



Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Eletrônica

Aplicações do Cálculo Conformável no Eletromagnetismo

Autor: Lucas Teixeira Gonçalves Feitoza
Orientador: Professor Doutor Ronni Geraldo Gomes de Amorim

Brasília, DF
2023



Lucas Teixeira Gonçalves Feitoza

Aplicações do Cálculo Conformável no Eletromagnetismo

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Eletrônica da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Professor Doutor Ronni Geraldo Gomes de Amorim

Brasília, DF

2023

Lucas Teixeira Gonçalves Feitoza

Aplicações do Cálculo Conformável no Eletromagnetismo/ Lucas Teixeira Gonçalves Feitoza. – Brasília, DF, 2023-

99 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Professor Doutor Ronni Geraldo Gomes de Amorim

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2023.

1. Cálculo. 2. Conformável. 3. Derivada. 4. Integral. 5. Circuitos eletrônicos.
I. Professor Doutor Ronni Geraldo Gomes de Amorim. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Aplicações do Cálculo Conformável no Eletromagnetismo

Lucas Teixeira Gonçalves Feitoza

Aplicações do Cálculo Conformável no Eletromagnetismo

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Eletrônica da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Eletrônica.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, :

**Professor Doutor Ronni Geraldo
Gomes de Amorim**
Orientador

**Professor Doutor Vinicius de
Carvalho Rispoli**
Convidado 1

**Professora Doutora Tatiane da Silva
Evangelista**
Convidado 2

Brasília, DF
2023

Agradecimentos

Durante essa longa jornada neste curso, muitas pessoas contribuíram para a chegada deste momento. Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado força e perseverança em meu caminho. Agradeço também ao professor Ricardo Fragelli, que no primeiro semestre me apresentou a matéria de Cálculo que tem sido minha principal paixão dentro do curso, e inclusive é parte do tema deste trabalho.

Em segundo lugar agradeço aos meus colegas de curso, em especial o Mateus Alencar e a Camilla Alves, que se tornaram importantes amizades, e que sem seu apoio e ajuda, não seria possível chegar até aqui. Também agradeço aos meus pais e familiares que me deram auxílio e por toda a paciência que tiveram durante esse tempo e por fim, agradeço a minha namorada Maria Julia que é o meu porto seguro e que nunca me deixou desistir mesmo nas dificuldades.

Resumo

Este trabalho se divide em duas etapas, a primeira consiste na aplicação do cálculo conformável nos circuitos elétricos RC e RLC , cujas respostas usuais são equações diferenciais de primeira e de segunda ordens. Inicialmente, o cálculo conformável é introduzido, suas propriedades de derivação e integração conformável são demonstradas e toda a base teórica necessária para aplicar este tipo de cálculo fracionário é construída. Após esta etapa introdutória, com as propriedades do cálculo conformável bem cimentadas, é possível aplicá-lo em análises de situações reais e de sistemas físicos, tais como os circuitos citados. Na fase seguinte do trabalho constitui-se da modelagem matemática destes circuitos de duas formas distintas. A primeira a partir do cálculo de ordem inteira e a segunda do cálculo conformável, afim de compará-las fazendo seu paralelo durante as demonstrações. Ao completar ambas as modelagens e deduzir as equações das tensões em cada componente e da corrente dos circuitos é viabilizado a análise gráfica das respostas obtidas para observar suas características e as diferenças entre os resultados encontrados em cada modelagem. A segunda etapa consiste na aplicação do cálculo conformável no eletromagnetismo, construindo a teoria necessária, deduzindo conformavelmente o Teorema da Divergência de Gauss, o Teorema de Stokes e o de Teorema de Green, para então obter as Equações de Maxwell Conformáveis e partir delas deduzir a Equação Geral Conformável da Onda.

Palavras-chaves: Cálculo conformável. Cálculo fracionário. Ordem inteira. Derivada. Integral. Circuitos elétricos. Teorema da Divergência de Gauss. Teorema de Green. Teorema de Stokes. Equações de Maxwell. Equação Geral da Onda.

Abstract

This work is divided into two stages, the first consists in the application of conformable calculus into electrical circuits RC and RLC , whose usual answers are first and second order differential equations. Initially, conformable calculus is introduced, its derivation and conformable integration properties are demonstrated and all the theoretical basis necessary to apply this type of fractional calculus is built. After this introductory step, with the properties of conformable calculus well established, it is possible to apply it in analyzes of real situations and physical systems, such as the aforementioned circuits. The following stage of the work consists in the mathematical modeling of these circuits in two different ways. The first from the integer order calculus and the second from the conformable calculus, in order to compare them, drawing their parallel during the proofs. When completing both models and deducing the equations of voltages in each component and the current of the circuits, it is possible to graphically analyze the responses obtained to observe their characteristics and the differences between the results found in each model. The second stage consists of applying the conformable calculus in electromagnetism, building the necessary theory, conformably deducing Gauss's Divergence Theorem, Stokes's Theorem and Green's Theorem, for then to obtain the Conformable Maxwell's Equations and from them to deduce the General Equation Wave Conformable.

Key-words: Conformable calculus. Fractional calculus. Integer order. Derivative. Integral. Electric circuits. Gauss's Divergence Theorem. Green's Theorem. Stokes's Theorem. Maxwell's Equations. General Wave Equation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Circuito RC	54
Figura 2 – Circuito RLC	60
Figura 3 – Tensão no capacitor do Circuito <i>RC</i>	77
Figura 4 – Corrente do Circuito <i>RC</i>	78
Figura 5 – Tensão no resistor do Circuito <i>RC</i>	78
Figura 6 – Tensão no capacitor do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N > \omega$	79
Figura 7 – Tensão no capacitor do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N = \omega$	79
Figura 8 – Tensão no capacitor do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N < \omega$	80
Figura 9 – Corrente do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N > \omega$	80
Figura 10 – Corrente do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N = \omega$	81
Figura 11 – Corrente do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N < \omega$	81
Figura 12 – Tensão no resistor do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N > \omega$	82
Figura 13 – Tensão no resistor do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N = \omega$	82
Figura 14 – Tensão no resistor do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N < \omega$	82
Figura 15 – Tensão no indutor do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N > \omega$	83
Figura 16 – Tensão no indutor do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N = \omega$	83
Figura 17 – Tensão no indutor do Circuito <i>RLC</i> - $\omega_N < \omega$	84
Figura 18 – Solução da Equação da Onda Conformável	95

Lista de abreviaturas e siglas

Circuito RC Circuito com um resistor e um capacitor

Circuito RLC Circuito com um resistor, um capacitor e um indutor

EDO Equação diferencial ordinária

PVI Problema de valor inicial

Lista de símbolos

α	Letra grega minúscula Alfa
\in	Pertence
Δ	Letra grega maiúscula Delta
\forall	Para todo
	Tal que
Σ	Letra grega maiúscula Sigma, símbolo do Somatório
Π	Letra grega maiúscula Pi, símbolo do Produtório
ε	Letra grega minúscula Épsilon
μ	Letra grega minúscula Mu
ξ	Letra grega minúscula Xi
ω	Letra grega minúscula Ômega

Sumário

	Introdução	19
1	INTRODUÇÃO AO CÁLCULO CONFORMÁVEL	21
1.1	Derivadas Conformáveis	22
1.2	Integrais Conformáveis	30
1.3	Séries de Taylor Conformáveis	32
2	CÁLCULO CONFORMÁVEL EM TRÊS DIMENSÕES	37
2.1	Derivada Conformável de funções multivariáveis	37
2.2	Cálculo Vetorial Conformável	39
2.2.1	Gradiente Conformável	39
2.2.2	Divergente Conformável	39
2.2.3	Rotacional Conformável	39
2.2.4	Propriedades do operador de <i>nabla</i> conformável	40
2.3	Dedução do Teorema da Divergência de Gauss pelo cálculo de ordem inteira	45
2.4	Dedução do Teorema da Divergência de Gauss pelo cálculo conformável	48
2.5	Dedução do Teorema de Green pelo cálculo conformável	51
2.6	Dedução do Teorema de Stokes pelo cálculo conformável	52
3	APLICAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL CONFORMÁVEL EM CIRCUITOS ELÉTRICOS	53
3.1	Modelagem Matemática de um Circuito RC com o Cálculo Diferencial de Ordem Inteira	54
3.2	Modelagem Matemática de um Circuito RC com o Cálculo Diferencial Conformável	57
3.3	Modelagem Matemática de um Circuito RLC com o Cálculo Diferencial de Ordem Inteira	60
3.4	Modelagem Matemática de um Circuito RLC com o Cálculo Diferencial Conformável	69
3.5	Percepções acerca das análises gráficas dos resultados obtidos	77
4	EQUAÇÕES DE MAXWELL CONFORMÁVEIS	85
4.1	Lei de Gauss Conformável	85
4.2	Lei de Gauss Conformável para o Magnetismo	87

4.3	Lei de Ampère-Maxwell Conformável	89
4.4	Lei de Faraday-Lenz Conformável	91
4.5	Equação Geral Conformável da Onda	92
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
	REFERÊNCIAS	99

Introdução

A ideia do cálculo de ordem fracionária surgiu em 1965 em uma troca de cartas entre importantes personagens da história das ciências no geral, l'Hôpital e Leibniz, onde como citado por Carvalho (CARVALHO; OTTONI, 2018), enquanto Leibniz o propôs uma generalização da derivada inteira, l'Hôpital o questionou sobre o que ocorreria no caso especial caso a ordem fosse igual a meio. Décadas se passaram e muito já foi estudado e desenvolvido sobre o assunto, formulações matemáticas foram desenvolvidas, em especial as de Riemann-Liouville e as de Caputo que são duas das principais, e as aplicações, como o oscilador harmônico fracionário por exemplo, crescem cada vez mais no campo da engenharia e da física. Neste trabalho será abordado um tipo diferente de cálculo fracionário, que será descrito mais adiante.

O cálculo conformável foi apresentado por Khalil (KHALIL et al., 2014) no ano de 2014 com objetivo de definir um novo tipo de derivada fracionária, uma derivada de ordem α onde $0 < \alpha < 1$, de modo que ao tender esta derivada a unidade retoma-se o valor da derivada de primeira ordem. Como sua ordem varia entre zero e um ela por definição é um tipo de derivada fracionária, no entanto, existe certa polaridade neste argumento e alguns autores não a consideram como tal, devido as características particulares que este tipo de derivada possui que os demais tipos de derivadas fracionárias não. Uma aplicação bem recente sobre este tema foi apresentada por (CARDOSO et al., 2022), onde é abordado uma nova visão da Mecânica Clássica a partir do cálculo conformável e suas definições o aplicando na construção da equação da onda conformável.

O cálculo diferencial tem sido usado por séculos, com as mais diversas aplicações desde a mecânica newtoniana até a relatividade de Einstein, suas aplicações no campo das ciências e indiscutível e isto, pode levantar o questionamento do porquê se utilizar um novo tipo de cálculo quando o cálculo de ordem inteira já tem servido a humanidade há tanto tempo e proporcionando tantas contribuições. Comparar o cálculo de ordem inteira com o cálculo conformável se assimila a comparar uma frondosa árvore com centenas de anos de idade e que já se desenvolveu e já deu uma quantidade infindável de frutos com um pequeno broto que há pouco germinou, em que não se sabe quais alturas irá alcançar e nem que tipo de frutos poderá dar. É neste ponto em que se encontra o ponto chave deste questionamento, as possibilidades. O cálculo conformável é uma tela praticamente em branco, pronta para ser pintada como se desejar, pronta para ser usada e testada nos mais diversos campos da física e da engenharia, aplicada a problemas teóricos e práticos.

E se determinadas equações diferenciais de um sistema massa-mola forem melhor modeladas a partir de do cálculos conformável? E se o centro de gravidade de determinado

objeto for obtido de forma mais simples pelo cálculo conformável? E se ao analisar um sistema de amortecimento for possível obter um amortecimento mais rápido ou mais eficiente do que o encontrado a partir do cálculo de ordem inteira? São esses "e se" que demonstram a importância dessa ferramenta, a simples possibilidade de encontrar respostas mais eficientes, ou mais simples, já fazem valer a pena sua aplicação. Esses questionamentos serviram de base para alimentar a semente que se tornou a motivação deste trabalho. Ao notar a quantidade de aplicações que esta ferramenta proporciona, foi pensado em aplicá-la num tema relevante na engenharia eletrônica. A partir disso, foi levantado a questão, qual será a diferença ao se calcular um circuito elétrico a partir da ótica conformável? Seria possível encontrar soluções ainda mais eficientes ou que trouxessem aplicações diferentes das usuais?

Ao encontrar a motivação e o tema a ser trabalhado, restou apenas definir o como ele seria abordado. Desta forma, foi decidido que assim como no início de um curso de engenharia o cálculo de ordem inteira é construído do básico, seria importante e necessário fazer o mesmo com o cálculo conformável. O primeiro capítulo é um capítulo introdutório ao cálculo conformável, onde será construída as definições das derivadas e integrais conformáveis, e onde serão demonstradas as suas propriedades e características principais e mais relevantes para o restante do trabalho. O segundo, apresenta o cálculo conformável para três dimensões, o cálculo vetorial conformável, bem como as propriedades dos operadores conformáveis, além disso, serão também definidos os teoremas da Divergência de Gauss, de Stokes e de Green conformáveis.

Com o cálculo conformável e suas propriedades bem construídos, será iniciado a fase de aplicação da ferramenta no âmbito da engenharia em si. No terceiro capítulo, inicia-se essa etapa de aplicação e para fazer isso, foi decidido fazer as modelagens matemáticas de duas formas, a primeira utilizando o cálculo de ordem inteira e suas relações já bem conhecidas para servir de base e de comparação para a segunda modelagem que é a aplicação do cálculo conformável. Dito isso, a divisão do terceiro capítulo seguirá esta abordagem, onde primeiramente será modelado o circuito RC de primeira ordem com ambos os cálculos, e depois o circuito RLC de segunda ordem da mesma forma; Por fim, no final do terceiro capítulo, será discutido os resultados obtidos e também apresentado os gráficos das equações encontradas e os mesmos serão analisados e comparados com os resultados obtidos a partir do cálculo de ordem inteira. No quarto capítulo, o cálculo conformável será aplicado a um tema de grande importância para o âmbito da engenharia e da física, as equações da Maxwell e a equação geral da onda. A partir da base de cálculo construída no segundo capítulo será possível definir as quatro Equações de Maxwell Conformáveis e a partir delas obter a Equação Geral da Onda.

1 Introdução ao cálculo conformável

O cálculo conformável é uma ferramenta matemática recente e com poucos estudos desenvolvidos de suas aplicações. Apresentada por Khalil (KHALIL *et al.*, 2014) com a intenção de obter um tipo de derivada fracionária cujas propriedades se parecessem mais com as da derivada de ordem inteira, o que de fato ele obteve e estudada mais a fundo por Abdeljawad (ABDELJAWAD, 2015) que descreveu de forma mais pontual suas propriedades.

Como citado por Cardoso (CARDOSO *et al.*, 2022), há uma disparidade quanto sua classificação dentro do ramo do cálculo, para alguns autores, ele se enquadra como uma vertente do cálculo de ordem fracionária, para outros, no entanto, essa questão ainda se apresenta como discutível, pois não os mesmos consideram a sua derivada como uma derivada fracionária autêntica.

Isso ocorre porque a derivada conformável não apresenta algumas das particularidades que caracterizam as derivadas fracionárias como as de Riemann-Liouville e Caputo, tais como o efeito de memória, além disso, a derivada conformável satisfaz algumas propriedades que as derivadas fracionárias não, como será demonstrado posteriormente neste trabalho. Além disso, uma importante propriedade das derivadas conformáveis é que ao tender o índice conformável a unidade os valores da derivada de ordem inteira são resgatados.

Por ser uma ferramenta muito jovem, existem poucos estudos sobre a mesma e suas aplicações, há inúmeros campos na matemática, na física e na engenharia em que ainda não foram analisados e modelados por meio de uma abordagem conformável. Por isso, o objetivo desse trabalho é aplicar essa ferramenta em alguns temas da engenharia, modelá-los matematicamente a partir do cálculo conformável e analisar os resultados obtidos ao compará-los com os resultados que se obtém ao utilizar o cálculo diferencial de ordem inteira.

Neste capítulo, será construído o cálculo conformável, partindo da derivada, primeiramente ela e suas particularidades serão definidos, e com isso, será necessário apresentar suas propriedades e demonstrá-las, para que sejam comprovadas as diferenças entre esse tipo de derivada e a derivada de ordem fracionária.

Com a derivada definida, é possível aplicá-la aos mais diversos tipos de funções, afim de observar as diferenças entre os resultados encontrados e o que seria obtido em uma derivada comum. Após exemplificar as derivadas conformáveis será construído o cálculo integral conformável, suas definições, características e particularidades. Por fim, será apresentado também as séries de Taylor conformáveis e a sua construção.

1.1 Derivadas Conformáveis

Nesta seção será construída a derivada conformável. Para uma função $f(t)$ tal que $f : [0, \infty) \rightarrow \infty$, sua derivada conformável de ordem α de f é, por definição, dada por:

$$D_t^\alpha(f(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + ht^{1-\alpha}) - f(t)}{h} = f'(t)t^{1-\alpha}. \quad (1.1)$$

Para que esta derivada seja realmente caracterizada como conformável, α deve tender a unidade, ou seja, $\alpha \in (0, 1)$. Portanto, as derivadas conformáveis nada mais são do que um produto da derivada de ordem inteira pelo termo $t^{1-\alpha}$, mas vale lembrar que nem toda função diferenciável também é α -diferenciável.

Com a derivada conformável já bem definida, para prosseguir na análise é necessário demonstrar as propriedades que a regem, por isso, agora será demonstrado as cinco principais.

Seja $\alpha \in (0, 1)$, $f(t)$ e $g(t)$ funções α -diferenciáveis para $t > 0$, é possível observar as seguintes propriedades a seguir.

Propriedade 1: Continuidade de $f(t) \forall t > 0$.

Demonstração. Tomando a constante C de forma que: $C \in \mathbb{R}$ tal que $C > 0$

A derivada conformável no ponto C é dada pela relação abaixo:

$$D_t^\alpha(f(C)) = \lim_{t \rightarrow C} \frac{f(t) - f(Ct^{1-\alpha})}{t - C} = f'(C)t^{1-\alpha}, \text{ visto que por definição } f(t) \text{ é } \alpha\text{-diferenciável.} \quad \square$$

Propriedade 2: Linearidade de $f(t)$.

$$D_t^\alpha(af(t) + bg(t)) = aD_t^\alpha(f(t)) + bD_t^\alpha(g(t)).$$

Demonstração. Sejam a e b constantes reais, dados por $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a, b \neq 0$, pela definição, temos:

$$D_t^\alpha(af(t) + bg(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(t + ht^{1-\alpha}) + bg(t + ht^{1-\alpha}) - af(t) - bg(t)}{h}.$$

Isolando os termos que multiplicam as constantes e separando os limites,

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(t + ht^{1-\alpha}) - af(t)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{bg(t + ht^{1-\alpha}) - bg(t)}{h} \\ &= a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + ht^{1-\alpha}) - f(t)}{h} + b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t + ht^{1-\alpha}) - g(t)}{h} \\ &= aD_t^\alpha(f(t)) + bD_t^\alpha(g(t)). \end{aligned}$$

□

Propriedade 3: Derivada conformável de uma constante.

$$D_t^\alpha(k) = 0.$$

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{R}$, por definição sua derivada conformável é dada por:

$$D_t^\alpha(k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k) - f(k)}{h} = 0.$$

□

Propriedade 4.1: Derivada conformável do produto.

$$D_t^\alpha(f(t)g(t)) = D_t^\alpha(f(t))g(t) + D_t^\alpha(g(t))f(t).$$

Demonstração. Pela definição a derivada conformável de $f(t)g(t)$ é dada por:

$$D_t^\alpha(f(t)g(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + ht^{1-\alpha})g(t + ht^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{h}.$$

Manipulando a equação ao somar e subtrair o termo $g(t + ht^{1-\alpha})f(t)$, não se altera o valor do limite, mas possibilita um agrupamento de termos relevante para a demonstração.

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + ht^{1-\alpha})g(t + ht^{1-\alpha}) - g(t + ht^{1-\alpha})f(t) + g(t + ht^{1-\alpha})f(t) - f(t)g(t)}{h},$$

Agrupando os termos em dois produtos e separando os limites, temos:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t + ht^{1-\alpha})(f(t + ht^{1-\alpha}) - f(t)) + f(t)(g(t + ht^{1-\alpha}) - g(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t + ht^{1-\alpha})(f(t + ht^{1-\alpha}) - f(t))}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t)(g(t + ht^{1-\alpha}) - g(t))}{h}, \end{aligned}$$

Observando o limite da esquerda, nota-se que quando $h \rightarrow 0$, $g(t + ht^{1-\alpha}) \rightarrow g(t)$, e devido a esse fato, é possível retirar $g(t)$ do limite assim como com $f(t)$.

$$\begin{aligned} &= g(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + ht^{1-\alpha}) - f(t)}{h} + f(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t + ht^{1-\alpha}) - g(t)}{h} \\ &= D_t^\alpha(f(t))g(t) + D_t^\alpha(g(t))f(t). \end{aligned}$$

□

Propriedade 4.2: Derivada conformável do quociente.

$$D_t^\alpha \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) = \frac{D_t^\alpha(f(t))g(t) - D_t^\alpha(g(t))f(t)}{g^2(t)}.$$

Demonstração. Pela definição, a derivada conformável do quociente é dada por:

$$D_t^\alpha \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t+ht^{1-\alpha})}{g(t+ht^{1-\alpha})} - \frac{f(t)}{g(t)}}{h}.$$

De forma análoga com que foi provada a derivada conformável do produto, é possível provar a do quociente. Desta vez, no entanto, será utilizado o termo $\frac{f(t)}{g(t+ht^{1-\alpha})}$ para somar e subtrair.

