Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

Distribuição Delta Gaussiana bivariada

Bruno Gonçalves Silva

Projeto apresentado para o Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Brasília
2022

Bruno Gonçalves Silva

Distribuição Delta Gaussiana bivariada

Orientador(a): Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano

Projeto apresentado para o Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Brasília
2022

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

Resumo

Neste trabalho propomos uma generalização da distribuição normal bivariada e a denominamos de δ Gaussiana. Os novos parâmetros δ_1 e δ_2 são parâmetros de forma que definem se a função de densidade é unimodal ou multimodal. Mostramos que as distribuições marginais do modelo δ Gaussiano bivariado também são δ-Gaussianas univariadas. Alem disso calculamos a função de covâriancia do novo modelo, a distribuição condicional, e o coeficiente de depêndencia caudal. Os parâmetros do novo modelo foram estimados por maxíma verossimilhança e seu desempenho testado via simulação Monte Carlo. Finalmente ilustramos a aplicabilidade do nosso modelo para dois conjuntos de dados de finanças.

Palavras-chaves: distribuição, bivariada, bimodal

1 Introdução

A Distribuição normal(Gaussiana) bivariada é largamente conhecida e utilizada por pesquisadores das mais diversas áreas devido a sua relação com teorema do limite central que lhe permite uma ampla gama de aplicações. Quando se quer estudar a modelagem de um vetor aleatório (X, Y) o modelo de dependência Gaussiano bivariado é bastante utilizado devido à suas propriedades. No entanto, dados de diversas áreas como finanças, atuária, hidrologia e outras tem mostrado a necessidade do uso de outras distribuições bivariadas que capturem assimetrias, dependência caudal e eventos raros. Uma distribuição bivariada com eventos raros é aquela em que as curvas de nível de sua densidade tem a formação de um ou mais clusters. Neste caso, as densidades marginais são unimodais ou bimodais.

Distribuições bimodais são geralmente obtidas por misturas de distribuições, principalmente mistura de normais padrão Robertson e Fryer (1969), porem uma dificuldade que surge ao lidar com esse método é a estimação dos parâmetros veja McLachlan, Lee e Rathnayake (2019). Assim, para contornar estes problemas, novas distribuições foram propostas como a distribuição johnson's S_u-distribution ver Johnson (1949) obtida por uma transformação da normal padrão. Porem é desconhecida a proposta de uma distribuição bimodal que também seja bivariada, geralmente se utiliza de cópulas ou misturas de cópulas para se chegar a essas distribuições, o que também tem seus problemas, como o extenso uso computacional e pode ser dificil estimar os parâmetros Joe (2014).

Assim, neste trabalho propomos uma nova distribuição bivariada e bimodal como uma generalização do modelo Gaussiano bivariado. Essa distribuição é bastante flexível, podendo tanto ser unimodal quanto bimodal, sendo bastante útil para a modelagem de diferentes tipos de dados.

O trabalho esta organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 estão os conceitos básicos e úteis nos capítulos posteriores. No Capítulo 3, definimos e fazemos o estudo gráfico do novo modelo δ-Gaussiano univariado e bivariado. A simulação de variáveis aleatórias δ-Gaussiana e do vetor aleatório δ-Gaussiano bivariado são apresentados no Capítulo 4, no Capítulo 5 estimamos os parâmetros do modelo e no capítulo 6 aplicamos os resultados em nas ações de dois bancos onde um deles apresenta um comportamento bimodal.

2 Conceitos preliminares

2.1 Gaussiana univariada

Uma das distribuições de probabilidade mais importantes na estatística, devido a suas propriedades, é a distribuição Gaussiana.

No caso univariado, uma variável aleatória (v.a.) contínua Y tem distribuição Gaussiana (Normal) com parâmetros de locação (média) e escala (desvio padrão), respectivamente, μ e σ, denotada por $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, se sua função de densidade de probabilidade (FDP) e função de distribuição acumulada (FDA) são dadas, respectivamente, por

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}, \tag{2.1.1}$$

e

$$F_{\mu,\sigma}(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Quando $\mu = 0$, para simplificar, usaremos a notação

$$F_\sigma(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} dt. \tag{2.1.2}$$

Se $Z \sim N(0, 1)$ tem distribuição normal padrão, a distribuição de $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ é obtida pela transformação $Y = \sigma Z + \mu$. Assim, a FDA de Y é calculada a partir da FDA de Z. A FDA de Z é denotada por

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.1.3}$$

2.2 Gaussiana bivariada

A generalização da distribuição Gaussiana para duas ou mais dimensões tem sido bastante estudada e utilizada em técnicas de análise multivariada. Conforme Bickel e Doksum (2006), diz-se que um vetor aleatório (Y_1, Y_2) tem distribuição normal bivariada se, e somente se, sua função de densidade de probabiliade conjunta (FDPC) for dada por

$$h_{\mu,\mathbf{\Sigma}}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\{[(y_1, y_2) - (\mu_1, \mu_2)]^t \mathbf{\Sigma}^{-1}[(y_1, y_2) - (\mu_1, \mu_2)]\}, \tag{2.2.1}$$

sendo que $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ é o vetor de médias, $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ é a matriz de covarância, $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ é a correlação de pearson, e

$$\mathbf{\Sigma^{-1}} = \frac{1}{(\sigma_1\sigma_2)^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

é a matriz inversa de $\mathbf{\Sigma}$.

Quando $\mu = (0, 0)$, a FDPC e FDAC de (2.2.1) são dadas, respectivamente, por:

$$h_{\mathbf{\Sigma}}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho y_1 y_2}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\} \tag{2.2.2}$$

e

$$H_{\mathbf{\Sigma}}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{t_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{t_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho t_1 t_2}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\} dt_1 dt_2. \tag{2.2.3}$$

Prova-se que, se (Y_1, Y_2) tem distribuição normal bivariada com FDPC definida em (2.2.1), $(Y_1, Y_2) \sim F_{\mu,\Sigma}$, então as componentes marginais Y_i, $i = 1, 2$ tem distribuições Gaussianas univariadas com média μ_i e variância σ_i. Isto é, $Y_1 \sim N(\mu_1 \sigma_1)$ e $Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.

Análogo ao caso univariado, quando $\mu = (0, 0)$ e $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ e $\rho = 0$, a FDAC padrão é dada por

$$\Phi(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{z_1}\int_{-\infty}^{z_2} h_{\mathbf{\Sigma}}(y_1, y_2) dt_1 t_2.$$

Nas Figuras 1 e 2 mostramos o gráfico dos modelos Gaussianos antes expostos. Na Figura 1 densidade está o gráfico da densiade $h_{\mathbf{\Sigma}}(y_1, y_2)$ e algumas curvas de nível. A Figura 2 ilustra muito bem, em dimensão 2, a contribuição das densidades marginais para a densidade $h_{\mathbf{\Sigma}}(y_1, y_2)$.

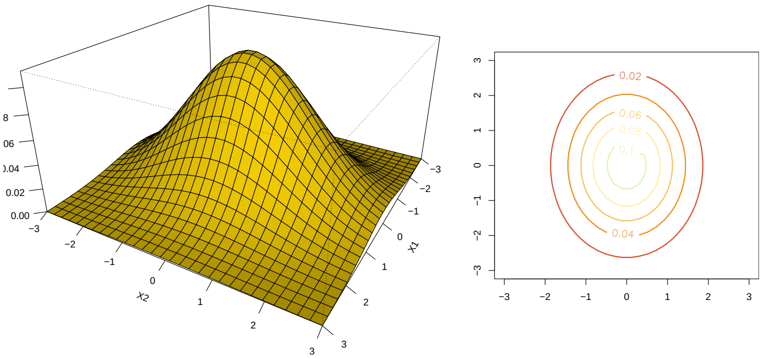

Figura 1: Painel direito: gráfico de $h_{\mu,\boldsymbol{\Sigma}}$ com $\mu = (0, 0)$, $\sigma_1 = 1$, e $\sigma_2 = 2$. Painel esquerdo: respectivas curvas de nível.

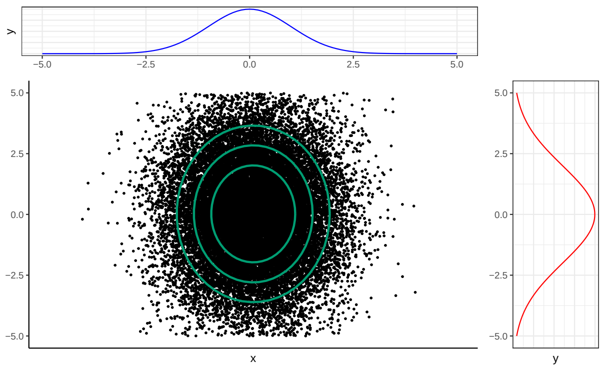

Figura 2: Curvas de nível de $h_{\mu,\boldsymbol{\Sigma}}$ com $\mu = (0, 0)$ e $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$ versus as densidades marginais.

3 Distribuição delta Gaussiana

Nesta seção apresentamos os principais resultados referentes a distribuição δ-gaussiana, introduzimos sua versão univariada e bivariada, mostramos que de fato são distribuições, suas respectivas médias e variâncias. Para o caso bivariado mostramos que suas marginais são distribuições δ-gaussianas, assim como sua condicional e apresentamos ainda o seu coeficiente de dependência caudal.

3.1 Distribuição delta Gaussiana univariada

Considere uma variável aleatória Y com distribuição gaussiana de média 0 e desvio padrão σ, $Y \sim F_\sigma$, conforme (2.1.2). Para obter a nova distribuição, usamos a técnica de composição da função F_σ com a função inversível $T(x) = (x-\mu)|x-\mu|^\delta$, $\mu \in R$ e $\delta \geq 0$, e obtemos uma variável aleatória δ-Gaussiana X, $X \sim F_{\mu,\sigma,\delta}$. Isto é a distribuição acumulada de uma variável δ-gaussiana X é dada por

$$F_{\mu,\sigma,\delta}(x) = F_\sigma(T(x)).$$

Como $T'(x) = (\delta+1)|x-m|^\delta$, a expressão da FDP de X é dada por:

$$f_{\mu,\sigma,\delta}(x) = \frac{(\delta+1)|x-\mu|^\delta}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)|x-\mu|^\delta)}{\sigma}\right]^2\right\}, \quad x \in \mathcal{R}. \tag{3.1.1}$$

A metodologia utilizada para obter a densidade (3.1.1) segue a mesma abordagem de Embrechts e McNeil (2006).

Para provar que a função (3.1.1) é uma FDP, basta considerar a sustituição $y = (x-\mu)|x-\mu|^\delta$, pois

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\delta+1)\,|x-\mu|^\delta}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)|x-\mu|^\delta)}{\sigma}\right]^2\right\}dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2\right\}dy\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Proposition 3.1 *Seja $X \sim F_{\mu,\sigma,\delta}$ e $x \in \mathbb{Z}^+$. Então o k-ésimo momento de x é dado por :*

$$E(X^k) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}[1+(-1)^{k-j}](2\sigma^2)^{\frac{k-j}{2(\delta+1)}+\frac{1}{2}}\mu^j\Gamma\left(\frac{k-j}{2(\delta+1)}+\frac{1}{2}\right). \tag{3.1.2}$$

Proof 3.1 *Por definição de esperança, tem-se que:*

$$\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{T(x)}{\sigma}\right)^2}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left(sgn(x)\,|x|^{\frac{1}{\delta+1}}+\mu\right)^k e^{\frac{-1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}dx,
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

pois $T^{-1}(y) = sgn(y)\,|y|^{\frac{1}{\delta+1}}+\mu$. Para resolver 3.1.3, usa-se a formula do binomio de

Newtow. Assim $E(X^k)$ é atualizada com

$$
\begin{aligned}
E(X^k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mu^j\left[\int_{-\infty}^{0}(-1)^{k-j}(-x)^{\frac{k-j}{\delta+1}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}dx\right] \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mu^j\left[\int_{0}^{\infty}x^{\frac{k-j}{\delta+1}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}dx\right] \qquad (3.1.4)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{j=0}^{k}\mu^j\binom{k}{j}\left[1+(-1)^{k-j}\right]\left(\int_{0}^{\infty}x^{\frac{k-j}{\delta+1}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}dx\right).
\end{aligned}
$$

O resultado 3.1.2 é obtido ao usar a função Gama na integral de 3.1.4

Corollary 3.1 *Seja $X \sim F_{\mu,\sigma,\delta}$. Então*

$$E(X) = \mu$$

e

$$var(X) = var(X) = \frac{(2\sigma^2)^{\frac{1}{\delta+1}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{\delta+1}+\frac{1}{2}\right).$$

3.2 Distribuição delta Gaussiana bivariada

Nesta subseção definimos o modelo δ-Gaussiano bivariado $X = (X_1, X_2)$ com FDAC $H_{\mu,\Sigma,\delta}$, $X = (X_1, X_2) \sim H_{\mu,\Sigma,\delta}$, seguindo o mesmo procedimento que no caso univariado. Assim, consideramos a distribuição bivariada $H_{\mathbf{\Sigma}}$, definida em (2.2.3), e as funções

$$T_1(y_1) = (y_1-\mu_1)|y_1-\mu_1|^{\delta_1}, \quad T_2(y_2) = (y_2-\mu_2)|y_2-\mu_2|^{\delta_2}, \qquad (3.2.1)$$

com $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in R^2$, $\delta = (\delta_1, \delta_2)$. Então a FDAC e FDPC do modelo δ-Gaussiano bivariado $X = (X_1, X_2)$ são dadas, respectivamente, por:

$$H_{\mu,\Sigma,\delta}(x_1, x_2) \;=\; H_{\mathbf{\Sigma}}(T_1(x_1), T_2(x_2)) \qquad (3.2.2)$$

e

$$
\begin{aligned}
h_{\mu,\Sigma,\delta,}(x_1,x_2) &= \frac{(\delta_1+1)(\delta_2+1)|x_1-\mu_1|^{\delta_1}|x_2-\mu_2|^{\delta_2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \\
&\times \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(T_1(x_1))^2}{\sigma_1^2}+\frac{(T_2(x_2))^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho T_1(x_1)T_2(x_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\} \qquad (3.2.3)
\end{aligned}
$$

