

Universidade de Brasília

Instituto de Física

Amanda Freitas Cruz

**Um Estudo sobre o Modelo Padrão da
Cosmologia**

Brasília

05 maio de 2022

Amanda Freitas Cruz

Um Estudo sobre o Modelo Padrão da Cosmologia

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Mariana Penna Lima Vitenti

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

05 maio de 2022

Amanda Freitas Cruz

Um Estudo sobre o Modelo Padrão da Cosmologia/ Amanda Freitas Cruz. –
Brasília, 05 maio de 2022-

74 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Mariana Penna Lima Vitenti

Monografia – Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física, 05 maio de 2022.

1. Neutrinos 2. Constante de Hubble e Outros Parâmetros Cosmológicos I.
Ivan Soares Ferreira. II. Universidade de Brasília. III. Instituto de Física. IV.
Bacharel

CDU 02:141:005.7

Amanda Freitas Cruz

Um Estudo sobre o Modelo Padrão da Cosmologia

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 05 maio de 2022:

Mariana Penna Lima Vitenti
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasília
05 maio de 2022

*Este trabalho é dedicado ao professor Ivan,
a sua forma de ver o mundo mudou a minha vida.*

Agradecimentos

Este trabalho é o resultado de um período muito especial da minha vida, representando um dos períodos mais alegres e também difíceis da minha vida. A finalização deste Trabalho de Conclusão de Curso só foi possível por causa da influência e apoio de vários amigos, professores e familiares que me motivaram e ajudaram por toda minha graduação. Peço desculpas se esquecer o nome de alguém!

Primeiramente, gostaria de agradecer à Prof. Dr. Mariana Penna Lima Vitenti, minha orientadora deste TCC, pelo imenso apoio e conselhos durante um dos momentos mais difíceis da minha vida. Sei que o modo como nos conhecemos não foi ideal e em muitos momentos meu psicológico não ajudou. Mas não tenho palavras para descrever como sua paciência e ensinamentos me ajudou.

Gostaria de agradecer aos meus pais, Ainoã e Marcos, por me apoiarem deste sempre, mesmo quando vocês não me entendiam muito bem. Mãe, obrigada por todos os abraços e consolos. Aos meus irmãos, Yan e Marcos Vinícius, obrigada por todas as brincadeiras, zoações e irritações durante esses anos. Não posso esquecer da Rubi e da Safira, as melhores gata e cachorra que eu poderia sonhar em ter :). Amo vocês.

Aos meus avós: Asenate, Maria das Dores, Alcides (*in memoriam*) e Joaci, obrigada por tudo, vocês são os amores da minha vida! Em especial, faço menção ao meu avô Joaci por todas as caronas e alegria com minhas conquistas.

À professora Erlete, agradeço por todo apoio durante meu ensino médio. Mesmo sendo minha professora de química, as conversas que tivemos solidificaram minha vontade de estudar física, mesmo com todo meu medo de cálculo 1 (ah, os medos de uma Amanda de 17 anos!). Você é uma das minhas inspirações de vida!. Também agradeço ao professor Wagner, por ter me mostrado a beleza da física (desculpa por todos os intervalos que o senhor perdeu enquanto me ajudava a resolver questões do PAS). Obrigada por me apresentar à 1^o Escola para Novos Talentos da Física da UnB, lá em 2015, que me deu a oportunidade de conhecer o ambiente acadêmico e a Física da UnB.

Ao Prof. Dr. Ivan Soares Ferreira (*in memoriam*), que despertou em mim a paixão pela Astrofísica e Astronomia. Obrigada por todas as conversas aleatórias sobre Star Trek e sobre arte. Agradeço pelos quase 4 anos de orientação, seu apoio foi instrumental para que eu chegasse aqui (sinto sua falta).

Também agradeço a todos os meus professores da graduação, em especial aos professores Júnio Rosa, Antônio Pedroza, Ricardo Gargano e Adriane Schelin. Obrigada por toda paciência e dedicação ao ensino.

Ao PET Física, só tenho a agradecer. Participar deste grupo foi uma das coisas mais marcantes de minha graduação. A oportunidade de ensinar e divulgar a física para a comunidade foi inesquecível. Aos tutores do PET: Vanessa, Roncaratti e Bernardo, fica a gratidão por tudo que vocês fizeram e ainda fazem pelo PET e os alunos do Instituto de Física. Aos meus amigos petianos fica todo meu apoio (vida longa ao PET!).

Não posso deixar de agradecer imensamente aos meus amigos Lorena, Ludmila, Mariana, Pedro, João Augusto, Ranier, Tábata, Vavá, Paulo, Victor Porto, Vitor Dantas, Amanda, Larissa, Carol, Marcos Vinícius, Vinícios (o melhor petiano), Lorena do Carmo, Matheus, Gabriel, João (o melhor apadrinhado) e Thamires, eu não teria feito nada disso se não fosse pelo apoio de vocês. Em especial, agradeço ao fera do fogo, Felipe Fontinele, pelas ajudas neste trabalho. Vocês estiveram comigo nos meus melhores e piores momentos! Sempre que pensar nessa fase da minha vida, lembrarei de vocês. Vocês tornaram a minha vida mais alegre!

Agradeço à minha prima Jôily por todas as noites viradas juntas, os surtos coletivos de madrugada ao som de K-pop e as cantorias inesperadas de *All Too Well (10 Minute Version)* regadas a energético e a batata frita. I love you, guria.

Por último, agradeço à Banca Avaliadora, formada pelo Prof. Dr. Daniel Müller e pela Prof. Dr. Vanessa Carvalho, por terem aceito o convite e por todas as correções e conselhos.

*“The beauty of a living thing is not the atoms that go into it,
but the way those atoms are put together.”*

Carl Sagan, Cosmos

Resumo

O modelo cosmológico padrão parte da métrica de FLRW que é caracterizada por ser uma solução exata para as equações de Einstein da relatividade geral. Este modelo, também conhecido como Λ CDM, considera a energia escura, a partir de uma constante cosmológica Λ e também a matéria escura fria (CDM). Além disso, o universo é caracterizado por ser homogêneo e isotrópico em grandes escalas, como observado dos dados da radiação cósmica de fundo (CMB) obtidos pelos satélites WMAP e Planck. Desta modelagem, obtêm-se diferentes grandezas, como a função de Hubble e as densidades de matéria/energia dos constituintes do universo. Além disso, neste trabalho também estudamos os diferentes universos possíveis e seus destinos finais, os caracterizando em função de seu fator de escala e do tempo cósmico. Por fim, consideramos a radiação cósmica de fundo como observável cosmológico e os impactos das suas anisotropias no estudo evolutivo do Universo, observando também alguns efeitos geradores de suas flutuações, e.g., o efeito Sachs-Wolfe e o efeito Sunyaev–Zeldovich (SZ).

Palavras-chaves: Cosmologia. Parâmetros Cosmológicos. Distâncias Cosmológicas. Modelo Λ CDM. Radiação Cósmica de Fundo.

Abstract

The standart cosmological model follows from the FLRW metric, which is established as being an exact solution to Einstein's field equations. This model, also known as Λ CDM, considers dark energy, in the form of a cosmological constant Λ and also a cold dark matter (CDM). Furthermore, the universe is characterized by being homogeneous and isotropic on large scales, as observed from the cosmic microwave background (CMB) data obtained by the WMAP and Planck satellites. From this modeling, different quantities can be found, such as the Hubble function and the matter/energy densities of the constituents of the universe. In addition, in this work we also study different universe models and their final destinies, defining them as functions of their scale factor and cosmic time. Finally, we consider the cosmic microwave background as a cosmological observable and the impacts of its anisotropies in the evolutionary study of the Universe, also considering some generating effects of these fluctuations such as the Sachs-Wolfe effect and the Sunyaev-Zeldovich (SZ) effect.

Key-words: Cosmology. Cosmological Parameters. Cosmological Distances. Λ CDM Model. Cosmic Microwave Background.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Distância comóvel χ (linha preta), distância de diâmetro angular d_A (linha vermelha) e distância luminosidade d_L (linha verde), respectivamente, em função do redshift. Os parâmetros cosmológicos usados para este gráfico são: $\Omega_\Lambda = 0.6894$ e $\Omega_m = 0.3106$, em concordância com os dados obtidos pelos dados da Planck Collaboration para um universo Euclidiano. Retirado de (DODELSON; SCHMIDT, 2020).	40
Figura 2 – Espectro de corpo negro da CMB em função da frequência obtida pelo instrumento FIRAS (em inglês, <i>Far InfraRed Absolute Spectrophotometer</i>) do satélite COBE (do inglês, <i>Cosmic Background Explorer</i>)(WHITE, 1999)	57
Figura 3 – Dipolo da radiação cósmica de fundo como obtido a partir dos dados do COBE. Retirado de (THE. . . ,).	60
Figura 4 – Mapa das anisotropias na temperatura da CMB obtido a partir do método SMICA (em inglês, <i>Spectral Matching Independent Component Analysis</i>) com os dados do satélite Planck. Retirado de (PLANCK. . . ,) .	64
Figura 5 – Espectro de potência da temperatura da radiação cósmica de fundo micro-ondas. No painel inferior observamos as divergências entre os dados observados e o melhor ajuste feito para os dados do Planck de 2015. Retirado de (ADE et al., 2016).	65
Figura 6 – Espectro de potência da temperatura considerando diferentes massas para os neutrinos, onde se observa um deslocamento causada pelas diferentes massas de neutrinos. Retirado de (LESGOURGUES; PASTOR, 2014).	65

Sumário

	Introdução	19
1	O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	21
1.1	O princípio cosmológico	21
1.2	A Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	22
1.3	As equações de campo de Einstein	23
1.3.1	Tensor Energia-Momento	25
1.4	As equações de Friedmann	26
1.5	O <i>redshift</i> e o fator de escala	27
1.6	Os parâmetros cosmológicos	30
2	DISTÂNCIAS COSMOLÓGICAS	35
2.1	Distância comóvel longitudinal	35
2.2	Distância comóvel transversal	36
2.3	Distância de diâmetro angular	37
2.4	Distância luminosidade	38
3	SOLUÇÕES PARA DIFERENTES MODELOS DE UNIVERSO	41
3.1	O universo vazio	41
3.2	Universos com apenas um componente	43
3.2.1	Apenas matéria	45
3.2.2	Apenas radiação	46
3.2.3	Apenas Λ	46
3.3	Universos com múltiplos componentes	47
3.3.1	Matéria + curvatura	48
3.3.2	Matéria + Λ	50
3.3.3	Radiação + matéria	52
3.4	O modelo Λ CDM	53
4	A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO	57
4.1	As anisotropias da CMB	58
4.1.1	Anisotropias de grande escala	59
4.1.2	Anisotropias de pequena escala	59
4.1.3	Anisotropia do dipolo	59
4.1.4	Efeito Sachs-Wolfe	60
4.1.5	Efeito Sachs-Wolfe integrado	61

4.1.6	Efeito Sunyaev-Zel'dovich	61
4.1.7	Lentes gravitacionais	61
4.2	O espectro de potência da CMB	62
	Conclusão	67
	REFERÊNCIAS	69

Introdução

A Cosmologia, do grego antigo “kósmos” e “logía”, é o ramo da ciência que estuda o universo. Caracterizada como a área de intersecção entre a física e a astrofísica, a cosmologia é uma das áreas de pesquisa mais estudadas atualmente.

A concepção da cosmologia como conhecida nos dias de hoje é relativamente jovem, tal que podemos datá-la ao século passado. Entretanto, o estudo do cosmos é muito mais antigo, podendo ser traçado à Antiguidade, quando antigas civilizações, como os egípcios, faziam observações, mesmo que incorretas ou incompletas, para construir modelos de nosso cosmos.

Na Grécia Antiga, partindo de observações astronômicas mais elaboradas, temos a dedução da forma esférica da Terra e da Lua, assim como, o estabelecimento da distância Sol-Terra. Como resultado, filósofos gregos como Aristóteles e Ptolomeu propuseram diferentes modelos para o universo. Em especial, o modelo ptolomaico estabelecia a Terra como o centro do universo num modelo de duas esferas. É apenas, em 1543, que Nicolau Copérnico propôs um modelo heliocêntrico consistente com as observações astronômicas feitas na época.

O surgimento da Cosmologia moderna é estabelecido com o desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral (RG) por Alberto Einstein que, em 1915, publicou o artigo “*Die Feldgleichungen der Gravitation*” (EINSTEIN, 1915) generalizando a relatividade especial proposta em 1905.

Em adição, a observação de Edwin Hubble, em 1929, do afastamento das galáxias em relação à Terra a uma velocidade peculiar linear ao *redshift* das mesmas foi essencial para a Cosmologia moderna, por implicar que o universo esteja se expandindo. Portanto, a observação dos *redshifts* galácticos levaram ao modelo do *Big Bang* para a evolução do universo, no qual o universo expandiria-se a partir de um estado altamente denso e compacto até sua baixa densidade atual.

Deste modo, a descoberta da radiação cósmica de fundo (CMB) sedimentou o modelo do *Big Bang* para o universo, por surgir naturalmente de um universo, inicialmente, muito quente e denso no qual a matéria bariônica era completamente ionizada e onde os elétrons livres causavam com que nosso universo fosse completamente opaco. Contudo, com sua expansão o universo esfriou, permitindo então a formação de átomos neutros e que o universo se tornasse transparente, tal que a CMB pudesse transitar livremente pelo espaço, sem interagir com a matéria.

Além disso, a observação das anisotropias da CMB, pelo satélite COBE, foi ex-

tremamente importante para instituir a ideia de uma inflação cósmica como geradora da expansão do universo e também por gerar restrições para os parâmetros iniciais do universo. É, então, partindo deste cenário que se constrói este trabalho.

No primeiro capítulo faremos uma discussão sobre o Modelo Cosmológico Padrão, partindo do princípio cosmológico, da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker e das equações de campo de Einstein para a dedução das equações de Friedmann. Consideraremos, ainda, a relação entre o fator de escala e o *redshift*, definiremos os parâmetros cosmológicos e como os mesmo evoluem no tempo.

Em seguida, no segundo capítulo definiremos a distância entre objetos celestes e caracterizaremos-as em distância comóvel longitudinal, distância comóvel transversal, distância de diâmetro angular e distância luminosa.

O terceiro capítulo constitui no estudo dos diferentes cenários para a composição e a curvatura do universo e também no padrão evolucionário destes universos.

Por fim, no quarto capítulo introduziremos a radiação cósmica de fundo e como ocorreu sua observação inicial, também estudaremos suas anisotropias e como é feita sua descrição matemática a partir do espectro angular de potência.

1 O modelo cosmológico padrão

1.1 O princípio cosmológico

O princípio cosmológico é uma das suposições fundamentais da cosmologia moderna sendo definido pela noção de que o universo, dado uma escala suficientemente grande, apresenta as mesmas características em qualquer lugar. A concepção de que não existe um lugar privilegiado no Universo tem origem no princípio de Copérnico, nome este dado em homenagem ao heliocentrismo de Copérnico que, numa época em que a teoria em voga era o geocentrismo, usou de suas observações para afirmar que a Terra não estaria no centro do sistema solar e nem que a mesma teria uma posição privilegiada no Universo.

É evidente que, para pequenas escalas, a ideia de que uma estrela é similar ao meio interestelar é incorreta. Contudo, o princípio de Copérnico pode ser aplicado em largas escalas, uma vez que se calcula a média das variações locais. A validade dessa definição pode ser vista em diferentes observacionais, tal como a radiação cósmica de fundo ¹ (CMB).