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(t+ht^{1-\alpha})}{g(t+ht^{1-\alpha})} - \frac{f(t)}{g(t+ht^{1-\alpha})} + \frac{f(t)}{g(t+ht^{1-\alpha})} - \frac{f(t)}{g(t)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(t+ht^{1-\alpha})} (f(t+ht^{1-\alpha}) - f(t)) - f(t) \left(\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(t+ht^{1-\alpha})} \right) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(t+ht^{1-\alpha})} \frac{f(t+ht^{1-\alpha}) - f(t)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t)}{h} \frac{g(t+ht^{1-\alpha}) - g(t)}{g(t+ht^{1-\alpha})g(t)} \\ &= \frac{1}{g(t)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+ht^{1-\alpha}) - f(t)}{h} - \frac{f(t)}{g^2(t)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+ht^{1-\alpha}) - g(t)}{h} \\ &= \frac{1}{g(t)} D_t^\alpha(f(t)) - \frac{f(t)}{g^2(t)} D_t^\alpha(g(t)) \\ &= \frac{D_t^\alpha(f(t))g(t) - D_t^\alpha(g(t))f(t)}{g^2(t)}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 5: Derivada conformável da cadeia.

$$D_t^\alpha(f(g(t))) = D_{g(t)}^\alpha(f(g(t))) \cdot D_t^\alpha(g(t)) \cdot g^{\alpha-1}(t).$$

Demonstração. Assim como para a derivada inteira, há mais de uma forma de escrever a definição da derivada conformável. Tais como:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha(f(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+ht^{1-\alpha}) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t \cdot t^{1-\alpha}) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} t^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

A partir dessas variações da definição da derivada conformável, obtém-se a seguinte relação.

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t \cdot t^{1-\alpha}) - f(t) &= \Delta f \cdot f^{1-\alpha}(t) \\ f(t + \Delta t \cdot t^{1-\alpha}) &= f(t) + \Delta f \cdot f^{1-\alpha}(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Pela definição, $D_t^\alpha(f(g(t)))$ é dado por:

$$D_t^\alpha(f(g(t))) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \Delta t \cdot t^{1-\alpha})) - f(g(t))}{\Delta t} \quad (1.3)$$

A partir da Eq. (1.2), infere-se que:

$$g(t + \Delta t \cdot t^{1-\alpha}) = g(t) + \Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t) \quad (1.4)$$

Substituindo a Eq. (1.4) na Eq. (1.3), temos:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha(f(g(t))) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(g(t + \Delta t \cdot t^{1-\alpha})) - f(g(t))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(g(t) + \Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)) - f(g(t))}{\Delta t} \end{aligned}$$

Assim como somar o elemento neutro da adição não altera uma equação, o mesmo ocorre ao multiplicar o elemento neutro da multiplicação. Usando deste fato, é possível utilizar um segundo tipo de manipulação algébrica que permite o agrupamento dos termos necessários para completar a demonstração. Desta vez será multiplicado o termo $\frac{\Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)}{\Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)}$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(g(t) + \Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)) - f(g(t))}{\Delta t} \frac{\Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)}{\Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(g(t) + \Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)) - f(g(t))}{\Delta g} \frac{\Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)}{\Delta t} \frac{1}{g^{1-\alpha}(t)}. \end{aligned}$$

Retirando o termo $\frac{1}{g^{1-\alpha}(t)}$ do limite e utilizando novamente da relação da Eq. (1.4), temos:

$$g^{\alpha-1}(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(g(t) + \Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)) - f(g(t))}{\Delta g} \frac{g(t + \Delta g \cdot t^{1-\alpha}) - g(t)}{\Delta t},$$

Isolando o Δg na Eq. (1.4), obtêm-se:

$$\Delta g = (g(t + \Delta g \cdot t^{1-\alpha}) - g(t))g^{\alpha-1}(t). \quad (1.5)$$

A partir da Eq. (1.5), é fácil notar que quando $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta g \rightarrow (g(t) - g(t))g^{\alpha-1}(t) = 0$. Devido a isso, podemos é possível separar a relação obtida em dois limites diferentes mudando o incremento do limite da esquerda para Δg .

$$\begin{aligned} D_t^\alpha(f(g(t))) &= g^{\alpha-1}(t) \cdot \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{f(g(t) + \Delta g \cdot g^{1-\alpha}(t)) - f(g(t))}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta g \cdot t^{1-\alpha}) - g(t)}{\Delta t} \\ &= D_{g(t)}^\alpha(f(g(t))) \cdot D_t^\alpha(g(t)) \cdot g^{\alpha-1}(t). \end{aligned}$$

□

Com as propriedades da derivada conformável demonstradas e a partir da definição da derivada conformável mostrada na Eq. (1.1), é possível obter as derivadas conformáveis das funções conhecidas, sendo elas α -diferenciáveis. A seguir serão demonstradas algumas delas bem como generalizações para as derivadas de ordem n de α .

Dos exemplos que serão mostrados, primeiramente, será demonstrado as derivadas conformáveis para as funções algébricas. A primeira de todas é a função t^k , onde k é uma constante qualquer, depois será demonstrado as derivadas de funções onde as potências também apresentam o termo α no expoente, seja ele sozinho ou em conjunto com um número inteiro.

$$\begin{aligned} D_t^\alpha(t^k) &= kt^{k-1}t^{1-\alpha} = kt^{k-\alpha} \\ (D_t^\alpha)^2(t^k) &= k(k-\alpha)t^{k-\alpha-1}t^{1-\alpha} = k(k-\alpha)t^{k-2\alpha} \\ (D_t^\alpha)^3(t^k) &= k(k-\alpha)(k-2\alpha)t^{k-2\alpha-1}t^{1-\alpha} = k(k-\alpha)(k-2\alpha)t^{k-3\alpha} \\ &\vdots \\ (D_t^\alpha)^n(t^k) &= k(k-\alpha) \cdots (k-(n-1)\alpha)t^{k-n\alpha} \\ &= \prod_{i=1}^n (k-(i-1)\alpha)t^{k-i\alpha}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Foi observado nas derivadas de ordem α a 3α que o termo "1" do expoente sempre é cancelado restando somente o termo k decrementado de múltiplos de α de valor em módulo igual a ordem da derivada.

A partir desses resultados obtidos é possível encontrar o comportamento dessa derivada para uma ordem n qualquer e isso em si já a diferencia da derivada de ordem inteira, visto que para ela, só é possível derivar k vezes até que a mesma se torne igual

a 0, diferentemente do que foi mostrado na derivada conformável, onde é possível derivar indefinidamente.

De forma similar, será observado o comportamento das derivadas de ordem α para outros termos a seguir. Tomando então $f(t) = t^{1-\alpha}$, sua derivada é dada por:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha(t^{1-\alpha}) &= (1-\alpha)t^{1-\alpha-1}t^{1-\alpha} = (1-\alpha)t^{1-2\alpha} \\ (D_t^\alpha)^2(t^{1-\alpha}) &= (1-\alpha)(1-2\alpha)t^{1-2\alpha-1}t^{1-\alpha} = (1-\alpha)(1-2\alpha)t^{1-3\alpha} \\ &\vdots \\ (D_t^\alpha)^n(t^{1-\alpha}) &= (1-\alpha)(1-2\alpha)\cdots(1-n\alpha)t^{1-(n+1)\alpha} \\ &= \prod_{i=1}^n (1-i\alpha)t^{1-(i+1)\alpha}. \end{aligned}$$

Para essa função, é observado que o termo "1" dessa vez se mantém constante ao invés de ser cancelado como na função anterior, além disso, o número que acompanha α da função algébrica se mostrou sempre com uma unidade acima, em módulo, da ordem da derivada conformável e esta função também se mostrou indefinidamente diferenciável conformavelmente. Testando agora para a função $f(t) = t^{\alpha-1}$.

$$\begin{aligned} D_t^\alpha(t^{\alpha-1}) &= (\alpha-1)t^{\alpha-2}t^{1-\alpha} = -(1-\alpha)t^{-1} \\ (D_t^\alpha)^2(t^{\alpha-1}) &= (1-\alpha)t^{-2}t^{1-\alpha} = (1-\alpha)t^{-1-\alpha} \\ (D_t^\alpha)^3(t^{\alpha-1}) &= -(1-\alpha)(1+\alpha)t^{-2-\alpha}t^{1-\alpha} = -(1-\alpha)(1+\alpha)t^{-1-2\alpha} \\ (D_t^\alpha)^4(t^{\alpha-1}) &= (1-\alpha)(1+\alpha)(1+2\alpha)t^{-2-2\alpha}t^{1-\alpha} = (1-\alpha)(1+\alpha)(1+2\alpha)t^{-1-3\alpha} \\ &\vdots \\ (D_t^\alpha)^n(t^{\alpha-1}) &= (-1)^n(1-\alpha)(1+\alpha)(1+2\alpha)\cdots(1+(n-2)\alpha)t^{-1-(n-1)\alpha} \\ &= \prod_{i=1}^n (-1)^i(1+(i-2)\alpha)t^{-1-(i-1)\alpha}. \end{aligned}$$

Como esperado, essa função apresenta uma resposta bem parecida com a da função anterior, só que desta vez o termo "1" se mantém constante e negativo, a função também pode ser derivada indefinidamente, mas dessa vez o termo que acompanha α se mostra em uma ordem abaixo da ordem da derivada, ao invés de uma ordem acima. Por fim, será demonstrado a derivada de $\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)$.

$$D_t^\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \frac{\alpha}{\alpha}t^{\alpha-1}t^{1-\alpha} = 1.$$

Foi encontrado então, o que será chamado de função algébrica conformável, cuja derivada é igual a unidade, e consequentemente, não pode ser derivada indefinidamente. Agora, será demonstrado as derivadas de algumas das funções trigonométricas.

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha(\operatorname{sen}(kt)) &= kt^{1-\alpha}\cos(kt) \\
D_t^\alpha(\cos(kt)) &= -kt^{1-\alpha}\operatorname{sen}(kt) \\
D_t^\alpha\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)\right) &= t^{1-\alpha}\frac{\alpha}{\alpha}t^{\alpha-1}\cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$D_t^\alpha\left(\cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)\right) = -t^{1-\alpha}\frac{\alpha}{\alpha}t^{\alpha-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right). \tag{1.8}$$

As duas primeiras equações representam as derivadas conformáveis do seno e do cosseno comuns, cujo argumento possui uma constante k qualquer. Já nas Eq. (1.7) e Eq. (1.8) observamos as versões conformáveis do seno e do cosseno, e assim como elas, todas as demais funções trigonométricas também possuem a sua versão conformável.

Será demonstrado a seguir as derivadas conformáveis de funções exponenciais.

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha(e^{kt}) &= ke^{kt}t^{1-\alpha} \\
D_t^\alpha(te^t) &= (e^t - te^t)t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha}e^t - t^{2-\alpha}e^t \\
D_t^\alpha(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}) &= \frac{\alpha}{\alpha}t^{\alpha-1}e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}t^{1-\alpha} = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

A primeira essa equação desse conjunto representa a derivada conformável de uma exponencial comum com expoente, com k sendo uma constante qualquer, na segunda equação, nota-se a derivada da regra do produto entre uma função algébrica t com um a função exponencial, ambas comuns. Por fim, na Eq. (1.9) é possível observar a exponencial conformável, que será bastante utilizada em tópicos posteriores desse trabalho.

Como último exemplo para análise, será demonstrado as derivadas do logaritmo neperiano.

$$D_t^\alpha(\ln(kt)) = t^{1-\alpha}\frac{k}{kt} = t^{-1}t^{1-\alpha} = t^{-\alpha} \tag{1.10}$$

$$D_t^\alpha\left(\ln\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)\right) = t^{1-\alpha}\frac{1}{t^\alpha}\frac{\alpha}{\alpha}t^{\alpha-1} = t^{-\alpha}. \tag{1.11}$$

Nas Eq. (1.10) e Eq. (1.11) observa-se um interessante resultado, o logaritmo neperiano da função algébrica comum e da conformável apresentaram praticamente mesma derivada, mudando somente a constante que as acompanham, além disso, pela primeira vez o termo $\frac{1}{\alpha}$ não foi cancelado como nas outras derivadas. Essa similaridade se deve às propriedades logarítmicas onde:

$$\begin{aligned}
\ln(kt) &= \ln(k) + \ln(t) \\
\ln\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) &= \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \alpha\ln(t).
\end{aligned}$$

E como as derivadas tanto de $\ln(k)$ quanto $\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ são iguais a zero, no final a deriva dos dois é a mesma, diferenciando-se apenas pelo fator do produto com α .

1.2 Integrais Conformáveis

Com a derivada conformável bem definida, agora nesta seção será construída a definição de uma componente fundamental do cálculo conformável que é a integral. Pela definição, as integrais conformáveis de ordem α são dadas por:

$$I_a^\alpha f(t) = \int_a^t (\xi - a)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi = \int_a^t f(\xi) d_a^\alpha \xi. \quad (1.12)$$

Uma das mais importantes propriedades da integral é a sua relação com a derivada, sendo por muitos chamada de "anti-derivada". Assim como para as derivadas e integrais de ordem inteira são de certa forma inverso, ou seja quando aplicados a integral de uma derivada de uma função, ou vice versa, a função se mantém invariável, também ocorre o mesmo para as derivadas e integrais conformáveis para $a = 0$ e $\alpha \in (0, 1)$, como será demonstrado a seguir.

O que se deseja provar é que:

$$I^\alpha D_t^\alpha(f(t)) = f(t) - f(a).$$

Substituindo a definição de integral conformável mostrada na Eq. (1.12), temos:

$$I^\alpha D_t^\alpha(f(t)) = \int_0^t (\xi)^{\alpha-1} D_t^\alpha f(\xi) d\xi,$$

Pela definição da derivada conformável, como visto na Eq. (1.1), podemos substituir os termos da integral de forma que a mesma possa ser escrita da seguinte forma:

$$\int_0^t (\xi)^{\alpha-1} (\xi)^{1-\alpha} f'(\xi) d\xi = \int_0^t f'(\xi) d\xi = [f(\xi)]_0^t = f(t) - f(0). \quad (1.13)$$

O que finaliza está demonstração, provando no cálculo conformável é mantida a mesma relação entre a derivada e a integral. Para exemplificar, será demonstrado a integral de kt e depois será feita a conferência com a derivada do resultado obtido para verificar se a derivada retorna o valor da integral, ou seja, se ela retorna para kt .

$$\begin{aligned} I_0^\alpha(kt) &= \int_0^t (\xi)^{\alpha-1} k\xi d\xi = k \int_0^t (\xi)^\alpha d\xi \\ &= k \left[\frac{\xi^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right]_0^t = k \frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Onde de fato,

$$D_t^\alpha \left(k \frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right) = kt^{1-\alpha}(1+\alpha) \frac{t^\alpha}{1+\alpha} = kt.$$

Como o cálculo conformável aceita a regra do produto na derivada conformável, é de se esperar que ele obedeça à regra de integração por partes, visto que este tipo de integral é definido como uma integral de um uma derivada do produto.

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ α -diferenciáveis, temos que a integral conformável da derivada do produto entre essas funções é dada por:

$$\begin{aligned} I^\alpha D_t^\alpha(f(t)g(t)) &= \int_0^t (\xi)^{\alpha-1} D_t^\alpha(f(\xi)g(\xi))d\xi \\ &= \int_0^t (\xi)^{\alpha-1} [g(\xi)D_t^\alpha(f(\xi)) + f(\xi)D_t^\alpha(g(\xi))]d\xi, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Além disso, pelo que foi provado na Eq. (1.13),

$$\int_0^t (\xi)^{\alpha-1} D_t^\alpha(f(\xi)g(\xi))d\xi = [f(\xi)g(\xi)]_0^t, \quad (1.15)$$

Logo, substituindo a Eq. (1.15) na Eq. (1.14) e separando seus termos em duas integrais se chega na regra de integração por partes conformável.

$$\begin{aligned} [f(\xi)g(\xi)]_0^t &= \int_0^t (\xi)^{\alpha-1} g(\xi)D_t^\alpha(f(\xi))d\xi + \int_0^t (\xi)^{\alpha-1} f(\xi)D_t^\alpha(g(\xi))d\xi \\ \int_0^t (\xi)^{\alpha-1} f(\xi)D_t^\alpha(g(\xi))d\xi &= [f(\xi)g(\xi)]_0^t - \int_0^t (\xi)^{\alpha-1} g(\xi)D_t^\alpha(f(\xi))d\xi. \end{aligned}$$

Este resultado é uma importante diferenciação entre o cálculo conformável e o cálculo fracionário em suas várias versões, pois como o cálculo fracionário não obedece a regra de derivação do produto, conseqüentemente, ele não possui a propriedade de integração por partes.

Como não há nenhuma particularidades nos demais tipos de integração, como substituição, frações parciais e assim por diante, não será demonstrado neste trabalho esses tipos de integração de forma conformável, visto que as mesmas não serão necessárias nas aplicações práticas que virão a seguir. É ressaltado porém, que qualquer propriedade do cálculo diferencial necessárias nas aplicações serão demonstradas.

1.3 Séries de Taylor Conformáveis

Será apresentada nessa seção as definições e deduções necessárias para se obter as séries de Taylor conformáveis, bem como exemplos para explicitá-las.

Para encontrar a versão conformável da série de Taylor, primeiramente, é necessário considerar uma função $f(t)$ infinitamente α -diferenciável em um ponto qualquer t_0 . Tomando então uma série de potências dada por:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + c_1(t - t_0)^\alpha + c_2(t - t_0)^{2\alpha} + c_3(t - t_0)^{3\alpha} + \cdots + c_n(t - t_0)^{n\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t - t_0)^{n\alpha}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Para determinar o valor de $f(t)$ é necessário encontrar os valores das constantes a determinar, partido de $f(t_0)$, temos:

$$f(t_0) = c_0(t - t_0)^{0\alpha} = c_0,$$

Ao calcular a derivada conformável de $f(t)$, temos:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha(f(t)) &= \alpha c_1(t - t_0)^{\alpha-1}(t - t_0)^{1-\alpha} + 2\alpha c_2(t - t_0)^{2\alpha-1}(t - t_0)^{1-\alpha} \\ &\quad + \cdots + n\alpha c_n(t - t_0)^{n\alpha-1}(t - t_0)^{1-\alpha} \\ &= \alpha c_1 + 2\alpha c_2(t - t_0)^\alpha + 3\alpha c_3(t - t_0)^{2\alpha} + \cdots + n\alpha c_n(t - t_0)^{(n-1)\alpha}, \end{aligned}$$

Calculando então $D_t^\alpha(f(t_0))$ para conseguir encontrar c_1 , obtemos que:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha(f(t_0)) &= \alpha c_1 \\ c_1 &= \frac{1}{\alpha} D_t^\alpha(f(t_0)). \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo procedimento para encontrar c_2 , ou seja, derivando conformavelmente $f(t)$ pela segunda vez, temos:

$$(D_t^\alpha)^2(f(t)) = 2\alpha^2 c_2 + 3 \cdot 2\alpha^2 c_3(t - t_0)^\alpha + \cdots + n(n-1)\alpha^2 c_n(t - t_0)^{(n-2)\alpha}.$$

Logo, a partir de $(D_t^\alpha)^2(f(t_0))$, obtemos que $c_2 = \frac{1}{2\alpha^2} (D_t^\alpha)^2(f(t_0))$.

Fazendo novamente o mesmo processo para explicitar ainda mais esse padrão, temos:

$$(D_t^\alpha)^3(f(t)) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \alpha^3 c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \alpha^3 c_4 (t - t_0)^\alpha + \dots + n(n-1)(n-2) \alpha^3 c_n (t - t_0)^{(n-3)\alpha},$$

Pela derivada acima, calculando-a para o ponto t_0 , encontra-se que c_3 é dado por:

$$c_3 = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \alpha^3} (D_t^\alpha)^3(f(t_0)) = \frac{(D_t^\alpha)^3(f(t_0))}{3! \alpha^3}.$$

Deduz-se, então, que calculando a n -ésima derivada conformável de $f(t)$ e analisando-a pontualmente em t_0 , obtemos que c_n é dado por:

$$c_n = \frac{(D_t^\alpha)^n(f(t_0))}{n! \alpha^n}.$$

Por fim, agora que todos os coeficientes foram determinados podemos reescrever $f(t)$.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D_t^\alpha)^n(f(t_0))}{n! \alpha^n} (t - t_0)^{n\alpha}. \quad (1.17)$$

A Eq. (1.17) obtida acima é a definição da série de Taylor conformável. Para $t_0 = 0$, é encontrado a série de McLaurin conformável que é descrita como:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D_t^\alpha)^n(f(0))}{n! \alpha^n} t^{n\alpha}. \quad (1.18)$$

Para exemplificar, será calculado a série de McLaurin da exponencial conformável. Seja $f(t) = e^{\frac{1}{\alpha} t^\alpha}$, temos:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{\alpha} t^\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D_t^\alpha)^n(e^{\frac{1}{\alpha} 0^\alpha})}{n! \alpha^n} t^{n\alpha} \\ &= 1 + \frac{t^\alpha}{1! \alpha} + \frac{t^{2\alpha}}{2! \alpha^2} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\alpha}}{n! \alpha^n}. \end{aligned}$$

Em tópicos posteriores deste trabalho, será necessário utilizar a relação de Euler conformável, e por conta disso ela será deduzida neste tópico. Como já foi obtida a definição da série de McLaurin conformável, esta dedução se torna possível.

Primeiramente, calculando a série de McLaurin conformável para $f(t) = \text{sen}\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)$.