Proposition 3.2 *A função $h_{\mu,\Sigma,\delta}$ como definida em (3.2.3) é uma função de densidade.*

Proof 3.2 *Deve-se provar que $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_{\mu,\Sigma,\delta}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 1$. De fato, tem-se que*

$$\begin{aligned} I &= \frac{(\delta_1+1)(\delta_2+1)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1-\mu_1|^{\delta_1}|x_2-\mu_2|^{\delta_2} \\ &\times \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{T_1(x_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{T_2(x_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho T_1(x_1)T_2(x_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}dx_1dx_2 \\ &= \frac{(\delta_1+1)(\delta_2+1)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-\mu_1|^{\delta_1}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{T_1(x_1)^2}{\sigma_1^2}\right]\right\}\times I_1dx_1, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

sendo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}|x_2-\mu_2|^{\delta_2}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{T_2(x_2)}{\sigma_2}-\frac{\rho T_1(x_1)}{\sigma_1}\right]^2+\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\frac{T_2(x_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}dx_2 \\ &= \exp\left\{\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{T_1(x_1)}{\sigma_1}\right)^2\right\} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty}|x_2-\mu_2|^{\delta_2}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{T_2(x_2)}{\sigma_2}-\frac{\rho T_1(x_1)}{\sigma_1}\right]^2\right\}dx_2, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Para calcular (3.2.5) fazemos a substituição $t = \frac{T_2(x_2)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$ em que $\frac{\sigma_2}{\delta_2+1}\sqrt{1-\rho^2}dt = |x_2-u_2|^{\delta_2}dx_2$, então

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\sigma_2}{\delta_2+1}\sqrt{1-\rho^2}\exp\left\{\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{T_1(x_1)}{\sigma_1^2}\right)\right\}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{-1}{2}\left[t-\frac{\rho T_2^2(x_2)}{\sigma^2}\right]\right\}dx_2 \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{\delta_2+1}\exp\left\{\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{T_1^2(x_1)}{\sigma_1^2}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Ao combinar (3.2.6) em (3.2.4) e ao usar a substituição $y = \frac{T_1(x_1)}{\sigma_1}$ segue que

$$\begin{aligned} I &= \frac{(\delta_1+1)}{2\pi\sigma_1}\frac{\sqrt{2\pi}}{}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-\mu_1|^{\delta_1}\exp\left\{\frac{-1}{2}\left[\frac{T_1^2(x_1)}{\sigma_1^2}\right]\right\}dx_1 \\ &= \frac{(\delta_1+1)}{2\pi\sigma_1}\frac{\sqrt{2\pi}}{}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_1}{\delta_1+1}\exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\}dy \\ &= 1. \end{aligned}$$

Proposition 3.3 *Seja $X = (X_1, X_2) \sim H_{\mu,\Sigma,\delta}$. Então, as componentes X_1 e X_2 tem distribuições marginais $F_{\mu_1,\sigma_1,\delta_1}$ e $F_{\mu_2,\sigma_2,\delta_2}$, respectivamente.*

Proof 3.3 *A FDP de X_1 é obtida ao calcular*

$$\begin{aligned} f_{\mu_1,\sigma_1,\delta_1}(x_1) &= \frac{(\delta_1+1)(\delta_2+1)|x_1-\mu_1|^{\delta_1}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2-\mu_2|^{\delta_2} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{T_1(x_1)}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{T_2(x_2)}{\sigma_2}\right)^2 - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}T_1(x_1)T_2(x_2)\right]\right\} dx_2. \end{aligned}$$

Completando quadrados no expoente da última integral e considerando a substituição $t = \frac{T_2(x_2)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$, se tem que

$$\begin{aligned} f_{\mu_1,\sigma_1,\delta_1}(x_1) &= \frac{(\delta_1+1)|x_1-\mu_1|^{\delta_1}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{T_1(x_1)}{\sigma_1}\right)^2\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2-\mu_2|^{\delta_2} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{T_2(x_2)}{\sigma_2} - \frac{\rho T_1(x_1)}{\sigma_1}\right]^2 + \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{T_2(x_2)}{\sigma_2}\right)^2\right\} dx_2 \\ &= \frac{(\delta_1+1)|x_1-\mu_1|^{\delta_1}}{2\pi\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{T_1(x_1)}{\sigma_1}\right)^2\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[t - \frac{\rho T_1(x_1)}{\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1}\right]^2\right\} dt \\ &= \frac{(\delta_1+1)|x_1-\mu_1|^{\delta}}{2\pi\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{T_1(x_1)}{\sigma_1}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

O cálculo de $f_{\mu_1,\sigma_1,\delta_1}$ é análogo.

Proposition 3.4 *Seja $X = (X_1, X_2) \sim H_{\Sigma,\mu,\delta}$. Entaõ,*

$$X_1|_{X_2=x_2} \sim F_{\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}T_2(x_2),\sigma_1\sqrt{1-\rho^2},\delta_2}. \tag{3.2.8}$$

Proof 3.4 *Para a prova basta completar quadrados na função $h(x_1, x_2)$, então*

$$\begin{aligned} h(x_1|x_2) &= \frac{h_{\Sigma,\mu,\delta}(x_1,x_2)}{f_{\mu_1,\sigma_1,\delta_1}(x_1)} \\ &= \frac{(\delta_2+1)|x_1-\mu_1|^{\delta_2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{T_1(x_1) - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}T_2(x_2)}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Proposition 3.5

$$
\begin{aligned}
cov(X,Y) &= \frac{\mu_2(\delta_1+1)(\delta_2+1)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} - \mu_1\mu_2 \\
&+ (\delta_1+1)(\delta_2+1)\left(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{\frac{1}{\delta_2+1}} \\
&\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[1+(-1)^j\right]\rho^j 2^{\frac{1}{2(\delta+1)}+\frac{(j+1)}{2}}}{2(\sqrt{1-\rho^2})j!}\left[2(1-\rho^2)^{\frac{j+1}{2}}\right]\Gamma\left(\frac{1}{2(\delta+1)}+\frac{j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.10}
$$

Proof 3.5 *Da proposição 3.1, tem-se que* $E(X_1)=\mu_1$ *e* $E(X_2)=\mu_2$. *Assim, basta calcular*

$$
\begin{aligned}
E(X_1X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} x_1x_2 h_{\mu,\Sigma,\delta}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \\
&= \frac{(\delta_1+1)(\delta_2+1)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\left|x_1-\mu_1\right|^{\delta_1}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{T(x_1)}{\sigma_1}\right]^2\right\}\times I_1 dx_1,
\end{aligned} \tag{3.2.11}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2\left|x_2-\mu_2\right|^{\delta_2}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{T_2(x_2)}{\sigma_2}-\frac{\rho T_1(x_1)}{\sigma_1}\right]^2\right\}dx_2 \\
&\times \exp\left\{\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{T_1(x_1)}{\sigma_1}\right]^2\right\},
\end{aligned} \tag{3.2.12}
$$

Para calcular I_1, *se considera* $y=\frac{T_2(x_2)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}$ *e o fato que*

$$
\begin{aligned}
X_2 &= T^{-1}\left(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)y = \left(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)y\left|\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}y\right|^{-\frac{\delta_2}{\delta_2+1}}+\mu_2 \\
&= \left(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{\frac{-\delta_2}{\delta_2+1}} y\left|y\right|^{\frac{-\delta_2}{\delta_2+1}}+\mu_2,
\end{aligned} \tag{3.2.13}
$$

então

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \right)^{\frac{1}{\delta_2+1}} y|y|^{-\frac{\delta_2}{\delta_2+1}} + \mu_2 \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[y - \frac{\rho T_1 x_1}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \right]^2 \right\} dy \\
&\times \exp\left\{ \frac{\rho^2}{2\left(1-\rho^2\right)} \left[\frac{T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1} \right]^2 \right\} \\
&= \left\{ \left(\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \right)^{\frac{1}{\delta_2+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} y|y|^{-\frac{\delta_2}{\delta_2+1}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[y - \frac{\rho T_1\left(x_1\right)}{\sigma\sqrt{1-p_2}} \right]^2 \right\} dy \right. \\
&\left. +\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[y - \frac{\rho T_1\left(x_1\right)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \right]^2 \right\} dy \right\} \\
&\times \exp\left\{ \frac{\rho^2}{2\left(1-\rho^2\right)} \left[\frac{T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1} \right]^2 \right. \\
&= \left\{ \left(\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \right)^{\frac{1}{\delta_2+1}} \times I_2 + \mu_2 \sqrt{2\pi} \right\} \\
&\times \exp\left\{ \frac{\rho^2}{2\left(1-\rho^2\right)} \left[\frac{T_1(x_1)}{\sigma_1} \right]^2 \right\},
\end{aligned}
\tag{3.2.14}
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y|y|^{-\frac{\delta_2}{\delta_2+1}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[y - \frac{\rho T_1\left(x_1\right)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right]^2 \right\} dy \\
&= e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{\rho T_1(x_1)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\rho T_1(x_1)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right]^j}{j!} 2^{\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2(\delta_2+1)} + \frac{j+1}{2} \right) \\
&- e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{\rho T_1(x_1)}{\sigma\sqrt{1\rho^2}}\right]^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left[\frac{\rho T_1(x_1)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right]^j}{j!} 2^{\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2(\delta_2+1)} + \frac{j+1}{2} \right),
\end{aligned}
\tag{3.2.15}
$$

Ao substituir 3.2.13 em 3.2.12, tem-se que :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \mu_2\sqrt{2\pi}\exp\left\{\frac{\rho^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1}\right]^2\right\}\\
&+\left(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^{\frac{1}{\delta_2+1}}\exp\left\{\frac{\rho^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1}\right]^2\right\}\\
&\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\rho T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1\sqrt{1-p_2}}\right]^2\right\}\\
&\times\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}}}{j!}\left[\frac{\rho T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\right]^j\right\}\Gamma\left(\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}\right)\\
&-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j 2^{\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}}}{j!}\left[\frac{\rho T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\right]^j\Gamma\left(\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{3.2.16}
$$

Agora, ao substituir 3.2.15 em 3.2.11, se obtem

$$
\begin{aligned}
E\left(X_1X_2\right) &= \frac{\mu_2\sqrt{2\pi}\left(\delta_{1+1}\right)\left(\delta_2+1\right)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1\left|x_1-\mu_1\right|^{\delta_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1}\right]^2\right\}dx_1\\
&+\frac{\left(\delta_1+1\right)\left(\delta_2+1\right)\left(\sigma_2\sqrt{1-\rho_2}\right)^{\frac{1}{\delta_2+1}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}}}{j!}\Gamma\left(\frac{1}{2\left(\delta_2+1\right)}+\frac{j+1}{2}\right)\\
&\times\int_{-\infty}^{+\infty}x_1\left|x_1-\mu_1\right|^{\delta_1}\left[\frac{\rho T_1(x_1))}{\sigma\sqrt{1-\rho_2}}\right]^j\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1}\right]^2\right\}dx_1\\
&-\frac{\left(\delta_1+1\right)\left(\delta_{2+1}\right)\left(\sigma_2\sqrt{1-\rho_2}\right)^{\frac{1}{\delta_{2+1}}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_2}}\sum\frac{(-1)^j 2^{\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}}}{j!}\Gamma\left(\frac{1}{2\left(\delta_{2+1}\right)}+\frac{j+1}{2}\right)\\
&\times\int_{-\infty}^{+\infty}x_1\left|x_1-\mu_1\right|^{\delta_1}\left[\frac{\rho T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\right]^j\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1}\right]^2\right\}dx_1\\
&=\frac{\mu_2\sqrt{2\pi}\left(\delta_1+1\right)\left(\delta_{2+1}\right)\sqrt{2\pi}\sigma_1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p^2}}\\
&+\frac{\left(\delta_1+1\right)\left(\delta_2+1\right)\left(\sigma_2\sqrt{1-p^2}\right)^{\frac{1}{\delta_2+1}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\\
&\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left[1+(-1)^j\right]\rho^j 2^{\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}}}{2j!(\sqrt{1-\rho^2})^j}\Gamma\left(\frac{1}{2(\delta_2+1)}+\frac{j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\left[2(1-\rho^2)\right]^{\frac{j+1}{2}},
\end{aligned}
\tag{3.2.17}
$$

pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \left|x_1-\mu_1\right|^{\delta_1} \left[\frac{\rho T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1\sqrt{1-p^2}}\right]^j \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{T_1\left(x_1\right)}{\sigma_1}\right]^2\right\} dx_1 \\ = \frac{\rho^j}{2\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)^j}\cdot\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)\left[2\left(1-\rho^2\right)\right]^{\frac{j+1}{2}}. \tag{3.2.18}$$

Conforme Embrechts e McNeil (2001), o conceito de dependência caudal superior (quadrante superior direito) ou na cauda do quadrante inferior esquerdo de uma distribuição bivariada é muito importante para avaliar a dependência entre extremos . Se $(X_1, X_2) \sim H$ e distribuições marginais F_1 e F_2, o coeficiente de dependência caudal superior de (X_1, X_2) é dado por

$$\lambda_U = \lim_{u\to 1} P\left(X_1 > F_1^{-1}(u) \mid X_2 > F_2^{-1}(u)\right) \\ = 2\lim_{x\to+\infty} P\left(X_1 > x \mid X_2 > x\right). \tag{3.2.19}$$

quando $H\left(x_1, x_2\right) = H\left(x_2, x_1\right)$, onde $\lambda_U \in (0, 2)$.