Partindo do princípio de Copérnico, a parte espacial do espaço-tempo passa a poder ser considerada isotrópica e homogênea. A isotropia é uma propriedade matemática de variedades ², tal como o espaço-tempo pode ser definido, que estabelece que o espaço é invariante por rotação, ou seja, não importa a direção em que o observador olhe pois o espaço será o mesmo. Além disso, a homogeneidade estabelece que todo ponto do espaço-tempo é equivalente ao outro.

Ainda acerca da homogeneidade e isotropia, é necessário observar que existência destas propriedades não é obrigatoriamente concomitante, de modo que não há nenhuma relação pre-estabelecida entre as mesmas. De forma que uma variedade pode ser homogênea e não isotrópica e vice-versa. Entretanto, se o espaço é isotrópico *em todo lugar*, então o mesmo é homogêneo. Consequentemente, se o espaço é isotrópico e homogêneo ao redor de um ponto, ele será isotrópico ao redor de todos os pontos.

Assim, o elemento de linha do espaço-tempo será dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\Sigma^2, \quad (1.1)$$

onde c é a velocidade da luz, $a(t)$ é o fator de escala e $d\Sigma^2$ equivale a um elemento de linha espacial (CARROLL, 2019).

¹ Do inglês, *cosmic microwave background radiation*.

² Do inglês: *Manifolds*.

1.2 A Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Durante as décadas de 1920 e 1930, quatro cientistas – Alexander Friedmann ([FRIEDMANN, 1924](#)), Georges Lemaître, Howard Robertson e Arthur Geoffrey Walker – independentemente encontraram uma solução exata para as equações de Einstein. Esses autores supuseram que o universo é homogêneo – é invariante em relação a translações no espaço, isotrópico – não existe uma direção privilegiada, em expansão (ou em contração) e é um espaço conexo. Como resultado, eles obtiveram a chamada métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW). Assim, o elemento de linha de um espaço-tempo onde a parte espacial $d\Sigma$ se encontra em coordenadas polares de circunferência reduzida para o intervalo entre dois eventos $(t_1, r_1, \theta_1, \phi_1)$ e $(t_2, r_2, \theta_2, \phi_2)$ é dado pela equação ([CARROLL, 2019](#))

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (1.2)$$

na qual $a(t)$ corresponde ao fator de escala adimensional e κ está relacionado à curvatura e à forma do espaço. Os possíveis valores de κ são $\kappa = 1, 0$ ou -1 , tal que ter-se-á, respectivamente, um espaço de curvatura positiva (modelado por uma região de uma esfera tridimensional), plano (espaço euclidiano) ou de curvatura negativa (dado por uma região pertencente a um espaço hiperbólico) ([RYDEN, 2017](#)).

A equação (1.2) também pode ser escrita, usando a convenção de Einstein, como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.3)$$

onde $dx^0 = dt$, $dx^1 = dr$, $dx^2 = d\theta$ e $dx^3 = d\phi$. Desta equação, o tensor métrico ($g_{\mu\nu}$) pode ser definido. Em particular, para um universo homogêneo, isotrópico e em expansão (ou em contração), este tensor também é conhecido como a métrica FLRW, cuja sua forma matricial é dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

uma vez que estamos considerando um espaço-tempo do tipo $(-, +, +, +)$. Além disso, nota-se que a parte espacial da métrica varia temporalmente seguindo o fator de escala $a = a(t)$.

Não obstante, o tensor métrico deve satisfazer a condição

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\beta} = \delta_\nu^\beta, \quad (1.5)$$

na qual δ_ν^β é o delta de Kronecker, que no caso $\mu = \nu$ é igual a 1 e para $\mu \neq \nu$ é nulo. Como consequência, para que a igualdade (1.5) seja verdadeira, o elemento $g^{\mu\nu}$ deve ser

um elemento da matriz métrica inversa. Logo, para a métrica estudada, a matriz inversa será

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\kappa r^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

1.3 As equações de campo de Einstein

Seguindo os preceitos da Teoria da Relatividade Geral (TG), a métrica está intrinsecamente relacionada ao conteúdo energético e material do universo a partir das equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

onde Λ é a constante cosmológica, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, G é a constante da gravitação universal, $T_{\mu\nu}$ é o tensor Energia-Momento e $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein definido por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (1.8)$$

no qual $R_{\mu\nu}$ é o tensor curvatura de Ricci e R é o escalar de Ricci. Tal que, as equações de campo de Einstein também podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

É válido notar que as equações de campo de Einstein são equações tensoriais simétricas.

A importância desta equação se encontra no fato de que a mesma permite relacionar a curvatura, a geometria do espaço-tempo, ao conteúdo material presente no mesmo. Assim, a parte à esquerda da equação (1.9) se relaciona à curvatura do espaço-tempo como definido por sua métrica e a parte à direita é referente a toda informação energética e material contida no universo (WEINBERG, 2008).

Notemos que o tensor de Ricci é dependente da métrica pela relação abaixo

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta, \quad (1.10)$$

em que

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} [\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}] \quad (1.11)$$

é o símbolo de Christoffel de segundo tipo. Note que nas equações (1.10) e (1.11) usamos a notação de Einstein.

Assim, calculando os símbolos de Christoffel de segundo tipo não nulos para a métrica FLRW, encontramos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{c^2} \frac{1}{(1-\kappa r^2)}, \\
\Gamma_{21}^0 &= \frac{a\dot{a}}{c^2} r^2, \\
\Gamma_{33}^0 &= \frac{a\dot{a}}{c^2} r^2 \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{r\kappa}{1-\kappa r^2} \\
\Gamma_{22}^1 &= -r(1-\kappa r^2), \\
\Gamma_{33}^1 &= -(1-\kappa r^2)r \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta, \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a},
\end{aligned} \tag{1.12}$$

onde \dot{a} representa a derivada em relação ao tempo. Observemos também que os símbolos de Christoffel de segundo tipo são simétricos acerca de seus índices inferiores, i.e., $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$. Estes resultados permitem a obtenção dos termos do tensor de Ricci não nulos

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{11} &= \frac{1}{c^2(1-\kappa r^2)} (a\dot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa c^2), \\
R_{22} &= \frac{r^2}{c^2} (a\dot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa c^2), & R_{33} &= \frac{r^2 \sin^2 \theta}{c^2} (a\dot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa c^2).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Por sua vez, o escalar de Ricci é definido como o traço do tensor curvatura de Ricci pela contração de índices, i.e.,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{1.14}$$

tal que o escalar de Ricci será

$$R = \frac{6}{c^2 a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + \kappa c^2). \tag{1.15}$$

1.3.1 Tensor Energia-Momento

Para o tensor energia-momento, que descreve o conteúdo material do universo, utiliza-se um modelo de forma que todo o conteúdo do universo seja descrito tal qual um fluido perfeito, definido para cada ponto por uma pressão P e uma densidade ρ . Note que se um fluido isotrópico num certo referencial gera uma métrica que também é simétrica em outro referencial, estes referenciais se coincidirão, tal que o fluido estará em repouso nas coordenadas comóveis (CARROLL, 2019). Deste modo, o vetor quadri-velocidade, em seu referencial próprio, será

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (1.16)$$

onde definimos a quadri-velocidade como sendo a derivada da posição x^μ de um elemento de volume do fluido em função do tempo próprio η

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\eta}. \quad (1.17)$$

A quadri-velocidade, também, deve satisfazer a relação

$$u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -c^2. \quad (1.18)$$

Assim, o tensor Energia-Momento para um fluido perfeito é

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (1.19)$$

que satisfaz a equação do movimento (WALD, 2010)

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (1.20)$$

Por sua vez, no referencial da métrica FLRW (1.2), a forma matricial do tensor Energia-Momento é

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^4 \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{a^2}{1-\kappa r^2} \right) P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 r^2) P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2 r^2 \sin^2 \theta) P \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

ou então, para um índice levantando, temos

$$T^\mu_\nu = \text{diag} \left(-c^2 \rho g_{00}, P g_{ii} \right), \quad (1.22)$$

onde o índice i varia de 1 a 3.

Observemos que dada esta definição, o traço é dado por

$$T = T^\mu_\mu = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -c^2 \rho + 3P. \quad (1.23)$$

É interessante, antes de aplicar estes valores nas equações de campo de Einstein, que consideremos a componente 0 da equação de movimento (1.20):

$$\begin{aligned}\nabla^\mu T_{\mu 0} &= 0 \\ &= \partial_\mu T_{\mu 0} + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_0^\alpha - \Gamma_{\mu 0}^\alpha T_\alpha^\mu \\ &= -\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right),\end{aligned}\tag{1.24}$$

uma vez que num universo homogêneo e isotrópico, ρ e P devem ser funções apenas da coordenada temporal t .

Portanto, este resultado equivale à conservação de massa-energia

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0.\tag{1.25}$$

1.4 As equações de Friedmann

Utilizando os resultados obtidos na seção 1.3 nas equações de campo de Einstein (1.7), encontramos para $\mu\nu = 00$ a equação

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \frac{\kappa c^2}{a^2} - \Lambda c^2 = 8\pi G \rho\tag{1.26}$$

e para as componentes espaciais, i.e., $\mu\nu = 11 = 22 = 33$, temos

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa c^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G^2}{c^2} P.\tag{1.27}$$

Por fim, reorganizando as equações (1.26) e (1.27), encontramos às equações de Friedmann em suas formas mais usuais

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa c^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho\tag{1.28}$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3},\tag{1.29}$$

que governam a expansão do universo. Vale notar que a equação (1.28) é, usualmente, denominada como a *primeira equação de Friedmann*, ou também, por alguns autores como a equação fundamental de Friedmann (WEINBERG, 2008). Ademais, a equação (1.29) é chamada de *segunda equação de Friedmann*, ou também, de equação da aceleração de Friedmann. É relevante observarmos que a equação (1.29), não pode ser considerada uma equação independente, dado que uma outra maneira de obtê-la é a partir da manipulação da primeira equação de Friedmann e da equação da conservação massa-energia.

Em razão das equações (1.28) e (1.29) consideradas acima, podemos definir o parâmetro (ou a função) de Hubble como sendo

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a},\tag{1.30}$$

o qual indica a taxa de expansão do universo em função do tempo. Tal que a constante de Hubble é o resultado do parâmetro Hubble (1.30) no tempo presente t_0 , i.e., ela equivale a $H(t_0) = H_0$.

Assim, com a definição do parâmetro de Hubble, as equações (1.28) e (1.29) podem ser reescritas como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\kappa c^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.31)$$

e

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (1.32)$$

Vale notar que no sistema internacional (SI), a constante de Hubble tem unidade de s^{-1} , mas uma outra unidade muito usada é a $km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$. Entretanto, H_0 também pode ser descrito por um fator adimensional h

$$H_0 = 100h\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}. \quad (1.33)$$

Uma outra informação importante acerca desta quantidade é o fato da mesma não ter um valor exato. Este parâmetro é encontrado a partir de métodos indiretos – em especial, podemos falar do uso das cefeidas para o cálculo do *redshift* de galáxias distantes e também do uso do espectro de potência da radiação cósmica de fundo (CMB), contudo, existe uma discrepância entre os resultados encontrados para os diferentes métodos experimentais, tal que este se caracteriza como um dos principais problemas da cosmologia e astrofísica atual, sendo denominado de *tensão de H_0* ³. Este problema ocorre pois, com a evolução da aparelhagem experimental, a barra de erro da constante de Hubble foi bastante reduzida, porém, ao mesmo tempo, observamos que os valores esperados não convergem num único valor, mas sim para dois valores distintos cujas incertezas não se sobrepõem, o que aponta algum erro ou incongruência na Cosmologia Moderna, podendo este ser nos experimentos ou então, um erro na própria teoria cosmológica.

Porém, considerando o valor obtido pela Planck Collaboration (AGHANIM et al., 2018), consideraremos que a constante de Hubble é igual a $67.4 \pm 0.5\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$.

1.5 O *redshift* e o fator de escala

Os primeiros resultados experimentais que vieram a indicar que o universo se encontrava em expansão foram observados por Hubble (HUBBLE, 1929), quando constatou-se que galáxias distantes estão se afastando da Terra com uma velocidade proporcional à distância das mesmas até nós (observadores). Esse resultado passou a ser denominado lei de Hubble-Lemaître sendo dado por

$$v = H_0 d, \quad (1.34)$$

³ Do inglês, H_0 *tension*.

onde v será a velocidade de recessão, H_0 é a constante de Hubble definida anteriormente e d é a distância própria ⁴ entre o observador e a galáxia no universo que está se expandindo (HOGG, 1999).

Esta velocidade é definida pelo *redshift* (*desvio para o vermelho* em português), que é um deslocamento dos comprimentos de onda em direção a região do vermelho no espectro eletromagnético. Assim, delimitamos que

$$z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1, \quad (1.35)$$

ou então

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e}, \quad (1.36)$$

tal que λ_e e λ_o são, respectivamente, o comprimento de onda emitido e o comprimento observado e $\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda_e$ equivale a diferença entre estes comprimentos de onda. Dada essa definição, pode-se notar que não há uma diferença intrínseca entre o *redshift* e a velocidade do *redshift* ($v_{red} = zc$), uma vez que existe uma clara linearidade entre estas quantidades. Contudo, partindo da relação entre estas grandezas encontramos que

$$z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \approx \beta = \frac{v}{c}. \quad (1.37)$$

O que é relevante pois mostra a possibilidade de retornar a uma definição clássica para um caso fora dos limites relativísticos (i.e. $v \ll c$), para a velocidade de *redshift*, como o visto pelo efeito Doppler clássico (SARTORI, 1996).

É importante notar que o *redshift* é caracterizado pelo aumento no comprimento de onda observado em relação ao emitido por um certo corpo celeste. Isto acontece por causa de um afastamento entre a fonte emissora e o observador, de modo a ocorrer um desvio em direção ao vermelho no espectro eletromagnético. Analogamente, existe um *blueshift* que pode ser definido de forma semelhante, porém este efeito ocorre pela aproximação do observador e da fonte da emissão. Assim, o inverso do efeito do *redshift* acontecerá, tal que o feixe de luz terá seu comprimento de onda observado sendo menor do que o emitido, gerando um desvio para a região do azul. Se o afastamento e a aproximação entre dois corpos celestes ocorresse devido somente à velocidade peculiar desses corpos, não esperaríamos, a princípio, observar uma grande diferença entre o número de objetos se afastando e o número de objetos se aproximando, por exemplo. No entanto, observamos um número muito maior de objetos se afastando. Quando levamos em conta a velocidade peculiar dos objetos, vemos que o *redshift*, ou seja, o afastamento “sistemático” entre os objetos deve-se à expansão do universo em si e, portanto, é um efeito cosmológico.

⁴ A distância própria pode ser definida como a posição de um objeto num tempo cosmológico específico que pode mudar com o passar do tempo dado a expansão do universo.

A observação do *redshift* cosmológico trouxe consigo consequências que podem ser derivadas das equações da relatividade geral para um universo homogêneo e isotrópico, tal como a métrica FLRW vista anteriormente.