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D_t^\alpha)^n \left(\text{sen}\left(\frac{1}{\alpha}0^\alpha\right)\right)}{n!\alpha^n} t^{n\alpha} \\ &= \text{sen}(0) + \frac{t^\alpha}{1!\alpha} \cos(0) + \frac{t^{2\alpha}}{2!\alpha^2} (-\text{sen}(0)) \\ &\quad + \frac{t^{3\alpha}}{3!\alpha^3} (-\cos(0)) + \frac{t^{4\alpha}}{4!\alpha^4} \text{sen}(0) + \dots, \end{aligned}$$

Como $\text{sen}(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$, ao substituir essas relações trigonométricas na série do seno, ela se apresenta da seguinte forma:

$$\text{sen}\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{t^{3\alpha}}{3!\alpha^3} + \frac{t^{5\alpha}}{5!\alpha^5} - \frac{t^{7\alpha}}{7!\alpha^7} + \dots \quad (1.19)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{(2n+1)\alpha}}{(2n+1)!\alpha^{2n+1}}. \quad (1.20)$$

Realizando o mesmo procedimento para $f(t) = \cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)$, temos:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D_t^\alpha)^n \left(\cos\left(\frac{1}{\alpha}0^\alpha\right)\right)}{n!\alpha^n} t^{n\alpha} \\ &= \cos(0) + \frac{t^\alpha}{1!\alpha} (-\text{sen}(0)) + \frac{t^{2\alpha}}{2!\alpha^2} (-\cos(0)) \\ &\quad + \frac{t^{3\alpha}}{3!\alpha^3} \text{sen}(0) + \frac{t^{4\alpha}}{4!\alpha^4} \cos(0) + \dots \\ &= 1 - \frac{t^{2\alpha}}{2!\alpha^2} + \frac{t^{4\alpha}}{4!\alpha^4} - \frac{t^{6\alpha}}{6!\alpha^6} + \dots \quad (1.21) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{(2n)\alpha}}{(2n)!\alpha^{2n}}. \quad (1.22)$$

Para completar a relação de Euler, o único termo que falta é a exponencial complexa, fazendo então $f(t) = e^{i\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$.

$$\begin{aligned} e^{i\frac{1}{\alpha}t^\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(D_t^\alpha)^n (e^{i\frac{1}{\alpha}0^\alpha})}{n!\alpha^n} t^{n\alpha} \\ &= 1 + \frac{it^\alpha}{1!\alpha} + \frac{i^2 t^{2\alpha}}{2!\alpha^2} + \frac{i^3 t^{3\alpha}}{3!\alpha^3} + \dots, \end{aligned}$$

Pela relação dos números complexos, as potências de i formam um ciclo, apresentado por $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e assim por diante. Substituindo essas relações complexas na série conformável da exponencial complexa, temos:

$$e^{i\frac{1}{\alpha}t^\alpha} = 1 + \frac{it^\alpha}{\alpha} - \frac{t^{2\alpha}}{2!\alpha^2} - \frac{it^{3\alpha}}{3!\alpha^3} + \frac{t^{4\alpha}}{4!\alpha^4} + \frac{it^{5\alpha}}{5!\alpha^5} - \frac{t^{6\alpha}}{6!\alpha^6} + \dots,$$

Separando os termos reais dos complexos, encontra-se a seguinte relação:

$$e^{i\frac{1}{\alpha}t^\alpha} = \left(1 - \frac{t^{2\alpha}}{2!\alpha^2} + \frac{t^{4\alpha}}{4!\alpha^4} - \frac{t^{6\alpha}}{6!\alpha^6} + \dots\right) + i \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{t^{3\alpha}}{3!\alpha^3} + \frac{t^{5\alpha}}{5!\alpha^5} + \dots\right) \quad (1.23)$$

$$= \cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right). \quad (1.24)$$

Percebe-se que o somatório dos termos reais de (1.23) é idêntico a série conformável do cosseno mostrada em (1.21), enquanto o somatório dos termos complexos é por sua vez idêntico a do seno mostrada em (1.19). Logo, foi obtido a relação de Euler conformável para uma exponencial complexa positiva, e da mesma forma é possível mostrar que $e^{-i\frac{1}{\alpha}t^\alpha} = \cos\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)$.

2 Cálculo Conformável em três dimensões

Neste capítulo, será construída a base de cálculo necessária deduzir as equações de Maxwell conformáveis e a equação geral conformável da onda. Será definido o cálculo diferencial para duas ou mais variáveis, as propriedades dos produtos escalares e vetoriais com o operador de *nabla* conformável, desta forma, será definido o divergente, gradiente e rotacional conformáveis.

Além disso, também será construída as deduções e definições dos teoremas da divergência de Gauss, de Green e de Stokes conformáveis. Estes teoremas são fundamentais para a construção das equações de Maxwell, pois como será demonstrado ao decorrer deste capítulo, será necessário passar de integrais de superfície para de volume, ou para integral de linha e vice versa, o que é característica fundamental destes teoremas.

2.1 Derivada Conformável de funções multivariáveis

O primeiro passo para realizar a construção dessa base de cálculo, será a definição das derivadas parciais conformáveis, visto que todo o cálculo utilizado nos teoremas e equações a partir deste ponto são fundamentados em equações dependentes de mais de uma variável.

Seja $x(t)$ e $y(t)$ funções diferenciáveis em t e $z(t)$, uma função dependente dessas duas variáveis e também diferenciável em t , ou seja, $z(t) = z(x(t), y(t))$. É possível aplicar a definição da derivada conformável vista no primeiro capítulo, primeira sessão, na Eq. (1.1) em $z(t)$.

$$D_t^\alpha(z(t)) = D_t^\alpha(f(x(t), y(t))) = t^{1-\alpha}(f'(x(t), y(t))).$$

E assim como é observado no cálculo de ordem inteira, a derivada de $f(x(t), y(t))$ nada mais é do que a soma de suas derivadas parciais. Logo,

$$= t^{1-\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right).$$

Fazendo a distributiva de $t^{1-\alpha}$, temos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} t^{1-\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} t^{1-\alpha} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} D_t^\alpha(x(t)) + \frac{\partial f}{\partial y} D_t^\alpha(y(t)). \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Na Eq. (2.1) é observado a definição de uma derivada conformável de funções dependentes de duas variáveis, e da mesma forma com que foi demonstrado esta definição com duas variáveis, é possível expandir o raciocínio para três ou mais. Para exemplificar, será calculado a derivada conformável de $z(x(t), y(t)) = 2x^2(t) + \text{sen}(y(t))$.

Aplicando a derivada conformável nesta função, temos:

$$D_t^\alpha(z(x(t), y(t))) = \frac{\partial(2x^2(t) + \text{sen}(y(t)))}{\partial x} D_t^\alpha(x(t)) + \frac{\partial(2x^2(t) + \text{sen}(y(t)))}{\partial y} D_t^\alpha(y(t)).$$

Derivando a equação acima com relação a suas respectivas derivadas, temos:

$$\begin{aligned}
&= (4x(t) + 0)D_t^\alpha(x(t)) + (0 + \cos(y(t)))D_t^\alpha(y(t)) \\
&= 4x(t)x'(t)t^{1-\alpha} + \cos(y(t))y'(t)t^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

2.2 Cálculo Vetorial Conformável

O cálculo vetorial é uma área da matemática que estuda a geometria e a análise de vetores em espaços euclidianos. É uma ferramenta fundamental para descrever e analisar fenômenos matemáticos e físicos que envolvem relações vetoriais e variações no espaço.

Suas operações tais como o gradiente, o divergente e o rotacional são essenciais para a construção de diversos teoremas e relações importantíssimas para a matemática, a física e a engenharia, como por exemplo o Teorema da Divergência de Gauss, Teorema de Stokes e o Teorema de Green que serão utilizados neste trabalho em questão. Estas operações do cálculo vetorial serão definidas de forma conformável nesta sessão.

2.2.1 Gradiente Conformável

A partir da derivada conformável parcial mostrada na Eq. (2.1), pode-se definir o gradiente conformável. Seja $f(x, y, z)$ uma função pertencente a R^3 , temos que o gradiente conformável fica definido como:

$$\nabla^\alpha f(x, y, z) = D_x^\alpha(f(x, y, z))\hat{i} + D_y^\alpha(f(x, y, z))\hat{j} + D_z^\alpha(f(x, y, z))\hat{k}. \quad (2.2)$$

2.2.2 Divergente Conformável

Da mesma forma, também é possível definir o divergente conformável para um vetor $\vec{F}(x, y, z)$, também pertencente a R^3 , temos que o produto escalar entre o operador de *nabla* e o vetor \vec{F} é dado por:

$$\nabla^\alpha \cdot \vec{F}(x, y, z) = D_x^\alpha(F_x) + D_y^\alpha(F_y) + D_z^\alpha(F_z). \quad (2.3)$$

2.2.3 Rotacional Conformável

Sabe-se que o rotacional de um vetor \vec{F} é definido por um produto vetorial dado por:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{F}) &= \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_x, F_y, F_z) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \end{aligned}$$

De forma similar, podemos definir o rotacional conformável como:

$$\begin{aligned}
rot^\alpha(\vec{F}) &= \nabla^\alpha \times \vec{F} = (D_x^\alpha, D_y^\alpha, D_z^\alpha) \times (F_x, F_y, F_z) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ D_x^\alpha & D_y^\alpha & D_z^\alpha \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\
&= (D_y^\alpha(F_z) - D_z^\alpha(F_y))\hat{i} + (D_z^\alpha(F_x) - D_x^\alpha(F_z))\hat{j} + (D_x^\alpha(F_y) - D_y^\alpha(F_x))\hat{k}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2.4 Propriedades do operador de *nabla* conformável

Neste tópico, serão demonstradas algumas propriedades do operador conformável de *nabla* que serão necessárias para a demonstração dos teoremas nos capítulos a seguir.

Propriedade 1: Divergente conformável da soma.

$$\nabla^\alpha \cdot (af + bg) = a\nabla^\alpha \cdot (f) + b\nabla^\alpha \cdot (g).$$

Demonstração. Aplicando a definição do divergente conformável, temos:

$$\nabla^\alpha \cdot (af + bg) = (D_x^\alpha, D_y^\alpha, D_z^\alpha) \cdot (af_x + bg_x, af_y + bg_y, af_z + bg_z).$$

Aplicando a distributiva, temos:

$$\begin{aligned}
&= (D_x^\alpha(af_x + bg_x), D_y^\alpha(af_y + bg_y), D_z^\alpha(af_z + bg_z)) \\
&= (aD_x^\alpha(f_x) + bD_x^\alpha(g_x), aD_y^\alpha(f_y) + bD_y^\alpha(g_y), aD_z^\alpha(f_z) + bD_z^\alpha(g_z)).
\end{aligned}$$

Separando os termos com o mesmo índice do diferencial, temos:

$$\begin{aligned}
&= a(D_x^\alpha(f_x), D_y^\alpha(f_y), D_z^\alpha(f_z)) + b(D_x^\alpha(g_x), D_y^\alpha(g_y), D_z^\alpha(g_z)) \\
&= a\nabla^\alpha \cdot (f) + b\nabla^\alpha \cdot (g).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

□

Propriedade 2: Gradiente conformável da soma.

$$\nabla^\alpha \cdot (a\vec{F} + b\vec{G}) = a\nabla^\alpha \cdot (\vec{F}) + b\nabla^\alpha \cdot (\vec{G}).$$

Demonstração. De forma análoga a demonstração da propriedade anterior, temos:

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha \cdot (a\vec{F} + b\vec{G}) &= (D_x^\alpha, D_y^\alpha, D_z^\alpha) \cdot (aF_x + bG_x, aF_y + bG_y, aF_z + bG_z) \\
&= (D_x^\alpha(aF_x + bG_x), D_y^\alpha(aF_y + bG_y), D_z^\alpha(aF_z + bG_z)) \\
&= (aD_x^\alpha(F_x) + bD_x^\alpha(G_x), aD_y^\alpha(F_y) + bD_y^\alpha(G_y), aD_z^\alpha(F_z) + bD_z^\alpha(G_z)) \\
&= a(D_x^\alpha(F_x), D_y^\alpha(F_y), D_z^\alpha(F_z)) + b(D_x^\alpha(G_x), D_y^\alpha(G_y), D_z^\alpha(G_z)) \\
&= a\nabla^\alpha \cdot (\vec{F}) + b\nabla^\alpha \cdot (\vec{G}).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

□

Propriedade 3: Rotacional conformável da soma.

$$\nabla^\alpha \times (a\vec{F} + b\vec{G}) = a\nabla^\alpha \times (\vec{F}) + b\nabla^\alpha \times (\vec{G}).$$

Demonstração. Aplicando a definição de rotacional conformável deduzida anteriormente na Eq. (2.4), temos:

$$\begin{aligned}
\nabla^\alpha \times (a\vec{F} + b\vec{G}) &= (D_x^\alpha, D_y^\alpha, D_z^\alpha) \times (aF_x + bG_x, aF_y + bG_y, aF_z + bG_z) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ D_x^\alpha & D_y^\alpha & D_z^\alpha \\ a\vec{F}_x + bG_x & aF_y + bG_y & a\vec{F}_z + bG_z. \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Assim como na Eq. (2.4), o rotacional da soma, ao calcular esta matriz, pode ser dado por:

$$\begin{aligned}
&= \left(D_y^\alpha(aF_z + bG_z) - D_z^\alpha(aF_y + bG_y) \right) \hat{i} \\
&\quad + \left(D_z^\alpha(aF_x + bG_x) - D_x^\alpha(aF_z + bG_z) \right) \hat{j} \\
&\quad + \left(D_x^\alpha(aF_y + bG_y) - D_y^\alpha(aF_x + bG_x) \right) \hat{k}.
\end{aligned}$$

Reorganizando a equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
&= a \left[\left(D_y^\alpha(F_z) - D_z^\alpha(F_y) \right) \hat{i} + \left(D_z^\alpha(F_x) - D_x^\alpha(F_z) \right) \hat{j} + \left(D_x^\alpha(F_y) - D_y^\alpha(F_x) \right) \hat{k} \right] \\
&\quad + b \left[\left(D_y^\alpha(G_z) - D_z^\alpha(G_y) \right) \hat{i} + \left(D_z^\alpha(G_x) - D_x^\alpha(G_z) \right) \hat{j} + \left(D_x^\alpha(G_y) - D_y^\alpha(G_x) \right) \hat{k} \right] \\
&= a\nabla^\alpha \times (\vec{F}) + b\nabla^\alpha \times (\vec{G}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

□

Propriedade 4: Gradiente conformável do rotacional conformável.

$$\nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha \times \vec{F}) = 0.$$

Demonstração. A partir das definições de gradiente e rotacional conformáveis das Eqs. (2.3) e (2.4) respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} &= \nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha \times \vec{F}) \\ &= (D_x^\alpha, D_y^\alpha, D_z^\alpha) \cdot \left[(D_y^\alpha(F_z) - D_z^\alpha(F_y)) \hat{i} + (D_z^\alpha(F_x) - D_x^\alpha(F_z)) \hat{j} + (D_x^\alpha(F_y) - D_y^\alpha(F_x)) \hat{k} \right] \end{aligned}$$

Aplicando o produto escalar, a equação acima fica descrita como:

$$= D_x^\alpha D_y^\alpha(F_z) - D_x^\alpha D_z^\alpha(F_y) + D_y^\alpha D_z^\alpha(F_x) - D_y^\alpha D_x^\alpha(F_z) + D_z^\alpha D_x^\alpha(F_y) - D_z^\alpha D_y^\alpha(F_x)$$

Reorganizando a equação acima, temos:

$$= (D_x^\alpha D_y^\alpha - D_y^\alpha D_x^\alpha) F_z + (D_z^\alpha D_x^\alpha - D_x^\alpha D_z^\alpha) F_y + (D_y^\alpha D_z^\alpha - D_z^\alpha D_y^\alpha) F_x = 0 \quad (2.8)$$

□

Propriedade 5: Rotacional conformável do rotacional conformável.

$$\nabla^\alpha \times (\nabla^\alpha \times \vec{F}) = \nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha \cdot \vec{F}) - (\nabla^\alpha)^2 \cdot (\vec{F}).$$

Demonstração. Para demonstrar essa propriedade será utilizada novamente a definição do rotacional conformável da Eq. (2.4). De forma que:

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \times (\nabla^\alpha \times \vec{F}) &= \nabla^\alpha \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ D_x^\alpha & D_y^\alpha & D_z^\alpha \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \nabla^\alpha \times \left[(D_y^\alpha(F_z) - D_z^\alpha(F_y)) \hat{i} + (D_z^\alpha(F_x) - D_x^\alpha(F_z)) \hat{j} + (D_x^\alpha(F_y) - D_y^\alpha(F_x)) \hat{k} \right]. \end{aligned}$$

Aplicando novamente a definição do rotacional em sua forma matricial, temos:

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ D_x^\alpha & D_y^\alpha & D_z^\alpha \\ D_y^\alpha(F_z) - D_z^\alpha(F_y) & D_z^\alpha(F_x) - D_x^\alpha(F_z) & D_x^\alpha(F_y) - D_y^\alpha(F_x) \end{vmatrix} \\
&= D_y^\alpha(D_x^\alpha(F_y) - D_y^\alpha(F_x))\hat{i} + D_z^\alpha(D_y^\alpha(F_z) - D_z^\alpha(F_y))\hat{j} + D_x^\alpha(D_z^\alpha(F_x) - D_x^\alpha(F_z))\hat{k} \\
&\quad - D_y^\alpha(D_y^\alpha(F_z) - D_z^\alpha(F_y))\hat{k} - D_z^\alpha(D_z^\alpha(F_x) - D_x^\alpha(F_z))\hat{i} - D_x^\alpha(D_x^\alpha(F_y) - D_y^\alpha(F_x))\hat{j}.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos de mesma componente, temos:

$$\begin{aligned}
&= \left[(D_y^\alpha D_x^\alpha(F_y) + D_z^\alpha D_x^\alpha(F_z)) - ((D_y^\alpha)^2(F_x) + (D_z^\alpha)^2(F_x)) \right] \hat{i} \\
&\quad + \left[(D_z^\alpha D_y^\alpha(F_z) + D_x^\alpha D_y^\alpha(F_x)) - ((D_z^\alpha)^2(F_y) + (D_x^\alpha)^2(F_y)) \right] \hat{j} \\
&\quad + \left[(D_x^\alpha D_z^\alpha(F_x) + D_y^\alpha D_z^\alpha(F_y)) - ((D_x^\alpha)^2(F_z) + (D_y^\alpha)^2(F_z)) \right] \hat{k}.
\end{aligned}$$

Utilizando as manipulações $(D_x^\alpha)^2(F_x) - (D_x^\alpha)^2(F_x)$, $(D_y^\alpha)^2(F_y) - (D_y^\alpha)^2(F_y)$, $(D_z^\alpha)^2(F_z) - (D_z^\alpha)^2(F_z)$ respectivamente para as direções \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , temos:

$$\begin{aligned}
&= \left[(D_x^\alpha)^2(F_x) + D_y^\alpha D_x^\alpha(F_y) + D_z^\alpha D_x^\alpha(F_z) \right] \hat{i} - \left[(D_x^\alpha)^2(F_x) + (D_y^\alpha)^2(F_x) + (D_z^\alpha)^2(F_x) \right] \hat{i} \\
&\quad + \left[(D_y^\alpha)^2(F_y) + D_z^\alpha D_y^\alpha(F_z) + D_x^\alpha D_y^\alpha(F_x) \right] \hat{j} - \left[(D_y^\alpha)^2(F_y) + (D_z^\alpha)^2(F_y) + (D_x^\alpha)^2(F_y) \right] \hat{j} \\
&\quad + \left[(D_z^\alpha)^2(F_z) + D_x^\alpha D_z^\alpha(F_x) + D_y^\alpha D_z^\alpha(F_y) \right] \hat{k} - \left[(D_z^\alpha)^2(F_z) + (D_x^\alpha)^2(F_z) + (D_y^\alpha)^2(F_z) \right] \hat{k}.
\end{aligned}$$

Reorganizando a equação acima e colocando em evidência na parte positiva de cada direção a derivada conformável de sua componente, e colocando alguns termos em evidência na parte negativa, temos:

$$\begin{aligned}
&= D_x^\alpha \left[D_x^\alpha(F_x) + D_y^\alpha(F_y) + D_z^\alpha(F_z) \right] \hat{i} + D_y^\alpha \left[D_y^\alpha(F_y) + D_z^\alpha(F_z) + D_x^\alpha(F_x) \right] \hat{j} \\
&\quad + D_z^\alpha \left[D_z^\alpha(F_z) + D_x^\alpha(F_x) + D_y^\alpha(F_y) \right] \hat{k} \\
&\quad - \left[(D_x^\alpha)^2(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}) + (D_y^\alpha)^2(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}) + (D_z^\alpha)^2(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}) \right] \\
&= \left[\hat{i}D_x^\alpha + \hat{j}D_y^\alpha + \hat{k}D_z^\alpha \right] \left[D_x^\alpha(F_x) + D_y^\alpha(F_y) + D_z^\alpha(F_z) \right] \\
&\quad - \left[(D_x^\alpha)^2 + (D_y^\alpha)^2 + (D_z^\alpha)^2 \right] \left[F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \right]. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

A partir da Eq. (2.9), pode-se notar que:

$$\left[\hat{i}D_x^\alpha + \hat{j}D_y^\alpha + \hat{k}D_z^\alpha \right] = \nabla^\alpha \tag{2.10}$$

$$\left[D_x^\alpha(F_x) + D_y^\alpha(F_y) + D_z^\alpha(F_z) \right] = \left[\hat{i}D_x^\alpha + \hat{j}D_y^\alpha + \hat{k}D_z^\alpha \right] \cdot \left[F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \right] = \nabla^\alpha \cdot \vec{F} \tag{2.11}$$

$$\left[(D_x^\alpha)^2 + (D_y^\alpha)^2 + (D_z^\alpha)^2 \right] = (\nabla^\alpha)^2. \tag{2.12}$$

A partir das relações das Eqs. (2.10), (2.11) e (2.12), podemos reescrever a Eq. (2.9) como:

$$\nabla^\alpha \times (\nabla^\alpha \times \vec{F}) = \nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha \cdot \vec{F}) - (\nabla^\alpha)^2 \cdot (\vec{F}). \quad (2.13)$$

□

2.3 Dedução do Teorema da Divergência de Gauss pelo cálculo de ordem inteira

Com as propriedades do cálculo conformável para múltiplas variáveis, os operadores de *nabla* e suas propriedades já bem construídos, chega-se a segunda parte deste capítulo, a parte das deduções das versões conformáveis de três teoremas fundamentais para o eletromagnetismo, o Teorema da Divergência de Gauss, o Teorema de Green e o Teorema de Stokes Conformáveis.

O primeiro teorema a ser demonstrado será o Teorema da Divergência de Gauss, que apresenta a importante característica da equivalência entre a integral de superfície de um vetor \vec{F} e uma integral de volume do divergente desse mesmo vetor. Para este teorema, será realizada a dedução do teorema a partir de ambos os cálculos, tanto o de ordem inteira quanto o conformável, afim de comparar as equações obtidas em ambos os cenários. Já para os demais teoremas, se mostrou necessário somente a dedução a partir do cálculo conformável.