Proposition 3.6 *Seja $X = (X_1, X_2) \sim H_{\mu,\Sigma,\delta}$ então $\lambda_u = 0$ se $\delta_2 < 1$. Isto é X_1 e X_2 são assintoticamente indpendentes.*

Proof 3.6 *Da proposição 3.4 temos que:*

$$X_1 \mid X_2 = x \sim F_{\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}T_2(x),\sigma_1\sqrt{1-\rho^2},\delta_2}.$$

Com isto, o coeficiente de dependência caudal é facilmente calculado por:

$$\lambda_U = 2\lim_{x\to\infty}\left[1 - P\left(X_1 \le x \mid X_2 = x\right)\right] \\ = 2\lim_{x\to\infty}\left[1 - F_{\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}T_2(x),\sigma_1\sqrt{1-\rho_2},\delta_2}(x)\right] \\ = 2\lim_{x\to\infty}\left[1-\phi\left(\frac{\left(x-\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}T_2(x)\right)\left|x-\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}T_2(x)\right|^{\delta_2}}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right] \\ = 0, \tag{3.2.20}$$

quando $\delta_2 < 1$ e $\rho < 1$, isso sempre ocorre.

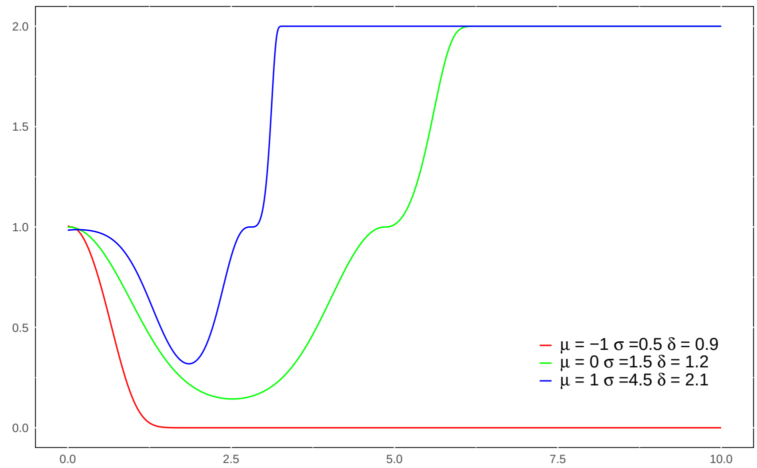

Figura 3: Coeficiente de dependência caudal λ_U para $\rho = 0.4$ e $\sigma_2 = 4$.

para $\delta_2 > 1$ uma análise apartir da Figura 3 nos mostra que λ_U=2 quando $x \to \infty$

3.3 Ilustrações gráficas do modelo δ - Gaussiano

Gráficos são ferramentas poderosas para visualizar o comportamento da função de probabilidade δ - Gaussiana e sua acumulada. Os gráficos para a função $f_{\mu,\sigma,\delta}$ revelam sua característica tanto unimodal quanto bimodal, e como ocorre essa separação, podemos observar também sua simetria e como cada parâmetro modifica a função. Nas Figuras 4 e 5 são fixados μ e δ. Assim, variando σ, vemos que ele se comporta como parâmetro de dispersão onde, na Figura 4, como $\delta = \mu = 0$, a função $f_{\mu,\sigma,\delta}$ se reduz a normal padrão. Para a Figura 5 vemos que σ por ser parâmetro de dispersão, ele acaba por separar as modas. Nas Figuras 6 e 7 são fixados σ e δ, e variando μ a densidade se desloca, além disso, como caso particular para $\delta \,\epsilon\, (0,1)$, $\mu = 0$ dá-se uma separação completa entre as modas. Por fim, as Figuras 8, 9 e 10 são para μ e σ fixos e δ livre, onde vemos que δ modifica a forma da densidade, de unimodal para bimodal e separando-ás.

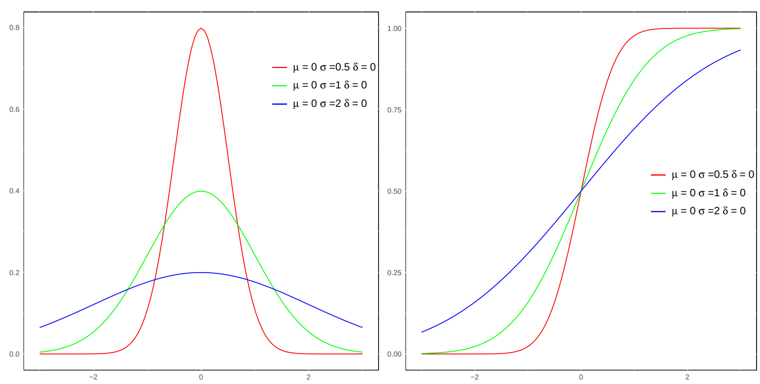

Figura 4: FDP delta Gaussiana, $f_{0,\sigma,0}$, e sua respectiva FDA para algumas variações de σ.

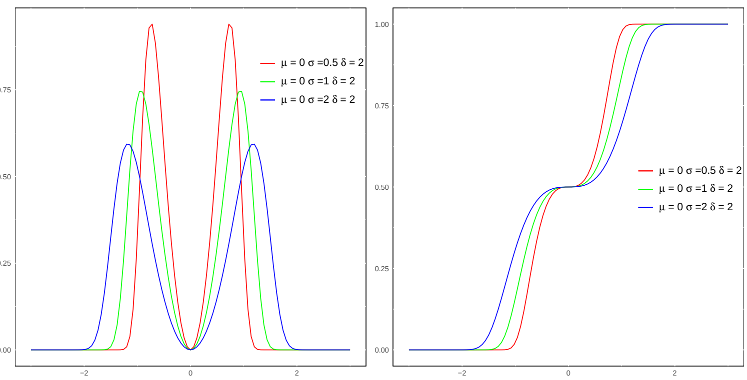

Figura 5: FDP delta Gaussiana, $f_{0,\sigma,2}$, e sua respectiva FDA para algumas variações de σ.

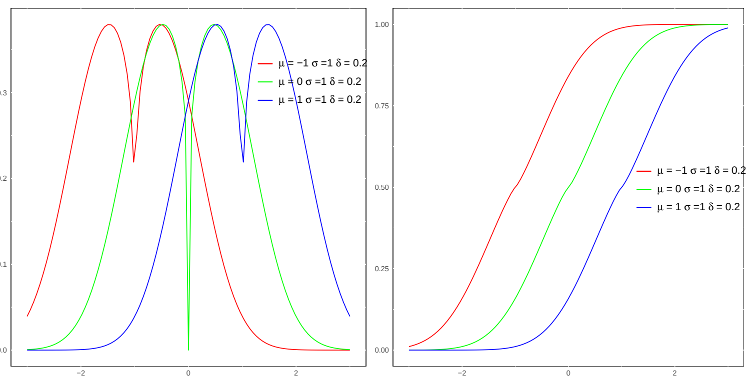

Figura 6: FDP delta Gaussiana, $f_{\mu,0.5,0.2}$, e sua respectiva FDA para algumas variações de μ.

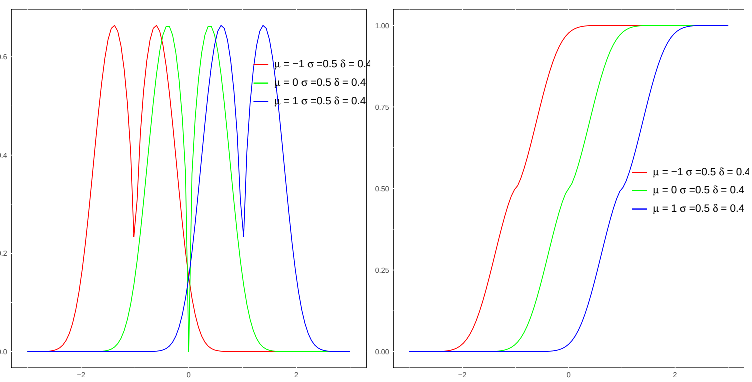

Figura 7: FDP delta Gaussiana, $f_{\mu,1,0.4}$, e sua respectiva FDA para algumas variações de μ.

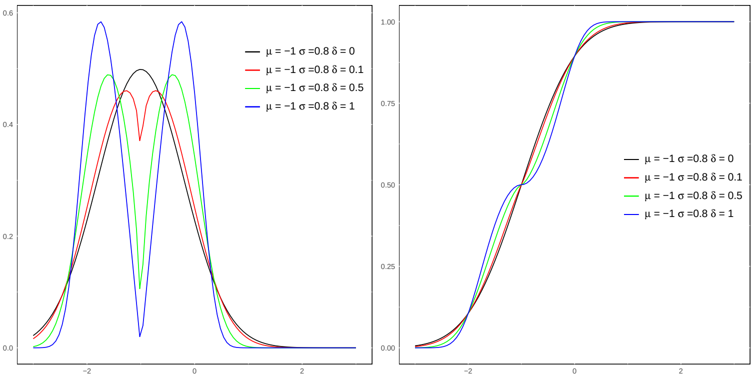

Figura 8: FDP delta Gaussiana, $f_{-1,0.8,\delta}$, e sua respectiva FDA para algumas variações de δ.

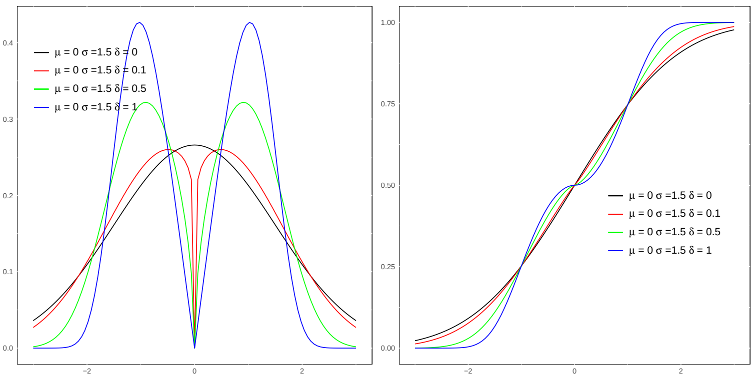

Figura 9: FDP delta Gaussiana, $f_{0,1.5,\delta}$, e sua respectiva FDA para algumas variações de δ.

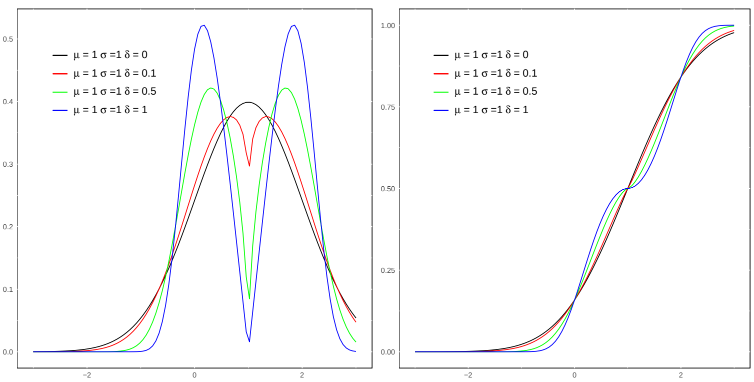

Figura 10: FDP delta Gaussiana, $f_{1,1,\delta}$, e sua respectiva FDA para algumas variações de δ.

3.4 Bivariado

Para esta subseção, para observar o comportamento de $h(y_1, y_2)$, faremos usos de gráficos 3D e suas respectivas curvas de nível. Definimos a seguir na tabela 1, os seguintes conjuntos de parâmetros de Σ, μ_i e δ_i a serem analisados.

Tabela 1: Conjunto de parâmetros

$\Theta = (\Sigma, \mu, \delta)$	Σ			μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
	σ_1	σ_2	σ_{12}				
Θ_1	2	1.0	0.0	1	0	0.0	0.8
Θ_2	2	0.5	0.0	0	1	1.6	0.0
Θ_3	1	1.0	0.8	0	0	0.0	0.8
Θ_4	1	1.0	-0.8	0	0	0.0	2.0
Θ_5	1	1.0	0.8	0	0	0.8	1.6
Θ_6	2	1.0	-0.8	0	0	1.6	0.8
Θ_7	2	1.0	0.0	0	0	0.8	0.8
Θ_8	1	1.0	0.8	0	0	0.8	0.5
Θ_9	1	1.0	-0.8	0	0	0.5	0.8

Nas Figuras 11 à 19 estão os gráficos da densidade $h(y_1, y_2)$ e suas respectivas curvas de nível para diferentes combinações de μ_i , Σ e δ_i. Quando apenas um dos δ_i é maior que zero podemos ver a formação de dois clusters simétricos onde quanto maior o δ mais evidente é a separação entre os clusters. Como visto nas Figuras 11 e 12. A adição de correlação faz com que esses clusters se inclinem para a diagonal se distorcendo no processo veja 13 e 14. Com os dois δ_i positivos, os gráficos apresentam quatro clusters. Se os δ_i forem iguais e não houver efeito da correlação, podemos observar em 17 que os quatro são simétricos, correlação positiva ou negativa irá distorcer esses clusters na diagonal, veja 15 e 16. Se um dos δ_i for pequeno os clusters não estarão completamente formados como pode ser visto em 18 e 19.

