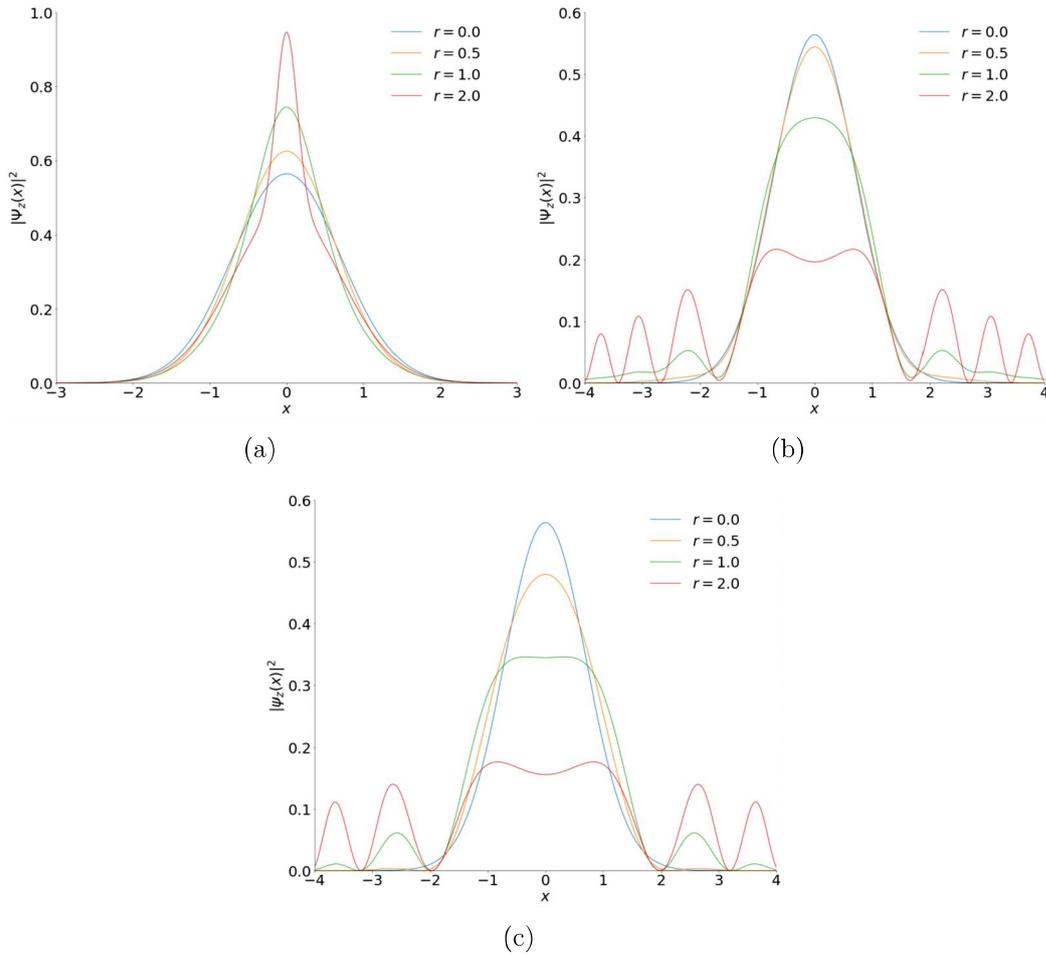


Figura 5 – Densidade de Probabilidade para a) $\theta = 0$, b) $\theta = \pi/4$ e c) $\theta = \pi/2$.

Assim, temos que

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{c^5 + 1}{2c^2(1 + c)} \equiv \frac{\sigma}{2}, \quad (4.1.3)$$

$$\langle \hat{x}^4 \rangle = \frac{3B}{4} \left(\cosh^2(2r) + \sinh^2(2r) \cos^2(\theta) + \frac{1 - \sinh^2(2r) \sin^2(\theta)}{[\cosh(2r)]^{5/2}} \right). \quad (4.1.4)$$

Minimizando estes valores médios (e, conseqüentemente, os valores médios de \hat{p}) temos que $\langle \hat{x}^2 \rangle_{min} = \langle \hat{p}^2 \rangle_{min} = 0,50$ e $\Pi_{min}^{(2)} = 0,25$ quando $r = \theta = 0$, enquanto que $\langle \hat{x}^4 \rangle_{min} = \langle \hat{p}^4 \rangle_{min} = 0,6987$ e $\Pi_{min}^{(4)} = 0,4882$ quando $r = r_* = 0,2690$ e $\theta = \theta_* = \pi/2$. A minimização de $\langle \hat{x}^4 \rangle(r, \theta_*)$ e de $\Pi^{(4)}(r, \theta_*)$ está representada na Figura 6. Comparando os produtos dos valores médios, vemos que $\Pi^{(2)}(r_*, \theta_*) = 0,2573$, e, assim, $\Pi^{(4)}(r_*, \theta_*) \approx 7,3743 [\Pi^{(2)}(r_*, \theta_*)]^2$. Esta relação nos mostra o caráter não-Gaussiano da superposição (4.1.1), pois como sabemos, para estados Gaussianos o produto dos momentos de quarta ordem é nove vezes maior que o produto dos momentos de segunda ordem.