Consideremos, a partir da equação (1.2), a luz emitida por um objeto que se propaga na direção radial de forma que $d\theta = d\phi = 0$. Com isso, podemos derivar este efeito dado que uma onda de luz segue $ds^2 = 0$, assim

$$0 = -c^2 dt^2 + \frac{a^2 dr^2}{1 - \kappa r^2}. \quad (1.38)$$

Uma frente de onda emitida em t_e em $r = 0$ (escolhendo a fonte emissora na origem) se propaga uma distância R sendo observada em t_0 . Então integrando os dois lados nestes intervalos encontramos que:

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (1.39)$$

Geralmente, o comprimento de onda não é equivalente em dois tempos e posições diferentes visto as diferentes características causadas pela métrica. Assim, o comprimento de onda quando a onda foi emitida pode ser caracterizado por λ_e . E o pulso de luz conseguinte ocorrerá num tempo

$$t = t_e + \frac{\lambda_e}{c}. \quad (1.40)$$

Logo, o observador verá o próximo feixe de luz caracterizado por λ_0 , num tempo

$$t = t_0 + \frac{\lambda_0}{c}. \quad (1.41)$$

Notemos que as posições da emissão e da observação permanecem as mesmas, então:

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a} = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (1.42)$$

Comparando as equações (1.39) e (1.42), vemos que os termos a direita são iguais, e estas equações são equivalentes, tal que:

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a} = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a}. \quad (1.43)$$

Manipulando o lado direito desta equação, obtemos que:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} - \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a} \\
&= \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a} + \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a} - \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a} \\
&= \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a} + \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a} - \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a} \\
&= \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a} - \int_{t_0}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a} - \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a} \\
&= \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a} - \left(\int_{t_0}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a} + \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a} \right) \\
&= \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a} - \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a}.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Em outros termos

$$\int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} \frac{dt}{a} = \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} \frac{dt}{a}. \tag{1.45}$$

Para pequenos intervalos de tempo, como um período de oscilação da onda, o fator de escala $a(t)$ é aproximadamente constante. Contudo, teremos que no momento de emissão da luz t_e , $a = a_e$, enquanto que para o observador $a = a_0$. Assim, a solução de (1.45) será:

$$\frac{t_0 + \lambda_0/c}{a_0} - \frac{t_0}{a_0} = \frac{t_e + \lambda_e/c}{a_e} - \frac{t_e}{a_e}. \tag{1.46}$$

Podemos reescrever como:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_e}. \tag{1.47}$$

E utilizando a expressão para o *redshift* como definido na equação (1.35), então

$$1 + z = \frac{a_0}{a_e} \tag{1.48}$$

Desta expressão, observamos que se $a(t)$ aumenta, ocorrerá um *redshift* equivalente ao aumento do comprimento de onda dado por um fator de $z + 1$. E para o caso em que $a(t)$ diminui, o efeito será um *blueshift* com z negativo (WEINBERG, 2008).

Portanto, o *redshift* é inversamente proporcional ao fator de escala de uma certa época.

1.6 Os parâmetros cosmológicos

Até o momento, a equação de Friedmann (1.31), utiliza ρ como a soma das densidades de todos os fluidos perfeitos que compõem o conteúdo energético e material do universo, i.e., $\rho = \sum_i \rho_i$, no qual cada índice está relacionado a uma das quantidades

presentes no universo (e.g., neutrinos, bárions, fótons, matéria escura, etc). Desta forma, a equação (1.31), pode ser reescrita como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{\kappa c^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (1.49)$$

É vantajoso que todas as densidades de energia se encontrem definidas de maneira análoga. Para isso, definimos os parâmetros de densidade Ω , tal que

$$\Omega_{\kappa,t} \equiv \frac{-\kappa c^2}{(aH)^2} \quad (1.50)$$

$$\Omega_{i,t} \equiv \frac{\rho_{i,t}}{\rho_{cr,t}}, \quad (1.51)$$

onde i representa os diferentes componentes do universo – e. g., matéria escura fria (c), bárions (b), fótons (γ), neutrinos (ν), energia escura (Λ) (enquanto relacionada a constante cosmológica) –, t indica que o parâmetro de densidade é função de um tempo qualquer t , κ é função da curvatura do espaço e a é o fator de escala.

Além disso, $\rho_{cr,t}$ é definida como a densidade necessária para que o universo seja plano, sendo obtida a partir da equação (1.31), quando consideramos um universo plano ($\kappa = 0$) e sem constante cosmológica ($\Lambda = 0$), ou seja

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (1.52)$$

a qual, rearranjando, retorna

$$\rho_{cr,t} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.53)$$

que é a densidade crítica do universo, num tempo arbitrário.

Assim, para qualquer tempo arbitrário t a relação

$$\sum_i \Omega_{i,t} + \Omega_{\kappa,t} = 1 \quad (1.54)$$

deve ser satisfeita (WEINBERG, 2008).

Considerando os principais elementos energéticos e materiais, ou seja, a matéria não-relativística m ($\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$), radiação dos fótons γ e a energia escura (quando Constante Cosmológica) Λ , então os parâmetros de densidade serão:

$$\begin{aligned} \Omega_{m,t} &= \frac{\rho_{m,t}}{\rho_{cr,t}} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m, \\ \Omega_{\gamma,t} &= \frac{\rho_{\gamma,t}}{\rho_{cr,t}} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\gamma, \\ \Omega_{\Lambda,t} &= \frac{\rho_{\Lambda,t}}{\rho_{cr,t}} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{3H^2}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

No tempo presente t_0 , temos que o sub-índice t pode ser omitido e $H \rightarrow H_0$, seguindo a notação em (DODELSON; SCHMIDT, 2020). Assim, os parâmetros acima podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{\rho_m}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_m, \\ \Omega_\gamma &= \frac{\rho_\gamma}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_\gamma, \\ \Omega_\Lambda &= \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{3H_0^2}, \\ \Omega_{\kappa,t} &= \frac{-\kappa c^2}{(a H_0)^2}\end{aligned}\tag{1.56}$$

E a equação (1.54), pode ser reescrita como

$$\Omega_{tot} = \sum_i \Omega_i + \Omega_k = \Omega_m + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa = 1.\tag{1.57}$$

Visto as equações (1.55) e (1.56), é proveitoso encontrar uma equação que relacione ρ_i e $\Omega_{i,0}$.

Até agora, usamos que os elementos constituintes do universo comportam-se como fluidos perfeitos que não interagem entre si. Se isto é verdade, então estes elementos devem satisfazer a equação (1.25)

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0,$$

que foi vista na seção 1.3.

Assumindo que isso é verdade para os elementos considerados, então os mesmos podem ser descritos por uma equação de estado tal que

$$P = w\rho c^2,\tag{1.58}$$

onde w é caracterizado por um número adimensional (USMANI et al., 2008) independente do tempo, que para valores de w negativo, permite a caracterização da inflação cósmica e da expansão acelerada do universo. Substituindo essa equação em (1.25) encontramos

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a}.\tag{1.59}$$

O resultado desta equação é encontrado ao integrá-la, de modo que obtemos

$$\dot{\rho} \propto a^{-3(1+w)}.\tag{1.60}$$

Agora, considerando uma constante de proporcionalidade $\rho_{i,0}$ onde i indica o elemento, então

$$\rho_i(a) = \rho_{i,0}(t) a^{-3(1+w_i)}.\tag{1.61}$$

Ora, fica claro da equação (1.61) que existe uma dependência da densidade de energia com o fator de escala. E sejam $w_m = 0$, $w_r = 1/3$ e $w_\Lambda = -1$ que equivalem a constante w para a matéria, a radiação e a energia escura (Constante Cosmológica), respectivamente, então

$$\rho_m(a) = \rho_0 a^{-3}, \quad \rho_r(a) = \rho_0 a^{-4}, \quad \rho_\Lambda(a) = \rho_\Lambda. \quad (1.62)$$

2 Distâncias cosmológicas

Uma vez que é conhecida a relação entre as densidades dos componentes e o fator de escala (1.61), é conveniente reescrever essas quantidades em função dos parâmetros de densidade adimensionais para um tempo arbitrário t que, como vimos, possui uma relação de um para um com o fato de escala $a(t)$, ou seja,

$$\rho_i(a) = \Omega_{i,a} \rho_{cr,a}. \quad (2.1)$$

E escrevendo a densidade crítica em termos do tempo presente ($a = a_0$, ou $z = 0$), então $\rho_{cr,a_0} = \rho_{cr,0} = \rho_{cr}$ e $\Omega_{i,a_0} = \Omega_{i,0} = \Omega_i$,

$$\rho_i(a) = \Omega_i \rho_{cr} a^{-3(1+w_i)}. \quad (2.2)$$

Finalmente, a densidade de um dado componente em função do *redshift* (z) é

$$\rho_i(z) = \Omega_i \rho_{cr} (1+z)^{3(1+w_i)}. \quad (2.3)$$

Usando esse resultado na equação de Friedmann como descrita em (1.49), têm-se

$$H^2(z) = H_0^2 \left(\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\kappa (1+z)^2 + \Omega_\Lambda \right), \quad (2.4)$$

que podemos reescrever como

$$H(z) = H_0 E(z), \quad (2.5)$$

em que

$$E(z) \equiv \sqrt{\Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\kappa (1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (2.6)$$

é a função de Hubble normalizada (PEEBLES; PEEBLES, 1993). Observe que a notação a ser usada nas seções a seguir, utiliza a terminologia em (HOGG, 1999) e (LIMA, 2021).

2.1 Distância comóvel longitudinal

Define-se a distância comóvel longitudinal ¹ como a distância percorrida por um fóton numa geodésica nula no espaço-tempo, i.e., $ds^2 = 0$. Seja uma trajetória radial, tal qual θ e ϕ são fixos, então a distância percorrida por fótons emitidos por uma galáxia, por exemplo, até um observador será calculada a partir da métrica

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2, \quad (2.7)$$

¹ Do inglês *line-of-sight comoving distance*.

onde

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (2.8)$$

A distância comóvel entre dois objetos em diferentes *redshifts* z_1 e z_2 , onde $z_1 < z_2$, equivale a integral de (2.7), ou seja

$$D_C = \int d\chi = c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.9)$$

Escrevendo dt em função do fator de escala e, em seguida, do redshift, encontra-se

$$\begin{aligned} D_C(z_1, z_2) &= c \int_{a(z_2)}^{a(z_1)} \frac{da}{a^2 H(a)} \\ &= \frac{c}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{E(z)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definindo a distância de Hubble como

$$D_H \equiv \frac{c}{H_0}, \quad (2.11)$$

então a distância comóvel longitudinal é dada por

$$D_C = D_H \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{E(z)}. \quad (2.12)$$

2.2 Distância comóvel transversal

A distância comóvel transversal ² entre dois eventos no mesmo *redshift* separados por um ângulo $\delta\theta$ é

$$r = f_\kappa[\chi] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}\chi) & \text{se } \kappa > 0 \\ \chi & \text{se } \kappa = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}\chi) & \text{se } \kappa < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

uma vez que (1.2) pode ser reescrita, em termos de χ , como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(d\chi^2 + f_\kappa[\chi]^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right). \quad (2.14)$$

Então, a distância comóvel transversal em um *redshift* z é

$$D_M = \begin{cases} \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_\kappa}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_\kappa} D_C/D_H\right) & \text{para } \Omega_\kappa > 0 \\ D_C & \text{para } \Omega_\kappa = 0 \\ \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_\kappa|}} \sin\left(\sqrt{|\Omega_\kappa|} D_C/D_H\right) & \text{para } \Omega_\kappa < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

No caso $\Omega_\Lambda = 0$, i.e., para um universo sem energia escura, a solução analítica para a equação acima é

$$D_M = D_H \frac{2 \left[2 - \Omega_M(1-z) - (2 - \Omega_M) \sqrt{1 + \Omega_M z} \right]}{\Omega_M^2(1+z)}. \quad (2.16)$$

² Do inglês, *transverse comoving distance*.

2.3 Distância de diâmetro angular

A distância de diâmetro angular ³é definida como a razão

$$D_A = \frac{l}{\theta} \quad (2.17)$$

onde l é o diâmetro próprio do objeto e θ é o tamanho angular do objeto. A relação entre o diâmetro próprio e o diâmetro angular é igual a parte angular de (2.14)

$$l = \frac{f_\kappa[\chi(z)]\theta}{1+z}, \quad (2.18)$$

em que z é o redshift do objeto que está sendo medido por um observador em $z = 0$.

Também podemos calcular a distância diâmetro angular entre dois objetos que encontram-se em z_1 e z_2 , respectivamente, em que $z_2 > z_1$. Neste caso a relação (2.24) pode ser escrita como

$$l = a(z_2)f_\kappa[\chi(z_2) - \chi(z_1)]\theta, \quad (2.19)$$

ou seja,

$$D_A(z_1, z_2) = \frac{f_\kappa[D_C(z_1, z_2)]}{1+z_2}. \quad (2.20)$$

Entretanto, em conformidade com a equação (2.13), $f_\kappa[\chi]$ assume uma forma distinta para diferentes valores de κ , logo, pode-se analisar esta função para cada um dos casos:

(i) Para $\kappa > 0$

$$\begin{aligned} f_\kappa[D_C(z_1, z_2)] &= f_\kappa[\chi_2 - \chi_1] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\sqrt{\kappa}(\chi_2 - \chi_1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}} [\sin(\sqrt{\kappa}\chi_2) \cos(\sqrt{\kappa}\chi_1) - \sin(\sqrt{\kappa}\chi_1) \cos(\sqrt{\kappa}\chi_2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}} [\sin(\sqrt{\kappa}\chi_2) \sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{\kappa}\chi_1)} \\ &\quad - \sin(\sqrt{\kappa}\chi_1) \sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{\kappa}\chi_2)}] \\ &= f_\kappa[\chi_2] \sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{\kappa}\chi_1)} - f_\kappa[\chi_1] \sqrt{1 - \sin^2(\sqrt{\kappa}\chi_2)} \\ &= f_\kappa[\chi_2] \sqrt{1 - \kappa f_\kappa^2[\chi_1]} - f_\kappa[\chi_1] \sqrt{1 - \kappa f_\kappa^2[\chi_2]}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

(ii) Se $\kappa = 0$

$$\begin{aligned} f_\kappa[D_C(z_1, z_2)] &= f_\kappa(\chi_2 - \chi_1) \\ &= f_\kappa[\chi_2] - f_\kappa[\chi_1]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

³ Em inglês, *angular diameter distance*.

(iii) Para $\kappa < 0$, têm-se

$$\begin{aligned}
f_\kappa[D_C(z_1, z_2)] &= \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(\sqrt{-\kappa}(\chi_2 - \chi_1)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} [\sinh(\sqrt{-\kappa}\chi_2) \cosh(\sqrt{-\kappa}\chi_1) - \sinh(\sqrt{-\kappa}\chi_1) \cosh(\sqrt{-\kappa}\chi_2)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} [\sinh(\sqrt{-\kappa}\chi_2) \sqrt{1 + \sinh^2(\sqrt{-\kappa}\chi_1)} \\
&\quad - \sinh(\sqrt{-\kappa}\chi_1) \sqrt{1 + \sinh^2(\sqrt{-\kappa}\chi_2)}] \\
&= f_\kappa[\chi_2] \sqrt{1 + \sinh^2(\sqrt{-\kappa}\chi_1)} - f_\kappa[\chi_1] \sqrt{1 + \sinh^2(\sqrt{-\kappa}\chi_2)} \\
&= f_\kappa[\chi_2] \sqrt{1 - \kappa f_\kappa^2[\chi_1]} - f_\kappa[\chi_1] \sqrt{1 - \kappa f_\kappa^2[\chi_2]}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

que é igual a equação (2.21).