Seja o cubo infinitesimal \vec{F} , formados pelas dimensões dx , dy e dz e onde \hat{n} é o vetor normal perpendicular a cada face desta superfície de \vec{F} .

Inicialmente será calculado o fluxo em x . Assumindo como sentido positivo o fluxo que sai e negativo o que entra. Temos que o fluxo que entra é dado por:

$$\phi_{x_{in}} = -F_x \cdot d\vec{S}. \quad (2.14)$$

Onde para esta face $d\vec{S} = dydz$. Já o fluxo que sai de x é dado por:

$$\begin{aligned} \phi_{x_{out}} &= \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) d\vec{S} \\ &= \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) dydz. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Somando o fluxo que entra visto na Eq. (2.14) com o fluxo que sai, Eq. (2.15), encontramos o fluxo total em x , dado por:

$$\phi_x = \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) dydz - F_x dydz.$$

Fazendo a distributiva, cancela-se um dos termos.

$$\begin{aligned}
&= F_x dydz + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dydz - F_x dydz \\
&= \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dydz.
\end{aligned}$$

Nota-se também que o termo $dx dydz$ nada mais é do que o diferencial de volume $d\vec{V}$. Desta forma, o fluxo em x fica descrito como:

$$\phi_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} d\vec{V}. \quad (2.16)$$

De forma análoga, é possível obter os fluxos totais em y e z .

$$\phi_y = \frac{\partial F_y}{\partial y} d\vec{V}. \quad (2.17)$$

$$\phi_z = \frac{\partial F_z}{\partial z} d\vec{V}. \quad (2.18)$$

Somando os fluxos das Eqs. (2.16), (2.17) e (2.18), obtém-se o fluxo total neste volume.

$$\phi_F = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} d\vec{V} + \frac{\partial F_y}{\partial y} d\vec{V} + \frac{\partial F_z}{\partial z} d\vec{V} \right).$$

Colocando os diferenciais de volume em evidência, temos:

$$= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) d\vec{V}.$$

Onde o somatório dos fluxos em toda a superfície de \vec{F} nada mais é do que a integral de superfície do fluxo do mesmo.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) d\vec{V}. \quad (2.19)$$

Separando termo da direita da igualdade em um produto escalar de suas respectivas direções, temos que:

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) d\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) d\vec{V}.$$

Onde a partir da equação encontrada acima, é possível perceber que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) &= \vec{\nabla}. \\ (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}) &= \vec{F}.\end{aligned}$$

Logo, conclui-se que o somatório do fluxo em toda a superfície de \vec{F} é igual ao divergente do mesmo em todo o seu volume. Desta forma, na equação abaixo é mostrada a conclusão da dedução do Teorema da Divergência de Gauss com o cálculo de ordem inteira.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{S} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dV = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV. \quad (2.20)$$

2.4 Dedução do Teorema da Divergência de Gauss pelo cálculo conformável

De forma similar a dedução do Teorema da Divergência de Gauss pelo cálculo de ordem inteira, será deduzida nesta sessão este mesmo teorema utilizando o cálculo conformável. Primeiramente, definimos os diferenciais conformáveis de x , y e z , que são definidos como: $dx^\alpha = x^{1-\alpha}dx$, $dy^\alpha = y^{1-\alpha}dy$ e $dz^\alpha = z^{1-\alpha}dz$.

Agora, com os diferenciais definidos, será seguido os mesmos passos da demonstração da sessão anterior. Primeiramente então, calculamos então o fluxo conformável que entra em x .

$$\phi_{x_{in}}^\alpha = -F_x \cdot d\vec{S}^\alpha = -F_x dy^\alpha dz^\alpha. \quad (2.21)$$

Onde para x , $d\vec{S}^\alpha = dy^\alpha dz^\alpha$. E o fluxo conformável saindo de x é dado por:

$$\begin{aligned} \phi_{x_{out}}^\alpha &= (F_x + D_x^\alpha(F_x)dx^\alpha) d\vec{S}^\alpha \\ &= (F_x + D_x^\alpha(F_x)dx^\alpha) dy^\alpha dz^\alpha. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Somando ambos os fluxos conformáveis calculados nas Eqs. (2.21) e (2.22), temos:

$$\phi_x^\alpha = (F_x + D_x^\alpha(F_x)dx^\alpha) dy^\alpha dz^\alpha - F_x dy^\alpha dz^\alpha.$$

Fazendo a distributiva de $dy^\alpha dz^\alpha$, temos:

$$\begin{aligned} &= F_x dy^\alpha dz^\alpha + D_x^\alpha(F_x)dx^\alpha dy^\alpha dz^\alpha - F_x dy^\alpha dz^\alpha \\ &= D_x^\alpha(F_x)dx^\alpha dy^\alpha dz^\alpha. \end{aligned}$$

Onde nota-se que $dx^\alpha dy^\alpha dz^\alpha$ é equivalente ao diferencial conformável do volume, $d\vec{V}^\alpha = dx^\alpha dy^\alpha dz^\alpha$. Desta forma, o fluxo conformável total em x fica dado como:

$$\phi_x^\alpha = D_x^\alpha(F_x)d\vec{V}^\alpha. \quad (2.23)$$

De forma análoga, obtém-se os fluxos conformáveis em y e em z .

$$\phi_y^\alpha = D_y^\alpha(F_y)d\vec{V}^\alpha. \quad (2.24)$$

$$\phi_z^\alpha = D_z^\alpha(F_z)d\vec{V}^\alpha. \quad (2.25)$$

Somando os fluxos das Eqs. (2.23), (2.24) e (2.25) em cada direção, temos:

$$\phi_F^\alpha = \left(D_x^\alpha(F_x)d\vec{V}^\alpha + D_y^\alpha(F_y)d\vec{V}^\alpha + D_z^\alpha(F_z)d\vec{V}^\alpha \right).$$

Colocando o diferencial conformável de volume em evidência, temos:

$$= \left(D_x^\alpha(F_x) + D_y^\alpha(F_y) + D_z^\alpha(F_z) \right) d\vec{V}^\alpha. \quad (2.26)$$

Separando a Eq. (2.26) em um produto escalar para cada direção, temos:

$$= \left(D_x^\alpha\hat{i} + D_y^\alpha\hat{j} + D_z^\alpha\hat{k} \right) \cdot \left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \right) d\vec{V}^\alpha. \quad (2.27)$$

Observa-se na equação acima que o seu primeiro termo é na verdade o divergente conformável enquanto o segundo é o próprio \vec{F} .

$$\begin{aligned} \left(D_x^\alpha\hat{i} + D_y^\alpha\hat{j} + D_z^\alpha\hat{k} \right) &= \vec{\nabla}^\alpha. \\ \left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \right) &= \vec{F}. \end{aligned}$$

Desta forma, nota-se que calcular o divergente conformável de \vec{F} em todo o seu volume, nada mais é do que calcular a integral de volume do mesmo. Dito isto, a Eq. (2.27) fica descrita como:

$$= \iiint_V \vec{\nabla}^\alpha \cdot \vec{F} d\vec{V}^\alpha. \quad (2.28)$$

Para completar a demonstração, falta demonstrar-se a igualdade com a integral de superfície de \vec{F} , para isso retomamos a Eq. (2.26) e utilizamos a seguinte substituição:

$$D^\alpha = \partial D^{\alpha-1}.$$

$$\left(D_x^\alpha(F_x) + D_y^\alpha(F_y) + D_z^\alpha(F_z) \right) d\vec{V}^\alpha = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} D_x^{\alpha-1}(F_x) + \frac{\partial F_y}{\partial y} D_y^{\alpha-1}(F_y) + \frac{\partial F_z}{\partial z} D_z^{\alpha-1}(F_z) \right) d\vec{V}^\alpha.$$

Onde é possível notar a presença do divergente de ordem inteira, desta forma, temos:

$$= \vec{\nabla} \left(D_x^{\alpha-1}(F_x)\hat{i} + D_y^{\alpha-1}(F_y)\hat{j} + D_z^{\alpha-1}(F_z)\hat{k} \right) d\vec{V}^\alpha. \quad (2.29)$$

A relação da Eq. (2.29) foi obtida a partir do somatório do fluxo total na superfície de \vec{F} , e isso é o mesmo que calcular a integral de superfície desse fluxo, desta forma a relação pode ser escrita como:

$$= \iint_S \left(D_x^{\alpha-1}(F_x)\hat{i} + D_y^{\alpha-1}(F_y)\hat{j} + D_z^{\alpha-1}(F_z)\hat{k} \right) \cdot \hat{n} d\vec{S}^\alpha.$$

Afim de enxugar as notações utiliza-se estas seguintes substituições:

$$\begin{aligned} x_i &= (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \\ \hat{e}_{x_i} &= (\hat{e}_{x_1}, \hat{e}_{x_2}, \hat{e}_{x_3}) = (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \\ F_{x_i} &= (F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}) = (F_x, F_y, F_z) \\ D_{x_i}^{\alpha-1} &= (D_{x_1}^{\alpha-1}, D_{x_2}^{\alpha-1}, D_{x_3}^{\alpha-1}) = (D_x^{\alpha-1}, D_y^{\alpha-1}, D_z^{\alpha-1}) \end{aligned}$$

Substituindo as relações acima na equação encontrada, temos:

$$= \iint_S \sum_{i=1}^3 D_{x_i}^{\alpha-1} F_{x_i} \hat{e}_{x_i} \cdot \hat{n} d\vec{S}^\alpha.$$

Onde por fim chamamos $\vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^3 D_{x_i}^{\alpha-1} F_{x_i} \hat{e}_{x_i}$, desta forma obtemos a integral de superfície conformável desejada.

$$= \iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{F} \cdot \hat{n} d\vec{S}^\alpha. \quad (2.30)$$

Pelas contas descritas nesta sessão, obtemos que:

$$\begin{aligned} \left(D_x^\alpha(F_x) + D_y^\alpha(F_y) + D_z^\alpha(F_z) \right) d\vec{V}^\alpha &= \iiint_V \vec{\nabla}^\alpha \cdot \vec{F} \cdot d\vec{V}^\alpha. \\ \left(D_x^\alpha(F_x) + D_y^\alpha(F_y) + D_z^\alpha(F_z) \right) d\vec{V}^\alpha &= \iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{F} \cdot \hat{n} \cdot d\vec{S}^\alpha. \end{aligned}$$

Desta forma, fica-se demonstrado a dedução do Teorema da Divergência de Gauss Conformável.

$$\iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{F} \cdot \hat{n} \cdot d\vec{S}^\alpha = \iiint_V \vec{\nabla}^\alpha \cdot \vec{F} d\vec{V}^\alpha. \quad (2.31)$$

2.5 Dedução do Teorema de Green pelo cálculo conformável

Para os demais Teoremas demonstrados a seguir, as demonstrações partirão da definição do teoremas em suas versões com o cálculo inteiro para chegar em suas versões conformáveis.

Sejam f_1 e f_2 funções diferentes dependentes de x, y e C uma curva fechada, temos que o Teorema de Green, é definido por:

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dS = \int_C (f_2 dx + f_1 dy).$$

Em sua versão conformável, podemos definir a primeira parte do Teorema de Green conformável como:

$$\iint_S (D_x^\alpha f_1 - D_y^\alpha f_2) dS^\alpha.$$

De forma similar ao que foi realizado no Teorema da Divergência Conformável, ou seja, utilizando da propriedade de derivação conformável que mostra que $D_x^\alpha(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(D_x^{\alpha-1}(f))$, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(D_x^{\alpha-1} f_1) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(D_y^{\alpha-1} f_2) \right) dS^\alpha.$$

Nota-se então que é possível utilizar o teorema da divergência com o cálculo de ordem inteira, visto que é possível notar a presença das derivadas parciais inteiras.

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(D_x^{\alpha-1} f_1) - \frac{\partial f_2}{\partial y}(D_y^{\alpha-1} f_2) \right) dS^\alpha = \int_C (D_y^{\alpha-1} f_2 dx^\alpha + D_x^{\alpha-1} f_1 dy^\alpha).$$

Por fim, encontramos o Teorema de Green Conformável, dado por:

$$\iint_S (D_x^\alpha f_1 - D_y^\alpha f_2) dS^\alpha = \int_C (D_y^{\alpha-1} f_2 dx^\alpha + D_x^{\alpha-1} f_1 dy^\alpha). \quad (2.32)$$

2.6 Dedução do Teorema de Stokes pelo cálculo conformável

O Teorema de Stokes em sua versão usual definida a partir do cálculo de ordem inteira, e com C é uma curva fechada, é dado por:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\vec{s} = \int_C \vec{F} d\vec{r}.$$

A integral descrita abaixo é a versão conformável da integral de superfície do rotacional do vetor \vec{F} presente no Teorema de Stokes. A demonstração partirá desta integral.

$$\iint_S (\nabla^\alpha \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\vec{s}^\alpha.$$

A partir da Eq. (2.4) podemos reescrever o produto vetorial do rotacional conformável de \vec{F} como:

$$\iint_S \left[(D_y^\alpha(f_z) - D_z^\alpha(f_y)) \hat{i} + (D_z^\alpha(f_x) - D_x^\alpha(f_z)) \hat{j} + (D_x^\alpha(f_y) - D_y^\alpha(f_x)) \hat{k} \right] \cdot \hat{n} d\vec{s}^\alpha. \quad (2.33)$$

A partir da Eq. (2.33), é possível separar a integral de superfície acima em três integrais e com isso utilizar a relação encontrada do Teorema de Green Conformável, presente na Eq. (2.32) para obter a relação desejada.

$$\begin{aligned} \iint_S (D_y^\alpha(f_z) - D_z^\alpha(f_y)) \hat{i} \cdot \hat{n} d\vec{s}^\alpha &= \int_C (D_z^{\alpha-1} f_y dy^\alpha + D_y^{\alpha-1} f_z dz^\alpha) \\ \iint_S (D_z^\alpha(f_x) - D_x^\alpha(f_z)) \hat{j} \cdot \hat{n} d\vec{s}^\alpha &= \int_C (D_x^{\alpha-1} f_z dz^\alpha + D_z^{\alpha-1} f_x dx^\alpha) \\ \iint_S (D_x^\alpha(f_y) - D_y^\alpha(f_x)) \hat{k} \cdot \hat{n} d\vec{s}^\alpha &= \int_C (D_y^{\alpha-1} f_x dx^\alpha + D_x^{\alpha-1} f_y dy^\alpha) \end{aligned}$$

Agrupando novamente as integrais de ambos os lados temos por fim o Teorema de Stokes Conformável.

$$\begin{aligned} &\iint_S \left[(D_y^\alpha(f_z) - D_z^\alpha(f_y)) \hat{i} + (D_z^\alpha(f_x) - D_x^\alpha(f_z)) \hat{j} + (D_x^\alpha(f_y) - D_y^\alpha(f_x)) \hat{k} \right] \cdot \hat{n} d\vec{s}^\alpha \\ &= \int_C \left[(D_z^{\alpha-1} f_y dy^\alpha + D_y^{\alpha-1} f_z dz^\alpha) + (D_x^{\alpha-1} f_z dz^\alpha + D_z^{\alpha-1} f_x dx^\alpha) \right. \\ &\quad \left. + (D_y^{\alpha-1} f_x dx^\alpha + D_x^{\alpha-1} f_y dy^\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

3 Aplicação do Cálculo Diferencial Conformável em Circuitos Elétricos

Agora que toda a construção do cálculo conformável já foi realizada, é possível partir para a aplicação dessa ferramenta em modelos físicos-matemáticos quaisquer. Neste capítulo, será apresentada a modelagem matemática de circuitos elétricos, que são bastante pertinentes para a engenharia eletrônica, e da mesma forma com que será realizado para estes circuitos também é possível para diversos outros, há diversos campos da engenharia que ainda não foram analisados pela ótica do cálculo conformável.

Conforme Cardoso ([CARDOSO et al., 2022](#)), o uso desta ferramenta matemática em teorias físicas podem trazer implicações que valem a pena ser analisadas a fundo, pois pelas análises feitas por Abdeljawad ([ABDELJAWAD, 2015](#)) e Zhao ([ZHAO, 2017](#)) a modelagem matemática de alguns fenômenos da natureza feita a partir do cálculo conformável se mostrou inovadora e apresentou algumas vantagens, como, por exemplo, possibilitar a análise tanto de sistemas dissipativos quanto de sistemas de massa variável sem que seja necessário introduzir novos termos na Lagrangiana do sistema livre.

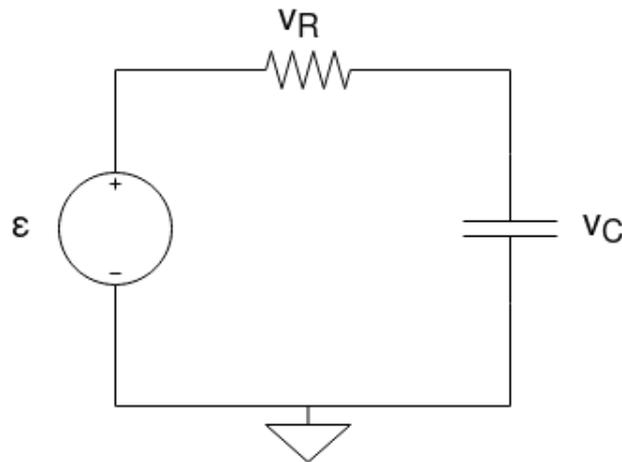
Partindo deste pressuposto, foi questionado como será que se comportam as tensões e as correntes de circuitos elétricos ao longo do tempo quando modeladas a partir da ótica do cálculo conformável, em especial aqueles costumeiramente representados como equações diferenciais como o circuito RC, circuito composto por ao menos um resistor e um capacitor, e o circuito RLC, circuito composto por ao menos um resistor, um indutor e um capacitor.

Nessas seções que se seguem, será realizada esta modelagem. A metodologia escolhida para fazer isso foi realizar uma análise comparativa de forma paralela, ou seja, primeiramente, será realizado a modelagem dos circuitos usando o cálculo de ordem inteira para posteriormente realizar a modelagem a partir do cálculo conformável. O motivo dessa escolha foi que ela possibilita uma conferência passo a passo das diferenças encontradas ao se utilizar o cálculo conformável ao longo de toda a modelagem.

3.1 Modelagem Matemática de um Circuito RC com o Cálculo Diferencial de Ordem Inteira

Assim como citado anteriormente, o ponto de partida será a modelagem por meio do cálculo de ordem inteira. Para facilitar este estudo, foi optado analisar inicialmente o circuito RC , como mostrado na Fig. (1).

Figura 1 – Circuito RC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela lei de Kirchhoff das malhas, o somatório das tensões é igual a 0 nesta malha.

$$\varepsilon - v_r(t) - v_c(t) = 0. \quad (3.1)$$

Onde pela lei de Ohm, $v_r(t) = i(t)R$, a tensão no capacitor é dada por $v_c(t) = \frac{q(t)}{C}$ e além disso, a corrente é obtida pela derivada da carga em relação ao tempo, $i(t) = \frac{dq}{dt}$.

Substituindo essas relações na Eq. (3.1), obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon - \frac{dq}{dt}R - \frac{q(t)}{C} &= 0 \\ \varepsilon &= \frac{dq}{dt}R + \frac{q(t)}{C}, \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{1}{R}$, obtemos a forma convencional de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{1}{R}\varepsilon. \quad (3.2)$$

Uma das formas de se resolver essa EDO é utilizar o fator integrante, que é dado por:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt},$$

Onde $p(t)$ é o termo que acompanha $q(t)$, que neste caso é $p(t) = \frac{1}{RC}$.

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC} dt} = e^{\frac{t}{RC}}.$$

Multiplicando o termo integrante encontrado pela Eq. (3.2), temos:

$$e^{\frac{t}{RC}} \frac{dq}{dt} + e^{\frac{t}{RC}} \frac{q(t)}{RC} = e^{\frac{t}{RC}} \frac{1}{R} \cdot \varepsilon \quad (3.3)$$

Observando a Eq. (3.3), é possível notar que trata-se de uma regra do produto, pois $\mu'(t) = \frac{e^{\frac{t}{RC}}}{RC}$. Logo,

$$\begin{aligned} \mu(t)q'(t) + \mu'(t)q(t) &= \mu(t) \frac{\varepsilon}{R} \\ (\mu(t)q(t))' &= \mu(t) \frac{\varepsilon}{R} \\ (e^{\frac{t}{RC}} q(t))' &= e^{\frac{t}{RC}} \frac{\varepsilon}{R}. \end{aligned}$$

Integrando dos dois lados da equação e passando C para o lado esquerdo da igualdade e $e^{\frac{t}{RC}}$ para o lado direito, temos:

$$\begin{aligned} \int (e^{\frac{t}{RC}} q(t))' dt &= \frac{\varepsilon}{R} \int e^{\frac{t}{RC}} dt \\ e^{\frac{t}{RC}} q(t) &= \frac{\varepsilon}{R} RC (e^{\frac{t}{RC}} + C_1) \\ \frac{q(t)}{C} &= \varepsilon \left(\frac{e^{\frac{t}{RC}}}{e^{\frac{t}{RC}}} + \frac{C_1}{e^{\frac{t}{RC}}} \right) \\ \frac{q(t)}{C} &= \varepsilon + \varepsilon C_1 e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned}$$

Tomando $C_2 = \varepsilon C_1$ e como $v_c(t) = \frac{q(t)}{C}$, por fim, obtemos que $v_c(t)$ é dado por:

$$v_c(t) = \varepsilon + C_2 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3.4)$$

Calculando o PVI para as condições iniciais típicas, ou seja, tomando $v_c(0) = 0$, a Eq. (3.4) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}v_c(0) &= \varepsilon + C_2 = 0 \\C_2 &= -\varepsilon.\end{aligned}$$

Por fim, encontramos a relação de $v_c(t)$,

$$\begin{aligned}v_c(t) &= \varepsilon - \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}} \\&= \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Além disso, como $v_c(t) = \frac{q(t)}{C}$, podemos derivar a relação encontrada para obter equação da corrente neste circuito.

$$\begin{aligned}i(t) &= \frac{dq}{dt} = C \frac{dv_c(t)}{dt} \\&= C \frac{d(\varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}))}{dt} \\&= -\varepsilon C \left(-\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\&= \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Por fim, como $v_R = Ri(t)$, temos que a tensão no resistor é representada por:

$$v_R(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}.\tag{3.7}$$

3.2 Modelagem Matemática de um Circuito RC com o Cálculo Diferencial Conformável

De forma similar a que foi deduzida as equações do circuito RC com o cálculo de ordem inteira, será deduzido a tensão e corrente conformáveis para o circuito da Fig. (1).