Conforme vimos na seção 1.4, a função de Wigner de referência para a superposição

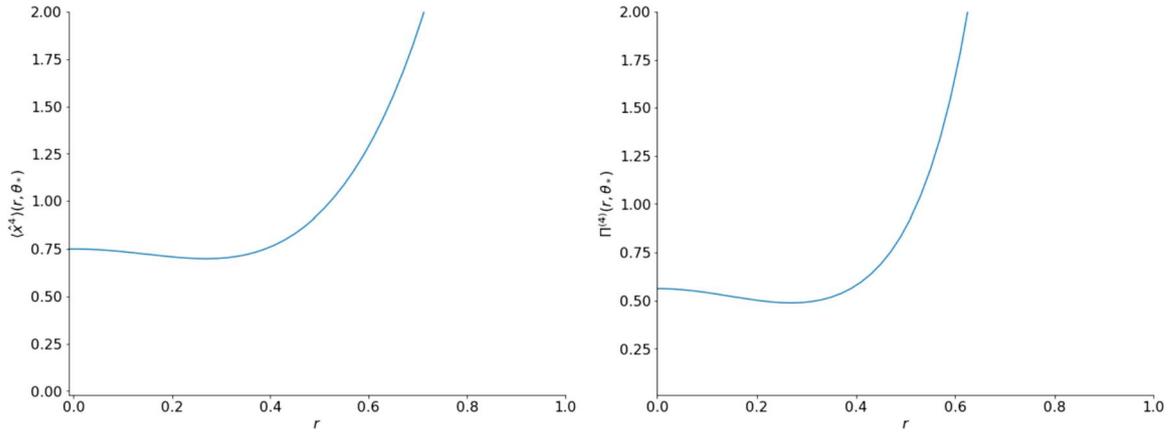


Figura 6 – Valor médio $\langle \hat{x}^4 \rangle$ (esquerda) e o produto dos valores médios (direita) para a superposição de estados comprimidos.

de estados comprimidos é igual a

$$W_G(q, p) = \frac{1}{\langle \hat{x}^2 \rangle} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \langle \hat{x}^2 \rangle} (q^2 + p^2) \right\},$$

enquanto que pela equação (1.3.1) obtemos

$$W_z(q, p) = B \left[\exp \left\{ -|u_+|^2 p^2 - |u_-|^2 q^2 + 2\kappa qp \right\} + \exp \left\{ -|u_-|^2 p^2 - |u_+|^2 q^2 - 2\kappa qp \right\} + \frac{2}{\cosh^{1/2}(2r)} \operatorname{Re} \left(\exp \left\{ -\frac{u_+^* u_-}{\cosh(2r)} p^2 - \frac{u_-^* u_+}{\cosh(2r)} q^2 + 2i qp \tanh(2r) \cos \theta \right\} \right) \right]. \quad (4.1.5)$$

O gráfico da função de Wigner está representado na Figura 7. Como os gráficos de $W_z(q, q)$ e $W_z(q, 0)$ para $\theta = 0$ eram semelhantes aos gráficos de 7, não foi necessário incluí-los.

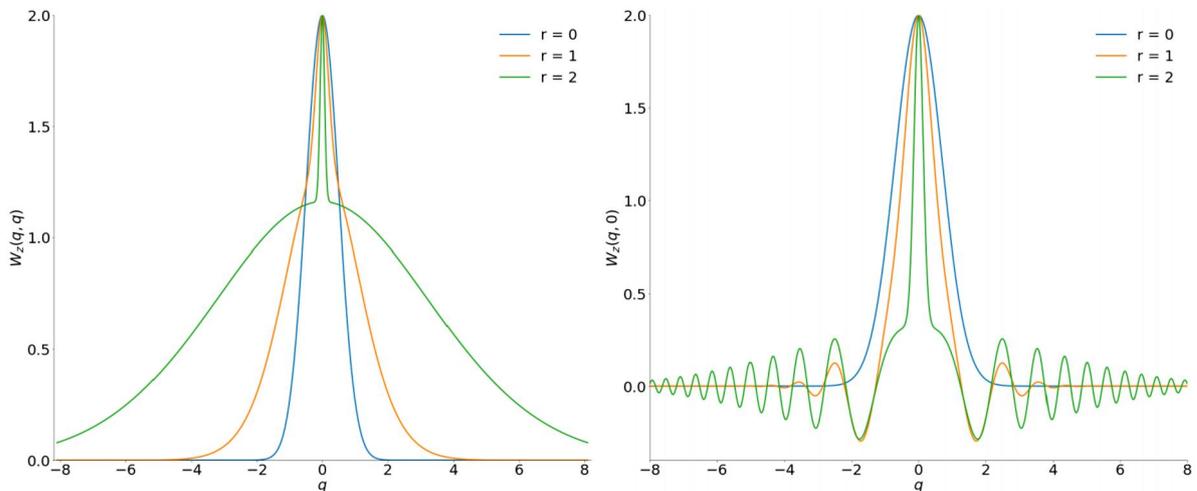


Figura 7 – Função de Wigner $W_z(q, q)$ (esquerda) e $W_z(q, 0)$ (direita) para $\theta = \pi/2$.

