

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

VINÍCIUS ANDRADE MOREIRA SILVA

**MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA EM TORNO
DE BURACOS NEGROS E SINGULARIDADES NUAS**

BRASÍLIA
04 DE MAIO DE 2021

Vinícius Andrade Moreira Silva

Mecânica Quântica Relativística em Torno de Buracos Negros e Singularidades Nusas

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Clovis Achy Soares Maia

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

04 de maio de 2021

Vinícius Andrade Moreira Silva
Mecânica Quântica Relativística em Torno de Buracos Negros e Singularidades
Nuas/ Vinícius Andrade Moreira Silva. – Brasília, 04 de maio de 2021-
52 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Clovis Achy Soares Maia

Monografia – Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física, 04 de maio de 2021.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III.
Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Vinícius Andrade Moreira Silva

Mecânica Quântica Relativística em Torno de Buracos Negros e Singularidades Nuas

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 04 de maio de 2021:

Clovis Achy Soares Maia
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasília
04 de maio de 2021

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

Meus anos de graduação definitivamente foram os anos de maior aprendizado e amadurecimento que já tive até então em minha vida. Revendo a minha trajetória de desde quando eu era um calouro até agora me fazem notar o tanto de coisa que aconteceu em minha vida. Conheci pessoas incríveis, fiz amigos que quero ter para minha vida toda, vivi momentos que vou lembrar para minha vida toda.

Quero agradecer aos meus amigos da graduação, pessoa incríveis que me trouxeram muitas inspirações, pessoas muito inteligentes que pude aprender muito com eles. Quero agradecer também a todo o convívio que me proporcionaram, conversas, viagens para cursos de física, almoços, idas ao bar entre diversas outras coisas.

Também encontrei professores incríveis. Quero agradecer ao professor Clovis, por ter me aceitado como seu aluno de TCC. Quero agradecer principalmente ao professor Marco Cezar por ter sido um dos melhores professores que já tive em minha vida, por ser extremamente paciente comigo e sempre muito atencioso e solícito. Agradeço a Vanessa, ao Ivan, ao Gargano, ao Júnio, ao Pinzul, ao Leonardo Luiz e ao Viktor Dodonov, por terem ministrados disciplinas memoráveis a mim.

Obrigado ao PET Física por terem me proporcionado experiências incríveis, além de terem me ajudado muito a ter força de vontade para continuar na graduação. Sempre vou lembrar da sala do PET, que com certeza foi o lugar que mais passei tempo dentro da UnB.

Quero agradecer a minha família, principalmente a minha mãe por sempre me apoiar, sempre me incentivar, sempre me ajudar no que eu preciso. Quero agradecer a educação que foi me dada e tudo que ela me ensinou sobre humildade e sobre respeito aos outros. Obrigado a todos os ensinamentos que me foram dados. Muito obrigado, mãe.

Quero agradecer a minha amada, Maria Eduarda, mãe de minha filha Maria Helena. Muito obrigado por sempre me apoiar, incentivar e por todo suporte. Sou muito feliz por compartilhar minha vida ao seu lado. Ela renova minhas forças e me dá motivação todos os dias. Muito obrigado por estar na minha vida, por ser tão boa para mim, por ser incrível, uma das pessoas que mais admiro. Muito obrigado por sempre estar ao meu lado e me fazer a pessoa mais feliz do mundo.

“Somewhere, something incredible is waiting to be known.”
(Carl Sagan)

Resumo

Analisar o comportamento de equações da mecânica quântica relativística em espaços curvos pode nos dar uma noção de como se comporta alguns sistemas quânticos quando submetidos a campos gravitacionais descritos pela teoria da relatividade geral. Tais estudos contribuem para um entendimento mais claro sobre a junção da teoria quântica e a teoria da relatividade geral. No presente trabalho, vemos como se dá o comportamento do campo de Klein-Gordon em contexto de diferentes tipos de campos gravitacionais. Nesse caso, o espaço curvo é dado por um buraco negro de Schwarzschild e mais a frente por um buraco negro de Reissner-Nordström. Analisamos a equação de Klein-Gordon e obtemos soluções descritas pelas funções de Airy. Mais a frente é feita uma revisão de um artigo descrevendo a equação de Dirac covariante após uma transformação de Foldy-Wouthuysen em diferentes campos gravitacionais.

Palavras-chaves: buracos negros, transformação de Foldy-Wouthuysen, equação de Klein-Gordon, equação de Dirac, funções de Airy.

Sumário

	Introdução	15
1	TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN	19
1.1	A Partícula Livre de Dirac	19
1.2	A Partícula de Dirac em um Campo Eletromagnético Externo	21
2	ANÁLISE DO CAMPO DE KLEIN-GORDON	25
2.1	Caso para a Métrica de Schwarzschild	30
2.1.1	Limite para r grande	31
2.1.2	Limite para r pequeno	32
2.2	Análise da Equação de Klein-Gordon no Limite para r Grande	34
2.3	Caso para a métrica de Minkowski	39
2.4	Caso para a Métrica de Reissner-Nordström	40
2.4.1	Caso para Métrica Próxima ao Horizonte	41
3	ANÁLISE DO CAMPO DE DIRAC	43
3.1	Caso para o espaço-tempo de Minkowski	47
3.2	Caso para o espaço-tempo de Schwarzschild	47
	Conclusão	49
	REFERÊNCIAS	51

Introdução

A unificação entre mecânica quântica e gravitação continua sendo um dos, senão o maior, problema moderno da física. Motivado por isso, vários trabalhos, tanto teóricos quanto experimentais, foram desenvolvidos.

No âmbito experimental, temos como exemplo os trabalhos de (COLELLA; OVERHAUSER; WERNER, 1975), (BONSE; WROBLEWSKI, 1983). Nestes experimentos foram constatados *phase shifts* em sistemas mecânico-quânticos devido a efeitos gravitacionais, verificando o princípio da equivalência para ondas de neutrons não relativísticas.

Mais um experimento a ser citado se encontra em (NESVIZHEVSKY et al., 2002). É um experimento sobre estados quânticos de neutrons no campo gravitacional terrestre. Foram produzidos em laboratório uma fonte de *ultra cold neutrons*, assim os obtendo com baixas velocidades comparadas a velocidade da luz. O experimento foi configurado tal que os neutrons caiam em direção a um espelho horizontal, obtendo portanto, um poço de potencial gravitacional. Foi medido então que os neutrons não caiam na vertical de forma contínua, mas sim de forma discreta de uma altura para outra.

Outro experimento é sobre o condensado de Bose-Einstein em microgravidade (ZOEST et al., 2010). Assim como nos experimentos anteriores todos medem efeitos gravitacionais em sistemas quânticos.

Entre os teóricos se encontram os trabalhos de (ACCIOLY; BLAS, 2002) e (OBUKHOV, 2001). Estes trabalhos mostram como se dão, respectivamente o campo de Klein-Gordon e o campo de Dirac, após uma transformação de Foldy-Wouthuysen (mais a frente será explicado como se dá essa transformação), em diferentes métricas.

No artigo de (ACCIOLY; BLAS, 2002) é obtido a seguinte Hamiltoniana para o campo de Klein-Gordon em uma métrica que é solução da equação de Einstein para um corpo de massa M localizada em $r = 0$, longe da fonte:

$$H'' = \left[m + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{3}{2m}\hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x})\hat{\mathbf{p}} \right] \eta, \quad (1)$$

onde m é massa da partícula, $\mathbf{g} = -\frac{GM\mathbf{r}}{r^3}$, x são as coordenadas, $\hat{\mathbf{p}}$ é o momento e

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nessa Hamiltoniana foi considerado o caso em que a partícula está distante do corpo de massa M . Outro fator importante na derivação da Hamiltoniana se chama termo

de Darwin, que descreve a interação entre a partícula e o campo gravitacional. Esse fator é dado por:

$$D_\lambda(V, W) \equiv \lambda \left[\left(\frac{1}{2\lambda} - 2 \right) \frac{V}{W^2} \nabla^2 V - 2 \frac{V}{W^3} \nabla V \cdot \nabla W + \left(\frac{1}{2\lambda} - 4 \right) \frac{V^2}{W^3} \nabla^2 W + 2 \frac{V^2}{W^4} (\nabla W)^2 \right], \quad (2)$$

Também mais a frente veremos com mais detalhes como surge esse termo. Na equação (2) V e W são funções que descrevem uma métrica estática:

$$ds^2 = V(\mathbf{x})^2 dt^2 - W(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^2, \quad (3)$$

e λ é uma constante. Na Hamiltoniana descrita pela equação (1) o termo de Darwin dado por (2) é nulo para uma certa escolha de λ , algo que será discutido também. Neste TCC, é escrito essa Hamiltoniana de forma mais geral. Primeiro sem fazer aproximações em r na métrica e também com λ genérico.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, os cálculos serão reproduzidos da mesma maneira, porém utilizando um caso específico para a métrica de Reissner-Nordström.