Desta forma, a distância de diâmetro angular entre dois objetos em diferentes *redshifts*, tal que $z_2 > z_1$, é

$$\begin{aligned}
D_A(z_1, z_2) &= \frac{1}{(1 + z_2)} \left[D_M(z_2) \sqrt{1 + \Omega_\kappa \left(\frac{D_M(z_1)}{D_H} \right)^2} \right. \\
&\quad \left. - D_M(z_1) \sqrt{1 + \Omega_\kappa \left(\frac{D_M(z_2)}{D_H} \right)^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

No caso em que $z_1 = 0$, esta expressão se reduz a

$$D_A = \frac{D_M}{1 + z}. \tag{2.25}$$

E se, $\Omega_\kappa = 0$, a distância diâmetro angular será

$$D_A(z_1, z_2) = D_A(z_2) - \frac{(1 + z_1)}{(1 + z_2)} D_A(z_1) \tag{2.26}$$

que resulta $D_A(z_1, z_2) \neq D_A(z_2) - D_A(z_1)$, mesmo para um espaço euclidiano ($\kappa = 0$).

2.4 Distância luminosidade

Uma outra maneira de se encontrar as distâncias astronômicas é a partir da luminosidade. Desta forma, a distância luminosidade ⁴ pode ser definida como

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}} \tag{2.27}$$

em função do fluxo S de uma fonte com uma luminosidade L conhecida.

⁴ Em inglês, *luminosity distance*.

Assim a distância luminosidade D_L num espaço euclidiano ($\kappa = 0$) em função da distância comóvel transversal é

$$D_L = (1 + z)D_M, \quad (2.28)$$

ou então, em função da distância de diâmetro angular

$$D_L = (1 + z)^2 D_A. \quad (2.29)$$

Ora, o resultado acima mostra que a razão entre a distância diâmetro angular e a distância luminosidade é um fator $(1 + z)^{-2}$. Assim, a distância de luminosidade entre dois objetos em diferentes *redshifts*, partindo da equação (2.24), é

$$D_L(z_1, z_2) = (1 + z_2) \left[D_M(z_2) \sqrt{1 + \Omega_\kappa \left(\frac{D_M(z_1)}{D_H} \right)^2} - D_M(z_1) \sqrt{1 + \Omega_\kappa \left(\frac{D_M(z_2)}{D_H} \right)^2} \right] \quad (2.30)$$

onde $z_2 > z_1$.

Esta grandeza também pode ser escrita em função da magnitude absoluta M e a magnitude aparente m de um objeto astronômico dada por

$$D_L = 10^{(m-M+5)/5} \quad (2.31)$$

onde D_L é medido em parsecs.

Feita a distinção das distâncias cosmológicas, podemos então observar o comportamento delas dado o mesmo conjunto de parâmetros cosmológicos num universo Euclidiano ($\kappa = 0$). Desta forma, na figura 1 apresentamos a distância comóvel (linha preta), a distância diâmetro-angular (linha tracejada, vermelha) e a distância luminosidade (linha verde). Observamos, então, que para baixos *redshifts*, todas as distâncias cosmológicas apresentadas nessa sessão tendem à distância comóvel χ . Já para *redshifts* maiores, a distância de diâmetro angular diminui quando comparada a χ e a distância luminosidade aumenta linearmente.

Vale notar que todas essas distâncias serão maiores em um universo que contém energia escura em oposição de um sem. Isto ocorre pois a presença da energia escura gera uma expansão acelerada (DODELSON; SCHMIDT, 2020).

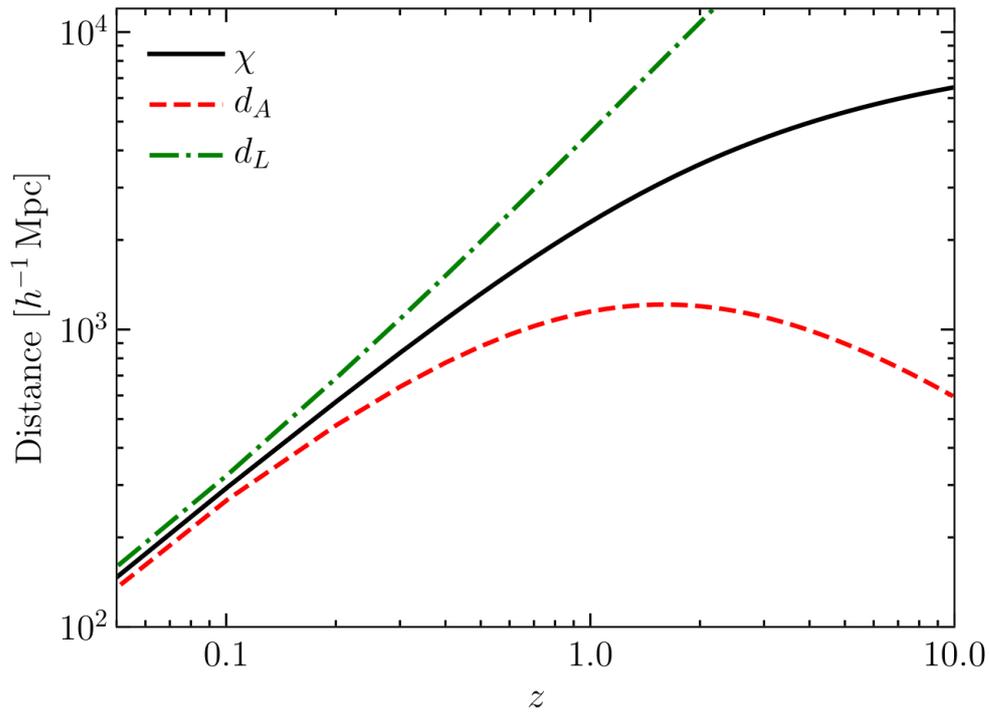


Figura 1 – Distância comóvel χ (linha preta), distância de diâmetro angular d_A (linha vermelha) e distância luminosidade d_L (linha verde), respectivamente, em função do redshift. Os parâmetros cosmológicos usados para este gráfico são: $\Omega_\Lambda = 0.6894$ e $\Omega_m = 0.3106$, em concordância com os dados obtidos pelos dados da Planck Collaboration para um universo Euclidiano. Retirado de (DODELSON; SCHMIDT, 2020).

3 Soluções para diferentes modelos de universo

Neste capítulo, apresentaremos as soluções para o fator de escala $a(t)$ e a distância comóvel para diferentes modelos cosmológicos, ou seja, considerando diferentes cenários para a composição e curvatura do universo. Além disso, faremos uma análise do comportamento obtido para estes modelos de universo.

Seguiremos, em sua maioria, as notações contidas em (RYDEN, 2017). De maneira que, usando a equação (1.61), podemos reescrever a equação (1.31) como

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_{i,0} a^{-1-3w} - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}, \quad (3.1)$$

onde R_0 equivale ao raio da curvatura, tal que a quantidade κ/R_0 estará relacionada a curvatura do espaço.

Para universos com múltiplas componentes, como o modelo Λ CDM, não existe uma solução analítica para a equação (3.1), entretanto, outros universos mais simples, e.g, universos compostos por um componente único, nos ajudam a compreender melhor a física por trás do universo em expansão.

3.1 O universo vazio

Um universo razoavelmente simples de se estudar é um universo vazio, i.e., sem a presença de nenhum componente de matéria-energia. Desse modo, a equação de Friedmann (3.1) se torna

$$\dot{a}^2 = -\frac{\kappa_c^2}{R_0^2}. \quad (3.2)$$

Este tipo de universo tem duas soluções diferentes, de maneira que podemos separá-las tal que, a primeira delas é obtida para $\kappa = 0$ e a segunda para $\kappa = -1$, uma vez que que universos vazios com $\kappa = 1$ não são permitidos por retornarem um valor imaginário para o fator de escala a .

Assim, para $\kappa = 0$, teremos

$$\dot{a} = 0. \quad (3.3)$$

Neste caso, o universo segue a métrica e a geometria do espaço de Minkowski, no qual todas as transformações da relatividade especial são válidas.

Para o caso em que $\kappa = -1$, temos:

$$\dot{a}^2 = \frac{c^2}{R_0^2}, \quad (3.4)$$

ou seja, um universo com curvatura negativa deve estar expandindo ou contraindo com o fator

$$\dot{a} = \pm \frac{c}{R_0}. \quad (3.5)$$

Considerando um universo expandindo, i.e., $\dot{a} > 0$, teremos:

$$\dot{a}(t) = \frac{c}{R_0}. \quad (3.6)$$

Integrando a equação acima, obtemos:

$$\int_0^t da = \int_0^t \frac{c}{R_0} dt, \quad (3.7)$$

$$\therefore a(t) = \frac{c}{R_0} t. \quad (3.8)$$

Definindo

$$t_0 = \frac{R_0}{c}, \quad (3.9)$$

então o fator de escala será

$$a(t) = \frac{t}{t_0}. \quad (3.10)$$

Neste caso, o fator de escala num universo expandindo cresce linearmente. Assim, temos:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{R_0}{c}. \quad (3.11)$$

Para calcular a distância própria, fazemos $a(t_0) = 1$ na equação (1.48) e consideramos o valor de a obtido acima para um fóton detectado em t_0 e emitido em t_e , tal que,

$$1 + z = \frac{1}{a(t_e)} = \frac{t_0}{t_e}. \quad (3.12)$$

Assim, rearranjando esta equação temos

$$t_e = \frac{t_0}{1 + z} = \frac{H_0^{-1}}{1 + z}. \quad (3.13)$$

A distância própria do observador até o fonte emissora, em coordenadas esféricas, é dada por

$$D_C(t_0) = a(t_0) \int_0^r dr = r, \quad (3.14)$$

e, para uma luz detectada em t_0 e emitida em t_e :

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r. \quad (3.15)$$

Portanto, a distância comóvel será dada por:

$$D_C(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{t_0 dt}{t} = t_0 c \ln \frac{t_0}{t_e}. \quad (3.16)$$

Reescrevendo este resultado em termos do *redshift*, encontramos

$$D_C(t_0) = \frac{c}{H_0} \ln(1+z) \quad (3.17)$$

e, no momento de emissão, a distância comóvel era

$$D_C(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{\ln(1+z)}{1+z}. \quad (3.18)$$

3.2 Universos com apenas um componente

Um outro modo de simplificar a equação (3.1), é definindo que a curvatura seja nula, ou seja, $\kappa = 0$ e impondo que o universo será composto por apenas um componente, i.e., um único w para cada situação. Então, considerando um universo plano e contendo apenas um componente, temos que a equação de Friedmann será

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} a^{-(1+3w)}. \quad (3.19)$$

Supomos agora que o fator de escala se relaciona com o tempo a partir de uma lei de potência de forma

$$a \propto t^q, \quad (3.20)$$

dessa maneira, o termo a esquerda será proporcional a

$$\dot{a}^2 \propto t^{2q-2} \quad (3.21)$$

e o lado a direita é proporcional a

$$a \propto t^{-(1+3w)q}, \quad (3.22)$$

tal que encontramos a seguinte relação

$$q = \frac{2}{3+3w}, \quad (3.23)$$

válida para $w \neq -1$. Desta construção, encontramos que o fator de escala para um universo Euclidiano e composto por um único elemento tem forma de

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3+3w)}. \quad (3.24)$$

Como a densidade também é relacionada ao fator de escala pela equação da conservação da energia, como visto no capítulo 1, então teremos

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (3.25)$$

e em função do tempo teremos

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}. \quad (3.26)$$

Calculamos agora a derivada no tempo para este fator de escala

$$\dot{a}^2 = \frac{4}{9} \frac{t_0^{-2}}{(1+w)^2} a^{-(1+3w)} \quad (3.27)$$

e comparando este resultado com a equação (3.19), encontramos

$$\frac{4}{9} \frac{t_0^{-2}}{(1+w)^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3}. \quad (3.28)$$

Rearranjando esta expressão, obtemos que a idade deste universo t_0 , é relacionada a densidade presente no mesmo por

$$t_0 = \frac{1}{1+w} \left(\frac{1}{6\pi G\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (3.29)$$

O que, como consequência, retorna uma constante de Hubble para este universo como sendo

$$H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+w)} t_0^{-1}. \quad (3.30)$$

Além disso, em termos do tempo de Hubble ¹, t_0 pode ser reescrita como

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{H_0}. \quad (3.31)$$

À vista disso, podemos interpretar esta equação tal que para um universo espacialmente plano, quando $w > -1/3$, o universo será mais jovem que o tempo de Hubble e se $w < -1/3$ teremos um universo mais velho que o tempo de Hubble.

Agora, para encontrarmos a distância comóvel para um universo com estas características, precisamos determinar o tempo de emissão t_e para um feixe de luz que foi observado em t_0 . Sendo assim, considerando a relação entre o *redshift* e o fator de escala, obtemos que

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \left(\frac{t_0}{t_e} \right)^{2/(3+3w)}, \quad (3.32)$$

tal que o tempo de emissão será

$$t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{3(1+w)/2}} = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{(1+z)^{3(1+w)/2}} \frac{1}{H_0}. \quad (3.33)$$

Sendo conhecido o tempo de emissão, o cálculo da distância comóvel será dado por

$$D_C(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = ct_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{(1+3w)/(3+3w)} \right] \quad (3.34)$$

para $w \neq -1/3$. Ainda podemos reescrever este resultado em função de H_0 , de modo que a distância comóvel será

$$D_C(t_0) = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3w} \left[1 - (1+z)^{-(1+3w)/2} \right]. \quad (3.35)$$

¹ Do inglês: *Hubble time*.

Além disso, outra grandeza que pode ser definida é a distância de horizonte. Esta quantidade descreve a distância comóvel entre um feixe de luz de uma fonte emitido quando $t = 0$ e somente observado no tempo atual, i.e., $t = t_0$. Portanto, a distância de horizonte pode ser definida como a casca esférica que delimita a região do espaço a partir da qual não conseguimos observar nenhuma fonte, pois a luz emitida ainda não teve tempo o suficiente para nos alcançar. Deste modo, levando em consideração a métrica FLRW, temos que a distância de horizonte é

$$d_{\text{hor}}(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.36)$$

Assim, para todo valor de $w > -1/3$ temos uma distância de horizonte finita. E, numericamente, $D_C(t_0)$, no limite $z \rightarrow \infty$ equivale a

$$d_{\text{hor}}(t_0) = ct_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} = \frac{c}{H_0} \frac{2}{1+3w}. \quad (3.37)$$

Consequentemente, observadores em universos planos dominados por matéria e radiação conseguem observar apenas uma parte finita do volume do universo e esta parte do universo é chamada de universo observável.

3.2.1 Apenas matéria

Com os resultados obtidos na seção prévia, podemos analisar o comportamento de um universo plano composto unicamente por matéria tipo poeira, i.e., $w = 0$, também é conhecido como universo de Einstein–de Sitter.

Para este universo, sua idade será dada por

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}, \quad (3.38)$$

e sua distância de horizonte será

$$d_{\text{hor}}(t_0) = 3ct_0 = \frac{2c}{H_0}. \quad (3.39)$$

O fator de escala deste universo será equivalente a

$$a_m(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad (3.40)$$

e a distância comóvel associada ao mesmo é igual a

$$D_C(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} dt = 3ct_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3}\right] = \frac{2c}{H_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right]. \quad (3.41)$$

Comparando este resultado com a distância comóvel no momento da emissão, vemos que ela era menor por um fator de $1/(1+z)$, ou seja,

$$D_C(t_e) = \frac{2c}{H_0(1+z)} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right]. \quad (3.42)$$

Vale notar que por muitos anos este modelo de universo foi muito estudado, visto sua simplicidade (WEINBERG, 2008), e os indicativos de que o universo seria atualmente dominado por matéria.