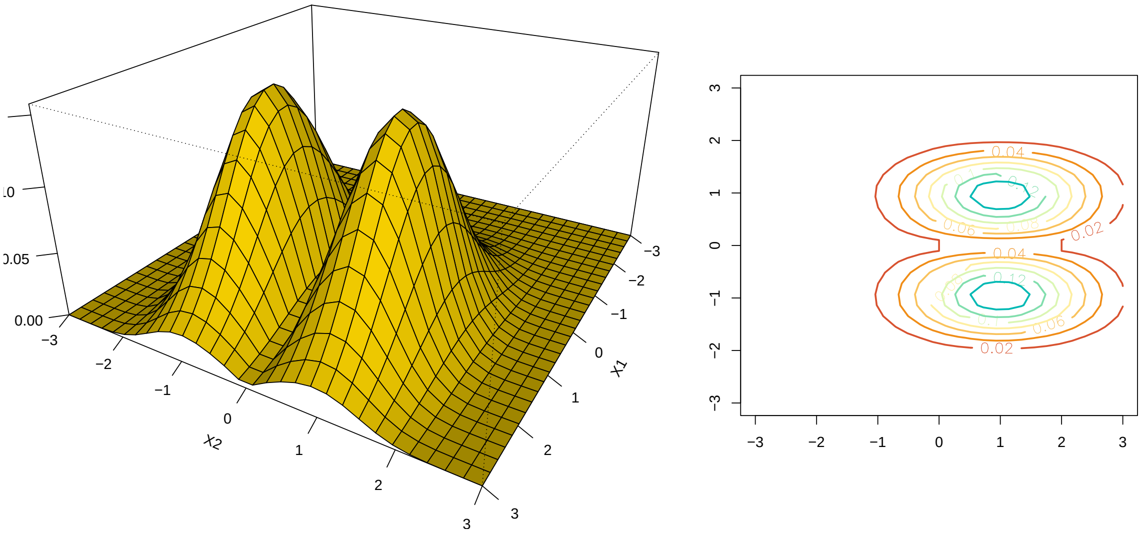

Figura 11: Painel esquerdo: plot da densidade $h(y_1, y_2)$ para $\mu = (1, 0)$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = 0.0$ e $\delta_1 = 0.0$,$\delta_2 = 0.8$. Painel direito: curvas de nível de h.

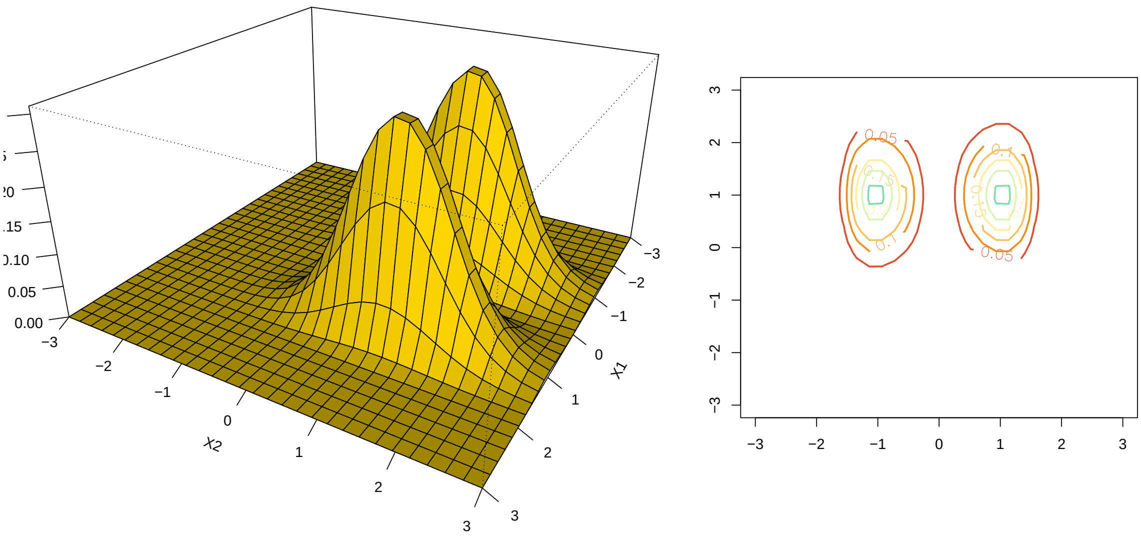

Figura 12: Painel esquerdo: plot da densidade $h(y_1, y_2)$ para $\mu = (0, 1)$ e $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0.5$, $\sigma_{12} = 0.0$, $\delta_1 = 1.6$, $\delta_2 = 0.0$. Painel direito: curvas de nível de h.

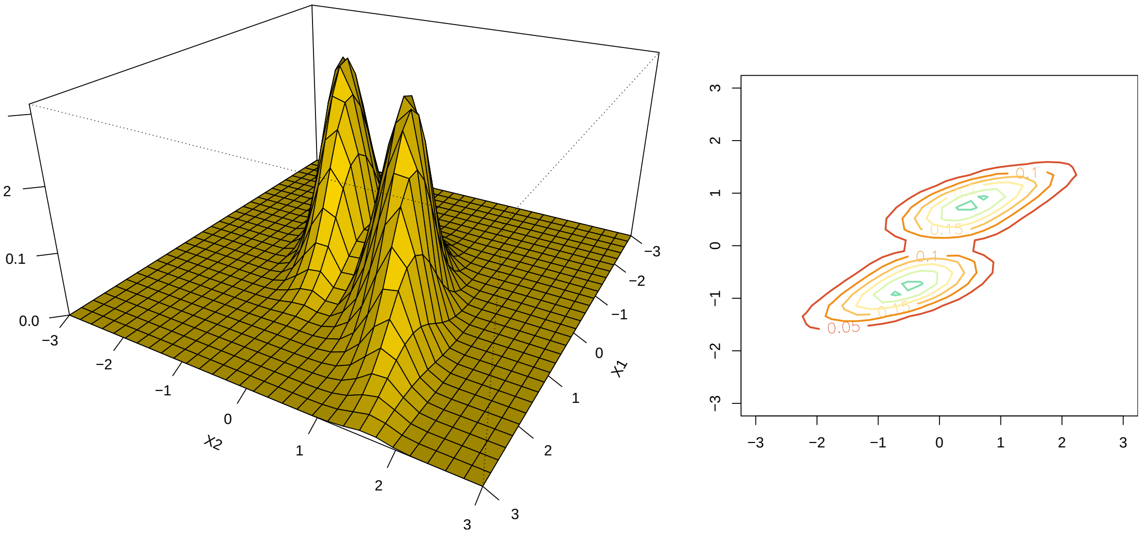

Figura 13: Painel esquerdo: plot da densidade $h(y_1, y_2)$ para $\mu = (0,0)$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = 0.8$ e $\delta_1 = 0.0$, $\delta_2 = 0.8$. Painel direito: curvas de nível de h.

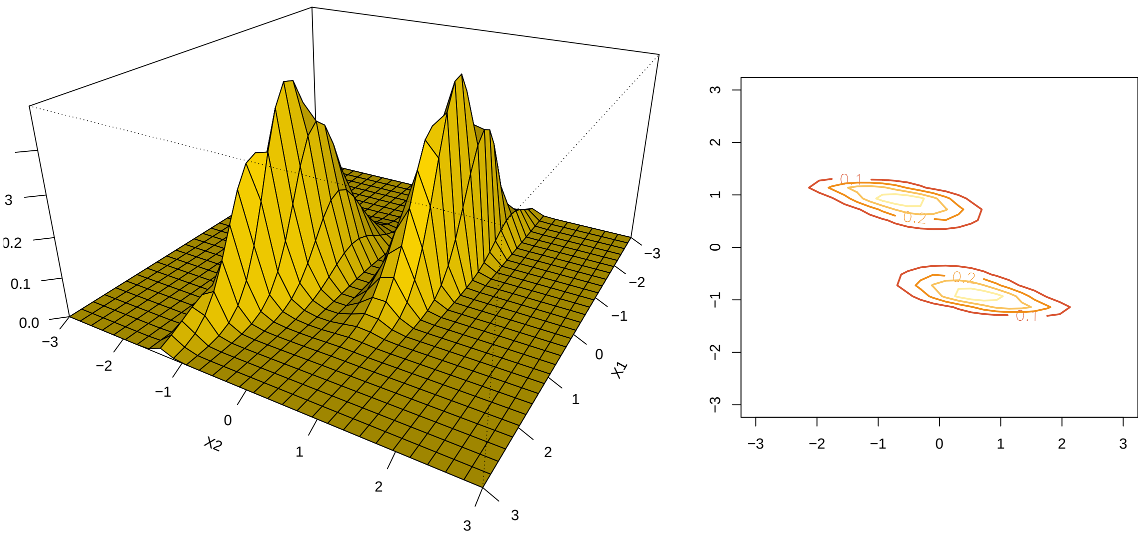

Figura 14: Painel esquerdo: plot da densidade $h(y_1, y_2)$ para $\mu = (0,0)$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = -0.8$ e $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2$. Painel direito: curvas de nível de h.

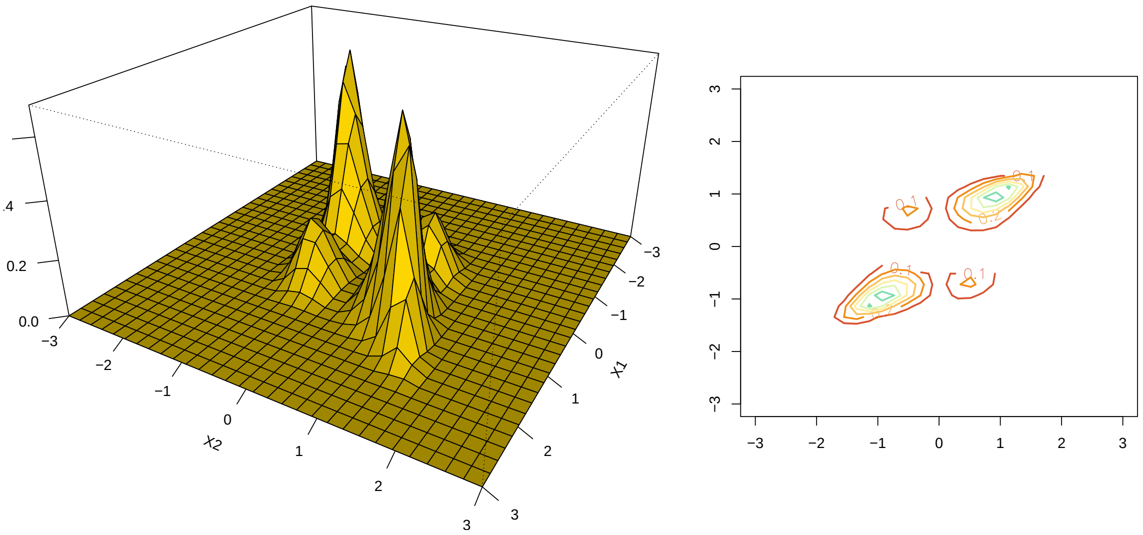

Figura 15: Painel esquerdo: plot da densidade $h(y_1, y_2)$ para $\mu = (0, 0)$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = 0.8$ e $\delta_1 = 0.8$, $\delta_2 = 1.6$. Painel direito: curvas de nível de h.

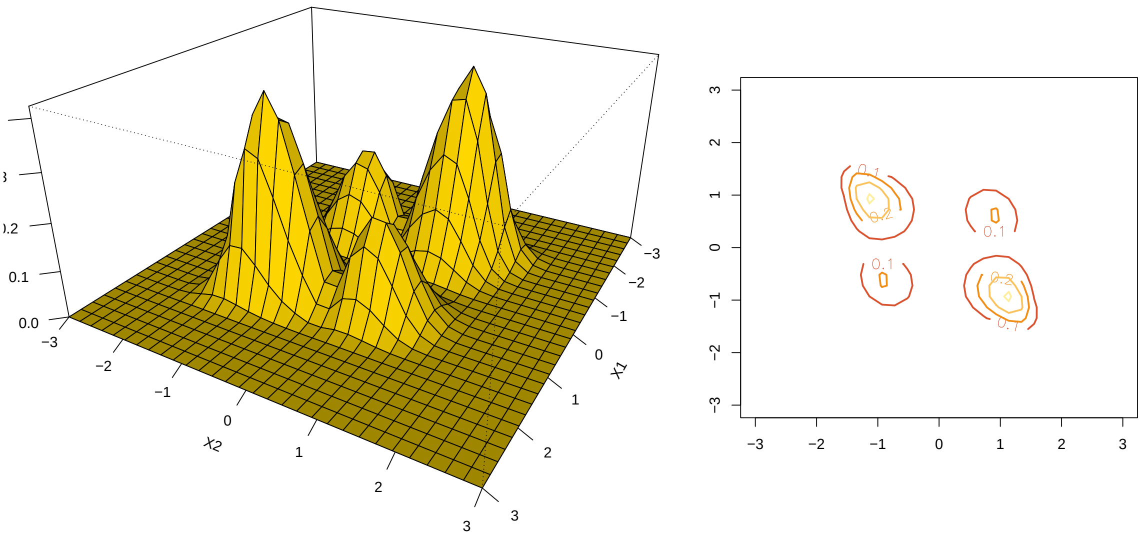

Figura 16: Painel esquerdo: plot da densidade $h(y_1, y_2)$ para $\mu = (0, 0)$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = -0.8$ e $\delta_1 = 1.6$, $\delta_2 = 0.8$. Painel direito: curvas de nível de h.