Para obter as quantidades g e $\delta[\hat{\rho}]$ definidas nas equações (11) e (12), antes lembramos que a partir da função de Wigner (ou matriz densidade) de referência, já mostramos em (1.4.9) que $Tr(\hat{\rho}_G^2) = \sigma^{-1}$. Além disso, podemos obter que

$$Tr(\hat{\rho}\hat{\rho}_G) = \frac{2c}{c+1} \left((\sigma^2 + 2c^2\sigma + 1)^{-1/2} + ((\sigma^2 + 1)c^2 + 2\sigma)^{-1/2} \right). \quad (4.1.6)$$

Como (4.1.1) representa um estado puro, temos que $Tr(\hat{\rho}^2) = 1$. Entretanto, se algum leitor interessado desejar calcular e obter por meio da matemática a comprovação deste argumento, vale alertá-lo que aparecerão 16 integrais, das quais, porém, será necessário resolver “apenas” 10, devido a simetria do problema. Quase todas as integrais serão surpreendentemente iguais a $\pi/2$, com exceção de duas que serão proporcionais a $\cosh(2r)$.

Vemos, portanto, que as quantidades g e $\delta[\hat{\rho}]$ serão

$$g = \frac{2c\sigma}{c+1} \left((\sigma^2 + 2c^2\sigma + 1)^{-1/2} + ((\sigma^2 + 1)c^2 + 2\sigma)^{-1/2} \right),$$

$$\delta[\hat{\rho}] = \frac{1}{2} (1 + \sigma^{-1}) - \frac{2c}{c+1} \left((\sigma^2 + 2c^2\sigma + 1)^{-1/2} + ((\sigma^2 + 1)c^2 + 2\sigma)^{-1/2} \right).$$

Na Figura 8, vemos que o coeficiente $\delta[\hat{\rho}](c)$ cresce monotonamente de 0 quando $c = 1$ até 1/2 a medida que $c \rightarrow \infty$, sem que haja alguma diferença no ponto $c_* = c(r_*)$. Quanto ao coeficiente $g(c)$, podemos ver que este cresce até atingir um máximo em $g_{max} \approx 1,27$ quando $c \approx 2,68$ e decresce monotonamente para $\sqrt{2}/3 \approx 1,155$ conforme $c \rightarrow \infty$.

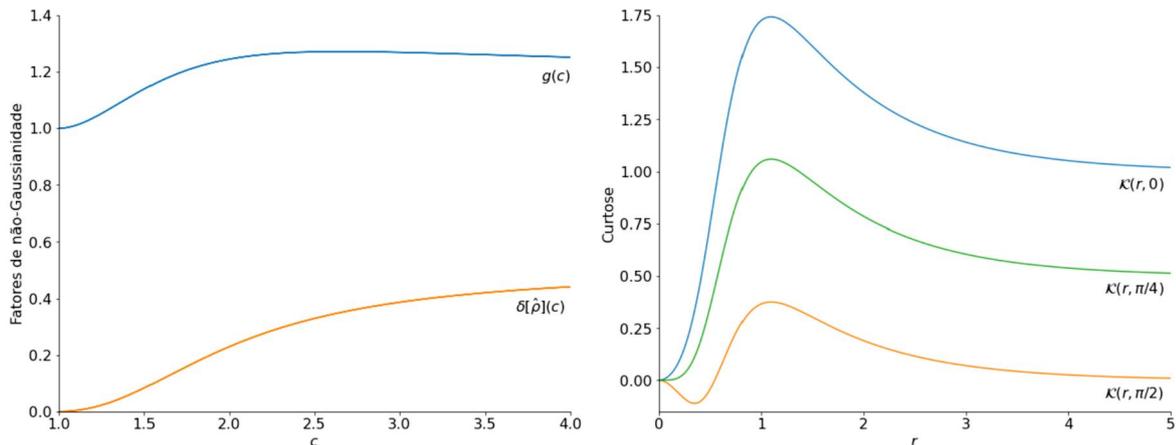


Figura 8 – Fatores de não-Gaussianidade (esquerda) e Curtose (direita) para a superposição de estados comprimidos.