Já no artigo de (OBUKHOV, 2001) é feita transformações no campo de Dirac e em seguida visto seu comportamento em torno de certas métricas. Mais à frente será feita uma revisão deste trabalho.

Portanto, o objetivo é fazer o cálculo para Hamiltoniana dada pela equação (1), porém com termo de Darwin D_λ com λ genérico e sem realizar aproximações prévias em r .

Veremos também o comportamento dessa Hamiltoniana para métrica de Reissner-Nordström que é dada por

$$ds^2 = h(r) dt^2 - \frac{1}{h(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4)$$

em que

$$h(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2 G}{r^2}.$$

No entanto, veremos o caso para a métrica do buraco negro extremal de Reissner-Nordström próxima ao horizonte de eventos. Nesse caso $Q = M$, logo a métrica toma a forma ($G = 1$)

$$ds^2 = \frac{r^2}{M^2} dt^2 - \frac{M^2}{r^2} dr^2 - M^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Em nossa convenção usaremos unidades naturais, isto é, $\hbar = c = 1$. A métrica tem assinatura (+ - - -), o tensor de Riemann é definido por $R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\eta}$, o tensor de Ricci por $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\nu\alpha}$, e o escalar de Ricci por $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. Mesma convenção adotada em (ACCIOLY; BLAS, 2002). No caso de espaços planos, temos a métrica de Minkowski usual $\eta_{\mu\nu}$, também com assinatura (+ - - -). Será informado quando o uso de unidades naturais não for mais utilizado ou for utilizado outra assinatura da métrica.

1 Transformação de Foldy-Wouthuysen

Aqui será feita uma breve revisão do artigo (FOLDY; WOUTHUYSEN, 1950).

1.1 A Partícula Livre de Dirac

O estado ψ de uma partícula relativística de spin-1/2 é descrito por um quadri-espinor:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

Dizemos que as duas primeiras componentes são as componentes superiores e as duas últimas componentes são as componentes inferiores. Dessa forma, escrevemos

$$\psi = \begin{bmatrix} \Phi \\ \chi \end{bmatrix}$$

em que Φ é um bi-espinor, constituído pelas componentes superiores e χ é um bi-espinor, constituído pelas componentes inferiores. A Hamiltoniana da teoria de Dirac clássica

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$$

possui operadores ímpares, sendo $\boldsymbol{\alpha}$ e β as matrizes usuais de Dirac, \mathbf{p} o operador momento e m a massa da partícula de spin-1/2¹. Estes operadores misturam as componentes superiores com as inferiores do espinor ψ . Isso torna a equação de Dirac em duas equações com as componentes Φ e χ acopladas.

O objetivo da TFW é realizar uma transformação canônica na Hamiltoniana, tal que consiga-se remover os operadores ímpares. Com isso, obtém-se duas equações, uma para as componentes superiores - representam soluções para energias positivas - e outra para componentes inferiores - representam soluções para energias negativas.

Se S é um operador Hermitiano, então a transformação,

¹ As matrizes $\boldsymbol{\alpha}$, β e $\gamma^5 = -i\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4$ são os operadores ímpares. Os outros operadores da teoria de Dirac são ditos operadores pares, isto é, não misturam as componentes superiores com as inferiores.

$$\psi' = e^{iS}\psi \quad (1.1)$$

$$H' = e^{iS} H e^{-iS} - i e^{iS} \frac{\partial}{\partial t} e^{-iS}, \quad (1.2)$$

deixa a equação de Dirac da seguinte forma:

$$H'\psi' = i \frac{\partial \psi'}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Lembre-se que para qualquer operador T , podemos fazer a seguinte transformação:

$$T' = e^{iS} T e^{-iS}. \quad (1.4)$$

Escolhendo

$$S = -\frac{i}{2m} \beta (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) w \left(\frac{p}{m} \right), \quad (1.5)$$

em que w é uma função do operador $\frac{p}{m}$, temos

$$H' = e^{iS} H e^{-iS} = e^{2iS} H$$

Usando S definido pela equação (1.5) e expandindo a exponencial, obtemos

$$\begin{aligned} H' &= \left[\cos \left(p \frac{w}{m} \right) + \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{p} \sin \left(p \frac{w}{m} \right) \right] H \\ &= \beta \left[m \cos \left(p \frac{w}{m} \right) + p \sin \left(p \frac{w}{m} \right) \right] + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{p} \left[p \cos \left(p \frac{w}{m} \right) - m \sin \left(p \frac{w}{m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Agora, queremos eliminar o termo ímpar da equação (1.6), que é o termo envolvendo $\boldsymbol{\alpha}$. Para tanto, escolhemos

$$w \left(\frac{p}{m} \right) = \frac{m}{p} \arctan \left(\frac{p}{m} \right), \quad (1.7)$$

com isso a Hamiltoniana estará livre de operadores ímpares:

$$\begin{aligned} H' &= \beta \sqrt{m^2 + p^2} = \beta E_p \\ E_p &\equiv \sqrt{m^2 + p^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Agora, podemos escrever

$$\begin{aligned}\psi &= \Phi + \chi; \\ \Phi &= \frac{1 + \beta}{2} \psi; \\ \chi &= \frac{1 - \beta}{2} \psi.\end{aligned}$$

Com isso, a equação (1.3) reduz a duas equações desacopladas:

$$E_p \Phi' = i \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$-E_p \chi' = i \frac{\partial \chi'}{\partial t} \quad (1.10)$$

representando, respectivamente, estados de energia positiva e negativa. Por fim, removemos os operadores ímpares e obtemos duas equações desacopladas para cada componente do espinor.

1.2 A Partícula de Dirac em um Campo Eletromagnético Externo

Na presença de interação, aparentemente não é mais possível fazer uma única, simples, transformação canônica para uma representação em que a Hamiltoniana não possui operadores ímpares. Entretanto, é possível fazer uma sequência de transformações, em que a Hamiltoniana é expandida em potências de $\frac{1}{m}$ e cada transformação elimina os operadores ímpares associado a uma certa ordem de $\frac{1}{m}$. Podemos escrever a Hamiltoniana na forma:

$$H = \beta m + \epsilon + O \quad (1.11)$$

em que ϵ é um operador par e O é um operador ímpar, ambos dependentes do tempo.

Agora considere a transformação canônica gerada pelo operador hermitiano

$$S = -\frac{i}{2m} \beta O \quad (1.12)$$

Fazendo uma expansão em potências de $\frac{1}{m}$ da hamiltoniana na nova representação, obtemos

$$\begin{aligned}
H' &= e^{iS} H e^{-iS} - i e^{iS} \frac{\partial}{\partial t} e^{-iS} \\
&= H + \frac{\partial S}{\partial t} + i \left[S, H + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] + \frac{i^2}{2!} \left[S, \left[S, H + \frac{1}{3} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \right] + \dots \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Mantendo apenas até termos de ordem $\frac{1}{m^2}$, obtemos

$$H' = \beta m + \epsilon + \frac{\beta}{2m} O^2 - \frac{1}{8m^2} \left[O, [O, \epsilon] + \frac{\partial O}{\partial t} \right] - \frac{1}{2m} \beta \frac{\partial O}{\partial t} + \frac{\beta}{2m} [O, \epsilon] - \frac{1}{3m^2} O^3 + \dots \quad (1.14)$$

Perceba que essa transformação removeu todos os operadores ímpares de ordem $\left(\frac{1}{m}\right)^0$ da Hamiltoniana e apenas operadores ímpares de ordem $\frac{1}{m}$ e maiores permaneceram.