A equação da corrente conformável é dada por:

$$i^\alpha(t) = D_t^\alpha(q(t)) = \frac{dq}{dt}t^{1-\alpha}. \quad (3.8)$$

Usando novamente as leis de Kirchhoff, temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon - v_r^\alpha(t) - v_c^\alpha(t) &= 0 \\ \varepsilon - i^\alpha(t)R - \frac{q^\alpha(t)}{C} &= 0, \end{aligned}$$

Substituindo a corrente conformável, Eq. (3.8), e fazendo as mesmas manipulações.

$$\begin{aligned} \varepsilon - \frac{dq}{dt}t^{1-\alpha}R - \frac{q^\alpha(t)}{C} &= 0 \\ \frac{\varepsilon}{R} &= \frac{dq}{dt}t^{1-\alpha} + \frac{q^\alpha(t)}{RC}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

É observado na Eq. (3.9) uma equação de primeira ordem conformável e para resolvê-la será calculado seu fator integrante conformável, que será chamado de $\mu_c(t)$. Novamente $p(t) = \frac{1}{RC}$, visto que nessa equação, assim como na equação encontrada com a ordem inteira, também acompanha o termo de ordem 0.

$$\mu_c(t) = e^{I^\alpha(\frac{1}{RC})} = e^{\int \xi^{\alpha-1}(\frac{1}{RC})d\xi} = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}. \quad (3.10)$$

Ao multiplicar o fator integrante da Eq. (3.10) na EDO de primeira ordem conformável da Eq. (3.9), temos:

$$e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \frac{\varepsilon}{R} = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \frac{dq}{dt}t^{1-\alpha} + e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \frac{q^\alpha(t)}{RC}. \quad (3.11)$$

Analisando a equação encontrada, percebe-se que o primeiro termo da Eq. (3.11) pode ser escrito como:

$$e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \frac{dq}{dt} t^{1-\alpha} = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} D_t^\alpha(q(t)), \quad (3.12)$$

Já o segundo termo pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \frac{q^\alpha(t)}{RC} &= e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \alpha \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha RC} t^{1-\alpha} q^\alpha(t) \\ &= q^\alpha(t) D_t^\alpha \left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo as relações encontradas, Eqs. (3.12) e (3.13) na Eq. (3.11) chega-se em uma relação onde se observa a derivada conformável do produto.

$$\begin{aligned} e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \frac{\varepsilon}{R} &= e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} D_t^\alpha(q^\alpha(t)) + q^\alpha(t) D_t^\alpha \left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \right) \\ &= D_t^\alpha \left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} q^\alpha(t) \right). \end{aligned}$$

Aplicando a integral conformável em ambos os lados da igualdade,

$$\begin{aligned} I^\alpha \left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \frac{\varepsilon}{R} \right) &= I^\alpha D_t^\alpha \left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} q^\alpha(t) \right) \\ \frac{\varepsilon}{R} \int \xi^{\alpha-1} e^{\frac{\xi^\alpha}{\alpha RC}} d\xi &= e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} q^\alpha(t) \\ \frac{\varepsilon}{R} RC \left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} + C_3 \right) &= e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} q^\alpha(t), \end{aligned}$$

Passando o C para o termo da esquerda e o $e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}$ para o da direita, encontramos finalmente a relação para $v_c^\alpha(t)$ conformável.

$$\begin{aligned} \frac{q^\alpha(t)}{C} &= \varepsilon \left(\frac{e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}}{e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}} + \frac{C_3}{e^{\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}} \right) \\ v_c^\alpha(t) &= \varepsilon + C_4 e^{\frac{-t^\alpha}{\alpha RC}}. \end{aligned}$$

Onde novamente foi tomado $C_4 = \varepsilon C_3$. Assumindo as mesmas condições iniciais como as típicas usadas na modelagem de ordem inteira, tal que $v_c^\alpha(0) = 0$.

$$\begin{aligned} v_c^\alpha(0) &= \varepsilon + C_4 = 0 \\ C_4 &= -\varepsilon. \end{aligned}$$

Por fim, encontra-se a equação para a tensão conformável no capacitor, dada por:

$$v_c^\alpha(t) = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}). \quad (3.14)$$

Para encontrar a corrente, usa-se a relação mostrada na Eq. (3.8), derivando a Eq. (3.14) para obtê-la.

$$\begin{aligned} i^\alpha(t) &= D_t^\alpha(q^\alpha(t)) = \frac{dq}{dt}t^{1-\alpha} \\ &= C \frac{d\left(\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}\right)\right)}{dt}t^{1-\alpha} \\ &= C\varepsilon \left(-e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha RC}} \left(-\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha RC}\right)\right)t^{1-\alpha} \\ &= \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Agora, com a corrente conformável obtida é possível obter a equação da tensão no resistor, como $v_R^\alpha = Ri^\alpha(t)$, que é dada por:

$$v_R^\alpha(t) = \varepsilon e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}. \quad (3.16)$$

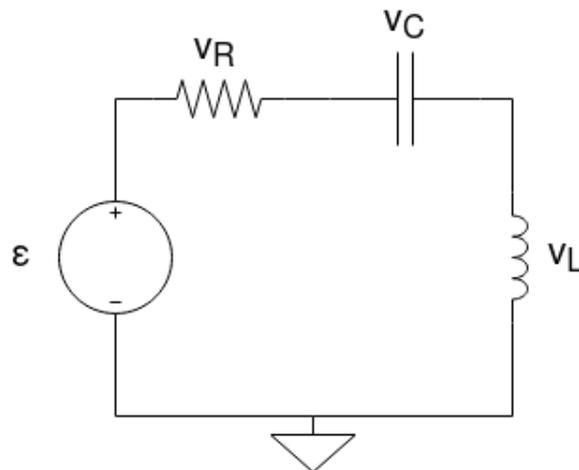
Analisando as equações encontradas para as tensões e a corrente de ordem inteira e utilizando o cálculo conformável, nota-se uma notável similaridade. Primeiramente partindo da exponencial, enquanto para o cálculo de ordem inteira a exponencial presentes nas Eqs. (3.5), (3.7) e (3.6) é $e^{-\frac{t}{RC}}$ para o cálculo conformável a exponencial encontrada nas Eqs. (3.14), (3.16) e (3.15), como é de se esperar, é a versão conformável desta mesma exponencial, dada por $e^{-\frac{t^\alpha}{\alpha RC}}$.

Comparando equações conformáveis com as de ordem inteira é possível observar que para $\alpha = 1$, elas se tornam iguais, o que comprova que ao tender α a unidade os resultados de ordem inteira são recuperados. Vale lembrar que a similaridade observada neste tópico é somente com base no formato da equação e que se espera que ao se analisar graficamente as respostas obtidas sejam observadas diferenças significativas.

3.3 Modelagem Matemática de um Circuito RLC com o Cálculo Diferencial de Ordem Inteira

Neste ponto, será iniciada a análise para o segundo circuito, mostrado na Fig. (2). Foi assumido que o somatório das tensões seja igual a zero, para analisar inicialmente só a resposta homogênea do circuito.

Figura 2 – Circuito RLC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim como foi realizado no circuito anterior, usando a lei das malhas, temos:

$$v_R(t) + v_C(t) + v_L(t) = 0. \quad (3.17)$$

Os termos $v_R(t)$, $v_C(t)$ já foram apresentados e são dados pelas mesmas equações usadas anteriormente. Já a tensão no indutor é dada pela derivada da corrente vezes a indutância deste indutor.

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt}.$$

Como foi observado nas seções anteriores, a corrente é uma derivada da carga em relação ao tempo e, por isso, a tensão no indutor pode ser escrita de uma segunda forma.

$$\begin{aligned} v_L(t) &= Ld \left(\frac{dq}{dt} \right) \\ &= L \frac{d^2q}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aplicando essas definições das tensões em cada componente do circuito na Eq. (3.17), temos:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0,$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{1}{L}$,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = 0. \quad (3.19)$$

Na equação acima é possível observar que se trata de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem conhecida, cuja solução é apresentada na forma de uma exponencial. Abaixo esta descrita essa solução e suas respectivas derivadas.

$$\begin{aligned} q_h(t) &= e^{rt} \\ \frac{dq_h}{dt} &= r e^{rt} \\ \frac{d^2q_h}{dt^2} &= r^2 e^{rt}. \end{aligned}$$

Substituindo as equações acima na Eq. (3.19), temos:

$$\begin{aligned} r^2 e^{rt} + \frac{R}{L} r e^{rt} + \frac{1}{LC} e^{rt} &= 0 \\ e^{rt} \left(r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Colocando e^{rt} em evidência, é observado um produto que é igual à 0, e como a exponencial não pode ser nula, constata-se que:

$$r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0.$$

Chegamos à uma equação de segundo grau cuja solução é apresentada por:

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \\ &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

É comum neste tipo de equação substituir alguns termos da Eq. (3.20), usualmente são utilizados os termos ω_0 e α , onde ω_0 é a representação da frequência de ressonância e α da frequência de Neper, no entanto, para diferenciar a frequência de Neper do α do cálculo conformável, este termo será representado por ω_N .

Tomando então $\omega_N = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e substituindo essas relações na Eq. (3.20), a solução fica sendo apresentada como:

$$r_{1,2} = -\omega_N \pm \sqrt{\omega_N^2 - \omega_0^2}.$$

Substituindo as raízes encontradas em $q(t)$, temos que o mesmo é apresentado por:

$$q(t) = C_1 e^{(-\omega_N + \sqrt{\omega_N^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\omega_N - \sqrt{\omega_N^2 - \omega_0^2})t}. \quad (3.21)$$

A partir deste ponto, nota-se que há três possíveis cenários para se analisar a solução de $q(t)$. O primeiro cenário ocorre quando $\omega_N > \omega_0$, neste caso, observa-se que ambas as exponenciais serão reais e esta solução representa o sistema superamortecido. O segundo, $\omega_N = \omega_0$, representando o sistema de amortecimento crítico e o terceiro ocorre quando $\omega_N < \omega_0$ em que se observa que ambas as exponenciais serão complexas, gerando o sistema subamortecido.

Para o primeiro cenário, assumindo que $\omega_N > \omega_0$, a solução da EDO se mostra idêntica à da Eq. (3.21). Para simplificar as contas, será assumido $\omega^2 = \omega_N^2 - \omega_0^2$, desta forma, é possível reescrever esta equação como:

$$q(t) = C_1 e^{(-\omega_N + \omega)t} + C_2 e^{(-\omega_N - \omega)t}. \quad (3.22)$$

Derivando a Eq. (3.22), encontra-se a equação da corrente com constantes a determinar.

$$i(t) = (-\omega_N + \omega)C_1 e^{(-\omega_N + \omega)t} + (-\omega_N - \omega)C_2 e^{(-\omega_N - \omega)t}. \quad (3.23)$$

Utilizando as condições iniciais típicas para esse tipo de equação diferencial dadas por $q(0) = q_0$ e $i(0) = 0$, é possível calcular o PVI e determinar o valor das constantes.

Substituindo essas relações nas Eqs. (3.22) e (3.23), temos:

$$\begin{aligned}
 q(0) &= C_1 e^{(-\omega_N + \omega)0} + C_2 e^{(-\omega_N - \omega)0} = q_0 \\
 &= C_1 + C_2 = q_0 \\
 C_1 &= q_0 - C_2,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Agora usando as condições iniciais na equação da corrente, temos:

$$\begin{aligned}
 i(0) &= (-\omega_N + \omega)C_1 e^{(-\omega_N + \omega)0} + (-\omega_N - \omega)C_2 e^{(-\omega_N - \omega)0} = 0 \\
 &= (-\omega_N + \omega)C_1 + (-\omega_N - \omega)C_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Substituindo a Eq. (3.24) na Eq. (3.25).

$$= (-\omega_N + \omega)(q_0 - C_2) + (-\omega_N - \omega)C_2 = 0,$$

Fazendo as distributivas e colocando em evidência os termos comuns, temos:

$$\begin{aligned}
 &= -q_0\omega_N + q_0\omega + C_2\omega_N - C_2\omega - C_2\omega_N - C_2\omega = 0 \\
 q_0(\omega - \omega_N) &= C_2\omega \\
 C_2 &= q_0 \left(1 - \frac{\omega_N}{\omega}\right).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Substituindo o valor de C_2 encontrado na Eq. (3.24), temos:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= q_0 - q_0 \left(1 - \frac{\omega_N}{\omega}\right) \\
 &= q_0 - q_0 + q_0 \frac{\omega_N}{\omega} \\
 &= q_0 \frac{\omega_N}{\omega}.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Agora com as constantes obtidas, é possível encontrar a equação final das tensões e da corrente para este cenário. Substituindo então as Eqs. (3.26) e (3.27) na Eq. (3.22), encontra-se:

$$q(t) = q_0 \left(\frac{\omega_N}{\omega} e^{(-\omega_N + \omega)t} + \left(1 - \frac{\omega_N}{\omega}\right) e^{(-\omega_N - \omega)t} \right). \tag{3.28}$$

Como $v_C(t) = \frac{q(t)}{C}$, a equação da tensão no capacitor fica apresentada como:

$$v_C(t) = q_0 \frac{1}{C} \left(\frac{\omega_N}{\omega} e^{(-\omega_N + \omega)t} + \left(1 - \frac{\omega_N}{\omega} \right) e^{(-\omega_N - \omega)t} \right). \quad (3.29)$$

Desta vez, substituindo as Eqs. (3.26) e (3.27) na Eq. (3.23), e fazendo suas distributivas e colocando os termos em comum em evidência tem-se:

$$\begin{aligned} i(t) &= (-\omega_N + \omega)q_0 \frac{\omega_N}{\omega} e^{(-\omega_N + \omega)t} + (-\omega_N - \omega)q_0 \left(1 - \frac{\omega_N}{\omega} \right) e^{(-\omega_N - \omega)t} \\ &= q_0 \left(\left(-\frac{\omega_N^2}{\omega} + \omega_N \right) e^{(-\omega_N + \omega)t} + \left(-\omega_N + \frac{\omega_N^2}{\omega} - \omega + \omega_N \right) e^{(-\omega_N - \omega)t} \right) \\ &= q_0 \left(\left(-\frac{\omega_N^2}{\omega} + \omega_N \right) e^{(-\omega_N + \omega)t} + \left(\frac{\omega_N^2 - \omega^2}{\omega} \right) e^{(-\omega_N - \omega)t} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

E como $v_R(t) = Ri(t)$, temos:

$$v_R(t) = q_0 R \left(\left(-\frac{\omega_N^2}{\omega} + \omega_N \right) e^{(-\omega_N + \omega)t} + \left(\frac{\omega_N^2 - \omega^2}{\omega} \right) e^{(-\omega_N - \omega)t} \right). \quad (3.31)$$

Por fim, é possível encontrar a equação da tensão no indutor, visto que $v_L(t) = L \frac{di}{dt}$, logo, derivando a Eq. (3.30):

$$v_L(t) = Lq_0 \left(\left(-\frac{\omega_N^2}{\omega} + \omega_N \right) (-\omega_N + \omega) e^{(-\omega_N + \omega)t} + \left(\frac{\omega_N^2 - \omega^2}{\omega} \right) (-\omega_N - \omega) e^{(-\omega_N - \omega)t} \right).$$

Fazendo as distributivas, temos:

$$= Lq_0 \left(\left(\frac{\omega_N^3}{\omega} - \omega_N^2 - \omega_N^2 + \omega_N \omega \right) e^{(-\omega_N + \omega)t} + \left(\frac{-\omega_N^3}{\omega} + \omega_N \omega + \omega_N^2 + \omega^2 \right) e^{(-\omega_N - \omega)t} \right). \quad (3.32)$$

Já para o segundo cenário, assumindo $\omega_N = \omega$, a solução da EDO fica apresentada como:

$$q(t) = C_1 e^{-\omega_N t} + C_2 t e^{-\omega_N t}. \quad (3.33)$$

Derivando a Eq. (3.33), temos:

$$i(t) = -\omega_N C_1 e^{-\omega_N t} + C_2 (e^{-\omega_N t} - \omega_N t e^{-\omega_N t}). \quad (3.34)$$

Assumindo as mesmas condições iniciais do primeiro cenário, observa-se:

$$\begin{aligned} q(0) &= C_1 e^{-\omega_N \cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{-\omega_N \cdot 0} = q_0 \\ C_1 &= q_0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Utilizando as condições iniciais e o valor de C_1 encontrado na Eq. (3.33) e na equação da corrente dada por Eq. (3.34), encontra-se:

$$\begin{aligned} i(0) &= -\omega_N q_0 e^{-\omega_N \cdot 0} + C_2 (e^{-\omega_N \cdot 0} - \omega_N \cdot 0 \cdot e^{-\omega_N \cdot 0}) = 0 \\ &= -q_0 \omega_N + C_2 = 0 \\ C_2 &= \omega_N q_0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Substituindo os valores das constantes encontradas nas Eqs. (3.35) e (3.36) na Eq. (3.33), encontra-se a equação final de $q(t)$ para o segundo cenário.

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 e^{-\omega_N t} + \omega_N q_0 t e^{-\omega_N t} \\ &= q_0 e^{-\omega_N t} (1 + \omega_N t). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Com isso, é possível obter a equação de $v_C(t)$, dado por:

$$v_C(t) = q_0 \frac{1}{C} e^{-\omega_N t} (1 + \omega_N t). \quad (3.38)$$

Substituindo as constantes encontradas agora na equação da corrente dada por Eq. (3.34) observa-se que alguns termos são cancelados.

$$\begin{aligned} i(t) &= -\omega_N q_0 e^{-\omega_N t} + \omega_N q_0 t (e^{-\omega_N t} - \omega_N t e^{-\omega_N t}) \\ &= -\omega_N q_0 e^{-\omega_N t} + \omega_N q_0 t e^{-\omega_N t} - \omega_N^2 q_0 t^2 e^{-\omega_N t} \\ &= -\omega_N^2 q_0 t e^{-\omega_N t}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Como $v_R(t) = Ri(t)$, é possível encontrar agora a equação da tensão no resistor.

$$v_R(t) = -R\omega_N^2 q_0 t e^{-\omega_N t}. \quad (3.40)$$

Por fim, derivando a Eq. (3.39) para encontrar a equação da tensão no indutor, temos:

$$\begin{aligned}
v_L(t) &= -\omega_N^2 q_0 e^{-\omega_N t} + \omega_N^3 q_0 t e^{-\omega_N t} \\
&= -\omega_N^2 q_0 e^{-\omega_N t} (1 + \omega_N t).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Analisando agora o terceiro cenário e assumindo $\omega_N < \omega$, para seguir na demonstração, novamente será realizada uma substituição que se mostrará importante para a construção do argumento. Tomando desta vez $\omega^2 = \omega_0^2 - \omega_N^2$, temos:

$$\begin{aligned}
\omega_N^2 - \omega_0^2 &= -\omega^2 \\
\sqrt{\omega_N^2 - \omega_0^2} &= i\omega,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Substituindo (3.42) na solução da EDO, temos:

$$\begin{aligned}
q(t) &= C_1 e^{(-\omega_N + i\omega)t} + C_2 e^{(-\omega_N - i\omega)t} \\
&= e^{-\omega_N t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}).
\end{aligned}$$

A partir das relações de Euler, é possível correlacionar exponenciais complexas com as relações trigonométricas a partir das equações abaixo.

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t) \tag{3.43}$$

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t). \tag{3.44}$$

Utilizando as relações de Euler das Eqs. (3.43) e (3.44), a equação de $q(t)$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
q(t) &= e^{-\omega_N t} [C_1 (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) + C_2 (\cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t))] \\
&= e^{-\omega_N t} [(C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(\omega t)].
\end{aligned}$$

Como C_1 e C_2 são constantes, podemos juntá-los da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C_3 &= C_1 + C_2 \\
C_4 &= i(C_1 - C_2),
\end{aligned}$$

Por fim, $q(t)$ pode é dado por:

$$q(t) = e^{-\omega_N t}(C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t)). \quad (3.45)$$

Já para encontrar a corrente, derivamos a Eq. (3.45).

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_N e^{-\omega_N t}(C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t)) + e^{-\omega_N t}(-\omega C_3 \sin(\omega t) + \omega C_4 \cos(\omega t)),$$

Colocando $e^{-\omega_N t}$ em evidência e fazendo a distributiva de $-\omega_N$, temos:

$$= e^{-\omega_N t}[C_3(-\omega_N \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)) + C_4(-\omega_N \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t))]. \quad (3.46)$$

Novamente, será utilizado as mesmas condições iniciais usadas nos outros dois cenários. Primeiramente, substituindo as condições iniciais para $q(t)$, encontra-se:

$$\begin{aligned} q(0) &= e^{-\omega_N 0}(C_3 \cos(\omega 0) + C_4 \sin(\omega 0)) = q_0 \\ C_3 &= q_0. \end{aligned}$$

Agora, substituindo as condições iniciais para $i(t)$, temos:

$$\begin{aligned} i(0) &= e^{-\omega_N 0}[q_0(-\omega_N \cos(\omega 0) - \omega \sin(\omega 0)) + C_4(-\omega_N \sin(\omega 0) + \omega \cos(\omega 0))] = 0 \\ &= q_0(-\omega_N) + C_4(\omega) = 0 \\ C_4 &= q_0 \frac{\omega_N}{\omega}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores das constantes encontrados na equação de $q(t)$ e $i(t)$, temos:

$$q(t) = e^{-\omega_N t}(q_0 \cos(\omega t) + q_0 \frac{\omega_N}{\omega} \sin(\omega t)). \quad (3.47)$$

Além disso, como $v_c(t) = \frac{q(t)}{C}$, podemos encontrar também a equação da tensão no capacitor desse circuito.

$$v_c(t) = \frac{1}{C} e^{-\omega_N t}(q_0 \cos(\omega t) + q_0 \frac{\omega_N}{\omega} \sin(\omega t)). \quad (3.48)$$

Substituindo as constantes encontradas na Eq. (3.46), encontra-se a equação final da corrente desse circuito.

$$i(t) = e^{-\omega_N t} \left[q_0(-\omega_N \cos(\omega t) - \omega \operatorname{sen}(\omega t)) + q_0 \frac{\omega_N}{\omega} (-\omega_N \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \cos(\omega t)) \right],$$

Fazendo a distributivas das constantes encontradas, percebe-se que o termo $q_0 \omega_N \cos(\omega t)$ é cancelado, e por fim encontra-se a equação da corrente.

$$\begin{aligned} &= e^{-\omega_N t} \left[-q_0 \omega_N \cos(\omega t) - q_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t) - q_0 \frac{\omega_N^2}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + q_0 \omega_N \cos(\omega t) \right] \\ &= -e^{-\omega_N t} q_0 \left(\frac{\omega^2 + \omega_N^2}{\omega} \right) \operatorname{sen}(\omega t). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Como $v_R(t) = Ri(t)$, também é possível encontrar a tensão do resistor agora que já se possui a equação da corrente. $v_R(t)$ então fica apresentado como:

$$v_R(t) = -Re^{-\omega_N t} q_0 \left(\frac{\omega^2 + \omega_N^2}{\omega} \right) \operatorname{sen}(\omega t). \quad (3.50)$$

A partir da derivada da corrente na Eq. (3.49) é possível encontrar a equação para a tensão no indutor, de forma que:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{di}{dt} = L \frac{d(-e^{-\omega_N t} q_0 \left(\frac{\omega^2 + \omega_N^2}{\omega} \right) \operatorname{sen}(\omega t))}{dt} \\ &= L q_0 \left(\frac{\omega^2 + \omega_N^2}{\omega} \right) (\omega_N e^{-\omega_N t} \operatorname{sen}(\omega t) - \omega e^{-\omega_N t} \cos(\omega t)). \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.4 Modelagem Matemática de um Circuito RLC com o Cálculo Diferencial Conformável

Nesta seção será calculado aquele mesmo circuito *RLC* da Fig. (2) só que agora utilizando a modelagem pelo cálculo conformável.