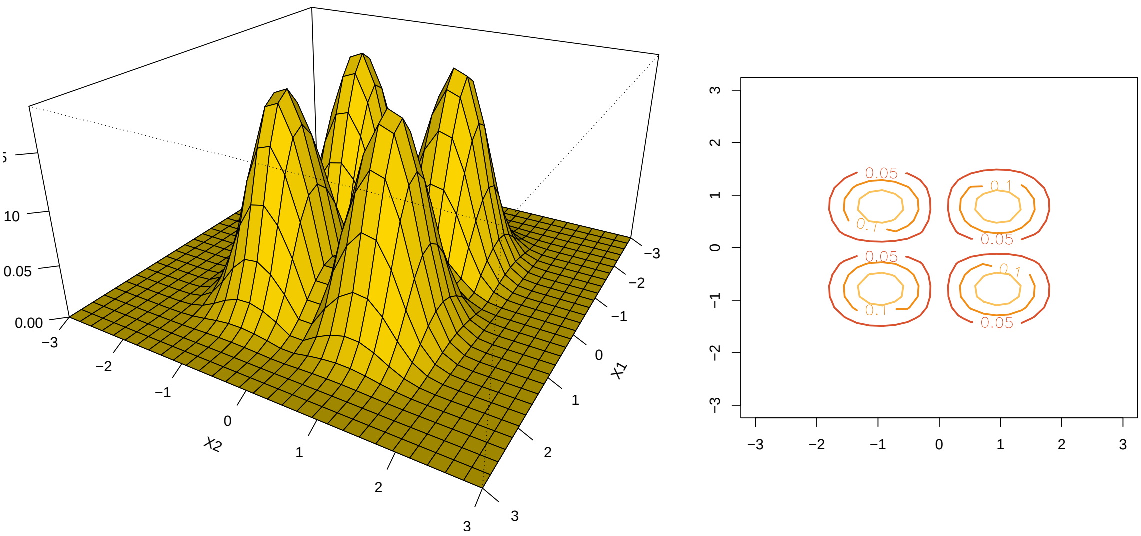

Figura 17: Painel esquerdo: plot da densidade $h(y_1, y_2)$ para $\mu = (0, 0)$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = 0.0$ e $\delta_1 = 0.8$, $\delta_2 = 0.8$. Painel direito: curvas de nível de h.

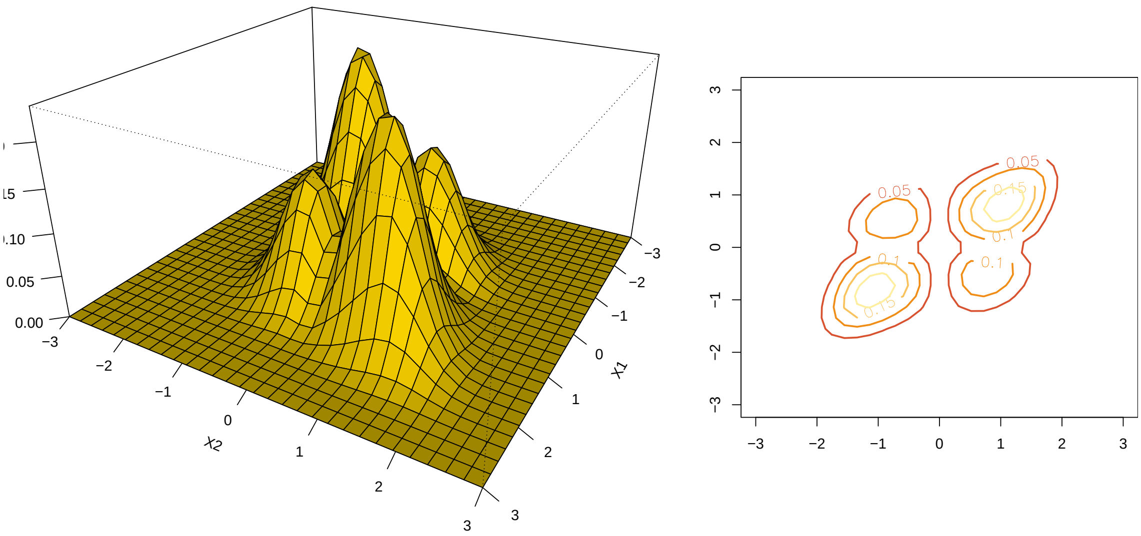

Figura 18: Painel esquerdo: plot da densidade $h(y_1, y_2)$ para $\mu = (0, 0)$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = 0.8$ e $\delta_1 = 0.8$, $\delta_2 = 0.5$. Painel direito: curvas de nível de h.

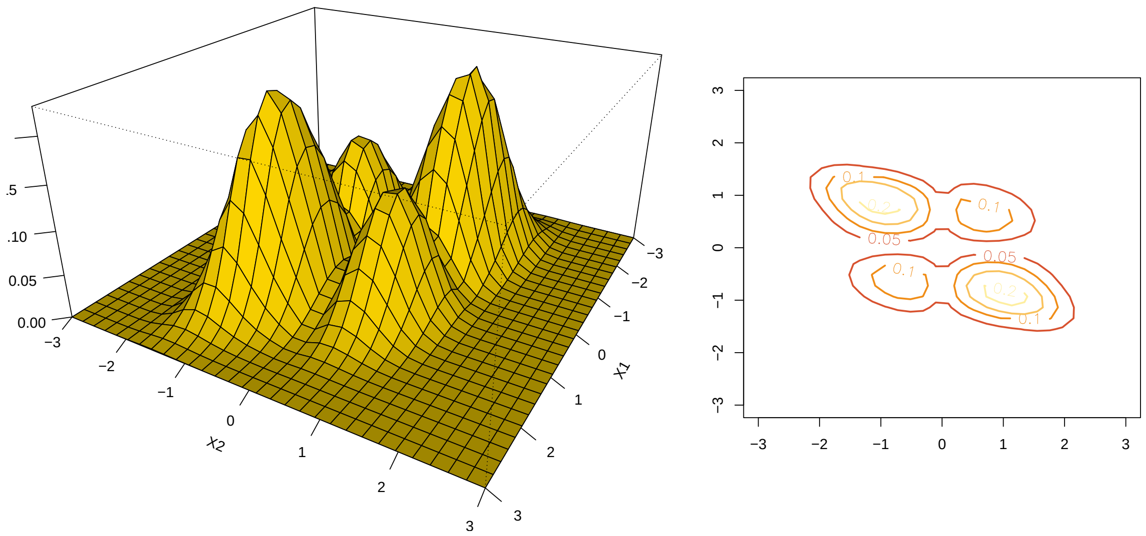

Figura 19: Painel esquerdo: plot da densidade $h(y_1, y_2)$ para $\mu = (0, 0)$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = -0.8$ e $\delta_1 = 0.5$, $\delta_2 = 0.8$. Painel direito: curvas de nível de h.

4 Simulação e ilustrações gráficas para o caso independente

Nesta subseção, apresentamos os gráficos de amostras aleatórias simuladas de $X_1 \sim F_1$ e $X_2 \sim F_2$, quando elas são independentes. Primeiro, fixamos os valores dos parâmetros σ_i, μ_i e δ_i, $\sigma_{1,2} = 0$, $i = 1, 2$, conforme a Tabela 2.

Tabela 2: Conjunto de parâmetros

$\Theta = (\Sigma, \mu, \delta)$	Σ		μ_1	μ_2	δ
	σ_1	σ_2			
Θ_1	1	2	1	1	0.2
Θ_2	1	2	1	-1	0.5
Θ_3	2.5	0.5	-1	1	1.0
Θ_4	2.5	0.5	-1	-1	2.0

Para a simulação utilizamos o método da transformada inversa, que é o processo de gerar valores $u \sim U(0, 1)$, encontrar a inversa $F_X^{-1}(x)$ e calcular $X = F_X^{-1}(u)$. Dessa forma, a variável aleatória X tem distribuição $F_X(x)$. Utilizando o *software* de análise estatística R na versão 4.1.1, simulamos 10000 observações para cada uma das marginais, representadas pelas curvas univariadas(azul e vermelho) nas Figuras 20-23. Os pontos pretos são o Scatterplot dos valores simulados de X_1 e X_2 e suas curvas de níveis estão representadas em verde.

Na Figura 20 vemos que com $\delta = 0.2$ suas marginais já apresentam bimodalidade porém no scatterplot mesmo com as curvas de nível não se apresenta nenhum cluster, já na Figura 22 com a ajuda das curvas de nível vemos que as variâncias distintas destorcem e separam os clusters. Para a Figura 21 com $\delta = 1$ os clusters já estão se separando com o valor alto de $\sigma_1 = 2.5$ influenciando na separação dos clusters, Por fim em 23 com $\delta = 2$ bastante alto os clusters distantes uns dos outros com σ influenciando numa formação mais achatada dos clusters.

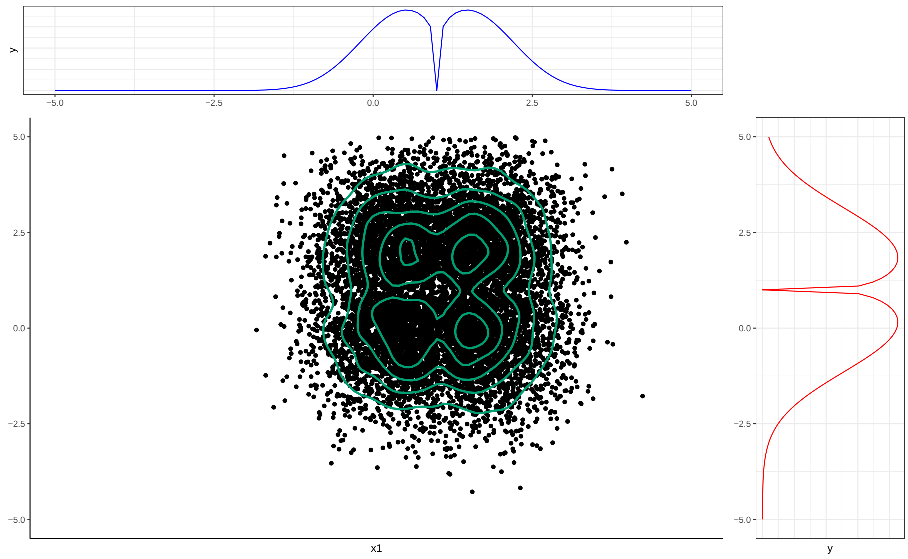

Figura 20: Curvas de nível de $h(y_1, y_2)$ para $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$ e $\delta = 0.2$, versus FDP marginais.

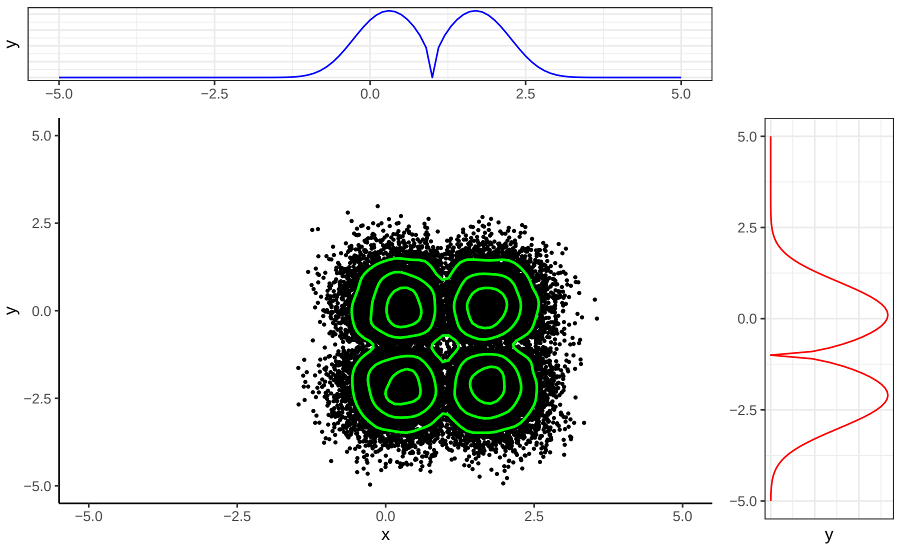

Figura 21: Curvas de nível de $h(y_1, y_2)$ para $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\sigma_1 = 1$ $\sigma_2 = 2$ e $\delta = 0.5$, versus FDP marginais.

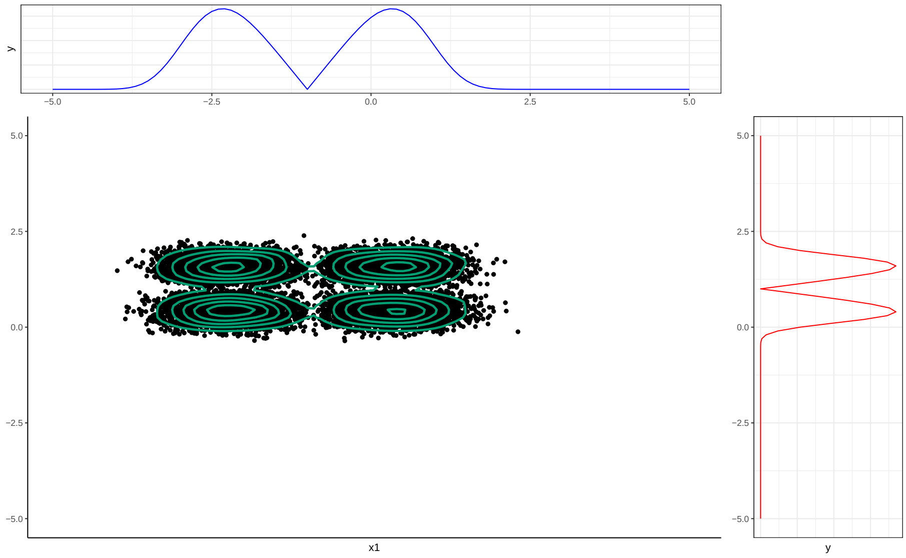

Figura 22: Curvas de nível de $h(y_1, y_2)$ para $\mu_1 = -1$,$\mu_2 = 1$, $\sigma_1 = 2.5$, $\sigma_2 = 0.5$ e $\delta = 1$, versus FDP marginais.