Fazemos uma sequência de transformações, tal que o gerador da transformação, em cada passo, é escolhido como

$$S = -\frac{i}{2m} \beta (\text{termos ímpares da Hamiltoniana de menor ordem em } 1/m) \quad (1.15)$$

Veamos, para interação com um campo eletromagnético externo, temos que $\epsilon = -e\phi$ e $O = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$, em que ϕ e \mathbf{A} são os potenciais escalar e vetor, respectivamente.

$$\Rightarrow H = \beta m - e\phi + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}). \quad (1.16)$$

A primeira transformação canônica gerada por

$$S_1 = -\frac{i}{2m} \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$$

nos fornece uma Hamiltoniana sem operadores ímpares da ordem de $\left(\frac{1}{m}\right)^0$:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \beta m - e\phi + \frac{\beta}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e}{2m} \beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} - \frac{e}{4m^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \frac{e}{8m^2} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \\
&\quad - \frac{ie}{2m} \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{3m^2} [(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}] \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \dots
\end{aligned}$$

Em que $\mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ e $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Seguindo o raciocínio, temos

$$\Rightarrow S_2 = -\frac{i}{2m} \beta \left[-\frac{ie}{2m} \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} \right]$$

E assim por diante... obtemos então, para energias positivas, a seguinte equação de Schrödinger:

$$\left[m - e\phi + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} - \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \frac{e}{8m^2}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \right] \Phi = i \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.17)$$

que é essencialmente a equação de Pauli para uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ não relativística interagindo com um campo eletromagnético.

2 Análise do Campo de Klein-Gordon

Essa seção será baseada no artigo (ACCIOLY; BLAS, 2002). Baseado nele, faremos os cálculos propostos na introdução. Trataremos aqui de encontrar uma transformação exata de Foldy-Wouthuysen (TFW) para um bóson de spin-0 acoplado a uma métrica estática:

$$ds^2 = V(\mathbf{x})^2 dt^2 - W(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^2. \quad (2.1)$$

Em que V e W são funções das coordenadas \mathbf{x} . Começamos com a seguinte equação para o campo escalar

$$(\square + m^2 + \lambda R)\phi = 0, \quad (2.2)$$

onde λ é o termo gravitacional de Darwin. O termo de Darwin diz respeito sobre a interação da partícula com o campo gravitacional.

Na verdade, aqui estamos falando sobre o termo de Darwin gravitacional. A origem desse termo se encontra na eletrodinâmica clássica, onde conhecemos a Lagrangiana de Darwin. A Lagrangiana de Darwin descreve a interação na ordem de v^2/c^2 entre duas partículas carregadas no vácuo onde cada partícula interage com o campo magnético gerado pela outra (JACKSON, 1999 (Third Edition)). Em 1920, Darwin¹ expandiu os potenciais de Liénard-Wiechert em v/c e a partir disso derivou a Lagrangiana que leva seu nome. Pode-se encontrar mais sobre esse assunto em (ESSÉN, 2007).

A equação (2.2) é obtida da ação

$$\int \frac{1}{2} \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - (m^2 + \lambda R) \phi^2] d^4x. \quad (2.3)$$

Aqui

$$\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu).$$

O escalar de Ricci associado a métrica (2.1) é

$$R = \frac{2}{W^4} (\nabla W)^2 - \frac{2}{VW^3} \nabla V \cdot \nabla W - \frac{2}{VW^2} \nabla^2 V - \frac{4}{W^3} \nabla^2 W. \quad (2.4)$$

¹ Charles Galton Darwin é neto do naturalista Charles Darwin.

Substituindo (2.4) em (2.2), obtemos

$$\ddot{\phi} - F^2 \nabla^2 \phi - F^2 \nabla \ln(VW^3) \cdot \nabla \phi + m^2 V^2 \phi + \lambda R V^2 \phi = 0, \quad (2.5)$$

em que $F^2 \equiv V^2/W^2$. Denotamos a derivada temporal por pontos. Introduzimos agora o formalismo de duas componentes da equação de Klein-Gordon:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad \frac{i}{m} \dot{\phi} = \phi_1 - \phi_2.$$

Com isso, a equação de Klein-Gordon pode ser escrita na forma

$$i\dot{\Phi} = H\Phi, \quad (2.6)$$

em que

$$H = \frac{m}{2} \xi^T - \xi \theta, \quad (2.7)$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e o operador θ é definido por

$$\theta \equiv \frac{F^2}{2m} \nabla^2 - \frac{F^2}{2m} \nabla \ln(VW) \cdot \nabla - \frac{m}{2} V^2 - \frac{\lambda}{2m} V^2 R.$$

Note que a matriz ξ tem as seguintes propriedades algébricas

$$\xi^2 = 0, \quad \{\xi, \xi^T\} = 4$$

O operador θ é auto-adjunto em relação a um produto interno, dado que a integração no espaço é feita com a medida correta (FULLING, 1989)

$$\theta = \int \rho d^3 \mathbf{x} \psi^\dagger \theta \psi, \quad (2.8)$$

em que $\rho \equiv g^{00} \sqrt{-g} = W^3/V$.

No entanto é mais conveniente escrever a função de onda tal que θ seja Hermitiano com respeito a medida usual do espaço plano. Fazemos isso por meio da transformação

$$\Phi \rightarrow \Phi' = f\Phi, \quad \theta' = f\theta f^{-1}, \quad H' = fHf^{-1},$$

com $f \equiv \sqrt{\rho} = V^{-1/2}W^{3/2}$.

Dessa forma

$$H' = \frac{m}{2}\xi^T - \xi\theta',$$

onde

$$\theta'\Phi' = f\theta f^{-1}\Phi'.$$

$$\Rightarrow \theta' = -\frac{m}{2}V^2 - \frac{1}{2m}F\hat{p}^2F + \frac{1}{8m}\nabla F \cdot \nabla F - \frac{1}{2m}D_\lambda(V, W) \quad (2.9)$$

em que $\hat{p} = -i\nabla$ é o operador momento e o último termo é

$$D_\lambda(V, W) \equiv \lambda \left[\left(\frac{1}{2\lambda} - 2 \right) \frac{V}{W^2} \nabla^2 V - 2 \frac{V}{W^3} \nabla V \cdot \nabla W + \left(\frac{1}{2\lambda} - 4 \right) \frac{V^2}{W^3} \nabla^2 W + 2 \frac{V^2}{W^4} (\nabla W)^2 \right]. \quad (2.10)$$

Agora note que o quadrado a Hamiltoniana H' é

$$H'^2 = -\frac{m}{2}\theta'\{\xi, \xi^T\} = -2m\theta' I, \quad (2.11)$$

em que I e matriz identidade 2x2. Veja que

$$\sqrt{H'^2} = (-2m\theta')^{1/2} I^{1/2}.$$

Como a raiz quadrada da matriz identidade não é única, a TFW precisa de uma transformação extra na base para diagonalizá-la. Isso pode ser feito com auxílio de uma matriz não degenerada U , tal que

$$\begin{aligned} H'' &\equiv (-2m\theta')^{1/2} U I^{1/2} U^{-1} \\ &= (-2m\theta')^{1/2} \eta, \end{aligned}$$

onde

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Conformemente, $H \rightarrow H''$ é a transformação exata de Foldy-Wouthuysen para equação de Klein-Gordon em espaços curvos com a métrica estática. Usando θ' dado pela equação (2.9), a Hamiltoniana quasi-relativística é obtida ao considerar m como o termo dominante:

$$H'' \approx \left[mV + \frac{1}{4m}(W^{-1}\hat{p}^2F + F\hat{p}^2W^{-1}) - \frac{1}{8mV}\nabla F \cdot \nabla F + \frac{1}{2m}D_\lambda(V, W) \right] \eta. \quad (2.12)$$