3.2.2 Apenas radiação

Outro universo descrito por este modelo é aquele constituído apenas por radiação, i.e., $w = 1/3$. Este modelo de universo recebe atenção especial, pois, durante a fase inicial do nosso universo, a radiação era o componente dominante, tal que, este modelo consegue caracterizá-lo bem.

Assim, para este modelo de universo, sua idade será

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}. \quad (3.43)$$

Para este modelo, em específico, a distância de horizonte dele equivalerá à distância de Hubble

$$d_{\text{hor}}(t_0) = 2ct_0 = \frac{c}{H_0}. \quad (3.44)$$

E seu fator de escala é

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}. \quad (3.45)$$

Naturalmente, a distância comóvel num tempo t_0 equivale a

$$D_C(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2} dt = 2ct_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/2}\right] = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z}, \quad (3.46)$$

e no tempo de emissão t_e a distância comóvel é dada por

$$D_C(t_e) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{(1+z)^2}. \quad (3.47)$$

3.2.3 Apenas Λ

Um universo euclidiano constituído apenas pela energia escura, a partir da Constante Cosmológica Λ é descrito por

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3} a^2, \quad (3.48)$$

ou, em outras palavras, temos

$$\dot{a} = H_0 a \quad (3.49)$$

para H_0 dado por

$$H_0 = \left(\frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}\right)^{1/2}. \quad (3.50)$$

Portanto, a solução para a equação (3.49) para um universo em expansão, tem a forma de

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (3.51)$$

O que significa que um universo espacialmente plano e com somente Λ se expande exponencialmente. No caso em que Λ é gerado a partir da energia de vácuo, teremos a constante cosmológica se mantendo constante, pois, existe uma criação e aniquilação de pares virtuais de partículas e anti-partículas (RYDEN, 2017).

Também conhecido como universo de de Sitter, este modelo tem sua distância comóvel para o observador dada por

$$D_C(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} e^{H_0(t_0-t)} dt = \frac{c}{H_0} [e^{H_0(t_0-t_e)} - 1] = \frac{c}{H_0} z \quad (3.52)$$

e em termos do momento da emissão temos uma distância comóvel equivalente a

$$D_C(t_c) = \frac{c}{H_0} \frac{z}{1+z}. \quad (3.53)$$

Outra característica importante deste modelo é o fato de que este tem $D_C(t_0)$ linearmente proporcional a z e que este universo também tem uma distância de horizonte infinita.

3.3 Universos com múltiplos componentes

Até o momento, os universos que descrevemos são versões simplificadas nas quais consideramos universos com apenas um componente e com curvatura $\kappa = 0$. Entretanto, para estudarmos modelos mais complexos, precisamos considerar a equação de Friedmann para mais de uma componente.

Retornando a equação de Friedmann (1.31), podemos reescrevê-la como

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}, \quad (3.54)$$

tal como fizemos na seção inicial deste capítulo. Note que ρ é a contribuição da densidade de todos os componentes do universo. Além disso, podemos relacionar κ , R_0 , H_0 e Ω_0 (o parâmetro de densidade para o tempo presente) usando a equação

$$\frac{\kappa}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1). \quad (3.55)$$

De maneira que podemos reescrever a equação de Friedmann sem explicitar o termo de curvatura como

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{H_0^2}{a(t)^2} (\Omega_0 - 1). \quad (3.56)$$

Agora, dividindo por H_0^2 encontramos

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_{c,0}} + \frac{1 - \Omega_0}{a(t)^2}, \quad (3.57)$$

onde $\rho_{c,0}$ é dada pela equação (1.53) para $t = t_0$, i.e.,

$$\rho_{c,0} \equiv \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}.$$

Como nosso universo contém matéria (tanto bariônica quanto escura), radiação e a energia escura, podemos formular a equação (3.57) em termos do fator de escala, seguindo os valores obtidos no capítulo 1 para a evolução da densidade para os diferentes valores de w . Assim, considerando um universo com matéria ($w = 0$), radiação ($w = 1/3$) e constante cosmológica ($w = -1$) temos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}, \quad (3.58)$$

onde utilizamos que $\Omega_0 = \rho_0/\rho_{c,0}$. O modelo em concordância com os dados cosmológicos obtidos atualmente considera $\Omega_0 = 1$, tal que o mesmo é um espaço plano. Contudo, ainda é prudente que o termo de curvatura seja mantido, no caso do mesmo ser não nulo.

Lembrando que $H = \dot{a}/a$, multiplicando (3.58) por a^2 e tomando a raiz quadrada, obtemos

$$H_0^{-1} \dot{a} = \left[\frac{\Omega_{r,0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m,0}}{a} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_0) \right]^{1/2}. \quad (3.59)$$

Ao integrarmos esta equação, encontramos que o tempo cósmico como função do fator de escala é

$$\int_0^a \frac{da}{[\Omega_{r,0}/a^2 + \Omega_{m,0}/a + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + (1 - \Omega_0)]^{1/2}} = H_0 t. \quad (3.60)$$

A integral em (3.60), para a maior parte dos casos, não tem solução analítica. Todavia, em alguns casos, podemos aproximar esta integral e obter um resultado analítico para ela, e.g., quando consideramos o limite para $a \ll a_{rm}$, sendo a_{rm} o fator de escala no momento da igualdade radiação-matéria e onde o universo pode ser aproximado por um universo contendo apenas radiação e com curvatura nula. Entretanto, quando consideramos épocas como $a \sim a_{rm}$, essa descrição passa a ser obsoleta, por produzir resultados ruins. Dessa forma, torna-se interessante que estudemos universos contendo dois elementos juntamente com uma curvatura nula.

3.3.1 Matéria + curvatura

Semelhante ao que foi feito na seção 3.2.1, consideraremos um universo contendo apenas matéria não-relativística.

Anteriormente vimos que um universo formado apenas por matéria expande infinitamente. Este destino do universo é conhecido como *Big Chill*, uma vez que a temperatura do universo diminui monotonicamente com o passar do tempo (RYDEN, 2017).

Agora, quando consideramos este universo contendo matéria não-relativística, vemos que seu destino está conectado ao parâmetro de densidade $\Omega_{m,0} = \Omega_0$. Dessa forma, a equação de Friedmann para este universo é

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}. \quad (3.61)$$

Ora, para descobrirmos o destino deste universo, precisamos descobrir se existe a possibilidade deste universo parar de se expandir. Para isso, podemos partir da equação (3.61), dado que para que o universo pare de expandir, é necessário que em algum momento tenhamos $Ht = 0$. Como o primeiro termo a direita é sempre maior que zero, isto requer que o segundo termo seja negativo. Assim, no momento de expansão máxima, i.e., $H(t) = 0$, temos

$$0 = \frac{\Omega_0}{a_{\max}^3} + \frac{1 - \Omega_0}{a_{\max}^2} \quad (3.62)$$

e isolando a_{\max} , encontramos que o maior fator de escala possível é

$$a_{\max} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}, \quad (3.63)$$

onde $\Omega_0 = \Omega_{0,t}$, que é o parâmetro de densidade medido no tempo atual.

Portanto, quando $\Omega_0 > 1$ e $\kappa = 1$, o universo colapsa sobre si mesmo quando $a = 0$ num tempo $t = t_{crunch}$ finito, o que é conhecido como *Big Crunch*. Para $\Omega_0 < 1$ e $\kappa = -1$, o universo se expandirá eternamente no *Big Chill*.

Num universo curvo com estas características, podemos encontrar o fator de escala a partir da equação de Friedmann quando escrevemos a mesma como

$$\frac{\dot{a}^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a} + (1 - \Omega_0), \quad (3.64)$$

tal que a idade do universo t é obtida ao fazermos a integral da expressão acima, assim

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{[\Omega_0 a^{-1} + (1 - \Omega_0)]^{1/2}}. \quad (3.65)$$

Para $\Omega_0 \neq 1$, esta equação pode ser resolvida parametricamente, usando o tempo conforme

$$\eta = \int \frac{dt}{a}. \quad (3.66)$$

Então, a solução para $\Omega_0 < 1$ será

$$\eta = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_k}} \operatorname{arsinh} u, \quad (3.67)$$

onde $\Omega_k = 1 - \Omega_0$,

$$u = \sinh \frac{\alpha}{2}, \quad (3.68)$$

e

$$\alpha = H_0 \sqrt{\Omega_k \eta}, \quad (3.69)$$

onde α varia no intervalo $[0, \infty)$. Dessa forma, encontramos que o fator de escala é igual a

$$a(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} (\cosh \alpha - 1), \quad (3.70)$$

e a idade dada por

$$t(\alpha) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\sinh \alpha - \alpha). \quad (3.71)$$

Finalmente, para $\Omega_0 > 1$, temos

$$\eta = \frac{2}{H_0 \sqrt{-\Omega_k}} \arcsin u, \quad (3.72)$$

onde

$$u = \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.73)$$

e

$$\theta = H_0 \sqrt{-\Omega_k} \eta, \quad (3.74)$$

para $0 < \theta < 2\pi$. Assim, o fator de escala para este caso será

$$a(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos \theta), \quad (3.75)$$

e o tempo cósmico

$$t(\theta) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta). \quad (3.76)$$

Com essa parametrização, então, o *Big Bang* ocorre em $\theta = 0$ e o *Big Crunch* acontece quando $\theta = 2\pi$. Deste modo, encontramos que o intervalo de tempo entre estes eventos será

$$t_{\text{crunch}} = \frac{\pi}{H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}. \quad (3.77)$$

3.3.2 Matéria + Λ

Conjecturemos, agora, um universo euclidiano, $\kappa = 0$, formado por matéria e uma constante cosmológica. Seja $\Omega_{m,0}$ o parâmetro de densidade para um tempo $t = t_0$, então, seguindo o pressuposto de um universo plano temos que

$$\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}. \quad (3.78)$$

e a equação de Friedmann para este universo se torna

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m,0}). \quad (3.79)$$

O primeiro termo à direita está relacionado à matéria e sempre será positivo. Já o segundo termo está relacionado à contribuição da constante cosmológica e tem duas possibilidades para seus valores: se $\Omega_{m,0} < 1$, então $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ e é positivo; se $\Omega_{m,0} > 1$, logo $\Omega_{\Lambda,0} < 0$ e é negativo. Deste modo, um universo com $\Omega_{\Lambda,0} > 0$, se no tempo $t = t_0$ este universo está expandindo, o mesmo expandirá infinitivamente, tendo como destino final uma morte fria visto que a constante cosmológica se comporta como uma força repulsiva. Já no caso em que $\Omega_{\Lambda,0} < 0$, a constante cosmológica causará uma força atrativa e este universo cessará de expandir quando

$$a_{\max} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \right)^{1/3}. \quad (3.80)$$

Dado que este resultado é obtido pelo mesmo processo feito na seção anterior na obtenção do fator de escala máximo para um universo com matéria e curvatura.

Agora, manipulando a equação (3.79) encontramos

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \int_0^a \frac{a^{1/2} da}{[1 + ((1 - \Omega_{m,0})/\Omega_{m,0})a^3]^{1/2}}, \quad (3.81)$$

e integrando esta equação, encontramos que o tempo cósmico será igual a

$$H_0 t = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} \arcsin \left[\left(\frac{a}{a_{\max}} \right)^{3/2} \right]. \quad (3.82)$$

Este universo colapsará quando $a = 0$, ou seja,

$$t_{\text{crunch}} = \frac{2\pi}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0} - 1}}. \quad (3.83)$$

Analisando o resultado acima, podemos concluir que, para um dado valor de H_0 , quando maior $\Omega_{m,0}$ menor será o tempo de existência do universo.

Num universo onde $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ e $\Omega_{m,0} < 1$, o momento em que estes dois fatores contribuem igualmente para a evolução do universo ocorre em

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right)^{1/3}. \quad (3.84)$$

Assim, a segunda solução permitida para este universo, para o caso $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ e $\Omega_{m,0} < 1$ é

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln \left[\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^{3/2} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{a_{m\Lambda}} \right)^3} \right]. \quad (3.85)$$

Esta solução é realista, pois, no limite $a \ll a_{m\Lambda}$ o resultado acima reduz a

$$a(t) \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3}, \quad (3.86)$$

resultando $a \propto t^{2/3}$, que é o previsto para um universo dominado por matéria não-relativística.

Ademais, no limite $a \gg a_{m\Lambda}$ a equação (3.85) se reduz a

$$a(t) \approx a_{m\Lambda} \exp\left(\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} H_0 t\right), \quad (3.87)$$

que é razoável visto que num universo plano dominado por Λ tem um fator de escala próximo de $a \propto e^{Kt}$.

Tendo posse da forma para o tempo cósmico e sabendo H_0 e $\Omega_{m,0}$, conseguimos então calcular a idade deste universo a partir de

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{1 - \Omega_{m,0}}} \ln \left[\frac{\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} + 1}{\sqrt{\Omega_{m,0}}} \right]. \quad (3.88)$$

Dessa forma, tendo em conta o nosso universo e usando $\Omega_{m,0} = 0.31$ $\Omega_{\Lambda,0} = 0.69$ e $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, a idade do nosso universo é, aproximadamente,

$$t_0 \approx 13.9 \pm 0.1 \text{ Giga-anos}. \quad (3.89)$$

É importante observar que esta estimativa foi feita sem considerar o período em que o universo era dominado pela radiação, uma vez, como será visto na seção a seguir, esta contribuição é quase desprezível.

De modo equivalente, o tempo de equivalência da constante cosmológica e da matéria ocorre em

$$t_{m\Lambda} \approx 10.3 \pm 0.8 \text{ Giga-anos}. \quad (3.90)$$

Por conseguinte, se nosso universo segue o modelo Λ CDM, a constante cosmológica é a componente dominante no universo por cerca de 3.6 bilhões de anos.

3.3.3 Radiação + matéria

O fator de escala para o momento da igualdade radiação-matéria $a_{r,m}$ equivalente a

$$a_{rm} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{r,0}} \approx 2.9 \times 10^{-4}, \quad (3.91)$$

ou seja, foi neste momento em que a evolução do universo era dominado por essas duas componentes, sendo que antes dessa fase ele era dominado pela radiação e após, temos a dominação da matéria não-relativística. Quando consideramos um universo com $a \ll a_{rm}$, um modelo como o descrito na 3.2.2 o descreve muito bem. Entretanto, para descrevermos corretamente o momento da igualdade radiação-matéria, precisamos considerar estes dois componentes, de modo que teremos a equação de Friedmann tomando a forma de

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}. \quad (3.92)$$

Rearranjando esta expressão, temos

$$H_0 dt = \frac{ada}{\Omega_{r,0}^{1/2}} \left[1 + \frac{a}{a_{rm}} \right]^{-1/2}. \quad (3.93)$$

A integração desta equação resulta em

$$H_0 t = \frac{4a_{rm}^2}{3\sqrt{\Omega_{r,0}}} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{2a_{rm}} \right) \left(1 + \frac{a}{a_{rm}} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.94)$$

Esta expressão se prova verdadeira, pois no limite $a \ll a_{rm}$ ela nos retorna um fator de escala coerente com o obtido na seção 3.2.2

$$a \approx \left(2\sqrt{\Omega_{r,0}} H_0 t \right)^{1/2} \quad [a \ll a_{rm}]. \quad (3.95)$$

E no limite $a \gg a_{rm}$ e sem influência da curvatura, esta equação produz um fator de escala semelhante àquele visto para uma época em que a matéria é a componente dominante do universo, dado por

$$a \approx \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_{m,0}} H_0 t \right)^{2/3} \quad [a \gg a_{rm}]. \quad (3.96)$$

Além disso, para calcular o tempo da igualdade radiação-matéria a partir da equação (3.94) faz-se $a = a_{rm}$ e desse modo, encontramos

$$t_{rm} = \frac{4}{3H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{a_{rm}^2}{\sqrt{\Omega_{r,0}}} \quad (3.97)$$

e considerando os valores aceitos para o modelo padrão da cosmologia, $\Omega_{r,0} = 9.0 \times 10^{-5}$, $\Omega_{m,0} = 0.31$ e $H_0 = 67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

$$t_{rm} \approx 50\,000 \text{ anos}. \quad (3.98)$$

Isto significa que a era na qual o universo era dominado pela radiação durou cerca de 50 000 anos. Por fim, em comparação com a idade do universo, esta época foi consideravelmente pequena, tal que podemos desconsiderá-la para o cálculo da idade do universo feita na seção anterior.