Calculando a curtose, vemos pela Figura 8 que para $\theta = \pi/2$, $K < 0$ para pequenos valores de r , sendo o mínimo $K_{min} = -0,1111$ obtido em $r_{min} = 0,3504$. Contudo, temos que K será positivo quando $r > 0,549$, indo a zero como c^{-1} quando $c \rightarrow \infty$. Já para $\theta = \pi/4$, vemos que K será sempre positivo. O comportamento assintótico da curtose será

dado por $K \approx 1 + 2/c$ quando $\theta = 0$ e $K \approx 1/2 + 3/(2c)$ para $\theta = \pi/4$. Podemos ver que os máximos de K para diferentes valores de θ serão $K_{max} \approx 0,3757$ quando $r = 1,1011$ para $\theta = \pi/2$, $K_{max} \approx 1,0592$ quando $r = 1,0911$ para $\theta = \pi/4$ e $K_{max} \approx 1,7427$ quando $r = 1,0911$ para $\theta = 0$.

4.2 Superposição de Estados Coerentes

Uma superposição interessante de estados coerentes é dada por

$$|\Psi\rangle = B [|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle + |i\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle] = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4n}}{\sqrt{(4n)!}} |4n\rangle, \quad (4.2.1)$$

onde

$$B^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{16E_4(|\alpha|^2)}, \quad N^2 = 1/E_4(|\alpha|^2), \quad E_4(x) = \frac{1}{2} (\cosh(x) + \cos(x)), \quad \alpha = \sqrt{a}e^{i\phi}.$$

Os valores médios de \hat{x} e \hat{p} foram calculados em (CITELI; DANTAS; DODONOV, 2020) e são iguais a

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle &= \frac{1}{2} + a \frac{\sinh(a) - \sin(a)}{\cosh(a) + \cos(a)} \equiv \frac{\sigma}{2}, \\ \langle \hat{x}^4 \rangle = \langle \hat{p}^4 \rangle &= \frac{3}{4} + \frac{a^2}{2} \cos(4\phi) + 3 \frac{a [\sinh(a) - \sin(a)] + a^2 [\cosh(a) - \cos(a)] / 2}{\cosh(a) + \cos(a)}. \end{aligned}$$

Foi mostrado no mesmo artigo que o mínimo de $\langle \hat{x}^4 \rangle$ e $\langle \hat{p}^4 \rangle$ era obtido para $\cos(4\phi) = -1$, e, assim, $\langle \hat{x}^4 \rangle_{min} = 0,6999$ quando $a_* = 0,4489$. Desta forma, vemos que $\Pi^{(4)}(a_*) = 0,4899$, e como $\Pi^{(2)}(a_*) = 0,2568$, segue que $\Pi^{(4)}(a_*) = 7,4288[\Pi^{(2)}(a_*)]^2$. O gráfico de $\langle \hat{x}^4 \rangle$ e do produto dos valores médios pode ser visto na Figura 9.

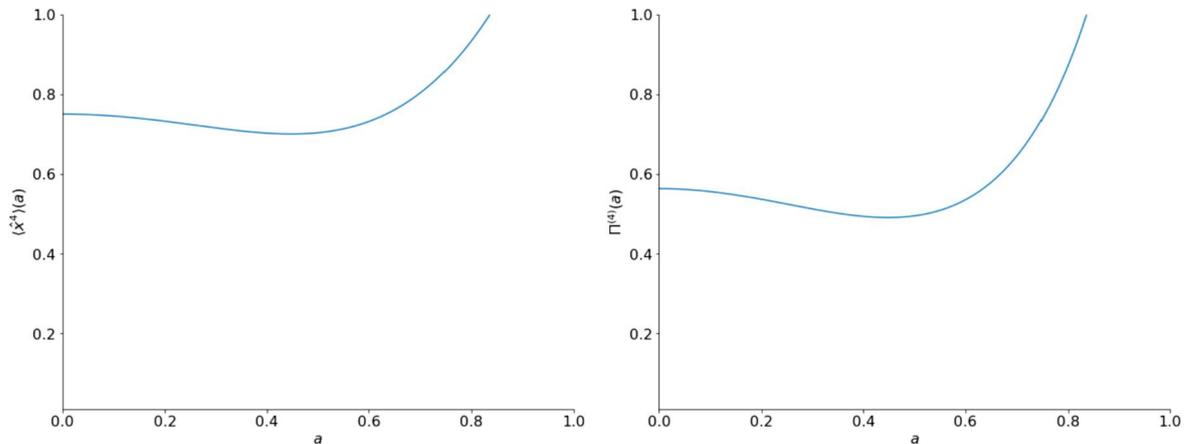


Figura 9 – Valor médio $\langle \hat{x}^4 \rangle$ (esquerda) e o produto dos valores médios (direita) com $\phi = \pi/4$ para a superposição de estados coerentes.