Usando $\lambda = 1/6$ (ainda há diversas discussões, tanto teóricas quanto experimentais, sobre o valor de λ), obtemos, portanto

$$H'' \approx \left\{ mV + \frac{1}{4m}(W^{-1}\hat{p}^2F + F\hat{p}^2W^{-1}) - \frac{1}{8mV}\nabla F \cdot \nabla F + \frac{1}{12mW}\nabla^2 F \right\} \eta. \quad (2.13)$$

Agora, para concluir mostraremos que essa escolha de λ não viola o princípio da equivalência ao se comparar o verdadeiro acoplamento gravitacional com o caso puramente inercial. Para tanto, lembramos que a solução da equação de Einstein para um partícula de massa M localizada em $r = 0$, longe da fonte é dado por

$$g_{00} \approx 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (2.14)$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} \approx -1 - \frac{2MG}{r}. \quad (2.15)$$

Dessas equações, obtemos

$$V \approx 1 - \frac{GM}{r}, \quad W \approx 1 + \frac{GM}{r}, \quad (2.16)$$

e

$$F \approx 1 - \frac{2MG}{r}. \quad (2.17)$$

Logo,

$$H'' = \left[m + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{3}{2m}\hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x})\hat{\mathbf{p}} \right] \eta, \quad (2.18)$$

em que $\mathbf{g} = -\frac{GM\mathbf{r}}{r^3}$. Por outro lado, no caso da métrica de Minkowski em referências aceleradas,

$$V = 1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}, \quad W = 1, \quad F = V,$$

obtemos

$$H'' = \left[m + m\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\hat{\mathbf{p}} \right] \eta. \quad (2.19)$$

Nas equações (2.18) e (2.19) foram ignorados termos relativísticos e gravitacionais/inerciais de ordem mais alta.

Para partícula de massa m , distante do corpo de massa M , pode-se ignorar os termos $(3/2m)\hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x})\hat{\mathbf{p}}$ e $(1/2m)\hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\hat{\mathbf{p}}$ nas equações (2.18) e (2.19), respectivamente, já que são menores que o termo cinético por um fator da ordem de $GM/r \approx 10^{-6}$ (para observações no sistema solar). Na equação (2.18) estamos assumindo que \mathbf{a} é tal que $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}| \approx GM/r$. A contribuição do termo de Darwin em ambos essas expansões é zero; de fato, nas equações (2.18) e (2.19) temos $\nabla^2 F = 0$. Portanto, concluímos que o acoplamento conforme está de acordo com o princípio da equivalência.

A seguir, calcularemos para algumas métricas V , W , o termo de Darwin com λ genérico e a Hamiltoniana de uma forma mais geral, ou seja, primeiro sem realizar aproximações.

2.1 Caso para a Métrica de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild é uma solução das equações de campo de Einstein no vácuo que descreve um campo gravitacional gerado por um corpo esfericamente simétrico (CARROLL, 2003). A métrica é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.20)$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2.$$

Com isso, temos que

$$V = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.21)$$

$$W = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.22)$$

$$F = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (2.23)$$

Dados, V , W e F , calculando termo a termo, temos que o termo de Darwin dado pela equação (2.10) para esse caso é

$$D_\lambda = -\frac{G^2 M^2 (6\lambda - 1)}{r^4}. \quad (2.24)$$

Algo importante a ser ressaltado é que note que para $\lambda = \frac{1}{6}$ o termo de Darwin é nulo, que é a escolha feita no artigo de (ACCIOLY; BLAS, 2002).

Agora calculemos a Hamiltoniana. Veja que será calculado o termo $\hat{p}^2 F$, isto é $-\nabla^2 F$. Formalmente, temos que o negativo do laplaciano de F é

$$\hat{p}^2 F = -8\pi M G \delta(r), \quad (2.25)$$

em que $\delta(r)$ é a função delta de Dirac:

$$\delta(r - r_0) = \begin{cases} \infty & \text{se } r = r_0. \\ 0 & \text{se } r \neq r_0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Em nosso caso, $r \neq 0$, logo podemos considerar

$$\hat{p}^2 F = 0. \quad (2.27)$$

O caso em que $\hat{p}^2 F \neq 0$ é de interesse quando se deseja resolver completamente as equações diferenciais geradas pela Hamiltoniana na equação de Klein-Gordon. Em nosso caso, isso não é de nosso interesse, portanto podemos seguir com a escolha nula. Faremos uma análise com aproximações das equações geradas por essa Hamiltoniana.

Com isso, calculando termo a termo, temos que a Hamiltoniana dada pela equação (2.12) no caso de Schwarzschild será

$$H = \left[m \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{G^2 M^2}{4m} \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{r^4} - \frac{G^2 M^2 (6\lambda - 1)}{2mr^4} \right] \eta. \quad (2.28)$$

Note novamente que o último termo envolvendo o termo de Darwin pode ser eliminado ao escolher $\lambda = \frac{1}{6}$. Ainda é muito discutido no meio teórico qual seria a escolha definitiva do valor de λ . Dado essa Hamiltoniana, vale a pena analisar os casos para r muito grande e para r muito pequeno.

2.1.1 Limite para r grande

Para tanto, faremos $r = r_0 + x$, em que $x \ll r_0$, sendo r_0 uma distância fixa do centro e x são pequenas variações em cima dessa distância fixa. Com isso, podemos expandir em primeira ordem em x o seguinte termo que encontramos na Hamiltoniana (2.28)

$$1 - \frac{2GM}{r_0 + x} \approx 1 - \frac{2GM}{r_0} + \frac{2GM}{r_0^2} x \quad (2.29)$$

Logo, expandindo a raiz desse último termo obtido, temos

$$\left(1 - \frac{2GM}{r_0} + \frac{2GM}{r_0^2} x \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{GM}{r_0} + \frac{GM}{r_0^2} x \quad (2.30)$$

$$\left(1 - \frac{2GM}{r_0} + \frac{2GM}{r_0^2} x \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{GM}{r_0} - \frac{GM}{r_0^2} x \quad (2.31)$$

Temos também termos envolvendo $\frac{1}{r^4}$ na Hamiltoniana, assim fazendo a expansão

$$\frac{1}{r^4} = \frac{1}{(r_0 + x)^4} \approx \frac{1}{r_0^4} - \frac{4x}{r_0^5} \quad (2.32)$$

Veja que o termo $\frac{GM}{r_0^2}$ constitui a aceleração gravitacional g do corpo de massa M no ponto r_0 , isto é

$$\frac{GM}{r_0^2} = g$$

Com essas aproximações, a Hamiltoniana (2.28) se torna

$$H_{rgrande} \approx \left[m - \frac{GMm}{r_0} + mgx - \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{4x}{r_0^5} \right) \left(\frac{G^2M^2}{4m} \left(1 + \frac{GM}{r_0} - gx \right) + \frac{G^2M^2(6\lambda - 1)}{2m} \right) \right] \eta \quad (2.33)$$

Termos constantes na Hamiltoniana podem ser descartados, pois a dinâmica surge das derivadas da Hamiltoniana. Agora vamos comparar com a Hamiltoniana obtida no artigo (ACCIOLY; BLAS, 2002)

$$H'' = \left[m + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{3}{2m} \hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) \hat{\mathbf{p}} \right] \eta. \quad (2.34)$$

Note que os termos de potenciais clássicos são os mesmos, ambos envolvem termos com a aceleração gravitacional do corpo de massa M . Os outros termos derivam quando foi calculado o negativo do laplaciano da função F . Há diferenças também no âmbito em que estamos usando λ genérico.