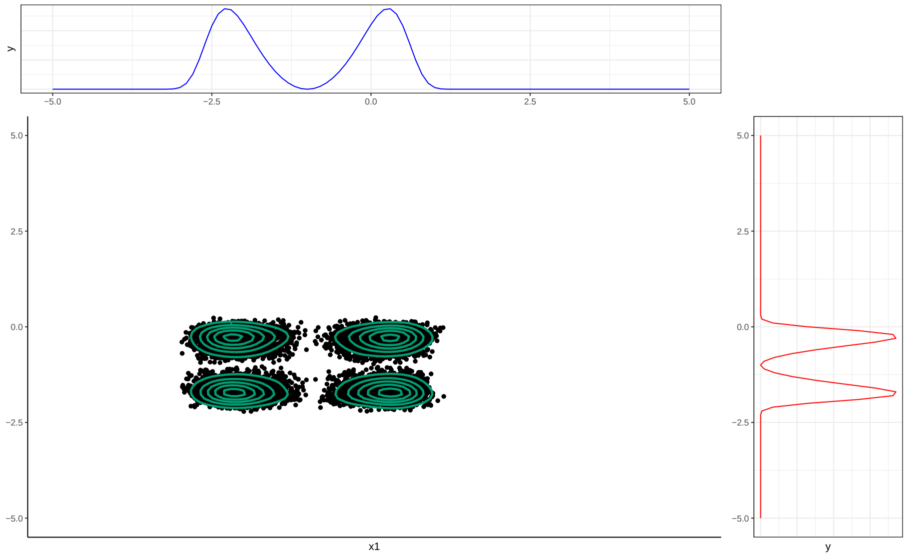

Figura 23: Curvas de nível de $h(y_1, y_2)$ para $\mu_1 = \mu_2 = -1$, $\sigma_1 = 2.5$, $\sigma_2 = 0.5$ e $\delta = 2$, versus FDP marginais.

4.1 Comparação das curvas de nível de $h_{\mu,\Sigma,\delta}$ com curvas de nível simuladas

Comparação da simulação do vetor bivariado $h_{\Sigma,\mu,\delta}$ 3.2.3 (vermelho), e as curvas de níveis simuladas apartir das marginais (verde). A simulação de $h_{\Sigma,\mu,\delta}$ foi obtida pelo método da transformada da inversa onde o pacote mvtnorm (Genz et al. (2021)) foi utilizado para gerar o vetor aleatório $(X_1, X_2) = h^{-1}_{\Sigma,\mu,\delta}(u_1, u_2)$. Onde os valores dos parâmetros estão fixados na tabela 3.

Tabela 3: Conjunto de parâmetros

$\Theta = (\Sigma, \mu, \delta)$	Σ			μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
	σ_1	σ_2	σ_{12}				
Θ_1	2	1.0	0.0	0	0	0.0	0.0
Θ_2	2	1.0	0.0	1	0	0.0	0.8
Θ_3	2	0.5	0.9	0	1	1.6	0.0
Θ_4	1	1.0	0.0	0	0	0.0	0.8
Θ_5	1	1.0	0.99	0	0	0.0	2.0
Θ_6	2	1.0	0.9	0	0	0.8	0.8

Na Figura 24 as curvas de nível de $h_{\Sigma,\mu,\delta}$ (vermelho) se assemelham bastante com as curvas de nível simuladas (verde). Na Figura 26 também não há diferença entre a simulação de $h_{\Sigma,\mu,\delta}$ e o scatterplot com os dois identificando a formação de dois clusters nos mesmos níveis das curvas. Para a Figura 25 e demais Figuras 27, 28, 29 a simulação acompanhou perfeitamente as curvas de níveis do scatterplot, uma vez que as curvas em verde acompanham bem as curvas vermelhas.

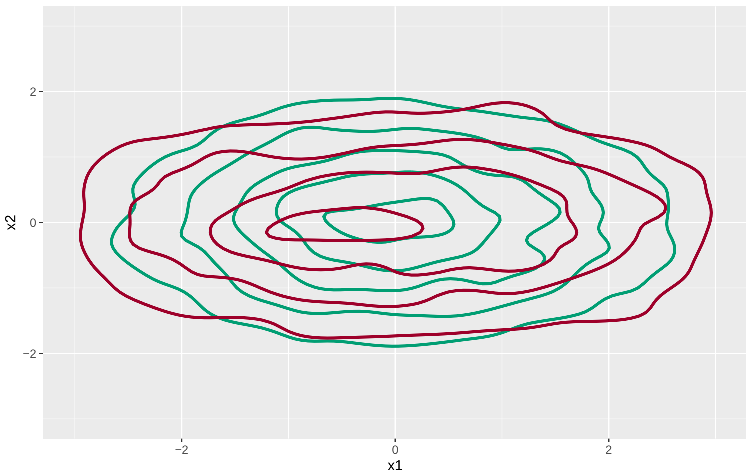

Figura 24: Comparação de valores simulados de $(X_1, X_2) \sim H_{\Sigma,\mu,\delta}$; $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = 0$, $\mu = (0, 0)$, $\delta_1 = 0.0$, $\delta_2 = 0.0$, com os valores ajustados estimados.

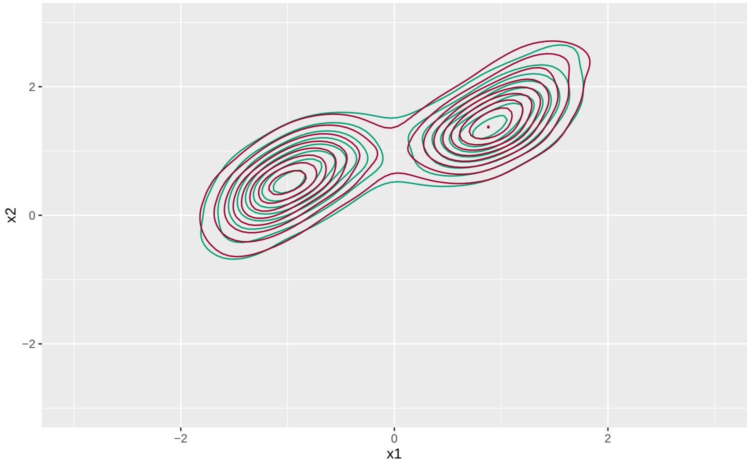

Figura 25: Comparação de valores simulados de $(X_1, X_2) \sim H_{\Sigma,\mu,\delta}$; $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0.5$, $\sigma_{12} = 0.9$, $\mu = (0, 1)$, $\delta_1 = 1.6$, $\delta_2 = 0$, com os valores ajustados estimados.

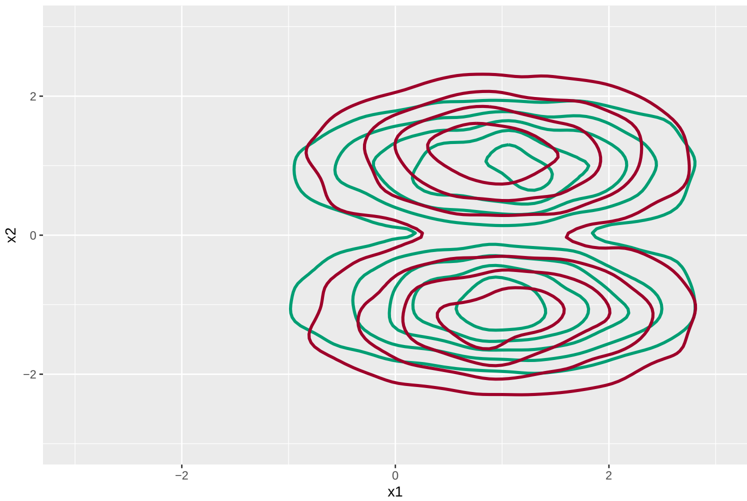

Figura 26: Comparação de valores simulados de $(X_1, X_2) \sim H_{\Sigma,\mu,\delta}$; $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = 0.0$, $\mu = (1, 0)$, $\delta_1 = 0.0$, $\delta_2 = 0.8$ com os valores ajustados estimados.

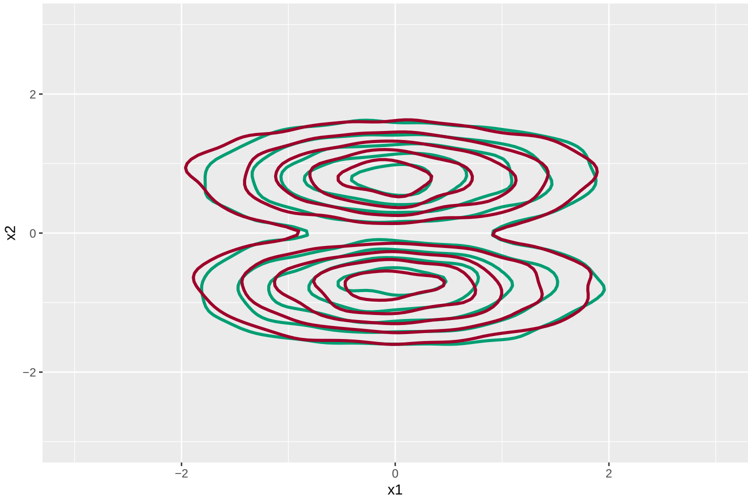

Figura 27: Comparação de valores simulados de $(X_1, X_2) \sim H_{\Sigma,\mu,\delta}$; $\sigma_1 = 1.0$, $\sigma_2 = 1.0$, $\sigma_{12} = 0.0$, $\mu = (0, 0)$, $\delta_1 = 0.0$, $\delta_2 = 0.8$, com os valores ajustados estimados.

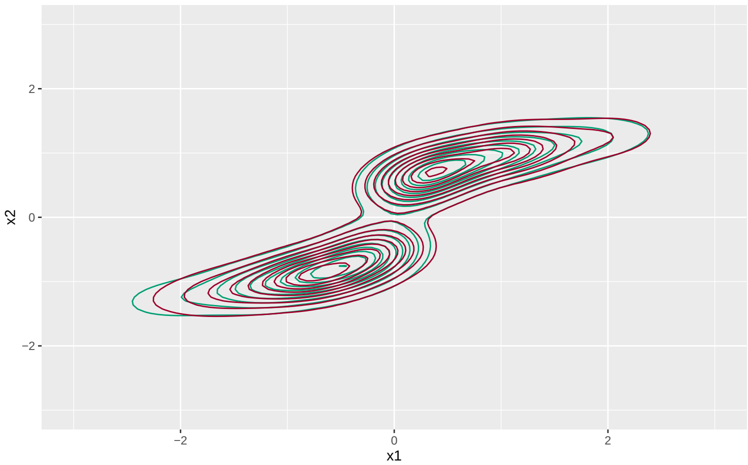

Figura 28: Comparação de valores simulados de $(X_1, X_2) \sim H_{\Sigma,\mu,\delta}$; $\sigma_1 = 1$,$\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = 0.99$, $\mu = (0, 0)$, $\delta_1 = 0.0$, $\delta_2 = 2.0$, com os valores ajustados estimados.

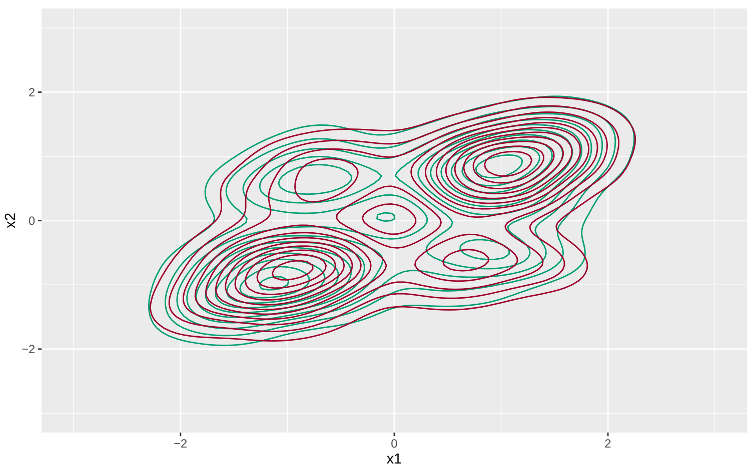

Figura 29: Comparação de valores simulados de $(X_1, X_2) \sim H_{\Sigma,\mu,\delta}$; $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_{12} = 0.9$, $\mu = (0, 0)$, $\delta_1 = 0.8$, $\delta_2 = 0.8$, com os valores ajustados estimados.