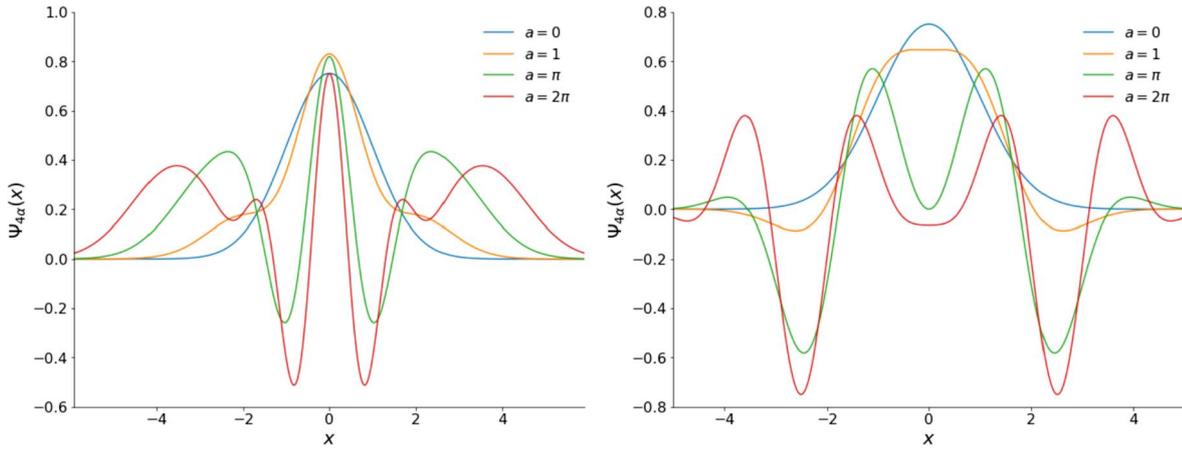


Figura 10 – Função de onda para $\phi = 0$ (esquerda) e $\phi = \pi/4$ (direita) para diferentes valores de a .

Usando a equação (1.1.17), obtemos que a função de onda de (4.2.1) é dada por

$$\Psi_{4\alpha}(x) = \frac{\exp\{-x^2/2\}}{2\pi^{1/4}\sqrt{E_4(|\alpha|^2)}} \left[\cosh(\sqrt{2}\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} + \cos(\sqrt{2}\alpha x) e^{\frac{\alpha^2}{2}} \right]. \quad (4.2.2)$$

O gráfico de (4.2.2) está representado na Figura 10, onde podemos ver a perda da Gaussianidade a medida que o parâmetro a aumenta. Para calcular os fatores de não-Gaussianidade, seria suficiente termos apenas a matriz densidade. Contudo, seria interessante calcular a função de Wigner a fim de compará-la com a obtida para a superposição de estados comprimidos. Podemos calculá-la a partir de (4.2.2), e, embora sua expressão geral não seja muito elegante, podemos nos restringir ao caso onde α é real, ou seja, $\phi = 0$, e quando $\phi = \pi/4$, obtendo para o primeiro caso a expressão

$$\begin{aligned} W_{4\alpha}(q, p) = & \frac{\exp(-q^2 - p^2)}{4E_4(|\alpha|^2)} \left\{ e^{-\alpha^2} [\cosh(2\gamma q) + \cosh(2\gamma p)] + e^{\alpha^2} [\cos(2\gamma q) + \cos(2\gamma p)] \right. \\ & + 2 \cos(\alpha^2) (\cos[\gamma(q+p)] \cosh[\gamma(q+p)] + \cos[\gamma(q-p)] \cosh[\gamma(q-p)]) \\ & \left. + 2 \sin(\alpha^2) (\sin[\gamma(q+p)] \sinh[\gamma(q+p)] + \sin[\gamma(q-p)] \sinh[\gamma(q-p)]) \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

onde $\gamma = \sqrt{2}\alpha$, e obtendo

$$\begin{aligned} W_{4\alpha}(q, p) = & \frac{\exp(-q^2 - p^2)}{2E_4(|\alpha|^2)} \left\{ e^{-|\alpha|^2} \cosh(2|\alpha|q) \cosh(2|\alpha|p) + e^{|\alpha|^2} \cos(2|\alpha|q) \cos(2|\alpha|p) + \right. \\ & + \cos(|\alpha|^2) [\cos(2|\alpha|p) \cosh(2|\alpha|p) + \cos(2|\alpha|q) \cosh(2|\alpha|q)] + \\ & \left. + \sin(|\alpha|^2) [\sin(2|\alpha|p) \sinh(2|\alpha|p) + \sin(2|\alpha|q) \sinh(2|\alpha|q)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

quando $\phi = \pi/4$. Os gráficos de (4.2.3) e de (4.2.4) estão representados nas Figuras 11 e 12.