3.4 O modelo Λ CDM

O modelo padrão da cosmologia considera a métrica do espaço-tempo como a soma da métrica de fundo (FLRW) mais uma perturbação. O teorema de Ehlers–Geren–Sachs (EHLERS; GEREN; SACHS, 1968) diz que, em um dado universo, todos os observadores em queda livre observam as mesmas propriedades na radiação cósmica de fundo² (CMB)

² do inglês *cosmic microwave background*

em quaisquer direções. Ou seja, se as medidas da CMB forem isotrópicas, então este universo trata-se de um espaço-tempo FLRW. Os dados observacionais de CMB, como os obtidos pelo WMAP ³ (TEGMARK et al., 2004) e pelo satélite Planck (AGHANIM et al., 2018), indicam que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, o que permite estabelecer a métrica FLRW como a métrica de fundo do nosso universo

Os resultados das equações de Einstein pela métrica FLWR têm diferentes parametrizações para o modelo cosmológico. Uma dessas parametrizações é o chamado modelo Λ CDM, também chamado de modelo padrão do *Big Bang*.

Além disso, o Λ CDM é o modelo mais simples que pode explicar algumas propriedades do universo como, e.g., a estrutura e existência da CMB, a distribuição de galáxias em grande escala, a expansão acelerada do universo partindo das observações de galáxias, das supernovas do tipo IA, entre outros.

Este modelo é congruente com um universo euclideano dominado por matéria escura fria não-bariônica (CDM) e uma constante cosmológica Λ , com, sua perturbação inicial ocorrendo por causa da inflação no universo primordial.

A imposição de que a matéria escura seja “fria” surge da necessidade que as partículas da matéria escura possam se agrupar com eficiência num universo jovem ⁴. Caso a matéria fosse “quente”, a velocidade dessas partículas seria alta e como consequência, não haveria a formação de estrutura na taxa necessária. Este requisito é responsável pela exclusão dos neutrinos conhecidos como candidatos à matéria escura. Os estudos atuais indicam que os neutrinos correspondem à somente $\sim 2\%$ da matéria escura. Outrossim, diferentes observações estruturais do universo mostram a indispensabilidade da matéria escura, pois, as inomogeneidades esperadas em modelos cosmológicos sem matéria escura são muito pequenas (para mais sobre a homogeneidade num universo composto apenas por matéria bariônica, ver capítulo 8 (DODELSON; SCHMIDT, 2020)).

Evidências observacionais de diversas fontes apontaram a existência de uma constante cosmológica Λ . Os resultados mais conhecidos, que corroboram com esta necessidade, foram obtidos a partir do estudo de supernovas distantes iniciados por (RIESS et al., 1998) e (PERLMUTTER et al., 1999). Estes estudos indicaram uma quantidade diferente da matéria ordinária e da radiação previamente conhecidas, esta grandeza foi denominada de energia escura (do inglês, *dark energy*). Diferentemente da matéria escura, a energia escura não se aglomera fortemente. A relação entre a energia escura e Λ pode ser encontrada ao se considerar a possibilidade de haver uma nova forma de energia que permanece constante em relação ao tempo, isto é, agindo como uma constante cosmológica ⁵.

³ Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.

⁴ Este universo descrito é caracterizado por um *redshift* de aproximadamente $z \approx 1100$, isto ocorre pois após o desacoplamento da CMB os fótons passam a não interagir com a matéria e tanto a matéria escura e a bariônica passam a se agrupar por causa do efeito da força gravitacional.

⁵ A ideia de uma constante cosmológica foi inicialmente proposta por Einstein, contudo a mesma foi

A introdução de uma constante cosmológica pode parecer estranha, dado que um universo em expansão deveria sofrer uma diminuição da densidade de partículas, tal que, parece impossível se obter uma partícula fundamental que possa ser a causadora da energia escura. Contudo, a noção de que o espaço carrega sua energia, de modo que a densidade de partículas permanece constante sobre a expansão do universo, é consistente com o princípio de incerteza de Heisenberg e com a atual compreensão da mecânica quântica – uma vez que essa permite a criação e aniquilação de partículas e anti-partículas virtuais durante pequenos intervalos de tempo, logo contribuindo com a energia do vácuo.

Já a inclusão da inflação no modelo Λ CDM ocorre pois, este é o mecanismo mais plausível para a geração das perturbações iniciais necessárias para que a evolução estrutural transcorra de forma a termos uma distribuição de matéria homogênea e isotrópica em grandes escalas. Isto impõe a existência de uma breve época no universo primordial, na qual o fator de escalar $a(t)$ cresceu exponencialmente. Assim, a época de inflação tem algumas características semelhantes ao universo atual, sendo estas: o fato de que a forma dominante da energia se manteve aproximadamente constante durante a expansão e o fato de que a substância geradora desta expansão acelerada permanece desconhecida. Entretanto, existe clara diferença na escala da densidade de energia que causou o processo de inflação, sendo maior por, no mínimo, 60 ordens de magnitude do valor de energia escura observado atualmente (DODELSON; SCHMIDT, 2020).

Este modelo cosmológico pode, ainda, ser expandido acrescentando diferentes suposições, como matéria escura em decomposição (DDM) ⁶ (ENQVIST et al., 2015) e (HARIDASU; VIEL, 2020), dinâmica newtoniana modificada (do inglês, *modified newtonian dynamics* (MOND)) (SANDERS; MCGAUGH, 2002) ou até invariância de escala do espaço vazio ⁷ (MAEDER, 2017).

Não obstante, os parâmetros descritos nesta seção estão relacionados ao modelo Λ CDM para um universo composto por energia escura ($\approx 68.6\%$), matéria escura ($\approx 26.5\%$) e matéria bariônica ($\approx 4.9\%$) (GROUP et al., 2020) ⁸. Em termos de suas incertezas associadas, temos que os valores obtidos pela Colaboração Planck são: $\Omega_b = 0.049 \pm 0.001$, $\Omega_c = 0.264 \pm 0.006$, $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$ e $\Omega_\Lambda = 0.685 \pm 0.007$.

abandonada.

⁶ Tradução livre do inglês *decaying dark matter*.

⁷ Tradução livre do inglês *scale invariance of empty space*.

⁸ Estas porcentagens estão na tabela 2.1 'Astrophysical Constants and Parameters'.

4 A Radiação C3smica de Fundo

A Radia33o C3smica de Fundo (CMB) 3 uma radia33o eletromagn3tica remanescente dos est3gios iniciais do Universo. Podendo ser definida como um campo de radia33o isotr3pico e quase-uniforme que emite um espectro de corpo negro

$$I_\nu = \frac{4\pi\hbar\nu^3/c^2}{\exp[2\pi\hbar\nu/k_B T] - 1}. \quad (4.1)$$

A figura 2 mostra as medidas realizadas pelo sat3lite COBE (*Cosmic Background Explorer*) (WHITE, 1999) e a curva dada pela equa33o (4.1) para uma temperatura de $T = 2.725 \pm 0.001$ K. Ou seja, essa 3 a temperatura atual (medida por n3s, observadores) da CMB.

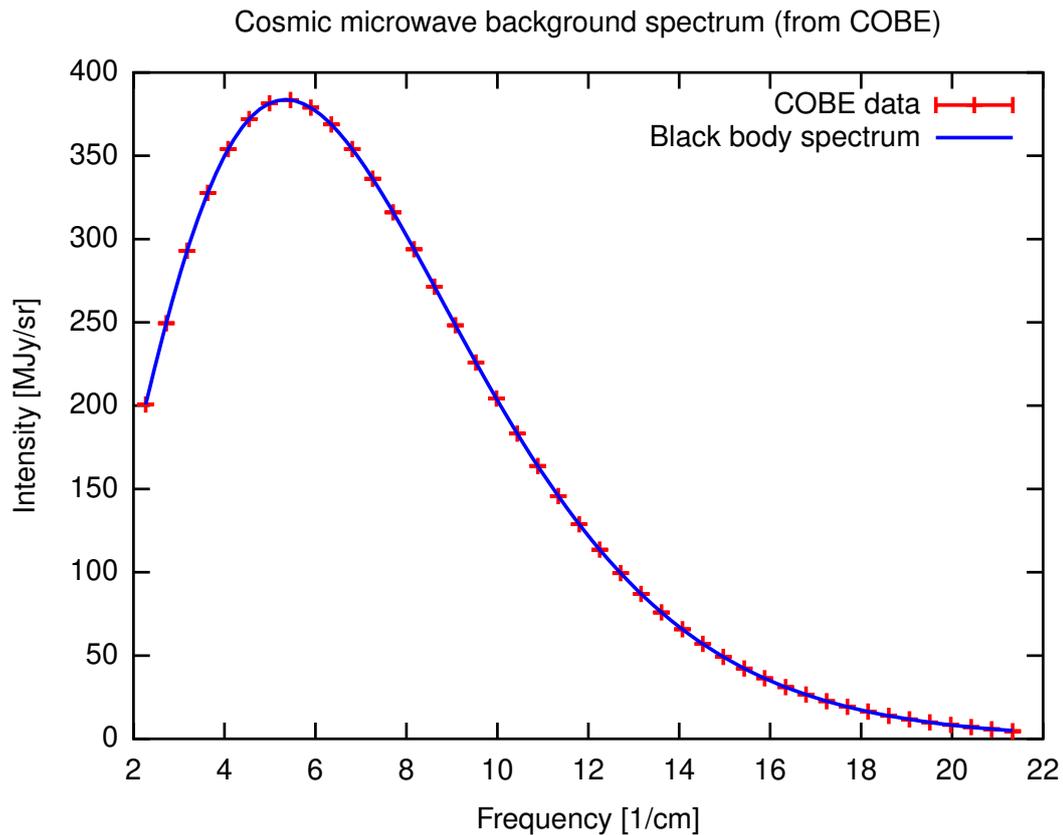


Figura 2 – Espectro de corpo negro da CMB em fun33o da frequ3ncia obtida pelo instrumento FIRAS (em ingl3s, *Far InfraRed Absolute Spectrophotometer*) do sat3lite COBE (do ingl3s, *Cosmic Background Explorer*)(WHITE, 1999)

Esse campo primordial de radia33o 3 uma previs3o da teoria do *Big Bang*, i.e., ocorreria caso a temperatura do Universo fosse suficientemente alta tal que ele fosse totalmente ionizado e o campo de radia33o primordial pudesse ser termalizado efetivamente

a partir dos processos de espalhamento Thompson e de Bremsstrahlung. Ademais, a conjectura da existência da CMB foi feita durante a década de 40 por Ralph Alpher, Robert Herman e George Gamow com uma estimativa da ordem de $T = 5\text{ K}$ (ALPHER; HERMAN, 1948).

Permeando todo o espaço, a CMB é uma importante fonte de informações sobre o Universo primordial, uma vez que esta é a radiação mais antiga do Universo, datando à era de recombinação. Esta época ocorreu a, aproximadamente, 370 000 anos após o Big Bang, ou em relação ao *redshift*, quando $z_* \simeq 1100$. Este período é caracterizado como o momento no tempo em que o componente bariônico do Universo para de ser ionizado e se torna neutro, ou seja, se refere ao momento no qual elétrons e prótons carregados se acoplam, formando átomos neutros de hidrogênio. Em outras palavras, isso equivale ao período em que a densidade de íons é igual ao número de átomos neutros (RYDEN, 2017).

A primeira observação da radiação cósmica de fundo foi feita em 1964 por Arno Penzias e Robert Wilson, enquanto trabalhavam como radioastrônomos nos Laboratórios Bell usando antenas refletoras em formato de chifre. Quando direcionadas ao céu, um *excesso de ruído* era observado vindo de todas as direções e mesmo tentando diminuir este ruído, ele permanecia constante. Esta variação era isotrópica e constante no tempo, o que impossibilitava relacioná-lo a uma fonte isolada de rádio, ou a alguma emissão atmosférica, ou do Sistema Solar. Além disso, a intensidade deste *ruído* era ordens de grandeza maior que o erro estatístico, o que estabeleceu este sinal como sendo diferente de um erro de medição qualquer (PARTRIDGE; PARTRIDGE, 1995). Paralelamente ao trabalho feito nos Laboratórios Bell, na Universidade de Princeton, Robert Dicke e seu grupo estavam construindo um radiômetro para a medição da CMB e ao receber uma ligação de Penzias e Wilson, sobre o estranho sinal que não se conseguia contabilizar, eles entraram em consenso que esta temperatura da antena era resultado da CMB.

Esta interpretação da radiação cósmica de fundo gerou uma grande controvérsia durante a década de 1960, pois serviu como um teste crucial para a hipótese do *Big Bang*, em oposição a hipótese do *Steady State* – outra teoria em voga na época.

4.1 As anisotropias da CMB

A radiação cósmica de fundo é uma das sondas mais importantes da cosmologia atual. Sendo considerado o espectro de corpo negro mais perfeito medido na natureza. Sua importância se dá por se caracterizar como um espelho para um Universo jovem e, portanto, carrega informações fundamentais consolidando-se, portanto, como uma excelente sonda para estabelecer restrições para modelos do Universo primordial.

Contudo, uma de suas características mais importantes são suas flutuações de

temperatura, também conhecidas como anisotropias. Essas variações de temperatura são locais porém, como veremos na seção a seguir, estamos mais interessados em suas médias.

A primeira medição das anisotropias veio com os dados do satélite COBE no início da década de 90. As variações na intensidade da CMB eram da ordem de $10^{-5}K$, porém o impacto desta descoberta foi tão grande quanto o visto em sua descoberta inicial. Estas flutuações iniciais concordam com a hipótese que as estruturas do Universo surgiram de regiões de sobredensidades de matéria causadas por instabilidades gravitacionais (SAMLLEBEN; STAGGS; WINSTEIN, 2007).

Nesta seção, temos o intuito de analisar alguns dos efeitos que causam as anisotropias na CMB e como essas flutuações ocorrem.

4.1.1 Anisotropias de grande escala

Para classificar as anisotropias em relação às variações angulares, temos de considerar o ângulo entre diferentes pontos no céu que tinham suas temperaturas e tamanho angular das regiões casualmente conectadas durante o desacoplamento, i.e., o tamanho das regiões que, até a era do desacoplamento, tinham uma conexão causal (SILVA, 2005). Assim, podemos definir este ângulo por:

$$\theta_H \approx 1^\circ \Omega_0^{1/2} \left(\frac{1100}{z_d} \right)^{1/2} \approx 1^\circ \quad (4.2)$$

onde Ω_0 é o parâmetro de densidade no tempo atual, z_d é o *redshift* no momento do desacoplamento (para a dedução desta expressão veja o Apêndice A em (SILVA, 2005)).