2.1.2 Limite para r pequeno

Para estudar a Hamiltoniana nas imediações do buraco negro, fazemos $r \approx 2GM$ sendo sempre $r > 2GM$ para não adentrarmos no horizonte de eventos. Para tanto, fazemos a seguinte mudança de variável

$$\frac{\rho^2}{4} = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (2.35)$$

ou

$$r = \frac{8GM}{4 - \rho^2} \quad (2.36)$$

Substituindo (2.35) e (2.36) na Hamiltoniana (2.28), obtemos

$$H_{rpequeno} = \left[m \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2G^2M^2m} \left(\frac{4 - \rho^2}{8} \right)^4 \frac{1}{\rho} - \frac{(6\lambda - 1)}{2G^2M^2m} \left(\frac{4 - \rho^2}{8} \right)^4 \right] \eta \quad (2.37)$$

Veja que temos termos proporcionais a potências de ρ e de $\frac{1}{\rho}$. Isto é, seja um observador que esteja realizando experimentos a baixas energias com as funções de onda de uma partícula nas imediações desse buraco negro. Os termos proporcionais a $\frac{1}{\rho}$ podem mostrar forças constantes sobre essa partícula ou forças de atração/repulsão. Combinado com os termos proporcionais a ρ , podemos ter um caráter oscilatório no comportamento da partícula.

Por λ está associado aos termos proporcionais a ρ , sendo uma constante multiplicativa, podemos inferir que λ talvez se manifeste como um potencial harmônico. A questão sobre o valor ou valores de λ dependem da teoria de campo em que ela se encontra. Na atual situação, λ parece ser mais um problema experimental em que seu valor irá depender de qual será a partícula escalar em questão.

2.2 Análise da Equação de Klein-Gordon no Limite para r Grande

Veamos o comportamento da equação de Klein-Gordon para o sistema descrito a seguir. Considere uma partícula de spin 0 de massa m interagindo com um buraco negro de raio R e massa M . Usaremos um sistema de coordenadas em que localizamos a partícula por \vec{r} , sendo esta a posição da partícula em relação ao centro do buraco negro. A Hamiltoniana que irá descrever tal sistema é dada, essencialmente, por (2.18), porém iremos discutir brevemente a obtenção do termo de potencial clássico dessa Hamiltoniana e também faremos algumas aproximações na mesma. Agora seguiremos os cálculos inspirados nos trabalhos de (KRANTZ, 2006) e (SANTOS; BODUNOV; POGLIANI, 2005).

O potencial atrativo que essa partícula sofrera é

$$V(r) = -G \frac{Mm}{r}, \quad (2.38)$$

onde $r \equiv |\vec{r}|$.

Considerando que a partícula está a uma distância $x \ll R$ do buraco negro (reduzindo a um problema unidimensional), temos que $r = R + x$. Logo

$$V(x) = -G \frac{Mm}{R+x}. \quad (2.39)$$

Expandindo em primeira ordem em x , obtemos

$$V(x) \approx -G \frac{Mm}{R} + G \frac{Mm}{R^2} x. \quad (2.40)$$

Note que surge no segundo termo da equação acima a aceleração gravitacional gerada pelo buraco negro:

$$g := \frac{GM}{R^2}. \quad (2.41)$$

Portanto, reescrevemos o potencial como

$$V(x) = -G \frac{Mm}{R} + mgx. \quad (2.42)$$

Perceba que obtemos o termo do potencial clássico, obtido anteriormente tanto em (2.18) quanto em (2.33),

Para partícula de massa m , distante do corpo de massa M , pode-se ignorar o termo $(3/2m)\hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x})\hat{\mathbf{p}}$ em (2.18) já que é menor que o termo cinético por um fator da ordem de $GM/r \approx 10^{-6}$ (para observações no sistema solar) (ACCIOLY; BLAS,

2002). Descartando as constantes aditivas em (2.18) (ACCIOLY; BLAS, 2002) e (2.42) (KRANTZ, 2006) temos que a Hamiltoniana do sistema é

$$H = \left(mgx + \frac{p^2}{2m} \right) \eta. \quad (2.43)$$

Denotaremos por \hat{H} como sendo

$$\hat{H} = \left(mgx + \frac{p^2}{2m} \right). \quad (2.44)$$

Agora, lembramos do formalismo de duas componentes para a equação de Klein-Gordon (ACCIOLY; BLAS, 2002):

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad \frac{i}{m} \dot{\phi} = \phi_1 - \phi_2. \quad (2.45)$$

Com isso, a equação de Klein-Gordon pode ser escrita na forma tipo Schrödinger (por familiaridade, retomaremos o valor da constante de plack \hbar e quando retomarmos seu valor igual a um, será informado)

$$i\hbar\dot{\Phi} = H\Phi, \quad (2.46)$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

e o ponto acima de Φ denota a derivada temporal.

Usando o η definido na seção anterior e a Hamiltoniana obtida em (2.43), temos as equações

$$i\hbar\dot{\phi}_1 = \hat{H}\phi_1, \quad (2.48a)$$

$$i\hbar\dot{\phi}_2 = -\hat{H}\phi_2. \quad (2.48b)$$

Obtemos duas equações desacopladas. Interessante a se notar que por (2.18) ser uma Hamiltoniana após a TFW, de fato, obtemos equações desacopladas (cujo é uma das consequências de se realizar uma TFW), sendo que a segunda equação pode-se ter a interpretação de soluções com energia negativa, o que representariam as antipartículas (FOLDY; WOUTHUYSEN, 1950) (Dada as devidas diferenças, já que estamos tratando

de bósons e o trabalho citado se refere a férmions). Para tanto, vamos focar apenas na primeira equação para energias positivas.

Agora, denotando $\phi_1 = \psi$ podemos escrever a equação (2.48a) na forma independente do tempo:

$$E\psi = \hat{H}\psi.$$

Usando \hat{H} dado por (2.44) e usando a definição do operador quântico para o momento linear, obtemos a seguinte equação

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + mgx \right) \psi = E\psi. \quad (2.49)$$

Seguindo os mesmos passos realizados no trabalho (KRANTZ, 2006), vamos introduzir, com o intuito de simplificar a equação, um fator de escala:

$$Z := \left(\frac{\hbar^2}{2m^2g} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.50)$$

e também introduziremos dois fatores sem dimensão:

$$\zeta := \frac{x}{Z}, \quad \epsilon := \frac{E}{mgZ}. \quad (2.51)$$

Inserindo essas novas variáveis na equação (2.49), temos

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{Z^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + mg\zeta Z \right) \psi = \epsilon mgZ\psi. \quad (2.52)$$

Logo, pela definição do fator de escala, obtemos a seguinte equação de autovalor sem dimensão

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta - \epsilon \right) \psi = 0. \quad (2.53)$$

Esta equação diferencial tem soluções bem conhecidas. As soluções são combinações lineares das funções de Airy A_i e B_i . As funções de Airy são objetos matemáticos transcendentais expressos em termos das funções de Bessel. Algo muito interessante sobre essas funções é que bruscamente há uma mudança de comportamento, em que elas começam com caráter oscilatório e trocam para um caráter exponencial, como é mostrado na figura 1.