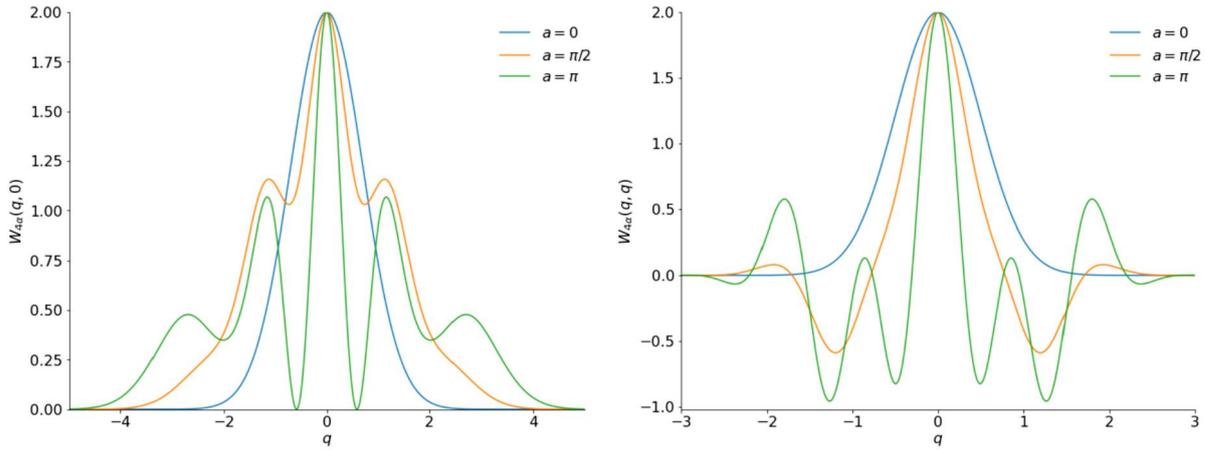


Figura 11 – Função de Wigner $W_{4\alpha}(q, 0)$ (esquerda) e $W_{4\alpha}(q, q)$ (direita) para diferentes valores de a quando $\phi = 0$.

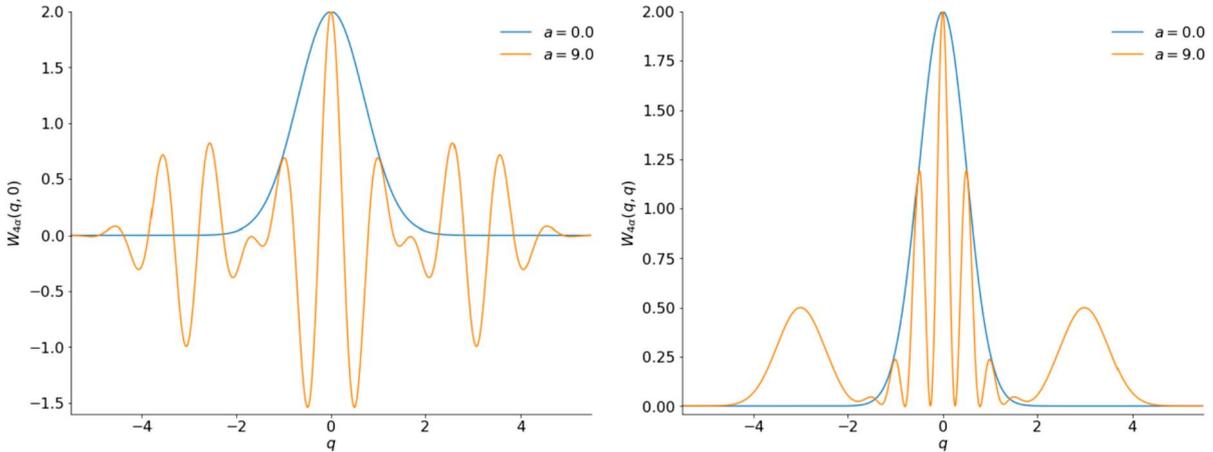


Figura 12 – Função de Wigner $W_{4\alpha}(q, 0)$ (esquerda) e $W_{4\alpha}(q, q)$ (direita) para diferentes valores de a quando $\phi = \pi/4$.

Para os fatores de não-Gaussianidade, primeiro notamos que a matriz de densidade de referência $\hat{\rho}_G$ será dada por (1.4.8), enquanto para $\hat{\rho}_{4\alpha}$ temos simplesmente

$$\hat{\rho}_{4\alpha} = \frac{1}{E_4(a)} \sum_{m,n} \frac{\alpha^{4n} \alpha^{*4m}}{\sqrt{(4n)!(4m)!}} |4n\rangle \langle 4m|, \quad (4.2.5)$$

e, assim,

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_{4\alpha} \hat{\rho}_G) = \frac{2}{\sigma + 1} \frac{E_4(a e^{-\beta})}{E_4(a)}. \quad (4.2.6)$$

Portanto, como (4.2.1) é um estado puro, segue que

$$g = \frac{2\sigma}{\sigma + 1} \frac{E_4(a e^{-\beta})}{E_4(a)}, \quad \delta[\hat{\rho}] = \frac{1}{2} (1 + \sigma^{-1}) - \frac{2}{\sigma + 1} \frac{E_4(a e^{-\beta})}{E_4(a)}.$$

Podemos ver que novamente não há nada de especial no comportamento de $\delta[\hat{\rho}]$. Por outro lado, vemos que $E_4(x)$ se comporta como $e^x/4$ para $x \gg 1$. Se $a \gg 1$, então $\sigma \approx 1 + 2a$. Neste caso, teríamos $e^{-\beta} \approx a/(1+a) \approx 1 - 1/a$, e, negligenciando o termo $1/a$, poderíamos pensar que $E_4(ae^{-\beta}) \approx E_4(a)$ para $a \rightarrow \infty$, obtendo o valor assintótico $g(\infty) = 2$. Contudo, um cálculo mais correto nos levaria à relação $E_4(ae^{-\beta})/E_4(a) \approx E_4(a-1)/E_4(a) \approx 1/e$ para $a \gg 1$. Assim, o valor assintótico correto é $g(\infty) = 2/e \approx 0,74$. O valor máximo $g_{max} \approx 1,1735$ é obtido para $a = 1,4615$. Além disso, $g(a) < 1$ quando $a > 2,209$.