Definido isto, podemos agora caracterizar as anisotropias de grande escala como sendo as flutuações na temperatura obtidas em escalas angulares maiores que θ_H , tal que estas variações não têm uma relação causal entre si.

4.1.2 Anisotropias de pequena escala

De maneira semelhante, as anisotropias de pequena escala estão relacionadas ao ângulo θ_H , entretanto, neste caso consideramos as variações menores que θ_H . Logo, essas flutuações ocorrem em regiões que tiveram contato causal até o momento do desacoplamento da matéria não-bariônica e da radiação.

4.1.3 Anisotropia do dipolo

A primeira anisotropia descoberta foi a anisotropia do dipolo. Sendo a anisotropia mais simples, este efeito é causado pela movimentação de nossa galáxia em relação ao referencial comóvel do universo dada por um fator de $\beta \approx 3 \times 10^{-3}$, que gera uma anisotropia na ordem de mK que é maior do que quaisquer outros efeitos, que têm ordem de μK .

Como resultado do movimento de nossa galáxia, observamos que a temperatura aparente é maior quando observamos os fótons vindos da direção do movimento de nossa galáxia causando um *blueshift* e a temperatura é menor quando notamos os fótons se movimento na mesma direção que nossa galáxia, o que gera um *redshift* (WEINBERG, 2008).

Dos dados do COBE, encontramos que um dos lados do mapa celeste tem uma temperatura maior que o outro, como visto na figura 3.

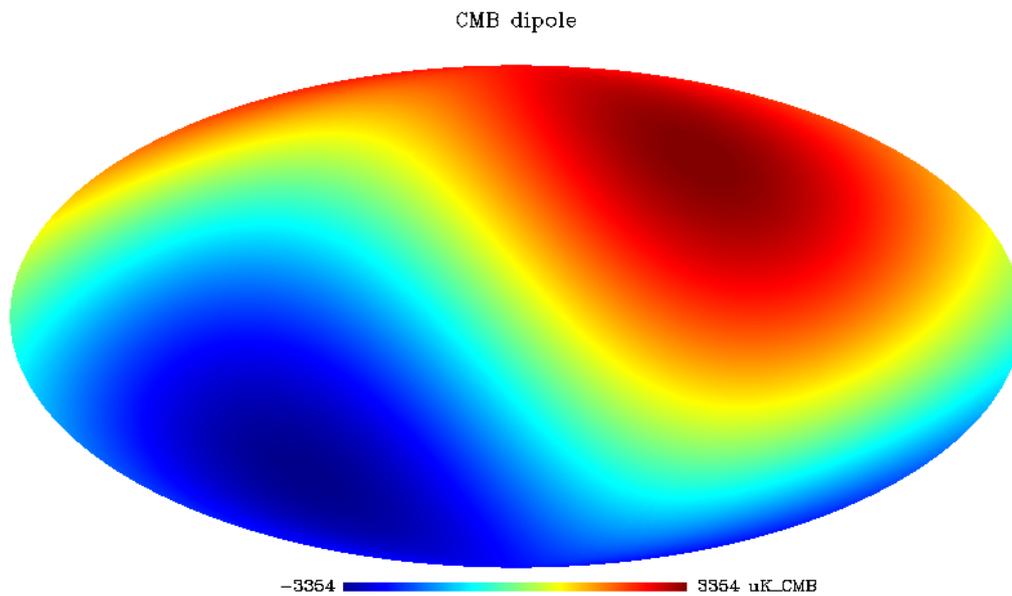


Figura 3 – Dipolo da radiação cósmica de fundo como obtido a partir dos dados do COBE. Retirado de (THE. . . ,).

4.1.4 Efeito Sachs-Wolfe

Um dos efeitos que causam flutuações na CMB é o efeito Sachs-Wolfe. Consideremos um fóton da CMB que se encontra em um mínimo potencial no tempo do último espalhamento, que podemos considerar como um poço de potencial. Ora, quando o mesmo for sair do poço, ele perde energia e sofre um *redshift*. Enquanto isso, um fóton que se encontra num ponto de máxima quando o Universo ficou transparente ganha energia quando ele cai da barreira de potencial e assim sofre um *blueshift*. Assim, as flutuações geradas por esse efeito são geradas por variações no potencial gravitacional no tempo da última superfície de espalhamento (RYDEN, 2017).

Este efeito tem especial importância nas anisotropias de grande escala e ocorre a partir da relação entre a densidade do meio e dos potenciais gravitacionais. A previsão deste efeito foi feito ainda na década de 60 por Rainer K. Sachs e Arthur M. Wolfe (SA-

CHS; WOLFE, 1967), como uma previsão das anisotropias da CMB, sendo caracterizado como uma anisotropia primária.

4.1.5 Efeito Sachs-Wolfe integrado

Analogamente, temos o efeito Sachs-Wolfe integrado (ISW) que é equivalente ao *redshift* gravitacional que ocorre no efeito Sachs-Wolfe, porém este ocorre desde a superfície do último espalhamento até o momento de observação, não fazendo parte da CMB primordial. Além disso, esse efeito tem duas contribuições, a primeira, logo após a última superfície, enquanto ainda existia radiação suficiente no Universo e uma segunda, que surge no Universo mais recente, quando a energia escura passa a dominar a expansão do Universo (RYDEN, 2017).

Ou seja, o efeito ISW é definido por um *redshift* ou um *blueshift* gravitacional causado por flutuações dependentes no tempo no potencial gravitacional entre o tempo do último desacoplamento e o tempo presente (WEINBERG, 2008).

4.1.6 Efeito Sunyaev-Zel'dovich

Temos também o efeito Sunyaev-Zeldovich (SZ). Este efeito ocorre da interação dos fótons da CMB com elétrons presentes no espaço intergalático, por meio de um mecanismo de espalhamento Compton invertido, onde elétrons de alta energia presentes em aglomerados de galáxias interagem com fótons de baixa energia da CMB que, como consequência, ganham energia durante a colisão com estes elétrons (OSTRIKER; VISHNIAC, 1986).

Este efeito ainda pode ser separado em uma componente térmica e uma cinemática. O efeito SZ térmico é gerado pelos elétrons livres do gás aquecido no interior de aglomerados. Enquanto isso, o efeito SZ cinemático é resultado de complementar às anisotropias da CMB causados pela velocidade peculiar do gás onde o espalhamento Compton ocorre.

4.1.7 Lentes gravitacionais

A presença de grandes fontes de campos gravitacionais no caminho dos fótons da CMB também são responsáveis pela mudança de trajetória dos fótons em sua direção transversal ao movimento, de modo que como resultado ocorre uma distorção da imagem da última superfície de espalhamento (SILVA, 2005).

Vale notarmos que este efeito é resultado direto da distorção do espaço-tempo em regiões com grandes corpos celestes.

É necessário notar que os efeitos descritos nesta seção são apenas alguns dos efeitos que produzem as anisotropias da radiação cósmica de fundo. Assim, para uma discussão

mais aprofundada veja (SILVA, 2005), (WEINBERG, 2008), (DODELSON; SCHMIDT, 2020) e (SAMTLEBEN; STAGGS; WINSTEIN, 2007).

4.2 O espectro de potência da CMB

Do ponto de vista cosmológico, é vantajoso utilizarmos o espectro de potência (para uma descrição detalhada da estrutura matemática dos espectros de potência veja o apêndice A) como método de análise, pois, o mesmo permite o estudo evolucionário de diferentes estruturas cosmológicas (TOOLS...,). Como exemplo, podemos citar o espectro de potência da matéria e o espectro de potência da radiação cósmica de fundo. Neste trabalho, daremos ênfase para a CMB.

Além disso, quando consideramos que, diferentemente das perturbações dos bárions e da matéria escura fria, as perturbações na radiação são essencialmente preservadas (DODELSON; SCHMIDT, 2020), fica claro os benefícios de estudarmos o espectro de potência da radiação cósmica de fundo.

Dos dados da CMB, observamos a frequência do espectro $f(\nu)$, a temperatura $T(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \eta)$ e seus modos de polarização. Para a temperatura, queremos avaliar as anisotropias da temperatura), tal que o campo de radiação da CMB pode ser descrito por

$$T(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) = T(\eta)[1 + \Theta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \eta)], \quad (4.3)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}$ é o vetor posição, $\hat{\mathbf{p}}$ é o vetor dependente da direção do fóton incidente, η é o tempo conforme descrito no capítulo anterior

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$$

e $\Theta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \eta)$ pode ser definido como a quantidade adimensional

$$\Theta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) = \frac{T(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}. \quad (4.4)$$

Embora esse campo é definido em função de qualquer ponto no espaço-tempo, as observações estão restritas ao tempo presente η_0 e à locação presente $\hat{\mathbf{x}}_0$. Logo, tudo que se observa está relacionado com mudanças nas direções $\hat{\mathbf{p}}$, que também podem ser compreendidos como diferentes posições no céu. Assim, o vetor $\hat{\mathbf{p}}$ pode ser definido em função das coordenadas polares θ, ϕ .

Como as perturbações na temperatura são projetadas em uma superfície esférica 2D, podemos usar os harmônicos esféricos para descrever $\Theta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \eta)$, ou seja,

$$\Theta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-1}^l a_{lm}(\hat{\mathbf{x}}, \eta) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \quad (4.5)$$

onde

$$Y_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{imb}, \quad (4.6)$$

em que P_{ℓ}^m são os polinômios de Legendre e ℓ é chamado de multipolo e representa uma escala angular $\alpha = \pi/\ell$ no céu.

Os harmônicos esféricos são normalizados por

$$\int d\Omega Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{p}}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{\mathbf{p}}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (4.7)$$

onde $\delta_{\ell\ell'}$ é delta de Kronecker e $d\Omega$ é diferencial do ângulo sólido.

Conseqüentemente, os coeficientes $a_{\ell m}$ serão dados por

$$a_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}, \eta) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{x}}} \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{p}}) \Theta(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta), \quad (4.8)$$

onde se escreve o lado direito em termos da transformada de Fourier $\Theta(\mathbf{k})$ ao invés de $\Theta(\hat{\mathbf{x}})$, uma vez que é para esta quantidade a solução é obtida.

Desta maneira, o espectro de potência das flutuações na temperatura C_{ℓ} , será definido em função da variância deste coeficiente, satisfazendo a

$$\langle a_{\ell m} \rangle = 0, \text{ e } \quad \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C(\ell), \quad (4.9)$$

onde essas médias são tomadas por todo conjunto. Como todos os coeficientes são obtidos do mesmo conjunto, existe, intrinsecamente, um limite de modos m independentes que podem ser medidos, sendo que equivale a $(2\ell + 1)$ para cada multipolo. Assim, o espectro de potência pode ser escrito como

$$C_{\ell} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle. \quad (4.10)$$

E como resultado, encontramos que o erro associado às estimativas de C_{ℓ} dado por

$$\frac{\Delta C(\ell)}{C(\ell)} = \sqrt{\frac{2}{2\ell + 1}}, \quad (4.11)$$

ou seja, isto resulta que a qualidade da estimativa da média está ligada a quantidade de pontos de um conjunto. Isto é usualmente chamado de variância cósmica e é mais pronunciada para ℓ baixos ([UNDERSTANDING...](#)).

Da figura 4 pode-se observar um mapa da temperatura na CMB, usado para a obtenção dos parâmetros cosmológicos presentes no capítulo 3.

Além disso, a CMB ainda permite diferentes *power spectrums* relacionados à correlação da temperatura (TT), do modo de polarização (EE), da temperatura e o modo de polarização (TE) e da correlação entre a temperatura e o potencial gravitacional ($T\phi$).

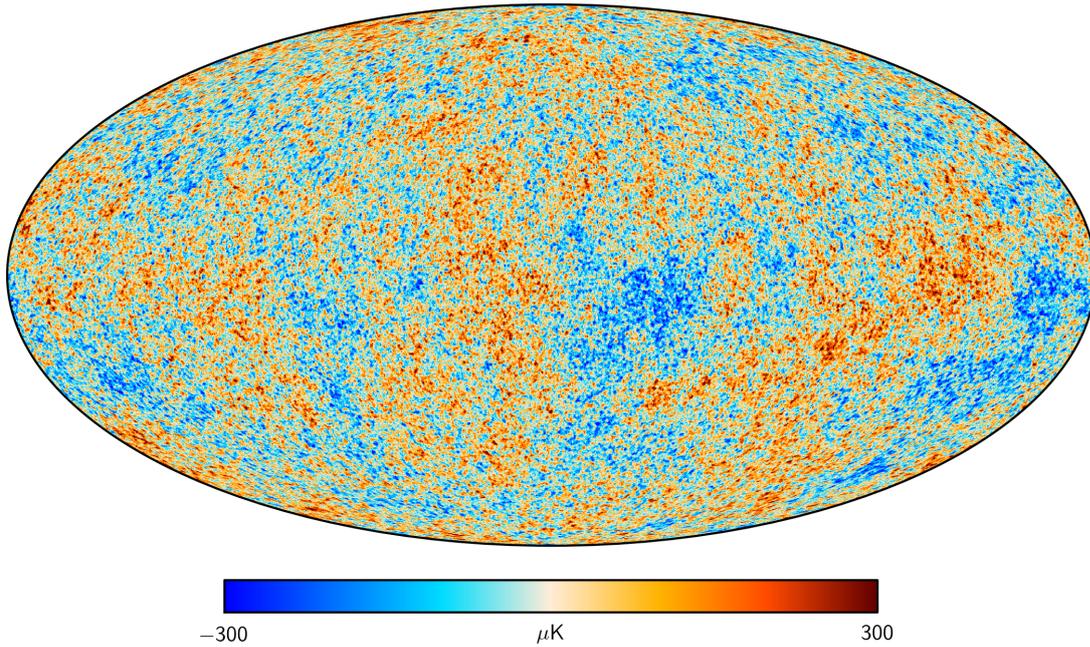


Figura 4 – Mapa das anisotropias na temperatura da CMB obtido a partir do método SMICA (em inglês, *Spectral Matching Independent Component Analysis*) com os dados do satélite Planck. Retirado de (PLANCK...,) .

Ademais, a figura 4.2 mostra um espectro de potência da TT obtido pelo Planck descrito em função do momento de multipolo ℓ e de μK^2 .

Vale também citar, que os parâmetros presentes na seção 3 foram obtidos de um espectro TT combinado com os dados de polarização (TE , $EE + low E$) + lenteamento.

Por fim, outro efeito que podemos também citar que afeta os espectros de potência da CMB, são os impactos diretos dos neutrinos massivos nos observáveis cosmológicos da CMB e da estrutura de larga escala. Primeiro, temos o fato de que as massas dos neutrinos nas regiões de sub-eV até eV interferem na expansão, uma vez que se analisa a história evolutiva próxima à época da igualdade matéria-radiação — um exemplo disso pode ser observado na figura 4.2 onde a diferença no espectro para diferentes massas de neutrinos pode ser vista. A segunda questão se trata dos efeitos do fluxo livre de neutrinos que afetam o crescimento de estruturas em tempos posteriores (WONG, 2011).