Utilizando novamente a lei das malhas, temos:

$$v_R^\alpha(t) + v_C^\alpha(t) + v_L^\alpha(t) = 0. \quad (3.52)$$

Onde $v_R^\alpha(t) = Ri^\alpha(t)$, $i^\alpha(t)$ é a corrente conformável e é dada por $D_t^\alpha(q^\alpha(t))$, $v_C^\alpha(t) = \frac{q^\alpha(t)}{C}$ e por fim $v_L^\alpha(t) = LD_t^\alpha(i^\alpha(t)) = L(D_t^\alpha)^2(q^\alpha(t))$, assim como foi abordado na seção anterior só que desta vez pela abordagem conformável.

Aplicando as relações dadas das tensões conformável na Eq. (3.52) e utilizando da definição de derivada conformável mostrada na Eq. (1.1), encontra-se:

$$\begin{aligned} RD_t^\alpha(q^\alpha(t)) + \frac{q^\alpha(t)}{C} + L(D_t^\alpha)^2(q^\alpha(t)) &= 0 \\ R \frac{dq}{dt} t^{1-\alpha} + \frac{q^\alpha(t)}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} (t^{1-\alpha})^2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{1}{L}$, é encontrado a equação diferencial conformável já formalizada para este circuito.

$$\frac{d^2q}{dt^2} (t^{1-\alpha})^2 + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} t^{1-\alpha} + \frac{q^\alpha(t)}{LC} = 0. \quad (3.53)$$

Assim como foi suposto na modelagem com o cálculo de ordem inteira uma solução do tipo exponencial, também será suposto com o cálculo conformável, no entanto, no para o de ordem inteira, usa-se a exponencial comum devido a propriedade de a sua derivada ser igual a ela mesma. Partindo do mesmo princípio, na modelagem conformável, deve-se supor uma solução do tipo exponencial conformável. A solução e suas respectivas derivadas são mostradas nas equações abaixo.

$$\begin{aligned} q_h(t) &= e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha} \\ D_t^\alpha(q_h(t)) &= e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha} \left(\frac{r}{\alpha} \alpha t^{\alpha-1} \right) t^{1-\alpha} = r e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha} \\ (D_t^\alpha)^2(q_h(t)) &= r e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha} \left(\frac{r}{\alpha} \alpha t^{\alpha-1} \right) t^{1-\alpha} = r^2 e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha}. \end{aligned}$$

Substituindo $q_h(t)$ e suas derivadas na Eq. (3.53), temos:

$$\begin{aligned} r^2 e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha} + \frac{R}{L} r e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha} + \frac{1}{LC} e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha} &= 0 \\ e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha} \left(r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Assim como foi realizado na análise com as derivadas usuais, coloca-se $e^{\frac{r}{\alpha} t^\alpha}$ em evidência e como há um produto que é igual à 0 e a exponencial conformável não pode ser nula, obtemos a mesma relação da análise anterior.

$$r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0,$$

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Chamando novamente $\omega_N = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Desta forma a equação conformável de $q^\alpha(t)$ é dada por:

$$q^\alpha(t) = C_1 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \sqrt{\omega_N^2 - \omega_0^2})t^\alpha} + C_2 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \sqrt{\omega_N^2 - \omega_0^2})t^\alpha}. \quad (3.54)$$

Assim como foi mostrado na modelagem a partir do cálculo de ordem inteira, a partir deste ponto é observado os mesmos três cenários vistos anteriormente.

Para o primeiro cenário, o do sistema superamortecido, assume-se que $\omega_N > \omega_0$ e tomando $\omega^2 = \omega_N^2 - \omega_0^2$, e Eq. (3.54) pode ser reescrita como:

$$q^\alpha(t) = C_1 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} + C_2 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha}. \quad (3.55)$$

Derivando a Eq. (3.55) para encontrar a equação da corrente conformável, temos:

$$\begin{aligned} i^\alpha(t) &= (-\omega_N + \omega) C_1 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} \frac{\alpha}{\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} + (-\omega_N - \omega) C_2 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha} \frac{\alpha}{\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} \\ &= (-\omega_N + \omega) C_1 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} + (-\omega_N - \omega) C_2 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Tomando as mesmas condições iniciais usadas na modelagem com o cálculo de ordem inteira, ou seja, assumindo $q^\alpha(0) = q_0$ e $i^\alpha(0) = 0$, se torna possível calcular o PVI e conseqüentemente encontrar os valores das constantes.

Substituindo as condições iniciais nas Eqs. (3.55) e (3.56), encontra-se:

$$\begin{aligned} q^\alpha(0) &= C_1 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)0^\alpha} + C_2 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)0^\alpha} = q_0 \\ &= C_1 + C_2 = q_0 \\ C_1 &= q_0 - C_2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Da mesma forma, para obter é possível fazer na equação da corrente.

$$\begin{aligned} i(0) &= (-\omega_N + \omega)C_1 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)0^\alpha} + (-\omega_N - \omega)C_2 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)0^\alpha} = 0 \\ &= (-\omega_N + \omega)C_1 + (-\omega_N - \omega)C_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

As Eqs. (3.57) e (3.58) se mostraram idênticas às Eqs. (3.24) e (3.25), respectivamente. Portanto, infere-se que os valores das constantes também se mantêm os mantêm os mesmos.

Logo, $C_1 = q_0 \frac{\omega_N}{\omega}$ e $C_2 = q_0 \left(1 - \frac{\omega_N}{\omega}\right)$.

Com os valores das constantes obtidas, é possível encontrar a equação de $q^\alpha(t)$.

$$q^\alpha(t) = q_0 \left(\frac{\omega_N}{\omega} e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} + \left(1 - \frac{\omega_N}{\omega}\right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha} \right). \quad (3.59)$$

A partir da equação de $q^\alpha(t)$ é possível encontrar a tensão com formável no capacitor, visto que $v_C^\alpha(t) = \frac{q^\alpha(t)}{C}$.

$$v_C^\alpha(t) = q_0 \frac{1}{C} \left(\frac{\omega_N}{\omega} e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} + \left(1 - \frac{\omega_N}{\omega}\right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha} \right). \quad (3.60)$$

Substituindo as constantes na equação da corrente conformável da Eq. (3.56), temos:

$$i^\alpha(t) = (-\omega_N + \omega)q_0 \frac{\omega_N}{\omega} e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} + (-\omega_N - \omega)q_0 \left(1 - \frac{\omega_N}{\omega}\right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha}.$$

Fazendo as distributivas, obtém-se:

$$\begin{aligned} &= q_0 \left(\left(-\frac{\omega_N^2}{\omega} + \omega_N \right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} + \left(-\omega_N + \frac{\omega_N^2}{\omega} - \omega + \omega_N \right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha} \right) \\ &= q_0 \left(\left(-\frac{\omega_N^2}{\omega} + \omega_N \right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} + \left(\frac{\omega_N^2 - \omega^2}{\omega} \right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Além disso, $v_R^\alpha(t) = Ri^\alpha(t)$, também é possível obtê-lo.

$$v_R^\alpha(t) = q_0 R \left(\left(-\frac{\omega_N^2}{\omega} + \omega_N \right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} + \left(\frac{\omega_N^2 - \omega^2}{\omega} \right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha} \right). \quad (3.62)$$

Como tensão no indutor é dada pela derivada conformável da corrente, é possível obtê-la a partir da relação abaixo.

$$\begin{aligned} v_L^\alpha(t) &= LD_t^\alpha(i^\alpha(t)) \\ &= L \frac{di}{dt} t^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, derivando a Eq. (3.61), temos:

$$\begin{aligned} &= Lq_0 \left(\left(-\frac{\omega_N^2}{\omega} + \omega_N \right) (-\omega_N + \omega) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} \frac{\alpha}{\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} \right) \\ &\quad + Lq_0 \left(\left(\frac{\omega_N^2 - \omega^2}{\omega} \right) (-\omega_N - \omega) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha} \frac{\alpha}{\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Fazendo as distributivas, temos:

$$= Lq_0 \left(\left(\frac{\omega_N^3}{\omega} - \omega_N^2 - \omega_N^2 + \omega_N \omega \right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + \omega)t^\alpha} + \left(\frac{-\omega_N^3}{\omega} + \omega_N \omega + \omega_N^2 + \omega^2 \right) e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - \omega)t^\alpha} \right). \quad (3.63)$$

No segundo cenário e assumi-se $\omega_N = \omega$, analisando a solução usada para esse cenário na modelagem com o cálculo de ordem inteira, nota-se que a principal razão e que o segundo termo vir multiplicada por "t" é que ao derivar o produto entre ele e a exponencial é que aparece novamente a exponencial, possibilitando a existência deste tipo de solução.

$$q^\alpha(t) = C_1 e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} + C_2 \frac{1}{\alpha} t^\alpha e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha}. \quad (3.64)$$

Derivando a equação de $q^\alpha(t)$, Eq. (3.64), a corrente conformável fica apresentada como:

$$\begin{aligned} i^\alpha(t) &= -\omega_N C_1 e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \frac{\alpha}{\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} + C_2 \left(e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \frac{\alpha}{\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} - \omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \frac{\alpha}{\alpha} t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} \right) \\ &= -\omega_N C_1 e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} + C_2 \left(e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} - \omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \right) \\ &= e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \left(-\omega_N C_1 + C_2 \left(1 - \omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha \right) \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Utilizando novamente as condições iniciais, observa-se:

$$\begin{aligned} q^\alpha(0) &= C_1 e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} \cdot 0^\alpha} + C_2 \frac{1}{\alpha} \cdot 0^\alpha \cdot e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} \cdot 0^\alpha} = q_0 \\ C_1 &= q_0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Fazendo o mesmo para a equação da corrente conformável e utilizando o valor de C_1 encontrado, tem-se:

$$\begin{aligned} i^\alpha(0) &= e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} \cdot 0^\alpha} \left(-\omega_N q_0 + C_2 \left(1 - \omega_N \frac{1}{\alpha} \cdot 0^\alpha \right) \right) = 0 \\ &= -q_0 \omega_N + C_2 = 0 \\ C_2 &= \omega_N q_0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Nota-se que, como se espera, as constantes se mantiveram idênticas às encontradas no segundo cenário na modelagem com o cálculo de ordem inteira. Com os valores das constantes determinados, é possível se obter as tensões e correntes conformáveis. Substituindo então as constantes das Eqs. (3.66) e (3.67) na Eq. (3.64), temos:

$$\begin{aligned} q^\alpha(t) &= q_0 e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} + \omega_N q_0 \frac{1}{\alpha} t^\alpha e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \\ &= q_0 e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \left(1 + \omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha \right). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Como $v_C^\alpha(t) = \frac{q^\alpha(t)}{C}$,

$$v_C^\alpha(t) = q_0 \frac{1}{C} e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \left(1 + \omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha \right). \quad (3.69)$$

Substituindo as constantes determinadas na equação da corrente conformável Eq. (3.65) novamente se observa o cancelamento de alguns termos ao se fazer a distributiva.

$$\begin{aligned} i^\alpha(t) &= e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \left(-\omega_N q_0 + \omega_N q_0 \left(1 - \omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha \right) \right) \\ &= e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \left(-\omega_N q_0 + \omega_N q_0 - \omega_N^2 q_0 \frac{1}{\alpha} t^\alpha \right) \\ &= -\omega_N^2 q_0 \frac{1}{\alpha} t^\alpha e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Com o valor de $i^\alpha(t)$ obtido é possível se obter $v_R^\alpha(t)$, visto que $v_R^\alpha(t) = Ri^\alpha(t)$.

$$v_R^\alpha(t) = -R\omega_N^2 q_0 \frac{1}{\alpha} t^\alpha e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha}. \quad (3.71)$$

Para esse cenário, só ficou faltando encontrar $v_L^\alpha(t)$, que pode ser obtido ao se derivar conformavelmente a Eq. (3.70), ou seja, $v_L^\alpha(t) = D_t^\alpha(i^\alpha(t)) = L \frac{di}{dt} t^{1-\alpha}$.

$$\begin{aligned} v_L^\alpha(t) &= -\omega_N^2 q_0 L \left(\frac{\alpha}{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} - \omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \frac{\alpha}{\alpha} t^{\alpha-1} \right) t^{1-\alpha} \\ &= -\omega_N^2 q_0 L \left(e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} - \omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \right) \\ &= -\omega_N^2 q_0 L e^{-\omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha} \left(1 - \omega_N \frac{1}{\alpha} t^\alpha \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Por fim, analisando o terceiro cenário, assume-se $\omega_N < \omega$ e assim como foi realizado na modelagem a partir do cálculo de ordem inteira, será realizado uma substituição afim de facilitar a demonstração. Tomando $\omega^2 = \omega_0^2 - \omega_N^2$, temos:

$$r_{1,2} = -\omega_N \pm i\omega.$$

Substituindo as raízes encontradas em $q^\alpha(t)$, temos:

$$\begin{aligned} q^\alpha(t) &= C_1 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N + i\omega)t^\alpha} + C_2 e^{\frac{1}{\alpha}(-\omega_N - i\omega)t^\alpha} \\ &= e^{-\frac{\omega_N}{\alpha} t^\alpha} (C_1 e^{i\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha} + C_2 e^{-i\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha}). \end{aligned}$$

Aplicando as relações de Euler demonstradas na seção (1.4) na Eq. (1.24), podemos reescrever a equação de $q^\alpha(t)$ como:

$$\begin{aligned} q^\alpha(t) &= e^{-\frac{\omega_N}{\alpha} t^\alpha} \left[C_1 \left(\cos\left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha\right) \right) + C_2 \left(\cos\left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha\right) \right) \right] \\ &= e^{-\frac{\omega_N}{\alpha} t^\alpha} \left[(C_1 + C_2) \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha\right) + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha\right) \right]. \end{aligned}$$

Colocando as funções trigonométricas em evidência, novamente se observa o mesmo agrupamento de constantes. Realizando então o mesmo agrupamento de constantes, de forma que $C_3 = C_1 + C_2$ e $C_4 = i(C_1 - C_2)$, $q^\alpha(t)$ fica apresentado por:

$$q^\alpha(t) = e^{-\frac{\omega_N}{\alpha} t^\alpha} \left[C_3 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha\right) \right]. \quad (3.73)$$

Para encontrar a corrente conformável, derivamos a Eq. (3.73).

$$i^\alpha(t) = D_t^\alpha(q^\alpha(t)) = -\omega_N e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} \left(C_3 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) \right) + e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} \left(-\omega C_3 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) + \omega C_4 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) \right).$$

Colocando o termo $e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha}$ em evidência e fazendo a distributiva de $-\omega_N$, temos:

$$= e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} \left[C_3 \left(-\omega_N \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) - \omega \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) \right) + C_4 \left(-\omega_N \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) + \omega \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) \right) \right].$$

Utilizando novamente as condições iniciais típicas para calcular o PVI e determinar o valor das constantes, assim como foi realizado na análise com o cálculo de ordem inteira temos, temos:

$$q^\alpha(0) = e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}0} [C_3 \cos(0) + C_4 \operatorname{sen}(0)] = q_0$$

$$C_3 = q_0.$$

Com C_3 encontrado, é possível obter a constante que falta utilizando as condições iniciais em $i^\alpha(t)$.

$$i^\alpha(0) = e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}0} [C_3(-\omega_N \cos(0) - \omega \operatorname{sen}(0)) + C_4(-\omega_N \operatorname{sen}(0) + \omega \cos(0))] = 0$$

$$= q_0(-\omega_N) + C_4(\omega) = 0$$

$$C_4 = q_0 \frac{\omega_N}{\omega}.$$

Substituindo os valores das constantes encontrados na equação de $q^\alpha(t)$ e $i^\alpha(t)$, temos:

$$q^\alpha(t) = e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} \left(q_0 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) + q_0 \frac{\omega_N}{\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) \right). \quad (3.74)$$

Além disso, como $v_c^\alpha(t) = \frac{q^\alpha(t)}{C}$, a equação da tensão no capacitor desse circuito fica dada por:

$$v_c^\alpha(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} \left(q_0 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) + q_0 \frac{\omega_N}{\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\alpha}t^\alpha\right) \right). \quad (3.75)$$

Com as constantes determinadas, é possível encontrar equação final da corrente conformável, dada por:

$$i^\alpha(t) = e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} \left[q_0 \left(-\omega_N \cos \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) - \omega \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) \right) + q_0 \frac{\omega_N}{\omega} \left(-\omega_N \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) + \omega \cos \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) \right) \right].$$

Fazendo a distributivas das constantes, observa-se que os termos $q_0 \omega_N \cos \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right)$ se cancelam, obtendo-se a equação final da corrente conformável.

$$\begin{aligned} &= e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} \left[-q_0 \omega_N \cos \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) - q_0 \omega \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) - q_0 \frac{\omega_N^2}{\omega} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) + q_0 \omega_N \cos \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) \right] \\ &= -e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} q_0 \left(\frac{\omega^2 + \omega_N^2}{\omega} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Com a corrente conformável encontrada, é possível obter a tensão conformável no capacitor, visto que ela é dada por $v_R^\alpha(t) = R i^\alpha(t)$.

$$v_R^\alpha(t) = -R e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} q_0 \left(\frac{\omega^2 + \omega_N^2}{\omega} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right). \quad (3.77)$$

Por fim, será encontrada a equação da tensão conformável do indutor utilizando a Eq. (3.76).

$$\begin{aligned} v_L^\alpha(t) &= L D_t^\alpha (i^\alpha(t)) = L \frac{di}{dt} t^{1-\alpha} \\ &= L \frac{d \left(-e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} q_0 \left(\frac{\omega^2 + \omega_N^2}{\omega} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) \right)}{dt} t^{1-\alpha} \\ &= L q_0 \left(\frac{\omega^2 + \omega_N^2}{\omega} \right) \left(\omega_N e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) - \omega e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha} \cos \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right) \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Ao se observar as equações encontradas para as tensões e a corrente usando tanto o cálculo de ordem inteira quanto o conformável, nota-se novamente certa similaridade. Os formatos das equações se mantiveram idênticos, as únicas diferenças notadas foram as exponenciais que no de ordem inteira é apresentada como $e^{-\omega_N t}$ enquanto no conformável, é apresentado a mesma exponencial em sua versão conformável dada por $e^{-\frac{\omega_N}{\alpha}t^\alpha}$, e o mesmo ocorre para as funções trigonométricas que vão de $\operatorname{sen}(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ no cálculo de ordem inteira para $\operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right)$ e $\cos \left(\frac{\omega}{\alpha} t^\alpha \right)$ no conformável. Tendendo novamente essas equações a unidade, No capítulo seguinte, será apresentada a análise gráfica de todas as equações obtidas em ambas as modelagens.

3.5 Percepções acerca das análises gráficas dos resultados obtidos

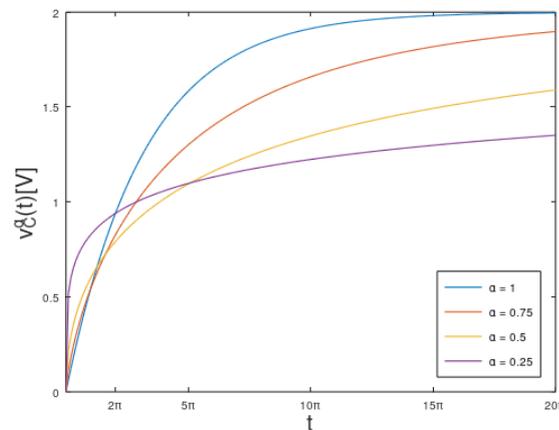
A partir das equações deduzidas ao longo dos capítulos nos quais foram realizadas as modelagens matemáticas dos circuitos RC e RLC , se obteve a plotagem dos gráficos em relação ao tempo para possibilitar a análise entre as diferenças entre as respostas obtidas a partir do cálculos conformável e as do cálculo de ordem inteira. O software utilizado para gerar os gráficos foi software de código aberto Octave.

Como foi observado e demonstrado, quando α tende a unidade, as equações das tensões e correntes obtidas conformavelmente se igualam as obtidas pelo cálculo de ordem inteira, ou seja, quando $\alpha = 1$, as derivadas conformáveis são idênticas às de ordem inteira. Nos gráficos que serão mostrados abaixo, há a presença de quatro curvas por gráfico, cada uma com um valor para α , sendo um deles igual a unidade para representar a o gráfico obtido pela equação gerada pelo cálculo de ordem inteira.