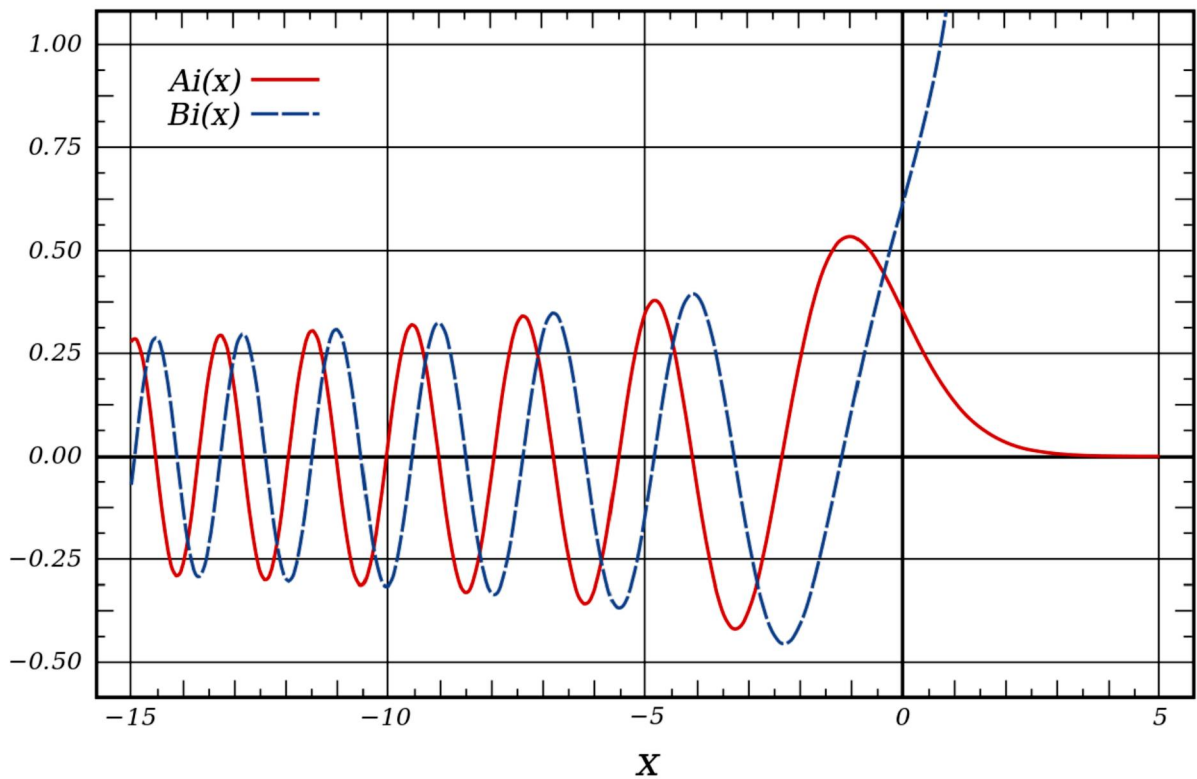


Figura 1 – Funções de Airy (imagem tirada de https://en.wikipedia.org/wiki/Airy_function)

Ambas apresentam um comportamento senoidal até certo ponto, a partir desse ponto A_i converge exponencialmente para zero e B_i diverge exponencial para $+\infty$

Com isso, a solução mais geral da equação (2.53) é dada por

$$\psi(\zeta) = C_1 A_i(\zeta - \epsilon) + C_2 B_i(\zeta - \epsilon), \quad (2.54)$$

em que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias que dependem das condições de contorno do sistema.

Há algumas condições a serem satisfeitas, como por exemplo, a função de onda ser normalizável e derivável. Encontramos no trabalho de (KRANTZ, 2006) cálculos que descrevem um sistema de *Ultra Cold Neutrons*, em dadas condições de contorno, produzidos pelo experimento já citado na introdução deste trabalho (NESVIZHEVSKY et al., 2002). Interessante notar que, matematicamente falando, foram obtidas equações do mesmo tipo para o sistema descrito nessa seção e o sistema de *Ultra Cold Neutrons* refletindo em um espelho horizontal sob efeito de um campo gravitacional, tendo como soluções as funções de Airy.

Portanto, penso que a densidade de probabilidade espacial do sistema descrito nessa seção, dada as devidas diferenças e proporções, já que aqui não impomos condições

de contorno, talvez se assemelhe ao descrito no experimento de (NESVIZHEVSKY et al., 2002) e no trabalho de (KRANTZ, 2006). Pela função de onda ser dada pelas funções de Airy, é interessante refletir sobre os comportamentos da partícula próxima e longe do buraco negro, se ela teria um caráter oscilatório em direção ao buraco negro, se iria orbitar ou iria se perder no horizonte de eventos.

2.3 Caso para a métrica de Minkowski

Agora, voltando a seguir o procedimento de encontrar a Hamiltoniana para uma dada métrica, temos que para a métrica de Minkowski em referenciais acelerados (ACCIOLY; BLAS, 2002)

$$V = 1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}, \quad (2.55)$$

$$W = 1, \quad (2.56)$$

$$F = V. \quad (2.57)$$

Novamente, calculando termo a termo, temos que o fator de Darwin para λ genérico é

$$D_\lambda = \left(\frac{1}{2} - 2\lambda\right) (1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{a}. \quad (2.58)$$

Com isso, a Hamiltoniana para esse caso será

$$H = \left[m + m\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{4m} \nabla \cdot \mathbf{a} - \frac{|\mathbf{a}|^2}{8m(1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x})} + \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{2} - 2\lambda\right) (1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{a} \right] \eta. \quad (2.59)$$

Veja que novamente obtemos termos que se referem a potenciais clássicos. O termo $m\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ é o potencial de uma partícula em um campo uniforme. Se escolhermos $\lambda = \frac{1}{4}$ eliminamos o termo de Darwin. Ainda é discutido no meio teórico sobre a escolha de λ , se ela possui um valor fixo, se certo valor fará as equações respeitarem ou não o princípio da equivalência.

2.4 Caso para a Métrica de Reissner-Nordström

O buraco negro de Reissner-Nordström é um corpo esfericamente simétrico, eletricamente carregado e sem rotação. A métrica de Reissner-Nordström é uma solução das equações de campo de Einstein-Maxwell no vácuo e é dada por

$$ds^2 = h(r)dt^2 - \frac{1}{h(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.60)$$

em que

$$h(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right). \quad (2.61)$$

Aqui, M é a massa do buraco negro e Q a sua carga elétrica. Estamos usando unidades tal que $c = \hbar = G = 1$.

Vejamos agora como se dá o termo de Darwin dado pela equação (2.10) e a Hamiltoniana dada por (2.12) para o limite da métrica próxima ao horizonte. Veremos esse caso em específico pois a métrica toma uma forma mais simples. No caso da métrica geral descrita por (2.60), mesmo com certas aproximações, torna os cálculos impraticáveis porque além de serem extremamente grandes, obtemos uma Hamiltoniana não trivial, com termos altamente não lineares.

Para tanto, no caso geral, comparando a equação (2.1) com a equação (2.60), temos que

$$V \approx 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{M^2}{2r^2} - \frac{M}{r}. \quad (2.62)$$

Este resultado foi obtido ao considerar r muito grande, isto é, $\frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \ll 1$. Com essa consideração podemos expandir V , desprezando termos de ordem maiores que $\frac{1}{r^2}$.

Por sua vez,

$$W \approx 1 + \frac{3M^2}{2r^2} - \frac{Q^2}{2r^2} + \frac{M}{r}. \quad (2.63)$$

em que W foi obtido seguindo a mesma considerações feitas em V . Ao computar os termos necessários para o cálculo do termo de Darwin e da Hamiltoniana, obtemos expressões com as complicações descritas acima.

Dado isso, focamos a nossa atenção para o caso da métrica próxima ao horizonte, pois obtemos resultados mais passíveis de interpretação.

2.4.1 Caso para Métrica Próxima ao Horizonte

Primeiramente, a métrica próxima ao horizonte se refere a um limite da métrica geral. Esse limite tem um papel importante no estudo da geometria e topologia de buracos negros, porém é bem definido apenas para um buraco negro extremal. (KUNDURI; LUCIETTI, 2009)

Já um buraco negro extremal é um buraco negro com a menor quantidade de massa possível condizente com uma dada carga elétrica e momento angular. Ou seja, é o menor buraco negro possível de existir dado um momento angular fixo e uma carga elétrica fixa. (KALLOSH et al., 1992)

No caso do buraco negro de Reissner-Nordström extremal de massa M e carga Q , temos que $Q = M$. A sua métrica é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.64)$$

Tomando o limite para métrica próxima ao horizonte, temos

$$ds^2 = \frac{r^2}{M^2} dt^2 - \frac{M^2}{r^2} dr^2 - M^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.65)$$

Logo, obtemos

$$V = \frac{r}{M}, \quad (2.66)$$

$$W = \frac{M}{r}, \quad (2.67)$$

$$F = \frac{r^2}{M^2}. \quad (2.68)$$

Calculando termo a termo, temos que o termo de Darwin é

$$D_\lambda \equiv D = \frac{r^2}{M^4}. \quad (2.69)$$

Como nesse caso o termo de Darwin não depende de λ , chamaremos apenas de D . Pela métrica próxima ao horizonte tomar uma forma mais simples, faz sentido obtermos um termo de Darwin mais simples. Com isso, podemos calcular a Hamiltoniana dada por (2.12):

$$H = \left[\frac{r(2m^2M^3 - 5M + r)}{2mM^4} \right] \eta. \quad (2.70)$$

Por envolver termo quadrático em r , ao usar essa Hamiltoniana na equação de Klein-Gordon, obtemos uma equação diferencial não linear. As equações de movimento quando se trata de sistemas quânticos em espaços curvos são muito não triviais, geralmente sem soluções analíticas, com isso normalmente se usam métodos numéricos, aproximação WKB, etc.