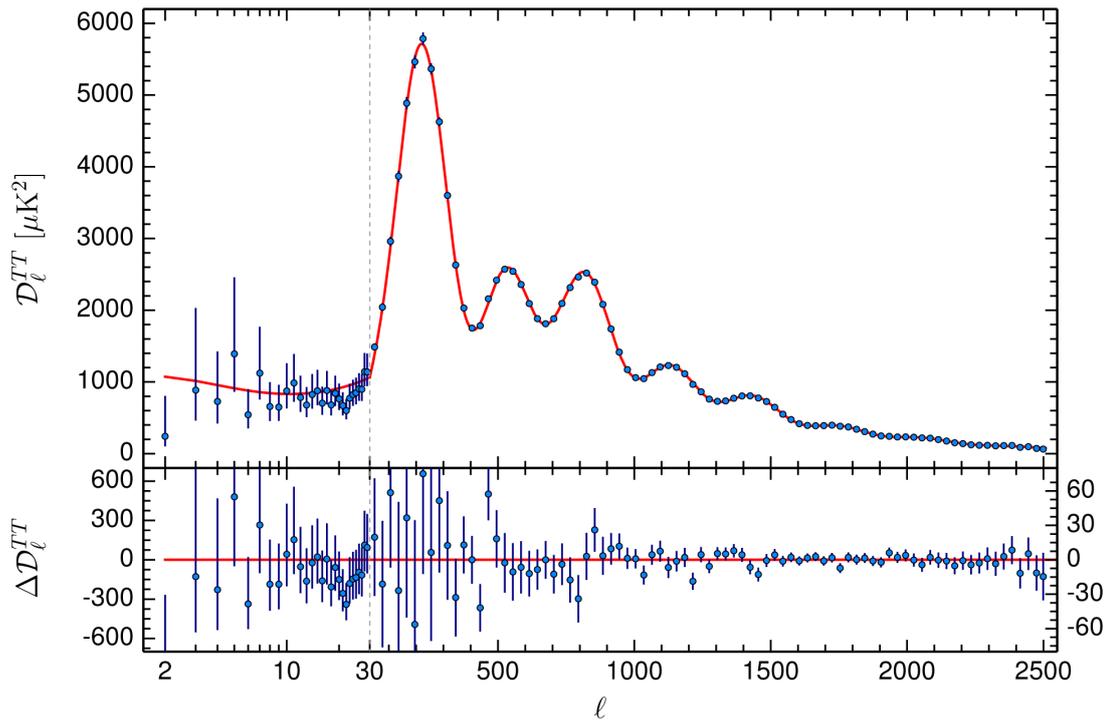


Figura 5 – Espectro de potência da temperatura da radiação cósmica de fundo microondas. No painel inferior observamos as divergências entre os dados observados e o melhor ajuste feito para os dados do Planck de 2015. Retirado de (ADE et al., 2016).

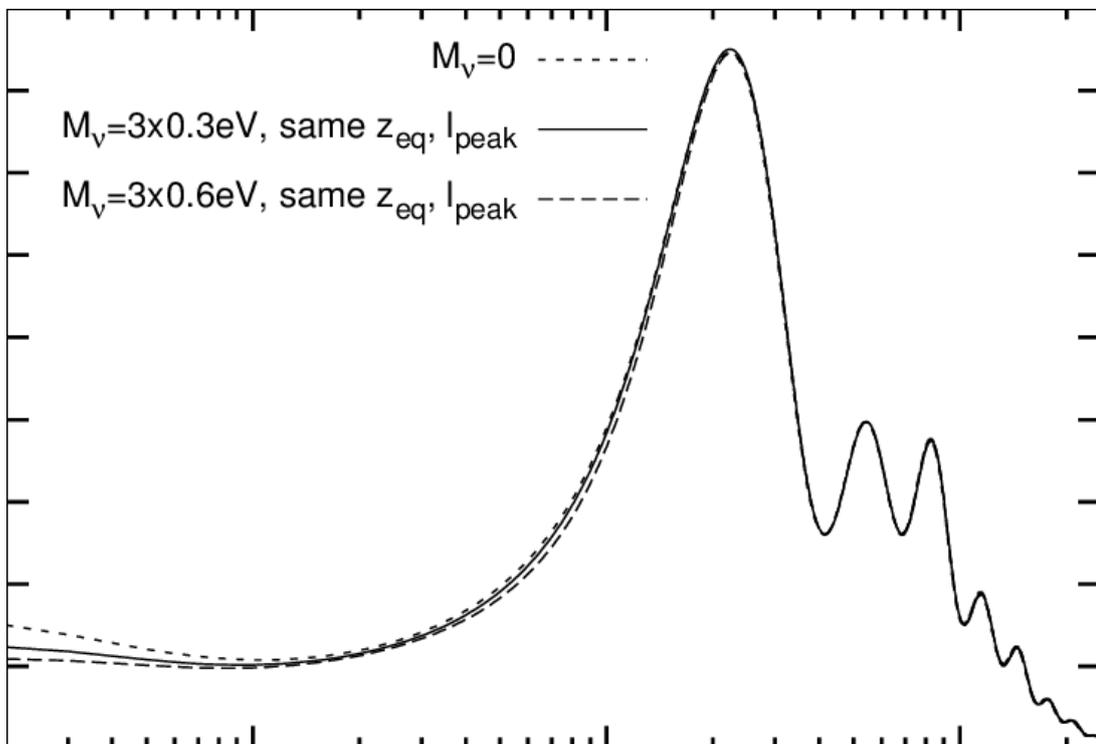


Figura 6 – Espectro de potência da temperatura considerando diferentes massas para os neutrinos, onde se observa um deslocamento causada pelas diferentes massas de neutrinos. Retirado de (LESGOURGUES; PASTOR, 2014).

Considerações finais e Conclusão

O estudo dos temas abordados neste trabalho, e.g, o modelo cosmológico padrão, os parâmetros e as distâncias cosmológicas são fundamentais para a compreensão da evolução do universo, sendo a base para a descrição da cosmologia moderna. Além disso, o estudo dos diferentes modelos de universos e seus destinos permitiu uma compreensão maior da contribuição e comportamento dos diferentes componentes materiais/energéticos. Portanto, este trabalho permitiu o estudo mais aprofundado de alguns tópicos da cosmologia, servindo como revisão bibliográfica de alguns assuntos do campo da cosmologia, que se encontra em crescimento constante devido à grande quantidade de diferentes experimentos de coleta de dados, assim como o desenvolvimento dos modelos teóricos.

Referências

- ADE, P. A. et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 594, p. A13, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 65.
- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *arXiv preprint arXiv:1807.06209*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 54.
- ALPHER, R. A.; HERMAN, R. Evolution of the universe. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 162, n. 4124, p. 774–775, 1948. Citado na página 58.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 25.
- CHATFIELD, C. *The analysis of time series: an introduction*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2003. Citado na página 74.
- DAVENPORT, W. B.; ROOT, W. L. et al. *An introduction to the theory of random signals and noise*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1958. v. 159. Citado na página 73.
- DODELSON, S.; SCHMIDT, F. *Modern cosmology*. [S.l.]: Academic Press, 2020. Citado 7 vezes nas páginas 15, 32, 39, 40, 54, 55 e 62.
- EHLERS, J.; GEREN, P.; SACHS, R. K. Isotropic solutions of the einstein-liouville equations. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 9, n. 9, p. 1344–1349, 1968. Citado na página 53.
- EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzung der physikalischen-mathematischen Klasse*, v. 25, p. 844–847, 1915. Citado na página 19.
- ENQVIST, K. et al. Decaying dark matter and the tension in σ_8 . *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2015, n. 09, p. 067, 2015. Citado na página 55.
- FRIEDMANN, A. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, Springer, v. 21, n. 1, p. 326–332, 1924. Citado na página 22.
- GRIMMETT, G.; GRIMMETT, G. R.; STIRZAKER, D. *Probability and random processes*. [S.l.]: Oxford university press, 2001. Citado na página 74.
- GROUP, P. D. et al. Review of particle physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press, v. 2020, n. 8, p. 083C01, 2020. Citado na página 55.
- HARIDASU, B. S.; VIEL, M. Late-time decaying dark matter: constraints and implications for the h₀-tension. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 497, n. 2, p. 1757–1764, 2020. Citado na página 55.
- HOGG, D. W. Distance measures in cosmology. *arXiv preprint astro-ph/9905116*, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 35.

- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Citado na página 27.
- LESGOURGUES, J.; PASTOR, S. Neutrino cosmology and planck. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 6, p. 065002, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 65.
- LIMA, V. P. G. Lenteamento Gravitacional Fraco e Perfis de Densidade de Matéria de Aglomerados de Galáxias. Monografia (Graduação). 2021. Citado na página 35.
- MAEDER, A. An alternative to the λ cdm model: The case of scale invariance. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 834, n. 2, p. 194, 2017. Citado na página 55.
- MILLERS, S.; CHILDERS, D. Probability and random processes. *Academic Press*, p. 373, 2012. Citado na página 73.
- OHANIAN, H. C.; RUFFINI, R. *Gravitation and spacetime*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Nenhuma citação no texto.
- OSTRIKER, J.; VISHNIAC, E. T. Generation of microwave background fluctuations from nonlinear perturbations at the era of galaxy formation. *The Astrophysical Journal*, v. 306, p. L51–L54, 1986. Citado na página 61.
- PARTRIDGE, R. B.; PARTRIDGE, R. *3K: the cosmic microwave background radiation*. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, 1995. v. 393. Citado na página 58.
- PEEBLES, P. J. E.; PEEBLES, P. J. *Principles of physical cosmology*. [S.l.]: Princeton university press, 1993. Citado na página 35.
- PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999. Citado na página 54.
- PLANCK IMAGE GALLERY. <<https://www.cosmos.esa.int/web/planck/picture-gallery>>. Acesso em 12 de maio de 2022. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 64.
- POWER Spectrum. <<http://universe-review.ca/R05-04-powerspectrum.htm>>. Acesso em 12 de maio de 2022. Citado na página 73.
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998. Citado na página 54.
- RYDEN, B. *Introduction to cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado 7 vezes nas páginas 22, 41, 47, 48, 58, 60 e 61.
- SACHS, R. K.; WOLFE, A. M. Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. *The Astrophysical Journal*, v. 147, p. 73, 1967. Citado na página 61.
- SAMTLEBEN, D.; STAGGS, S.; WINSTEIN, B. The cosmic microwave background for pedestrians: A review for particle and nuclear physicists. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, Annual Reviews, v. 57, p. 245–283, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 62.

- SANDERS, R. H.; MCGAUGH, S. S. Modified newtonian dynamics as an alternative to dark matter. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 40, n. 1, p. 263–317, 2002. Citado na página 55.
- SARTORI, L. *Understanding relativity: a simplified approach to Einstein's theories*. [S.l.]: Univ of California Press, 1996. Citado na página 28.
- SILVA, F. E. da. *Anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo e Vínculos em Modelos com Decaimento do Vácuo*. <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/16657>: [s.n.], 2005. Citado 3 vezes nas páginas 59, 61 e 62.
- TEGMARK, M. et al. Cosmological parameters from sdss and wmap. *Physical review D*, APS, v. 69, n. 10, p. 103501, 2004. Citado na página 54.
- THE Planck Sky Model. <<https://apc.u-paris.fr/~delabrou/PSM/psm.html>>. Acesso em 12 de maio de 2022. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 60.
- TOOLS to Study the Distribution of Matter in the Universe. <[https://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck/Tools_to_study_the_distribution_of_matter_in_the_Universe/\(print\)](https://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck/Tools_to_study_the_distribution_of_matter_in_the_Universe/(print))>. Acesso em 12 de maio de 2022. Citado na página 62.
- UNDERSTANDING the Cosmic Microwave Background Temperature Power Spectrum. <https://www.roe.ac.uk/ifa/postgrad/pedagogy/2006_tojeiro.pdf>. Acesso em 12 de maio de 2022. Citado na página 63.
- USMANI, A. et al. The dark energy equation of state. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 386, n. 1, p. L92–L95, 2008. Citado na página 32.
- WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. Citado na página 25.
- WEINBERG, S. *Cosmology*. [S.l.]: Oxford university press, 2008. Citado 8 vezes nas páginas 23, 26, 30, 31, 46, 60, 61 e 62.
- WHITE, M. Anisotropies in the cmb. *arXiv preprint astro-ph/9903232*, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 57.
- WONG, Y. Y. Neutrino mass in cosmology: status and prospects. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, Annual Reviews, v. 61, p. 69–98, 2011. Citado na página 64.

Apêndice

Fundamentos matemáticos para espectros de potência

Quando se tem sinais contínuos por um longo período de tempo, é necessário se definir a densidade de espectro de potência, também conhecido somente por espectro de potência, de modo a retratar como um sinal ou série temporal se distribui numa dada frequência (DAVENPORT; ROOT et al., 1958).

Assim, passa a ser interessante a definição de uma função de correlação estatística que será definida como a probabilidade de relacionar uma certa função $f(x)$ com uma outra função $f(y)$ dado um vetor espacial \mathbf{r} em oposição a uma outra distribuição aleatória (POWER...).

Esta análise estatística pode ser feita, e.g, quando se estuda a variância de uma dada função temporal $x(t)$, onde a potência média P deste sinal $x(t)$ num certo intervalo temporal é descrita por

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt. \quad (4.12)$$

Uma outra quantidade estatística chamada de densidade de energia espectral poderia ser usada para analisar este sinal. Esta quantidade é derivada da energia, que é definida como a integral da potência um período de tempo. Contudo, caso o sinal $x(t)$ caracterize um processo estacionário – i.e., um sinal que se mantém o mesmo por um tempo infinito, pela definição da potência (4.12) seria possível existir processos com potência finita e energia infinita. Ou seja, existe um problema inerente a definição da densidade de energia espectral quando se analisa um processo estacionário. Desta forma, para processos estacionários é necessário se utilizar o espectro de potência.

Para analisar um sinal $x(t)$, define-se uma transformada de Fourier truncada

$$\hat{x}(t)^2 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4.13)$$

dado que certos sinais analisados não têm uma transformada de Fourier definida. De forma que a transformada de Fourier truncada é diferente de uma transformada normal por ser definida apenas em um intervalo temporal finito.

Note que a equação (4.13), é chamada de amplitude da densidade espectral. Assim, a densidade de potência espectral (MILLERS; CHILDERS, 2012) é definida como

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} [|x(t)|^2] \quad (4.14)$$

onde \mathbf{E} equivale ao valor esperado desta variável, que é definido explicitamente como,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [|x(t)|^2] &= \mathbf{E} \left[\frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) e^{i\omega t} dt \int_0^T x(t') e^{-i\omega t'} dt' \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \mathbf{E} [x^*(t) x(t')] \cdot e^{i\omega(t-t')} dt dt' \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ao se fazer uma mudança de variável na última igualdade, tal que $\Delta t = t - t'$, então os limites de integração se aproximam de infinito. Como consequência, a densidade de potência espectral resultante $S_{xx}(\omega)$ e a função de autocorrelação deste sinal serão pares de transformadas de Fourier como resultado do teorema de Wiener-Khinchin ([CHATFIELD, 2003](#)). Assim, a função de autocorrelação é uma grandeza estatística definida por

$$R_{xx}(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \mathbf{E} [x(t)x(t+\tau)], \quad (4.16)$$

de maneira mais generalizada, têm-se que

$$R_{xx}(\tau) = \langle x(t)x(t-\tau)^* \rangle = \langle x(t)^* x(t+\tau) \rangle. \quad (4.17)$$

onde $x(t)$ é uma função complexa. E quando R_{xx} é absolutamente integrável, a densidade de espectro de potência pode ser definido como se vê na equação (4.18) ([GRIMMETT; GRIMMETT; STIRZAKER, 2001](#)).

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \hat{R}_{xx}(\omega) \quad (4.18)$$