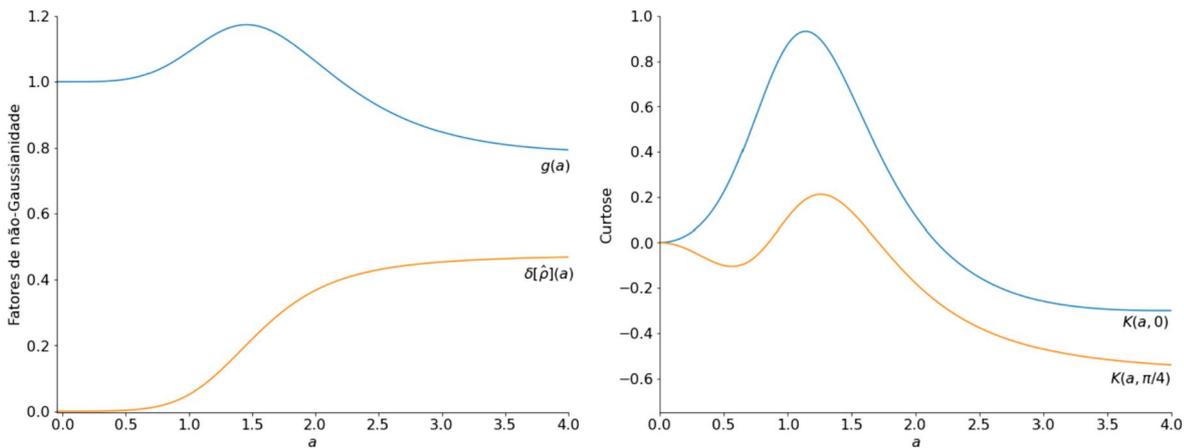


Figura 13 – Fatores de não-Gaussianidade (esquerda) e Curtose (direita) para a superposição de estados coerentes.

Calculando a curtose, podemos ver que, quando $\phi = \pi/4$, temos que o mínimo $K_{min} = -0,1052$ é obtido para $a = 0,5658$, enquanto o máximo $K_{max} = 0,2115$ é obtido para $a = 1,2577$. Além disso, a curtose vai para zero tanto em $a = 0,8490$ quanto em $a = 1,7103$. Já quando $\phi = 0$, temos que o máximo é $K_{max} = 0,9323$ em $a = 1,391$. A medida que $a \rightarrow \infty$, a curtose tende para $K = -1/3$, enquanto que $K = -2/3$ quando $\phi = \pi/4$, e, assim, temos neste caso que $\langle \hat{x}^4 \rangle \rightarrow \langle \hat{x}^2 \rangle^2$. Todas estas informações podem ser verificadas no gráfico 13.

Conclusão

Mostramos no Capítulo 2 que o produto das variâncias de quarta ordem em estados Gaussianos puros é mínimo para estados comprimidos de vácuo não-correlatos. Além disso, concluímos que estes estados são RSIS tanto para o par (\hat{x}, \hat{p}) quanto para (\hat{x}^2, \hat{p}^2) e que o estado Gaussiano é OIS para (\hat{x}^2, \hat{p}^2) , embora seja um estado correlato apenas do ponto de vista de (\hat{x}, \hat{p}) . Em seguida, mostramos que os estados de Fock são estados RSIS para todo n e que o mínimo do produto das variâncias da superposição do estado de vácuo com o quarto estado excitado é menor que o obtido para apenas o estado de vácuo.

No Capítulo 3, o mínimo do produto das variâncias em um estado Gaussiano de pureza μ_0 foi obtido quando $\mu_0 = 1$, ou seja, quando o estado é puro. Analisamos também o conceito de “inteligência” para diferentes valores de μ_0 , e, embora tenhamos concluído que o estado Gaussiano é um estado inteligente apenas quando $\mu_0 = 1$, obtivemos os mínimos de D , R e Z para os diferentes μ_0 , um problema ainda pouco tratado na literatura. Para o estado de Fock misto, calculamos o mínimo do produto das variâncias de quarta ordem em função do parâmetro r , responsável pela pureza, recuperando os resultados já conhecidos para $r = 0$ (estado de vácuo) e $r = 1$ (superposição de estados puros de Fock), além de calcular o mínimo desta superposição para diferentes “graus” de pureza.