Da mesma forma como foi realizado na modelagem matemática, primeiramente será analisado graficamente as respostas obtidas para o circuito RC . A partir da Eq. (3.14) foi plotado o gráfico da tensão do capacitor do circuito da Fig. (1). Para este circuito foi assumido os valores de resistência e capacitância bem como a tensão inicial ε , tomando então $R = 100\Omega$, $C = 0.01F$ e $\varepsilon = 2V$.

Com o valor das constantes definidos, foi plotado primeiramente o gráfico da tensão no capacitor do Circuito RC , como mostra a figura abaixo. Na legenda é possível visualizar os quatro valores de α , cada um com sua curva em cores diferentes.

Figura 3 – Tensão no capacitor do Circuito RC



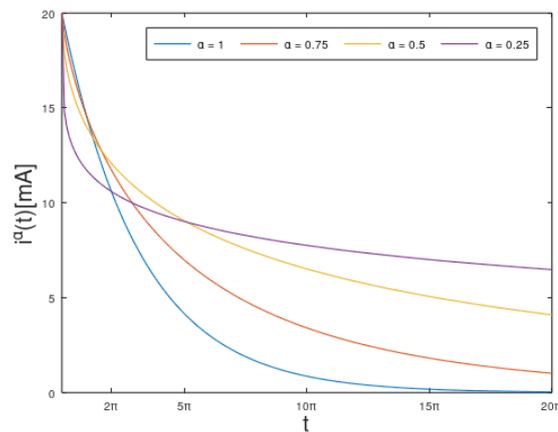
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Fig. (3) é possível notar que quanto menor o valor de α mais rápido o capacitor começa a carregar, no entanto, após pouco tempo, a situação se inverte e nas equações com os menores valores de α demoram muito mais tempo para terminar de carregar o

capacitor, o mesmo pode se inferir do processo de descarga, ou seja, também há uma demora maior no processo de descarga dos capacitores.

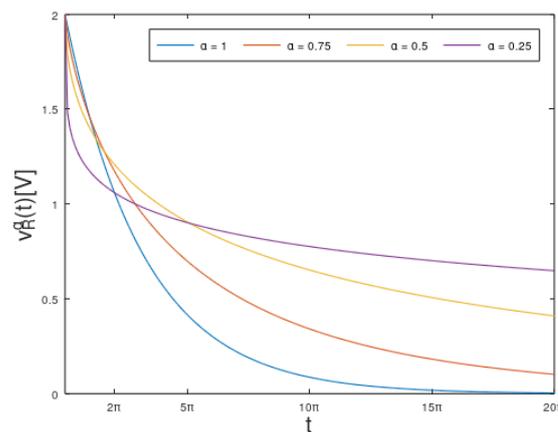
Isso pode ser observado nos gráficos da tensão do resistor plotado a partir da Eq. (3.15) e da corrente da Eq. (3.16) mostrados abaixo, onde é possível notar a mesma relação. É notável a diferença entre as curvas, na $\alpha = 0,25$, a curva roxa, o decréscimo é muito mais rápido, mas em compensação o tempo que essa curva demora para tender a zero como as outras é perceptivelmente maior.

Figura 4 – Corrente do Circuito RC



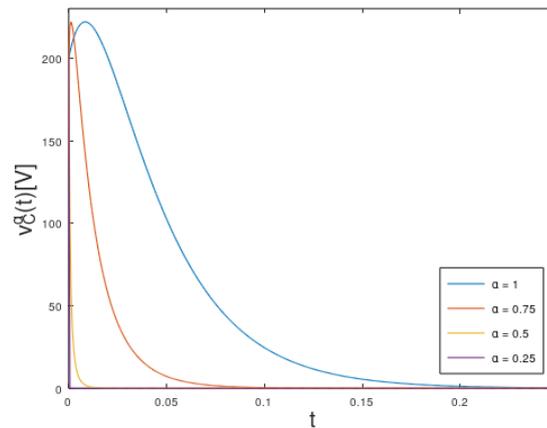
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5 – Tensão no resistor do Circuito RC



Fonte: Elaborada pelo autor.

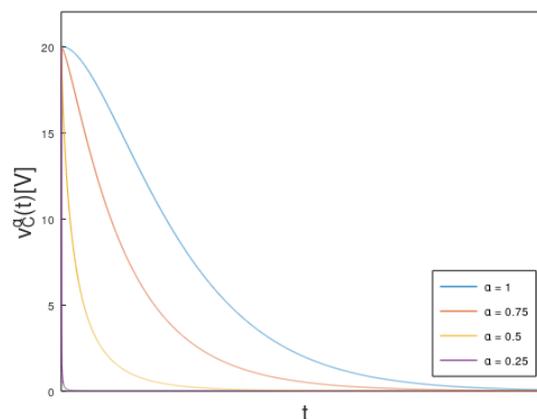
Analisando agora o circuito RLC modelado com o cálculo conformável, será mostrado para cada variável os gráficos dos três cenários. Iniciando pelo cenário de super amortecimento, onde $\omega_N > \omega$, o gráfico abaixo foi obtido a partir da equação da tensão no capacitor obtida na Eq. (3.60). Tomando os mesmos valores para R e C e assumindo $L = 0.001H$ para os três cenários, $\omega_N = 50Hz$ e $\omega = 20Hz$ para o cenário de super amortecimento e $\omega_N = 5Hz$ e $\omega = 10Hz$ para os outros dois.

Figura 6 – Tensão no capacitor do Circuito RLC - $\omega_N > \omega$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

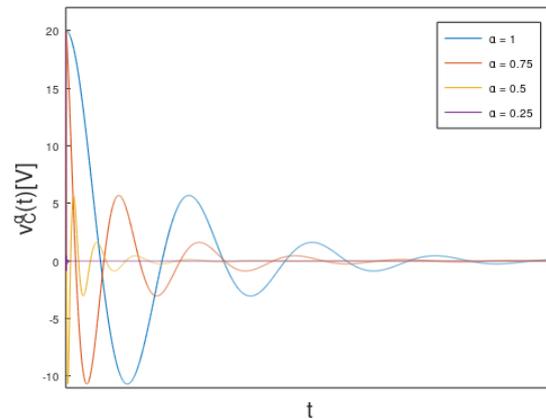
Neste gráfico, é possível notar o efeito do super amortecimento, onde o decaimento é bem mais rápido e sem a presença de nenhuma oscilação, além disso, novamente, para menores valores de α este fato ocorreu mais rapidamente.

Para o caso do amortecimento crítico da Fig. (7), obtido a partir da Eq. (3.69) é possível observar que, como se espera, praticamente não há oscilações na resposta e o sistema é rapidamente amortecido. Em especial, observa-se que na curva roxa, de $\alpha = 0,25$ o amortecimento se mostra praticamente instantâneo ao se comparar com as curvas dos outros valores de α .

Figura 7 – Tensão no capacitor do Circuito RLC - $\omega_N = \omega$ 

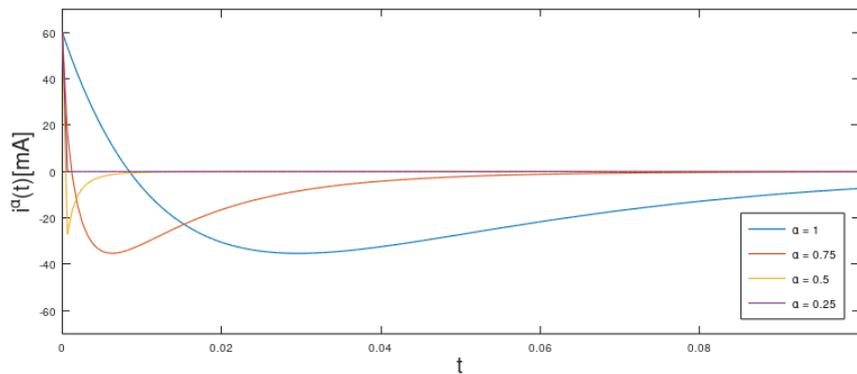
Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim para as tensões no capacitor só restou a análise do terceiro cenário, onde $\omega_N < \omega$ e onde houve a presença das exponenciais complexas conformáveis. Plotado a partir da Eq. (3.75). No gráfico da Fig. (8), observa-se diversas oscilações, características desse tipo sistema de amortecimento, além disso, a taxa dessas oscilações se mostrou inversamente proporcional ao tamanho de α , de modo que a curva roxa ficou praticamente imperceptível devido a sua alta frequência.

Figura 8 – Tensão no capacitor do Circuito RLC - $\omega_N < \omega$ 

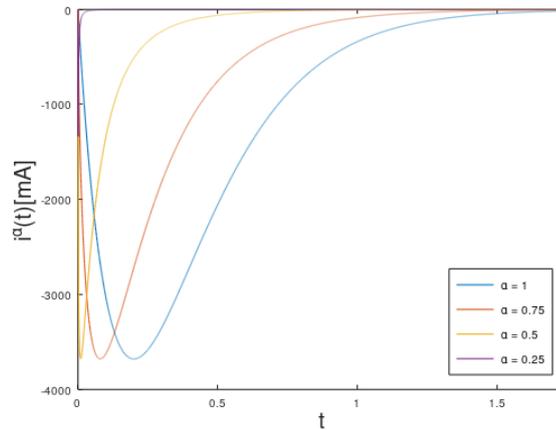
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o primeiro cenário, onde $\omega_N > \omega$ a resposta obtida a partir da Eq. (3.61) é possível observar ainda mais claramente a diferença do resultado obtido a partir da ordem inteira e o obtido pelo formato conformável, visto que desta vez, ao realizar essa comparação a curva $\alpha = 1$ nem parece super amortecida de tamanha diferença entre as velocidades observadas para cada ordem de α .

Figura 9 – Corrente do Circuito RLC - $\omega_N > \omega$ 

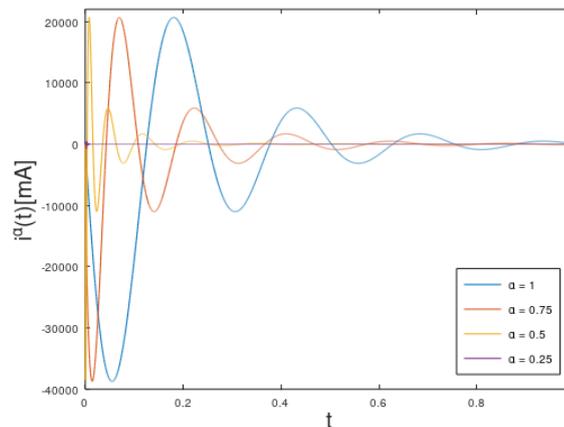
Fonte: Elaborada pelo autor.

Já no cenário de amortecimento crítico, o da Eq. (3.71), a corrente se inicia em zero, depois cai bruscamente, chegando a casa dos μA e depois de chegar ao seu valor mínimo ela passa a subir até retornar a tender a zero novamente. Se observa que quanto menor o valor de α menor o comprimento dessa onda.

Figura 10 – Corrente do Circuito RLC - $\omega_N = \omega$ 

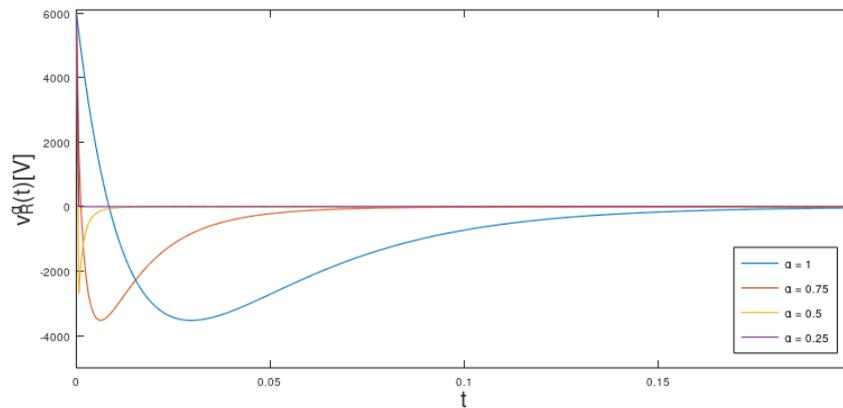
Fonte: Elaborada pelo autor.

No cenário de subamortecimento, mostrado em da Fig. (11) e obtido a partir da Eq. (3.76), também é possível observar a oscilação característica desse tipo de gráfico, onde cada curva é representada por uma senoidal que diminui a sua amplitude a cada novo vale, além disso, como no restante das respostas a corrente conformável também apresentou diferenças nas respostas para da valor de α , de forma que quanto menor ele for, mais rápido a senoidal tenderá ao infinito.

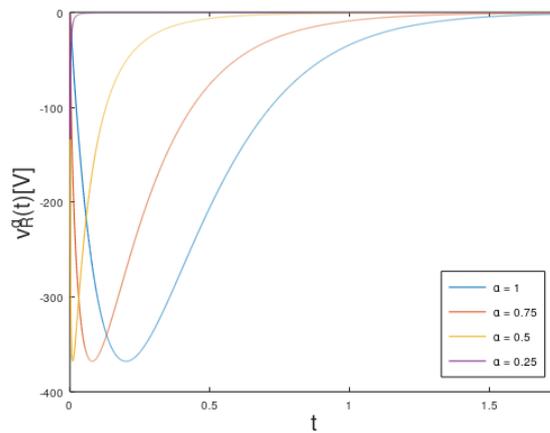
Figura 11 – Corrente do Circuito RLC - $\omega_N < \omega$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

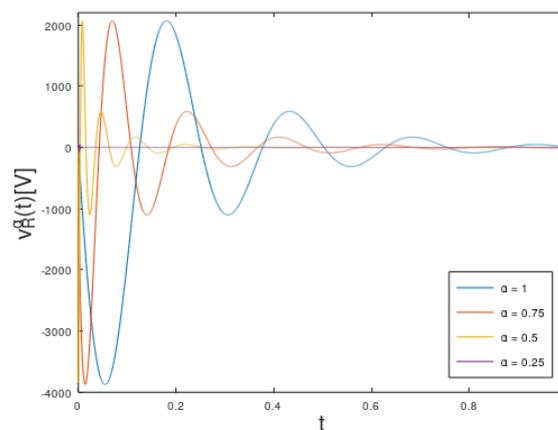
A análise das tensões no resistor é mais simples de ser feita, pois como apresentado anteriormente, $v_R^\alpha(t) = R i^\alpha(t)$, e devido a isto os gráficos da tensão no resistor devem possuir as mesmas formas de onda observadas nos gráficos da corrente com a escala um pouco maior devido ao produto com R , o que de fato ocorre e pode ser observado nos gráficos gerados para cada cenário nas Figs. (12), (13) e (14) a partir das Eqs. (3.62), (3.71) e (3.77), respectivamente.

Figura 12 – Tensão no resistor do Circuito RLC - $\omega_N > \omega$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 13 – Tensão no resistor do Circuito RLC - $\omega_N = \omega$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

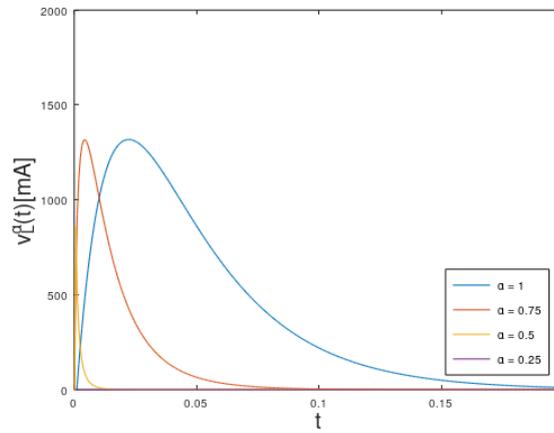
Figura 14 – Tensão no resistor do Circuito RLC - $\omega_N < \omega$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir das correntes conformáveis encontradas em cada cenário, foram obtidas as tensões para o indutor derivando-as como visto nas Eqs. (3.63), (3.72) e (3.78) e com elas foram encontrados os gráficos necessários para cada análise.

Novamente foi encontrado uma resposta onde cada curva tende ao infinito com frequências inversamente proporcionais aos valores usados de α .

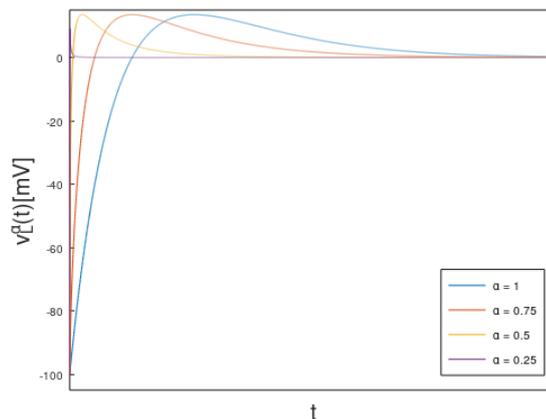
Figura 15 – Tensão no indutor do Circuito RLC - $\omega_N > \omega$



Fonte: Elaborada pelo autor.

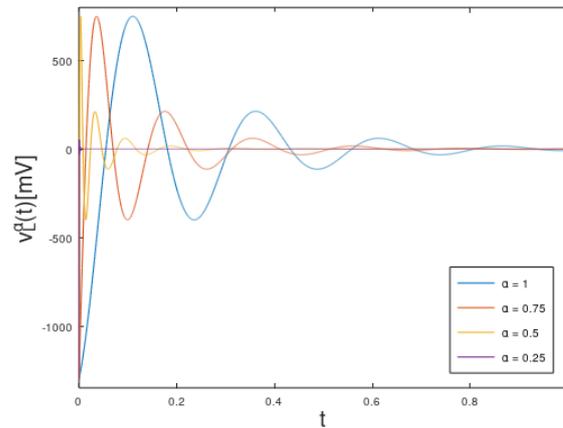
Para $\omega_N = \omega$, o gráfico do indutor se mostrou bem característico deste tipo de resposta, novamente para $\alpha = 0,25$ ficou praticamente imperceptível. Os amortecimentos ocorreram em tempos diferentes, onde quanto mais próximo α chaga da unidade, mais lento é o amortecimento obtido, Comparado com a resposta obtida pelo cálculo de ordem inteira, a resposta do menor α é praticamente instantânea.

Figura 16 – Tensão no indutor do Circuito RLC - $\omega_N = \omega$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, o gráfico obtido para a tensão no indutor quando o sistema é do tipo subamortecido é mostrado na Fig. (17). Nele, é possível observar que ambas as curvas se iniciam na parte negativa do gráfico, e em seu primeiro pico positivo sua amplitude já caiu pela metade. Além disso, assim como nos outros, o amortecimento é notavelmente mais rápido quanto menor o valor de α .

Figura 17 – Tensão no indutor do Circuito RLC - $\omega_N < \omega$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando cada gráfico em sua individualidade, a principal característica que se observa em comum em todos os gráficos é que apesar dos formatos da onda serem semelhantes há uma perceptível diferença nos seus comprimentos de onda e na variação das velocidades de amortecimento, de forma que quanto menor a ordem de α mais rápido foi obtido o amortecimento em ambos os cenários. Este fato é algo que pode ser utilizado como vantagem, visto que, assim como há alguns fenômenos físicos que respondem bem à análise a partir da ótica do cálculo conformável, como citado anteriormente, é provável que alguns circuitos sejam melhor modelados a partir do cálculo conformável do que do cálculo de ordem inteira.

4 Equações de Maxwell Conformáveis

As equações de Maxwell foram descritas pelo físico britânico James Clerk Maxwell no século XIX e dentre suas principais funções elas descrevem a relação entre a corrente elétrica e o campo magnético. Essas equações foram fundamentais para a compreensão do eletromagnetismo e levaram à unificação da eletricidade e do magnetismo como aspectos da mesma força.

Segundo Passos (PASSOS; OLIVEIRA; GOMES, 2019), as equações de Maxwell permitem a existência de diversos de aparelhos e componentes que utilizam as regras do eletromagnetismo para seu funcionamento, tais como antenas, linhas de transmissão, capacitores, motores, dentre outros. De fato, estas equações têm uma ampla gama de aplicações, são usadas para compreender a propagação de ondas eletromagnéticas, que por sua vez é fundamental para qualquer tipo de comunicação sem fio, imageamento médico como a ressonância magnética, radares e até mesmo a propulsão de foguetes.

Neste capítulo, serão definidas as Equações de Maxwell Conformáveis em suas formas integrais a partir da base de cálculo construída no capítulo anterior, e tendo essas formas integrais como ponto de partida, será utilizado os teoremas e os operadores conformáveis definidos para deduzir as Equações de Maxwell em suas formas diferenciais.

4.1 Lei de Gauss Conformável

A lei de Gauss é uma equação que relaciona a distribuição de cargas elétricas com o campo elétrico. Ela ratifica que a integração da divergência do campo elétrico em um volume fechado é igual à carga total presente dentro desse volume. Ou seja, descreve como as cargas elétricas distribuídas em um sistema afetam o campo elétrico ao seu redor.

A primeira das equações de Maxwell que será definida conformavelmente é a Lei de Gauss Conformável, onde sua forma integral está descrita na equação abaixo.

$$\iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S}^\alpha = \frac{Q_{int}^\alpha}{\epsilon_0}. \quad (4.1)$$

Onde \vec{E} é o campo elétrico da superfície de S , $\vec{H}^{\alpha-1}$ é o termo definido no Teorema da Divergência de Gauss Conformável, ϵ_0 é a permissividade elétrica, e Q_{int}^α é a carga pode ser reescrita a partir da densidade elétrica conformável ρ_{el}^α .

$$Q_{int}^\alpha = \iiint_V \rho_{el}^\alpha \cdot d\vec{V}^\alpha.$$

Desta forma, podemos reescrever Eq. (4.1) como:

$$\iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S}^\alpha = \iiint_V \frac{\rho_{el}^\alpha}{\epsilon_0} \cdot d\vec{V}^\alpha.$$

Pela relação do Teorema da Divergência de Gauss Conformável definido na Eq. (2.31) podemos substituir a integral de superfície acima por uma integral de volume do divergente deste mesmo campo \vec{E} .

$$\iiint_V \nabla^\alpha \cdot \vec{E} \cdot d\vec{V}^\alpha = \iiint_V \frac{\rho_{el}^\alpha}{\epsilon_0} \cdot d\vec{V}^\alpha.$$

Percebe-se que em ambos os lados da equação há a presença de uma integral de volume, dito isto, é possível aplicar a derivada conformável em ambos os lados obtendo-se a versão diferencial da primeira equação de Maxwell conformável.

$$\nabla^\alpha \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}^\alpha}{\epsilon_0}. \quad (4.2)$$

Comparando a Eq. (4.1) com a equação da Lei de Gauss usual, obtida pelo cálculo de ordem inteira, percebe-se que as únicas diferenças notadas, é a carga e o diferencial de espaço que são termos conformáveis na lei deduzida no trabalho e além disso, nota-se também a presença do termo $\vec{H}^{\alpha-1}$, descrito nas equações do Teorema da Divergência de Gauss Conformável.