3 Análise do Campo de Dirac

O conteúdo deste capítulo terá como fonte o artigo (OBUKHOV, 2001). Aqui faremos uma revisão do artigo e veremos como se dá a transformação de Foldy-Wouthuysen no contexto da equação de Dirac em espaços curvos.

Neste capítulo retomaremos os valores da constante de Planck, da velocidade da luz e da constante gravitacional. Com isso, temos que o campo 4-espinorial ψ satisfaz a equação de Dirac covariante:

$$(i\hbar\gamma^\alpha D_\alpha - mc)\psi = 0, \quad (3.1)$$

onde γ^α são as matrizes de Dirac usuais e D_α é o espinor derivada covariante com¹

$$D_\alpha = h_\alpha^i D_i, \quad (3.2)$$

$$D_i := \partial_i + \frac{i}{4} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \gamma_i^{\alpha\beta}. \quad (3.3)$$

Em que h_α^i é um campo de tetradas. Campo de tetradas são considerados como referenciais adaptados a observadores que seguem uma trajetória descrita por funções x^μ no espaço-tempo. Esses campos projetam vetores e tensores no espaço-tempo no referencial local dos observadores (MALUF; ULHOA, 2010). Por sua vez

$$\hat{\sigma}^{\alpha\beta} := i\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]}. \quad (3.4)$$

Efeitos gravitacionais e inerciais estão relacionados pela conexão de Lorentz:

$$\Gamma_i^{\alpha\beta} = -\Gamma_i^{\beta\alpha}. \quad (3.5)$$

Sabemos que, em qualquer dado ponto P , é sempre possível escolher as coordenadas do espaço-tempo local em um certo referencial tal que $h_i^\alpha(P) = \delta_i^\alpha$, $\Gamma_i^{\alpha\beta}(P) = 0$. Este fato matemático está relacionado com o princípio da equivalência em acordo com a equação de Dirac acoplada gravitacionalmente que localmente assume sua forma no espaço plano ao se escolher um referencial adequado.

¹ Usamos índices gregos para componentes a respeito do referencial local de Lorentz $e_\alpha = h_\alpha^i \partial_i$ (tetradas) e índices latinos para as coordenadas locais do espaço-tempo x^i .

Novamente, focaremos em métricas que são descritas pela equação (2.1). Escolhendo um referencial ortonormal,

$$h_{\hat{i}}^{\hat{0}} = V\delta_i^0, \quad h_{\hat{i}}^{\hat{a}} = W\delta_i^a, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

obtemos as seguintes conexões de Lorentz:

$$\Gamma_{\hat{i}}^{\hat{a}\hat{0}} = \frac{\partial^a V}{WV} h_{\hat{i}}^{\hat{0}}, \quad \Gamma_{\hat{i}}^{\hat{a}\hat{b}} = \frac{\partial^a W}{W^2} h_{\hat{i}}^{\hat{b}} - \frac{\partial^b W}{W^2} h_{\hat{i}}^{\hat{a}}. \quad (3.7)$$

A partir daqui os circunflexos acima do índices distinguem os índices do referencial local das coordenadas do espaço-tempo. Como resultado, obtemos componentes explícitas do espinor derivada:

$$D_{\hat{0}} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{1}{2W} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla V) \right), \quad (3.8)$$

$$D_{\hat{a}} = \frac{1}{W} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{i}{2W} \epsilon_{abc} \partial^b W \Sigma^c \right). \quad (3.9)$$

Aqui temos que $\beta = \gamma^{\hat{0}}$, $\alpha = \beta \vec{\gamma}$, mesma convenção adotada em (BJORKEN; DRELL, 1998). Temos também que

$$\Sigma^c = \begin{bmatrix} \sigma^c & 0 \\ 0 & \sigma^c \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Consequentemente, a equação de Dirac (3.1) toma a forma da equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad (3.11)$$

com o operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \beta mc^2 V + \frac{V}{W} c(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) - \frac{i\hbar c}{2W} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla V) - \frac{i\hbar c V}{W^2} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla W). \quad (3.12)$$

Redefinindo o campo espinorial e a Hamiltoniana,

$$\psi' = W^{3/2} \psi, \quad \hat{H}' = W^{3/2} \hat{H} W^{-3/2}, \quad (3.13)$$

obtemos a nova Hamiltoniana, que é explicitamente Hermitiana com respeito ao produto escalar usual do espaço plano:

$$\hat{H}' = \beta mc^2 V + \frac{c}{2} [(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) F + F(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})]. \quad (3.14)$$

Agora é de nosso interesse realizar uma transformação de Foldy-Wouthuysen nessa Hamiltoniana, a fim de desacoplar estados de energia negativa e positiva. Para partícula livre de Dirac há uma transformação exata, mas para férmions interagindo com um campo eletromagnético externo, essa transformação se dá por aproximações, como vimos no capítulo 1 vide (FOLDY; WOUTHUYSEN, 1950) e (BJORKEN; DRELL, 1998).

A ideia chave é construir uma transformação unitária U , relacionando a representação após a transformação com a representação original: $\psi^F = U\psi$, satisfazendo a seguinte condição

$$U\hat{\Lambda}U^\dagger = \beta. \quad (3.15)$$

Aqui

$$\hat{\Lambda} = \frac{\hat{H}}{\sqrt{\hat{H}^2}} \quad (3.16)$$

é o operador sinal de Pauli. Por definição, é Hermitiano, unitário e idempotente: $\hat{\Lambda}^2 = \hat{\Lambda}^\dagger\hat{\Lambda} = 1$.

Agora, considere o operador de involução:

$$J := i\gamma_5\beta, \quad (3.17)$$

em que $\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Este operador é Hermitiano, $J^\dagger = J$ e unitário, $JJ^\dagger = J^2 = 1$. Também anticomuta com ambas Hamiltoniana (3.14) e matriz β :

$$\{J, \hat{H}\} = 0, \quad \{J, \beta\} = 0. \quad (3.18)$$

Dado isso, podemos construir o operado $U = U_2U_1$ tal que

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + J\hat{\Lambda}), \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \beta J). \quad (3.19)$$

Consequentemente

$$U_1\hat{\Lambda}U_1^\dagger = J, \quad U_2JU_2^\dagger = \beta. \quad (3.20)$$

Portanto, a condição (3.15) é satisfeita.

O último passo agora é encontrar a Hamiltoniana $\hat{H}^F = U\hat{H}U^\dagger$ após a transformação de Foldy-Wouthuysen. Das equações (3.18), temos $J\hat{H}^2 = \hat{H}^2J$, então $J\sqrt{\hat{H}^2} = \sqrt{\hat{H}^2}J$, e $\{J, \hat{\Lambda}\} = 0$. Portanto, $U_1\hat{H}U_1^\dagger = J\sqrt{\hat{H}^2}$ e, finalmente,

$$U\hat{H}U^\dagger = \left[\sqrt{\hat{H}^2}\right] \beta + \left\{\sqrt{\hat{H}^2}\right\} J. \quad (3.21)$$

Aqui, as partes pares e ímpares são definidas, para qualquer operador Q , como

$$[Q] := \frac{1}{2}(Q + \beta Q \beta), \quad \{Q\} := \frac{1}{2}(Q - \beta Q \beta). \quad (3.22)$$