Por fim, estudamos no Capítulo 4 a não-Gaussianidade de estados minimizantes da relação de incerteza, obtendo resultados interessantes (e novos) para os fatores de não-Gaussianidade e mostrando por meio de diferentes gráficos como a função de onda e a função de Wigner da superposição de estados comprimidos e da superposição de estados coerentes se afastavam de um comportamento Gaussiano.

O presente trabalho nos possibilita continuar com os estudos acerca da minimização da incerteza de Heisenberg, pois, com o formalismo aprendido de estados puros e mistos, podemos investigar os conceitos de “inteligência” e não-Gaussianidade para outras famílias de estados quânticos, uma vez que este ainda é um tópico ativo de pesquisa e com aplicações em diversas áreas da Física.

Referências

- ARAGONE, C. et al. Intelligent spin states. *Phys. A: Math. Nucl. Gen.*, v. 7, p. L149–L151, 1974. Citado na página 26.
- BACHOR, H. A. *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. 2nd. ed. [S.l.]: Wiley-VCH, 2004. Citado na página 30.
- CITELI, M. F.; DANTAS, V. M.; DODONOV, V. Minimal products of coordinate and momentum uncertainties of high orders: Significant and weak high-order squeezing. *Entropy*, v. 22, p. 980, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 57.
- DODONOV, V.; KURMYSHEV, E.; MAN'KO, V. Generalized uncertainty relation and correlated coherent states. *Phys. Lett. A*, v. 79, p. 150–152, 1980. Citado na página 41.
- DODONOV, V.; MAN'KO, V. Generalization of the uncertainty relations in quantum mechanics. in: *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*. *Nova Science*, p. 3–101, 1989. Citado na página 25.
- DODONOV, V. V. et al. Squeezed states and uncertainty relations since 1991. *Journal of Russian Laser Research*, v. 28, p. 404–428, 2007. Citado na página 34.
- DODONOV, V. V. et al. Hilbert-schmidt distance and nonclassicality of states in quantum optics. *Journal of Modern Optics*, v. 47, p. 633–654, 2000. Citado na página 27.
- GENONI, M. G.; PARIS, M. G. A.; BANASZEK, K. Measure of the non-gaussian character of a quantum state. *Phys. Rev. A*, v. 76, 2007. Citado na página 27.
- GLAUBER, R. J. Photon correlations. *Phys. Rev. Lett.*, v. 10, p. 84–6, 1963. Citado na página 31.
- GRADSHTEIN, I.; RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. [S.l.]: Academic Press, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- HAROCHE, S.; RAIMOND, J. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons*. [S.l.]: Oxford Graduate Texts, 2006. Citado na página 36.
- HILLERY, M. Nonclassical distance in quantum optics. *Phys. Rev. A*, v. 35, p. 725–732, 1986. Citado na página 27.
- KENNARD, E. Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen. *Z. Phys.*, v. 44, p. 326–352, 1927. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- LOUDON, R. *The Quantum Theory of Light*. 3rd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2000. Citado na página 30.
- LYNCH, R.; MAVROMATIS, H. Nth (even)-order minimum uncertainty products. *Math. Phys.*, v. 31, p. 1947–1951, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.
- MA, L. et al. Generation of the squeezed state with an arbitrary complex amplitude distribution. *Photonics Research*, v. 8, p. 1422–1427, 2020. Citado na página 34.

- MANDILARA, A.; CERF, N. J. Quantum uncertainty relation saturated by the eigenstates of the harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, v. 86, p. 030102(R), 2012. Citado na página 27.
- ROBERTSON, H. A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation. *Phys. Rev.*, v. 31, p. 667, 1930. Citado na página 26.
- SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1967. Citado na página 30.
- SCHLEICH, W. *Quantum Optics in Phase Space*. [S.l.]: WILEY-VCH, 2001. Citado na página 36.
- SCHRÖDINGER, E. Der stetige Übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, v. 14, p. 664–6, 1926. Citado na página 31.
- SCHRÖDINGER, E. Zum heisenbergschen unschärfepinzip. *sitzungsberichte der preussischen. Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse*, p. 296–303, 1930. Citado na página 26.
- SERAFINI, A. *Quantum Continuous Variables*. 2nd. ed. [S.l.]: CRC Press, Taylor Francis Group, 2017. Citado na página 38.
- STOLER, D. Equivalence classes of minimum uncertainty packets. *Phys. Rev. D*, v. 1, p. 3217–3219, 1970. Citado na página 34.
- SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, v. 10, p. 277–9, 1963. Citado na página 31.
- TRIFONOV, D. Generalized intelligent states and squeezing. *Math. Phys.*, v. 35, p. 2297–2308, 1994. Citado na página 26.
- YUEN, H. P.; SHAPIRO, J. H. Generation and detection of two-photon coherent states in degenerate four-wave mixing. *Optics Letters*, v. 4, p. 334–336, 1979. Citado na página 34.
- ŻYCZKOWSKI, K.; SŁOMCZYŃSKI. Monge distance between quantum states. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 31, p. 9095, 1998. Citado na página 27.