5 Simulação e estimação para o caso geral

5.1 Simulação

Para simular uma amostra aleatória do vetor $X = (X_1, X_2) \sim H_{\mu,\Sigma,\delta}$, definida em 3.2.2, utilizamos o método da transformada inversa juntamente com o pacote mvtnorm do programa R. O algoritimo envolve os quantis y_1 e y_2 de X_1 e X_2, respectivamente.

```
xy <- function(m=c(0,0), s=diag(2), d=c(0,0),n=15){
  x <- mvtnorm::rmvnorm(n,mean=c(0,0),sigma=s)

  y1 <- sign(x[,1])*abs(x[,1])^(1/(d[1]+1)) + m[1]
  y2 <- sign(x[,2])*abs(x[,2])^(1/(d[2]+1)) + m[2]

  y <- matrix(c(y1,y2), ncol = 2,nrow =n,
              dimnames = list(c(),c("y1","y2")))
  return(y)
}
```

5.2 Estimação

Para estimar os parâmetros de $X = (X_1, X_2) \sim H_{\mu,\Sigma,\delta}$ utilizamos o método de máxima verossimilhança. O resumo dos principais passos do algoritimo é:

(1). definir a densidade $\sim h_{\mu,\Sigma,\delta}$;

(2). calcular a função logaritimo da verossimilhança,$l(\mu, \Sigma, \delta)$ para uma amostra de tamanho N;

(3). maximizar $l(\mu, \Sigma, \delta)$ utilizando a função optim do R.

```r
#### teste de estimação
library("mvtnorm")
library("microbenchmark")
library("parallel")
library("doParallel")
library("foreach")
estimador <- function(theta,N){

  MFH <- function(theta,Y){

    M1 <- theta[1]
    M2 <- theta[2]
    S1 <- theta[3]
    S2 <- theta[4]
    S12 <- theta[5]
    D <- theta[6:7]
    S <- matrix(c(S1,S12,S12,S2),ncol = 2)

    X1 = Y[,1]; X2 = Y[,2]

    t1 <- (X1-M1)*((abs(X1-M1))**D[1])
    t2 <- (X2-M2)*((abs(X2-M2))**D[2])
    tm = matrix(c(t1,t2),ncol=2)
    bdgdelta <- mvtnorm::dmvnorm(x = tm, mean = c(0,0), sigma = S)*
      ((D[1]+1)*(D[2]+1))*(abs(X1-M1)**D[1])*(abs(X2-M2)**D[2])
    blogl <- sum(log(bdgdelta))
    return(-blogl)
  }#fun. a ser maximizada

  Z <- foreach::foreach(i = 1:1000) %do% {
    xy(m=theta[1:2],s=matrix(theta[c(3,5,5,4)],ncol=2),
       d=theta[6:7],n=N)
  }#lista com 1000 amostras aleatorias de tamanho N

  oi <- function(Z, theta){
    optim(par = theta, fn = MFH, Y=Z, method="BFGS")$par
  }# maximizador
```

```
  cl <- parallel::makeCluster(detectCores())
  doParallel::registerDoParallel(cl)
  zfoi <- foreach::foreach(i = 1:10, .combine ='c') %dopar%{oi(Z[[i]], theta)}
  parallel::stopCluster(cl)#para cada amostra calcula os estimadores

  dados_e <- matrix(zfoi,ncol=7,byrow=T)
  colnames(dados_e) = c("M1","M2","S1","S2","S12","D1","D2")
  return(dados_e)#1000 valores estimados para cada parametros
}

N=10000
theta = c("M1"=0,
          "M2"=1,
          "S1"=2,
          "S2"=0.5,
          "S12"=0.99,
          "D1"=1.6,
          "D2"=0.0)

start_time <- Sys.time()
est_dados = estimador(theta, N)
end_time <- Sys.time()

theta_est <- apply(est_dados, 2, mean)
theta_res <- (theta_est - theta)^2
theta_sd <- apply(est_dados,2,sd)
(tempo =end_time - start_time)
data.frame(theta,theta_est,theta_res,theta_sd)
```

5.3 Resultados

O desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança de $\Theta = (\mu, \Sigma, \delta)$ são testados via simulação Monte Carlo. Para isso geramos amostras de tamanhos 500, 1000 e 5000, e calculamos as estimativas médias $(\hat{\Theta})$, viés $(Bias(\hat{\Theta}))$, e desvio padrão $(SE(\hat{\Theta}))$. Esses resultados estão nas Tabelas 4 - 6. Na Tabela 4, as estimativas apresentam $\sigma_{12} = 0$ constante e μ, δ variando. Os estimadores apresentam uma ótima aproximação em todos os tamanhos de amostra, o viés se mostrou excelente na casa dos 3 dígitos no mínimo, e um desvio padrão pequeno. Já na Tabela 5 há σ constante e δ variando com σ_{12} grande. Com σ_{12} diferente de 0, a tabela não apresentou viés ou desvio padrão grande em nenhuma das amostras. Por fim, na tabela 6 há σ_{12} grande e δ, σ variando. Com o $\sigma_{12} = 0.99$, a estimação continua com viés excelente e sem grandes desvios padrões.

Tabela 4: conjunto de parâmetros estimados

		$\hat{\Theta}$			$Bias(\hat{\Theta})$			$SE(\hat{\Theta})$		
	$n =$	500	1000	5000	500	1000	5000	500	1000	5000
Θ_1	$\mu_1 = 0$	-0.009	-0.0120	0.0100	8.2e-05	1.5e-04	1.0e-04	0.0658	0.0516	0.0305
	$\mu_2 = 0$	0.0062	0.009	-0.005	3.8e-05	9.3e-05	2.5e-05	0.0638	0.0236	0.0097
	$\sigma_1 = 2$	1.9481	2.0171	2.0316	2.7e-03	2.9e-04	1.0e-03	0.1913	0.1313	0.0657
	$\sigma_2 = 1$	0.9974	0.9898	0.9850	7.0e-06	1.1e-04	2.2e-04	0.0548	0.0554	0.0208
	$\sigma_{12} = 0$	0.0208	0.0103	0.0067	4.3e-04	1.1e-04	4.5e-05	0.0368	0.0441	0.0204
	$\delta_1 = 0$	-0.017	0.0118	0.0024	2.8e-04	1.4e-04	5.8e-06	0.0468	0.0261	0.0160
	$\delta_2 = 0$	0.0148	-0.013	-0.006	2.8e-04	1.7e-04	3.5e-05	0.0382	0.0437	0.0132
Θ_2	$\mu_1 = 1$	0.9797	1.0035	0.9977	4.1e-04	1.2e-05	5.3e-06	0.0565	0.0181	0.0142
	$\mu_2 = 0$	0.0034	0.0022	0.0005	1.2e-05	4.8e-06	2.5e-07	0.0121	0.0099	0.0062
	$\sigma_1 = 1$	1.0130	1.0091	0.9895	1.7e-04	8.3e-05	1.1e-04	0.0725	0.0373	0.0227
	$\sigma_2 = 2$	1.9432	1.9543	1.9830	3.2e-03	2.1e-03	2.9e-04	0.1836	0.0652	0.0405
	$\sigma_{12} = 0$	0.0071	-0.017	0.0124	5.0e-05	2.9e-04	1.5e-04	0.0491	0.0468	0.0180
	$\delta_1 = 0$	0.0101	0.0144	-0.004	1.0e-04	2.1e-04	1.9e-07	0.0359	0.0198	0.0165
	$\delta_2 = 0.8$	0.7818	0.7877	0.7997	3.3e-04	1.5e-04	8.3e-08	0.0376	0.0403	0.0187
Θ_3	$\mu_1 = 0$	0.0042	-0.006	-9e-06	1.8e-05	3.0e-05	8.8e-11	0.0104	0.0104	0.0040
	$\mu_2 = 1$	0.9787	1.0019	0.9947	4.6e-04	3.7e-06	2.8e-05	0.0298	0.0211	0.0085
	$\sigma_1 = 2$	1.9839	1.9740	1.9906	2.6e-04	6.7e-04	8.9e-05	0.1443	0.0951	0.0511
	$\sigma_2 = 0.5$	0.5069	0.5070	0.5030	4.7e-05	4.8e-05	9.1e-06	0.0324	0.0079	0.0149
	$\sigma_{12} = 0$	-0.013	-0.006	-0.001	1.6e-04	3.3e-05	1.2e-06	0.0553	0.0350	0.0198
	$\delta_1 = 1.6$	1.6152	1.5909	1.5962	2.3e-04	8.4e-05	1.5e-05	0.1212	0.0683	0.0336
	$\delta_1 = 0$	0.0022	-0.013	0.0072	4.7e-06	1.7e-04	5.2e-05	0.0272	0.0282	0.0106

Tabela 5: conjunto de parâmetros estimados

		$\hat{\Theta}$			$Bias(\hat{\Theta})$			$SE(\hat{\Theta})$		
	$n =$	500	1000	5000	500	1000	5000	500	1000	5000
Θ_4	$\mu_1 = 0$	-0.009	-0.002	-0.0014	8.3e-05	3.9e-06	1.9e-06	0.0190	0.0242	0.0108
	$\mu_2 = 0$	-0.002	-0.006	0.0002	5.5e-06	3.5e-05	3.1e-08	0.0110	0.0084	0.0040
	$\sigma_1 = 1$	1.0197	1.0093	1.0056	3.9e-04	8.6e-05	3.3e-05	0.0516	0.0474	0.0215
	$\sigma_2 = 1$	1.0132	1.0147	1.0016	1.7e-04	2.2e-04	2.4e-06	0.0310	0.0323	0.0196
	$\sigma_{12} = 0.8$	0.8055	0.8094	0.8040	3.0e-05	8.9e-05	1.6e-05	0.0308	0.0387	0.0185
	$\delta_1 = 0$	0.0161	0.0011	0.0025	2.6e-04	1.2e-06	6.5e-06	0.0377	0.0129	0.0125
	$\delta_2 = 0.8$	0.8217	0.8155	0.7963	4.7e-04	2.4e-04	1.4e-05	0.0749	0.0342	0.0150
Θ_5	$\mu_1 = 0$	-0.015	-0.006	0.0042	2.3e-04	3.8e-05	1.8e-05	0.0320	0.0198	0.0110
	$\mu_2 = 0$	0.0044	0.0007	-0.001	1.9e-05	6.2e-07	3.3e-07	0.0097	0.0054	0.0024
	$\sigma_1 = 1$	1.0532	0.9722	1.0101	2.8e-03	7.7e-04	1.0e-04	0.0958	0.0542	0.0267
	$\sigma_2 = 1$	1.0203	0.9855	1.0125	4.1e-04	2.1e-04	1.6e-04	0.1007	0.0312	0.0341
	$\sigma_{12} = -0.8$	-0.832	-0.782	-0.811	1.1e-03	3.3e-04	1.3e-04	0.0975	0.0349	0.0265
	$\delta_1 = 0$	-0.003	-0.007	0.0021	1.0e-05	5.1e-05	4.3e-06	0.0287	0.0260	0.0074
	$\delta_2 = 2$	2.0268	2.0077	2.0011	7.2e-04	5.9e-05	1.1e-06	0.0592	0.0658	0.0355
Θ_6	$\mu_1 = 0$	-7e-05	-0.002	-0.001	4.9e-09	5.3e-06	3.9e-07	0.0081	0.0060	0.0035
	$\mu_2 = 0$	-7e-04	-0.003	-0.001	5.9e-07	6.4e-06	3.7e-07	0.0141	0.0063	0.0033
	$\sigma_1 = 1$	1.0060	0.9904	0.9950	3.5e-05	9.2e-05	2.5e-05	0.0382	0.0378	0.0208
	$\sigma_2 = 1$	0.9912	0.9993	0.9996	7.7e-05	4.1e-07	1.4e-07	0.0578	0.0384	0.0215
	$\sigma_{12} = 0.8$	0.7959	0.7949	0.7965	1.7e-05	2.6e-05	1.3e-05	0.0394	0.0379	0.0192
	$\delta_1 = 0.8$	0.8240	0.7822	0.8000	5.7e-04	3.2e-04	2.2e-11	0.0745	0.0508	0.0298
	$\delta_1 = 1.6$	1.6345	1.6140	1.6040	0.0012	2.0e-04	1.5e-05	0.1085	0.0763	0.0157

Tabela 6: conjunto de parâmetros estimados

		$\hat{\Theta}$			$Bias(\hat{\Theta})$			$SE(\hat{\Theta})$		
	$n =$	500	1000	5000	500	1000	5000	500	1000	5000
Θ_7	$\mu_1 = 0$	-0.003	0.0006	8.4e-0.5	8.4e-06	3.6e-07	7.0e-09	0.0030	0.0049	0.0005
	$\mu_2 = 1$	0.9942	1.0017	0.9999	3.3e-05	2.8e-06	2.7e-09	0.0062	0.0083	0.0006
	$\sigma_1 = 2$	1.9606	1.9363	1.9980	1.6e-03	4.1e-03	3.9e-06	0.0325	0.0476	0.0032
	$\sigma_2 = 0.5$	0.4933	0.4826	0.5003	4.5e-05	3.0e-04	1.1e-07	0.0161	0.0117	0.0006
	$\sigma_{12} = 0.99$	0.9453	0.9512	0.9822	1.9e-03	1.5e-03	6.1e-05	0.0381	0.0348	0.0096
	$\delta_1 = 1.6$	1.5950	1.6029	1.6000	2.6e-05	8.6e-06	7.0e-09	0.0207	0.0103	0.0002
	$\delta_2 = 0$	-0.002	0.0011	-1e-04	2.7e-06	1.3e-06	1.3e-08	0.0111	0.0091	0.0002
Θ_8	$\mu_1 = 0$	-1e03	-0.0015	-1.9e-05	8.4e-06	2.4e-06	3.7e-10	0.0122	0.0091	0.0036
	$\mu_2 = 0$	-5e-05	-4e-03	-2.1e-05	3.1e-09	2.0e-07	4.5e-10	0.0039	0.0031	0.0010
	$\sigma_1 = 1$	0.9661	0.9783	9.9e-01	1.2e-03	4.7e-04	1.1e-04	0.0190	0.0241	0.0071
	$\sigma_2 = 1$	0.9666	0.9758	9.8e-01	1.1e-03	5.8e-04	1.3e-04	0.0161	0.0266	0.0076
	$\sigma_{12} = 0.99$	0.9565	0.9675	9.8e-01	1.1e-03	5.1e-04	1.2e-04	0.0164	0.0250	0.0070
	$\delta_1 = 0$	1.6e-03	-2e-03	1.2e-03	2.8e-06	4.8e-08	1.4e-06	0.0087	0.0075	0.0018
	$\delta_2 = 2$	1.9939	1.9994	1.9995	3.7e-05	3.7e-07	2.7e-07	0.0167	0.0035	0.0034
Θ_9	$\mu_1 = 0$	-0.025	-0.010	-0.0005	6.4e-06	9.8e-05	2.4e-07	0.0127	0.0250	0.0052
	$\mu_2 = 0$	0.9e-03	-0.001	0.0012	8.1e-09	1.7e-06	1.4e-06	0.0100	0.0167	0.0030
	$\sigma_1 = 2$	2.1560	1.9958	2.0043	2.1e-02	1.7e-05	1.8e-05	0.1302	0.1119	0.0451
	$\sigma_2 = 1$	1.0164	1.0017	0.9860	2.7e-04	3.0e-06	2.0e-03	0.0504	0.0495	0.0160
	$\sigma_{12} = 0.99$	1.0510	0.9821	0.9844	3.7e-03	6.3e-05	3.1e-05	0.0703	0.0666	0.0238
	$\delta_1 = 0.8$	0.8351	0.8035	0.8033	1.2e-03	1.2e-05	1.2e-05	0.0482	0.0359	0.0235
	$\delta_1 = 0.8$	0.8060	0.7914	0.7817	3.6e-05	7.5e-05	3.3e-04	0.0537	0.0287	0.0289