Note que ambos os termos em (3.21) são pares, portanto, de fato, a Hamiltoniana após a transformação de Foldy-Wouthuysen não mistura as componentes superiores com inferiores do espinor. Usando a seguinte notação

$$\vec{\phi} := \nabla V, \quad (3.23)$$

$$\vec{f} := \nabla F, \quad (3.24)$$

temos então

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 = & m^2 c^4 V^2 + F c^2 p^2 F + \frac{\hbar^2 c^2}{2} F (\nabla \cdot \vec{f}) - \frac{\hbar^2 c^2}{4} \vec{f} \cdot \vec{f} \\ & + \hbar c^2 F \vec{\Sigma} \cdot ([\vec{f} \times \vec{p}] + J m c \vec{\phi}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Em muitos casos, é mais prático usar funções de onda não relativísticas, tratando os demais termos de interação como perturbações. A aproximação quasi-relativística é obtida ao assumir que o termo mc^2 é dominante e temos portanto, correspondentemente expandindo a raiz quadrada de (3.25) como

$$\sqrt{\hat{H}^2} \approx mc^2 V + \frac{1}{4m} (W^{-1} p^2 F + F p^2 W^{-1}) + \frac{\hbar^2}{4mW} (\nabla \cdot \vec{f}) - \frac{\hbar^2}{8mV} \vec{f} \cdot \vec{f} \quad (3.26)$$

$$+ \frac{\hbar^2}{4m} \vec{\Sigma} \cdot (W^{-1} [\vec{f} \times \vec{p}] + [\vec{f} \times \vec{p}] W^{-1} + J 2W^{-1} m c \vec{\phi}), \quad (3.27)$$

com a subsequente extração das partes pares e ímpares de acordo com (3.22). Vemos a aparição do termo de Darwin:

$$\frac{\hbar^2}{4mW} (\nabla \cdot \vec{f}) = \frac{\hbar^2}{4mW} \nabla^2 F. \quad (3.28)$$

Com o intuito de comparar os efeitos relativísticos do spin das forças gravitacionais e inerciais e com isso obter uma clareza sobre a validade do princípio da equivalência para férmions, iremos considerar separadamente dois caso particulares.

3.1 Caso para o espaço-tempo de Minkowski

No espaço-tempo plano de Minkowski em um referencial acelerado, temos que

$$V = 1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{c^2}, \quad W = 1, \quad F = V. \quad (3.29)$$

Conseqüentemente

$$\vec{\phi} = \vec{f} = \frac{\vec{a}}{c^2}. \quad (3.30)$$

Preservando as contribuições principais, encontramos, portanto, a Hamiltoniana não relativística após a transformação de Foldy-Wouthuysen

$$\begin{aligned} \hat{H}^F = & \beta mc^2 + \beta m \vec{a} \cdot \vec{x} + \beta \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar}{2c} \vec{\Sigma} \cdot \vec{a} \\ & + \frac{\hbar}{2mc^2} \beta \vec{\Sigma} \cdot [\vec{a} \times \vec{p}]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.2 Caso para o espaço-tempo de Schwarzschild

Para a métrica de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas, temos que

$$V = \left(1 - \frac{GM}{2c^2 r}\right) \left(1 + \frac{GM}{2c^2 r}\right)^{-1}, \quad (3.32)$$

$$W = \left(1 + \frac{GM}{2c^2 r}\right)^2. \quad (3.33)$$

Para longe do corpo de massa M , é suficiente considerar o limite em que $\frac{GM}{2c^2 r} \ll 1$, o que nos fornece

$$V \approx 1 - \frac{GM}{c^2 r}, \quad (3.34)$$

$$W \approx 1 + \frac{GM}{c^2 r}. \quad (3.35)$$

Logo,

$$\vec{\phi} = \frac{\vec{g}}{c^2}, \quad (3.36)$$

$$\vec{f} = -\frac{2\vec{g}}{c^2}, \quad (3.37)$$

com

$$\vec{g} = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (3.38)$$

Correspondentemente, a Hamiltoniana não relativística após a transformação de Foldy-Wouthuysen é

$$\begin{aligned} \hat{H}^F = & \beta mc^2 + \beta m \vec{g} \cdot \vec{x} + \beta \frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar}{2c} \vec{\Sigma} \cdot \vec{g} \\ & - \frac{\hbar}{mc^2} \beta \vec{\Sigma} \cdot [\vec{g} \times \vec{p}] - \frac{\hbar^2 \beta}{2m} (\nabla \cdot \vec{g}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Em ambas (3.31) e (3.39) negamos termos relativísticos e gravitacionais/inerciais (red shift, etc) de ordem maiores.

Conclusão

Pela interação gravitacional ser a interação mais fraca conhecida, justifica-se, em certa parte, despreza-la. No entanto, geralmente, quase todos experimentos envolvendo física em altas energias tomam lugares em espaços curvos. Porém podemos ver neste trabalho como, de fato, a gravidade influencia nos sistemas quânticos. A teoria vista aqui se dá em baixas energias, não chegando a ser uma teoria quântica de campos como conhecemos.

Atualmente com a tecnologia vigente, é possível realizar experimentos com sistemas quânticos sob a influência de um campo gravitacional (muitas vezes o campo gravitacional terrestre) e com isso é possível medir como esse campo interfere nesse sistema como pode ser visto nos experimentos citados na introdução. É sempre buscado respeitar o princípio da equivalência, verificando a sua validade. Também vemos o uso da teoria clássica da gravitação nos experimentos, utilizando-se potenciais clássicos como foi visto na seção 1.2.

Uma área de pesquisa em física muito relevante é sobre o formalismo da gravitação pós-newtoniana, sendo utilizada em sistemas quânticos. Podemos ver mais sobre isso na tese ([POST-NEWTONIAN. . . , 2020](#)). É possível que futuramente com um maior desenvolvimento tecnológico, seja possível realizar experimentos sobre gravitação quântica, *loop quantum gravity*, teoria de cordas, etc.

Referências

ACCIOLY, A.; BLAS, H. Exact foldy-wouthuysen transformation for real spin-0 particle in curved space. *PHYSICAL REVIEW D* 66, 067501 (2002), 2002. Citado 7 vezes nas páginas 15, 17, 25, 30, 32, 35 e 39.

BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic Quantum Mechanics*. [S.l.: s.n.], 1998. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

BONSE, U.; WROBLEWSKI, T. Measurement of neutron quantum interference in noninertial frames. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, v. 51, n. 16, 1983. Citado na página 15.

CARROLL, S. *SPACETIME AND GEOMETRY*
An Introduction to General Relativity. [S.l.: s.n.], 2003. Citado na página 30.

COLELLA, R.; OVERHAUSER, A. W.; WERNER, S. A. Observation of gravitationally induced quantum interference*. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, v. 34, n. 23, 1975. Citado na página 15.

ESSÉN, H. The exact darwin lagrangian. 2007. Citado na página 25.

FOLDY, L. L.; WOUTHUYSEN, S. A. On the dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. *Physical Review*, v. 78, n. 1, 1950. Citado 3 vezes nas páginas 19, 35 e 45.

FULLING, S. A. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. [S.l.: s.n.], 1989. Citado na página 26.

JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.: s.n.], 1999 (Third Edition). Citado na página 25.

KALLOSH, R. et al. Supersymmetry as a cosmic censor. 1992. Citado na página 41.

KRANTZ, C. Quantum states of neutrons in the gravitational field. 2006. Citado 5 vezes nas páginas 34, 35, 36, 37 e 38.

KUNDURI, H. K.; LUCIETTI, J. A classification of near-horizon geometries of extremal vacuum black holes. 2009. Citado na página 41.

MALUF, J. W.; ULHOA, S. C. Electrodynamics in accelerated frames revisited. 2010. Citado na página 43.

NESVIZHEVSKY, V. et al. Quantum states of neutrons in the earth's gravitational field. *Nature*, v. 415, p. 297–9, 02 2002. Citado 3 vezes nas páginas 15, 37 e 38.

OBUKHOV, Y. N. Spin, gravity, and inertia. *Phys.Rev.Lett.* 86:192-195, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 43.

POST-NEWTONIAN Description of Quantum Systems in Gravitational Fields, 2020. Citado na página 49.

SANTOS, M. N. B.; BODUNOV, E. N.; POGLIANI, L. Classical and quantum study of the motion of a particle in gravitational field. *Journal of Mathematical Chemistry*, v. 37, n. 2, 02 2005. Citado na página [34](#).

ZOEST, T. et al. Bose-einstein condensation in microgravity. *Science (New York, N.Y.)*, v. 328, p. 1540–3, 06 2010. Citado na página [15](#).