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (4.3)$$

Tirando a prova real assim como nos capítulos iniciais do trabalho em questão, ou seja, para $\alpha = 1$, percebe-se que a equação conformável retoma ao valor da de ordem inteira, como era de se esperar.

O mesmo ocorre com ao compararmos as versões diferenciais destas equações, comparando a equação conformável da Eq. (4.2) com a Eq. (4.4) da equação descrita abaixo, percebe que a única diferença é o operador *nabla* que passa de conformável para inteiro para $\alpha = 1$.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0}. \quad (4.4)$$

4.2 Lei de Gauss Conformável para o Magnetismo

A lei de Gauss para o magnetismo relaciona a distribuição de correntes elétricas com o campo magnético resultante, ela afirma que a divergência do campo magnético é nula, ou seja, não existem monopolos magnéticos. A sua versão integral conformável fica definida como:

$$\iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{B} \cdot d\vec{S}^\alpha = 0. \quad (4.5)$$

Onde \vec{B} é a representação do campo magnético. Pela Teoria da Divergência de Gauss Conformável, temos:

$$\iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{B} \cdot d\vec{S}^\alpha = \iiint_V \nabla^\alpha \cdot \vec{B} \cdot d\vec{V}^\alpha = 0.$$

Logo, para que a integral do divergente de \vec{B} seja igual a zero, o próprio divergente de \vec{B} deve ser zero.

$$\nabla^\alpha \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.6)$$

Por fim, chegamos a versão diferencial da segunda equação de Maxwell conformável, a Lei de Gauss Conformável para o Magnetismo.

Analisando a equação obtida acima, Eq. (4.6), com a propriedade do divergente conformável do rotacional conformável obtida em (2.8) percebe-se que como o divergente conformável do campo magnético \vec{B} é igual a zero, podemos reescrevê-lo como um rotacional conformável de um vetor A . Desta forma, podemos definir \vec{B} como um potencial vetor conformável.

$$\nabla^\alpha \cdot \vec{B} = \nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha \times \vec{A}) = 0. \quad (4.7)$$

As versões integrais e diferenciais desta equação de Maxwell obtidas com o cálculo de ordem inteira estão descritas abaixo.

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.8)$$

$$\nabla^\alpha \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.9)$$

Analisando ambas as versões e comparando-as respectivamente com as Eqs. (4.5) e (4.6), nota-se que assim como na equação de Maxwell para a eletricidade, as diferenças notadas entre as equações integrais é a presença do termo $vecH^{\alpha-1}$ e do diferencial $d\vec{S}$, enquanto nas versões diferenciais, a única diferença é a presença do operador conformável. Além disso, notamos também que para $\alpha = 1$, ambas as versões conformáveis se igualam as do cálculo de ordem inteira, como se espera.

4.3 Lei de Ampère-Maxwell Conformável

A lei de Ampère atualizada por Maxwell ao incluir a contribuição da variação do campo elétrico no tempo, associa a corrente elétrica ao campo magnético. Desta forma, ela descreve que a corrente elétrica gera um campo magnético e que a variação do campo elétrico no tempo gera uma variação no campo magnético, demonstrando como as correntes elétricas afetam os campos magnéticos.

A lei de Ampère-Maxwell em sua versão conformável será definida como:

$$\int_C \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{B} \cdot d\vec{l}^\alpha = \mu_0(i_C^\alpha + \epsilon_0 D_t^\alpha(\phi_E^\alpha)). \quad (4.10)$$

Onde C é uma curva fechada, μ_0 é a permissividade magnética, i_C^α é a corrente elétrica conformável e ϕ_E^α é o fluxo elétrico. Utilizando o Teorema de Stokes conformável da Eq. (2.34), temos:

$$\int_C \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla^\alpha \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}^\alpha = \mu_0(i_C^\alpha + \epsilon_0 D_t^\alpha(\phi_E^\alpha)).$$

Além disso, podemos reescrever a corrente e fluxo elétrico conformáveis como:

$$\begin{aligned} i_C^\alpha &= \iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{J} \cdot d\vec{S}^\alpha \\ \phi_E^\alpha &= \iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S}^\alpha \end{aligned}$$

Onde \vec{J} é a densidade superficial de corrente. Utilizando as relações acima na equação da Lei de Ampère-Maxwell, temos:

$$\iint_S (\nabla^\alpha \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}^\alpha = \mu_0 \left(\iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{J} \cdot d\vec{S}^\alpha + \epsilon_0 D_t^\alpha \left(\iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S}^\alpha \right) \right).$$

É possível notar que podemos juntar os termos da direita em uma só integral, visto que ambas são integrais de superfície com o mesmo diferencial conformável.

$$\iint_S (\nabla^\alpha \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}^\alpha = \iint_S \mu_0 \vec{H}^{\alpha-1} \cdot (\vec{J} + \epsilon_0 D_t^\alpha(\vec{E})) \cdot d\vec{S}^\alpha.$$

Agora que ambos os lados da equação estão definidos como uma integral de superfície, podemos aplicar a derivada conformável de segunda ordem em relação a S em ambos os lados e assim obter a versão diferencial da Lei de Ampère-Maxwell Conformável.

$$\nabla^\alpha \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 D_t^\alpha(\vec{E})). \quad (4.11)$$

Analisando a Lei de Ampère-Maxwell Conformável obtida em suas formas integral e diferencial nas Eqs. (4.10) e (4.11), respectivamente, com as as versões já bem estabelecidas e modeladas pelo cálculo de ordem inteira das Eqs. (4.12) e (4.13), nota-se que as diferenças entre elas são os termos conformáveis da corrente, derivada do fluxo elétrico, o diferencial \vec{dl}^α e o termo $\vec{H}^{\alpha-1}$ na versão integral. Já na versão diferencial as diferenças notadas foi o rotacional conformável e também a derivada conformável do campo elétrico.

$$\int_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right) \quad (4.12)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (4.13)$$

4.4 Lei de Faraday-Lenz Conformável

A Lei de Faraday-Lenz relaciona o campo elétrico e o campo magnético em um ponto no espaço, descrevendo como o campo elétrico cria o campo magnético, e como este varia no tempo devido a variações no campo elétrico. A quarta lei de Maxwell conformável, será definida em sua versão integral como:

$$\int_C \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}^\alpha = -D_t^\alpha(\phi_B^\alpha). \quad (4.14)$$

Onde ϕ_B^α é o fluxo magnético conformável. Utilizando novamente o Teorema de Stokes conformável para substituir a integral de linha por uma de superfície, temos:

$$\int_C \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}^\alpha = \iint_S (\nabla^\alpha \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}^\alpha = -D_t^\alpha(\phi_B^\alpha).$$

Além disso, também podemos trocar o fluxo em \vec{B} por:

$$\phi_B^\alpha = \iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{B} \cdot d\vec{S}^\alpha$$

Desta forma, podemos reescrever a lei de Faraday-Lenz conformável como:

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla^\alpha \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}^\alpha &= -D_t^\alpha \left(\iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot \vec{B} \cdot d\vec{S}^\alpha \right) \\ &= - \iint_S \vec{H}^{\alpha-1} \cdot D_t^\alpha(\vec{B}) \cdot d\vec{S}^\alpha. \end{aligned}$$

Desta forma, como ambos os lados são descritos por uma integral de superfície com o mesmo diferencial, podemos novamente utilizar da mesma simplificação, chegando então a versão diferencial da quarta equação de Maxwell conformável.

$$\nabla^\alpha \times \vec{E} = -D_t^\alpha(\vec{B}). \quad (4.15)$$

Abaixo estão descritas as versões usuais desta lei de Maxwell.

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (4.16)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Comparando as Eqs. (4.16) e (4.17) com as equações conformáveis obtidas nas versões integral e diferencial da Lei de Faraday-Lenz, nota-se as mesmas diferenças observadas na lei anterior, ou seja, a presença dos termos conformáveis $\vec{H}^{\alpha-1}$, \vec{dl}^α , ∇^α e das derivadas conformáveis do fluxo e campo magnéticos das versões integrais e diferenciais respectivamente. Além disso, nota-se que em ambas as equações das leis de Maxwell conformáveis, ao se utilizar $\alpha = 1$ as equações conformáveis tanto nas versões integrais quanto na versões diferenciais retomam as equações obtidas pelo cálculo inteiro.

4.5 Equação Geral Conformável da Onda

A Equação Geral da Onda foi desenvolvida por Maxwell, e segundo Oberziner (OBERZINER, 2008), uma das contribuições mais importantes de suas equações são as equações da propagação das ondas eletromagnéticas. Maxwell unificou as leis da eletrostática e do magnetismo em uma teoria do eletromagnetismo, a qual incluía as suas quatro equações.

A partir delas, ele concluiu que existia uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo com uma velocidade constante, conhecida como a velocidade da luz. A equação da onda definida por ele descreve como a intensidade da onda varia no espaço e no tempo, e é a base da teoria da ondulatória eletromagnética.

No capítulo anterior, foram deduzidas as formas diferenciais das equações de Maxwell conformáveis e a partir destas equações, será deduzida a equação geral conformável da onda. Abaixo estão descritas as quatro equações de Maxwell conformáveis.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^\alpha \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_{el}^\alpha}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla}^\alpha \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla^\alpha \times \vec{B} &= \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 D_t^\alpha(\vec{E})) \\ \nabla^\alpha \times \vec{E} &= -D_t^\alpha(\vec{B}).\end{aligned}$$

Afim de simplificação dos cálculos, estas equações serão analisadas em um cenário de vácuo, de forma que $\vec{\nabla}^\alpha \cdot \vec{E} = 0$ e $\vec{J} = 0$, visto que no vácuo não há matéria. Com estas informações, as equações de Maxwell conformáveis no cenário do vácuo são descritas como:

$$\vec{\nabla}^\alpha \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.18)$$

$$\vec{\nabla}^\alpha \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.19)$$

$$\nabla^\alpha \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 D_t^\alpha(\vec{E}) \quad (4.20)$$

$$\nabla^\alpha \times \vec{E} = -D_t^\alpha(\vec{B}). \quad (4.21)$$

Primeiramente, será analisada a Eq. (4.21), onde será utilizada a propriedade do rotacional do rotacional demonstrada anteriormente. Aplicando então o rotacional conformável em ambos os lados da equação, temos:

$$\nabla^\alpha \times \nabla^\alpha \times \vec{E} = \nabla^\alpha \times (-D_t^\alpha(\vec{B})).$$

Pela propriedade do rotacional deduzida na Eq. (2.13), temos:

$$\nabla^\alpha \times \nabla^\alpha \times \vec{E} = \nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha \cdot \vec{E}) - (\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{E} = \nabla^\alpha \times (-D_t^\alpha(\vec{B})).$$

Como pela Eq. (4.18), $\vec{\nabla}^\alpha \cdot \vec{E} = 0$, então podemos simplificar alguns termos.

$$= -(\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{E} = \nabla^\alpha \times (-D_t^\alpha(\vec{B})).$$

Aplicar o rotacional da derivada conformável de \vec{B} é o mesmo que calcular a derivada conformável do rotacional de \vec{B} . Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} &= -(\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{E} = \nabla^\alpha \times (-D_t^\alpha(\vec{B})) = -D_t^\alpha(\nabla^\alpha \times \vec{B}) \\ &= (\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{E} = D_t^\alpha(\nabla^\alpha \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Utilizando agora a relação da Eq. (4.20), temos:

$$\begin{aligned} &= (\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{E} = D_t^\alpha(\mu_0 \epsilon_0 D_t^\alpha(\vec{E})) \\ &= (\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 D_t^\alpha(D_t^\alpha(\vec{E})) \\ &= (\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 (D_t^\alpha)^2(\vec{E}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Aplicando agora o rotacional em ambos os lados da Eq. (4.20), tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla^\alpha \times \nabla^\alpha \times \vec{B} &= \nabla^\alpha \times (\mu_0 \epsilon_0 D_t^\alpha(\vec{E})) \\ \nabla^\alpha \cdot (\nabla^\alpha \cdot \vec{B}) - (\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 D_t^\alpha(\nabla^\alpha \times \vec{E})\end{aligned}\quad (4.23)$$

Substituindo as Eqs. (4.19) e (4.21) na Eq. (4.23), temos:

$$\begin{aligned}-(\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 D_t^\alpha(-D_t^\alpha \vec{B}) \\ (\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 (D_t^\alpha)^2(\vec{B})\end{aligned}\quad (4.24)$$

Sabe-se que a velocidade da luz v pode ser escrita como: $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, logo $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{v^2}$. Substituindo esta relação na Eq. (4.24), encontramos por fim a Equação Geral Conformável da Onda.

$$(\nabla^\alpha)^2 \cdot \vec{E} = \frac{1}{v^2} (D_t^\alpha)^2(\vec{E})\quad (4.25)$$

Comparando a equação obtida com a equação geral da onda usual descrita abaixo, nota-se que as únicas diferenças são o operador de *nabla* conformável ao quadrado e a derivada segunda conformável do campo elétrico. Além disso, verificando sua validade ao fazer $\alpha = 1$, nota-se que assim como nas equações de Maxwell, a equação geral conformável da onda se iguala a sua contraparte obtida com o cálculo de ordem inteira.

$$\nabla^2 \cdot \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.\quad (4.26)$$

Analisando a equação da onda conformável encontrada para as dimensões r e t , e generalizando para qualquer tipo de onda, podemos reescrevê-la como:

$$(D_r^\alpha)^2(\psi(r, t)) = \frac{1}{(v^\alpha)^2} (D_t^\alpha)^2(\psi(r, t)).\quad (4.27)$$

Sejam $v^\alpha = \frac{\omega^\alpha}{k^\alpha}$, onde ω é o número da onda e ω a frequência angular. Supondo uma solução do tipo senoidal, dada pela equação abaixo.

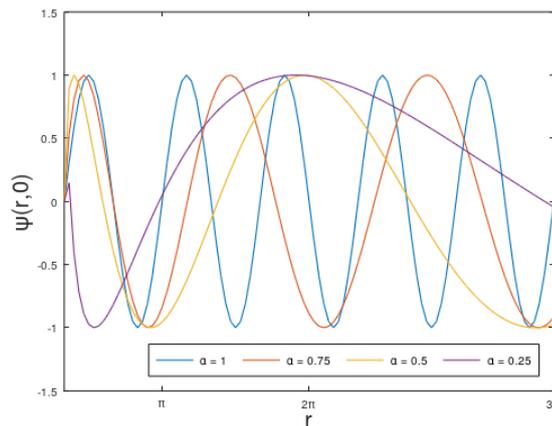
$$\psi(r, t) = A \text{sen} \left(\frac{k^\alpha}{\alpha} r^\alpha + \frac{\omega^\alpha}{\alpha} t^\alpha \right).$$

Onde A é a amplitude da onda. Aplicando a senoidal na Eq. (4.27), temos:

$$\begin{aligned}
(D_r^\alpha)^2 \left(A \operatorname{sen} \left(\frac{k^\alpha}{\alpha} r^\alpha + \frac{\omega^\alpha}{\alpha} t^\alpha \right) \right) &= \left(\frac{k^\alpha}{\omega^\alpha} \right)^2 (D_t^\alpha)^2 \left(A \operatorname{sen} \left(\frac{k^\alpha}{\alpha} r^\alpha + \frac{\omega^\alpha}{\alpha} t^\alpha \right) \right) \\
D_r^\alpha \left(A k^\alpha \cos \left(\frac{k^\alpha}{\alpha} r^\alpha + \frac{\omega^\alpha}{\alpha} t^\alpha \right) \right) &= \frac{k^{2\alpha}}{\omega^{2\alpha}} D_t^\alpha \left(A \omega^\alpha \cos \left(\frac{k^\alpha}{\alpha} r^\alpha + \frac{\omega^\alpha}{\alpha} t^\alpha \right) \right) \\
-A k^{2\alpha} \operatorname{sen} \left(\frac{k^\alpha}{\alpha} r^\alpha + \frac{\omega^\alpha}{\alpha} t^\alpha \right) &= -\frac{k^{2\alpha}}{\omega^{2\alpha}} A \omega^{2\alpha} \operatorname{sen} \left(\frac{k^\alpha}{\alpha} r^\alpha + \frac{\omega^\alpha}{\alpha} t^\alpha \right).
\end{aligned}$$

Nas equações acima, foram realizadas derivadas duas derivadas conformáveis consecutivamente e na última equação, foi verificado que esta senoidal é solução desta equação de onda conformável. Analisando esta senoidal graficamente para os parâmetros: $A = k = \omega = 1$ e em $t = 0$, temos:

Figura 18 – Solução da Equação da Onda Conformável



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao analisar o gráfico obtido nota-se que para $\alpha = 1$ a onda possui o comportamento normal, já para valores menores de α é observado que a frequência da onda não se mantém constante, se mostrando mais rápida próxima ao $r = 0$ e diminuindo com o seu crescimento. Além disso, quanto menor o valor de α maior é a variação da frequência da onda observada.

5 Considerações Finais

O objetivo deste presente trabalho foi estudar o cálculo conformável, entender e aprender suas propriedades, suas diferenças e semelhanças com as do cálculo de ordem inteira. Um dos principais motivos para a escolha do estudo deste tema se deu ao fato de que ele é relativamente novo no âmbito da ciência e devido a isto, há diversas áreas onde ainda não foi abordado e aplicado. A grande quantidade de oportunidades acerca do mesmo é o principal ponto que chama atenção sobre ele.

Neste trabalho, o cálculo conformável foi apresentado. Na parte introdutória, as propriedades de derivação e de integração conformável foram definidas e foi deduzida as séries de Taylor e de MacLaurin conformáveis. Passando pela parte introdutória, chegou-se a parte mais densa da teoria do cálculo conformável. Nesta etapa, foram definidos o cálculo conformável para duas ou mais variáveis e o cálculo vetorial conformável com as deduções do gradiente, divergente e rotacional conformáveis e de algumas de suas propriedades. Finalizou-se esta etapa do trabalho com a demonstração de alguns Teoremas definidos com o cálculo conformável, são eles o Teorema da Divergência Conformável, o Teorema de Green Conformável e o Teorema de Stokes Conformável. Estes teoremas, em suas versões usuais com o cálculo de ordem inteira são fundamentais para a construção da teoria do eletromagnetismo e, como era de se esperar, para se construir a teoria do eletromagnetismo pela ótica conformável, definir estes teoremas conformavelmente se mostrou imprescindível.

Com a base de cálculo já bem delineada, iniciou-se a etapa da aplicação deste cálculo em temas da engenharia e da física propriamente ditos. Desta forma, o cálculo conformável foi aplicado em circuitos elétricos RC e RLC para obter as equações diferenciais conformáveis deste sistema e para encontrar as equações de cada termo e posteriormente analisá-los graficamente e observar as diferenças nas respostas obtidas pelo cálculo conformável e pelo cálculo de ordem inteira, tanto graficamente quanto equacionalmente. Nesta parte do trabalho, foi optado por deduzir as equações desses sistemas a partir da modelagem com ambos os cálculos, para fazer um paralelo das respostas de ambos.

A fase final da aplicação do cálculo conformável foi a aplicação de toda essa base de cálculo construída para definir as Equações de Maxwell Conformáveis e a partir delas, deduzir a Equação Geral Conformável da Onda. Para isso, foi utilizado as propriedades do cálculo vetorial conformável deduzidas e também as dos teoremas conformáveis que foram demonstrados naquele capítulo. Desta forma, foram definidas as Equações de Maxwell Conformáveis em suas formas integrais e deduzidas as formas diferenciais e por fim foi deduzida a partir delas a Equação Geral Conformável da Onda.

Uma das principais propriedades do cálculo conformável é que para $\alpha = 1$, os resultados conformáveis retomam os do cálculo de ordem inteira. Durante todo o trabalho, foi realizado esta análise, afim de verificar a validade dos resultados obtidos, comparando as equações conformáveis obtidas para $\alpha = 1$ com as equações já bem estabelecidas a partir do cálculo de ordem inteira.

As prospecções futuras sobre este trabalho são de lapidá-lo e resumi-lo afim de publicar um artigo sobre este tema, visto que ainda não há na literatura boa parte do conteúdo nele presente. Além disso, a partir dos resultados e equações encontradas, pode-se pensar em diversas novas áreas para aplicá-lo, devido a imensa gama de possibilidades de aplicação para as Equações de Maxwell e as Equação Geral da Onda e ainda da característica do cálculo conformável de ser um estudo recente e com muito pouco ainda destrinchado sobre o tema.

Referências

- ABDELJAWAD, T. On conformable fractional calculus. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 53.
- CARDOSO, L. X. et al. Mecânica clássica conformável: uma revisão pedagógica. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0064>>. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 53.
- CARVALHO, M. D. d.; OTTONI, J. E. Introdução ao cálculo fracionário com aplicações. 2018. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/index.php/rmat/article/download/1289/1087//article/download/1289/1087/>>. Citado na página 19.
- KHALIL, R. et al. A new definition of fractional derivative. 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- OBERZINER, A. P. B. As equações de maxwell e aplicações. 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/119376/Ana_Paula2028129.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Citado na página 92.
- PASSOS, M. N. S.; OLIVEIRA, A. M. d.; GOMES, A. K. F. Aplicações das equações de maxwell. 2019. Disponível em: <https://intranet.cbt.ifsp.edu.br/qualif/volume04/Engenharia/Artigo_E_06_260_273.pdf>. Citado na página 85.
- ZHAO, M. L. D. General conformable fractional derivative and its physical. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10092-017-0213-8>>. Citado na página 53.