6 Aplicação

Duas empresas que atuam no setor Bancário foram selecionadas para analisar as possíveis relações entre as ações de mercado de diferentes instituições, tendo uma delas apresentado um comportamento bimodal. Os dados utilizados para a modelagem foram obtidos no site finance.yahoo (2023) no dida 15 de fevereiro de 2023. Foram coletados dois conjuntos de dados sobre os preços das ações de dois Bancos, um localizado no chile(BCH) e outro no Canada(CURO). Avaliamos a cotação máxima diária dos últimos 3 anos, supondo-se independência, obtendo, assim, um conjunto de dados de 757 observações para cada Banco.

Ao analisar os histogramas de cada banco temos uma boa ideia do comportamento dos dados com o banco Canadense (CURO) sendo possível observar um comportamento bimodal e o Banco que atua no chile unimodal com os dois Bancos relativamente simétricos.

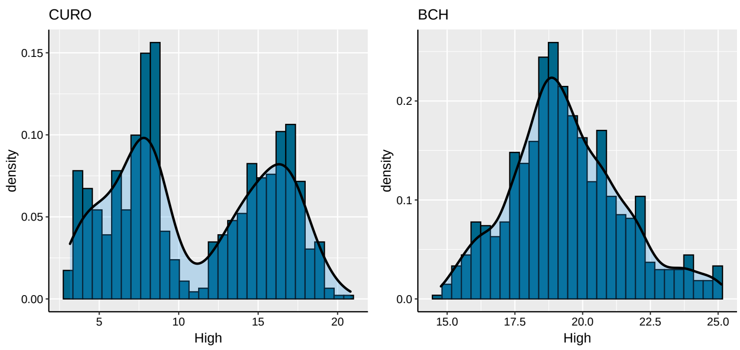

Figura 30: Histogramas

As estatísticas descritivas também nos permitem compreender o comportamento dos dados. Ao analisarmos a média e mediana de ambos os Bancos, notemos que eles são próximos, indicando serem relativamente simétricos, com os valores máximos e mínimos também próximos da média o que indica uma homogeneidade nos dois dados.

Tabela 7: Estatísticas do máximo do Banco Canadense CURO

Media	Mediana	Mínimo	Máximo	Variância	Desvio Padrão
10.96	9.17	3.16	20.81	23.2858	4.8255

Notemos também ao fato de que enquanto a média do Banco BCH indica o valor de maior concentração de altas diárias ao longo dos anos, a média do Banco CURO devido a sua característica bimodal, indica apenas que metade das altas diárias ocorreram abaixo desse valor e a outra metade ocorreu acima desse valor.

Tabela 8: Estatísticas do máximo do Banco do Chile BCH

Media	Mediana	Mínimo	Máximo	Variância	Desvio Padrão
19.42	19.22	14.77	25.12	4.274	2.067

Ao se analisar os dados de forma conjunta, é possivel notar a formação de dois clusters (ou até três) provenientes da característica de bimodalidade de um dos dados. Além disso, a formação desses clusters indica que o pico das altas diárias dos dois Bancos ocorreram conjuntamente em diversos momentos, reforçando a ideia de analisá-los conjuntamente. Sendo assim, a utilização de uma distribuição bimodal que distingue esses dois clusters se faz necessária para a modelagem deste tipo de dados.

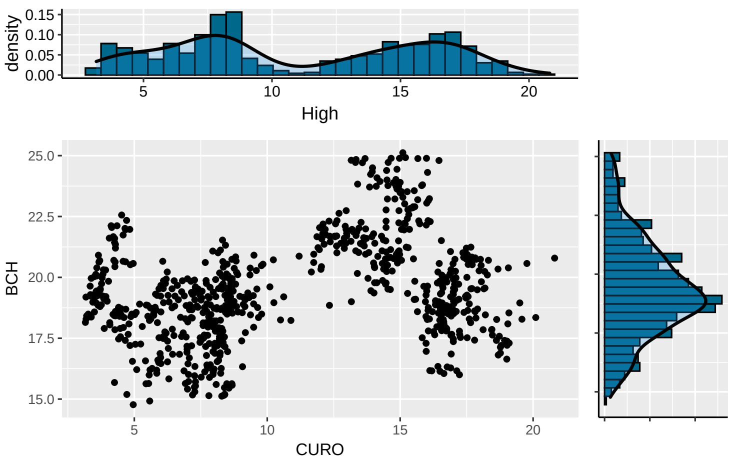

Figura 31: Scatterplot de CURO e BCH.

Para podermos fazer a modelagem, é necessário estimar os parâmetros do modelo bivariável que melhor se ajuste ao conjunto de dados. Para isso, é necessário, primeiro estimar os parâmetros da distribuição δ-gaussiana. Essas estimativas se encontram na tabela abaixo. Vemos que as médias μ_1 e μ_2 estão próximas das respectivas médias observadas dos Bancos Canadense(CUROS) e chileno(BCH) indicando que a estimação para esse parâmetro foi boa. Porém, σ_1 ficou maior comparado com o σ observado do Banco Canadense. Para δ_2 próximo de 0 confirma a intuição, já que o Banco CURO é unimodal e δ_1 maior que 0 como esperado, assimilou a bimodalidade observada do banco chileno(BCH).

Θ	μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	σ_{12}	δ_1	δ_2
MLE	11.2499	19.49	139.8566	3.8857	5.0695	0.5362	-0.0392

O gráfico de dispersão, que apresenta os dados reais dos Bancos estudados e os dados simulados sobrepostos. O eixo horizontal indica os preços das ações diárias máximas do Banco CURO enquanto o eixo vertical indica os preços das ações máximas diárias do Banco BCH. A pesar dos dados simulados estarem mais dispersos, fazendo-nos acreditar que as altas diarias das ações dos dois Bancos não estão tão interligadas, quanto, na verdade estão, a maior concentração dos dados simulados é coerente com os clusters observados nos dados reais. No entanto, é possível notar que os dados reais parecem indicar a formação de um terceiro cluster, o que explica a concentração dos dados simulados justamente aonde ocorre a separação dos dados reais.

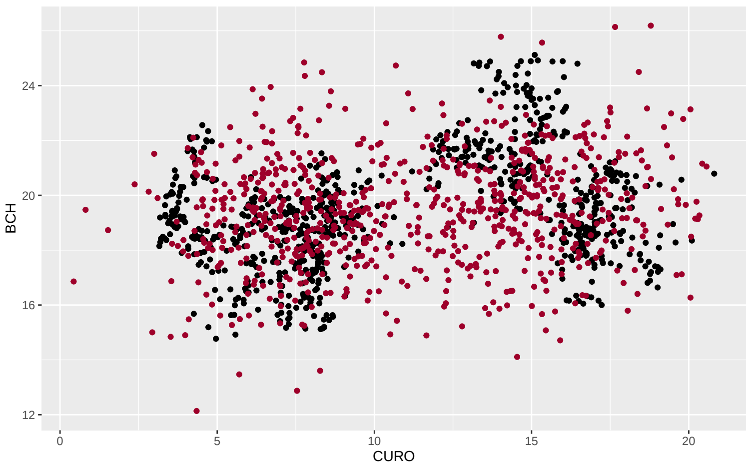

Figura 32: Dados reias (preto) vesus dados simulados da $h_{\mu,\Sigma,\delta}$ ajustada (vermelho).

Muitos são os dados que divergem de um comportamento adequado para uma distribuição normal padrão bivariada. Assim como uma opção para dados cuja distribuição se da concentradamente em mais de um local, em dois clusters ou quatro clusters, apresentamos a distribuição $h_{\mu,\Sigma,\delta}$, que por ser bimodal consegue se ajustar bem a esses tipos de dados.

Referências

BICKEL, P.; DOKSUM, K. *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. [S.l.]: Prentice Hall, 2006. (Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics, v. 1).

EMBRECHTS, F. L. P.; MCNEIL, A. *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. 2001. Acesso em 15 fev. 2023. Disponível em: ⟨https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/copchapter.pdf⟩.

EMBRECHTS, F. L. P.; MCNEIL, A. *On a new invertible generalized logistic distribution approximation to normal distribution*. [S.l.], 2006.

FINANCE.YAHOO. *Yahoo finance historical data*. 2023. Acessado 15 fev. 2023. Disponível em: ⟨https://finance.yahoo.com/⟩.

GENZ, A. et al. *mvtnorm: Multivariate Normal and t Distributions*. [S.l.], 2021. Acesso em 15 fev. 2023. Disponível em: ⟨https://CRAN.R-project.org/package=mvtnorm⟩.

JOE, H. *Dependence modeling with copulas*. [S.l.]: CRC press, 2014.

JOHNSON, N. L. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, JSTOR, v. 36, n. 1/2, p. 149–176, 1949.

MCLACHLAN, G. J.; LEE, S. X.; RATHNAYAKE, S. I. Finite mixture models. *Annual review of statistics and its application*, Annual Reviews, v. 6, p. 355–378, 2019.

ROBERTSON, C.; FRYER, J. Some descriptive properties of normal mixtures. *Scandinavian Actuarial Journal*, Taylor & Francis, v. 1969, n. 3-4, p. 137–146, 1969.

Apêndice

A δ-Gaussiana Univariada

A.1 f.d.p

```
gd <- function(x,m=0,d=0,sd=1){
  T_x = (x-m)*abs(x-m)^d
  t_x = (d+1)*abs(x-m)^d
  dnorm(T_x,0,sd)*t_x
}
```

A.2 F.D.A

```
Gd <- function(x,m=0,d=0,sd=1) {
  T_x = (x-m)*abs(x-m)^d
  pnorm(T_x,0,sd)
}
```

A.3 Amostra aleatoria

```
rdg <- function(n=500,m=0,s=1,d=0){
  u <- runif(n,0,1)
  x <- qnorm(u,0,sd=s)
  y <- sign(x)*abs(x)^(1/(d+1)) + m
  return(y)
}
```

```
grafico_d <- function(media=c(0,0,0),sigma=c(1,1,1),delta=c(0,0,0),
                      gd=gd,pos=c(0.5,0.0),hh="horizontal"){
b <-  ggplot() + xlim(-3,3) +
  theme(
    legend.background = element_blank(),
    legend.key = element_blank(),
    legend.key.size = unit(0.8,"cm"),
    legend.text = element_text(size = rel(1.2),margin = margin(0,0.5,0,0,"cm")),
    legend.text.align = 0,
    legend.position = pos,
    legend.direction = hh,
    legend.title  = element_blank(),
    axis.title.y = element_blank(),
    axis.ticks.y = element_blank(),
    axis.title.x = element_blank(),
    axis.ticks.x = element_blank(),
    plot.background = element_rect(fill = "white"),
    panel.background = element_rect(fill = "white", colour="black")
  )

b +
  geom_function(fun = gd, args=
                list(m=media[1],sd=sigma[1],d=delta[1]),aes(colour="red")) +
  geom_function(fun = gd, args=
                list(m=media[2],sd=sigma[2],d=delta[2]),aes(colour="green"))+
  geom_function(fun = gd, args=
                list(m=media[3],sd=sigma[3],d=delta[3]),aes(colour="blue"))+
  scale_color_manual(labels = c(legenda(media,sigma,delta)),
                     values = c("red","green","blue"))
}
```

A.4 Gráficos

A.4.1 Densidade univariada

A.4.2 curvas de nível

```
grafico <- function(media=c(0,0),delta=0,sigma=c(0,0),n = 5000){
  htop <- ggplot(data=NULL) + xlim(-5,5) +
    geom_function(fun = gd, args = list(m=media[1], d=delta, sd=sigma[1]),
                  color="blue") +
    theme_bw() +
    theme(axis.title.x = element_blank(),
          axis.text.y=element_blank(),
          axis.ticks.y=element_blank())

  ###########################

  hright <- ggplot(data=NULL) + xlim(-5,5) +
    geom_function(fun = gd, args = list(m=media[2], d=delta, sd=sigma[2]),
                  color="red") +
    coord_flip() + theme_bw() +
    theme(axis.title.y = element_blank(),
          axis.text.x=element_blank(),
          axis.ticks.x=element_blank())

  ############################

  blank <- ggplot() + geom_point(aes(1,1), colour="white") +
    theme(axis.ticks=element_blank(),
          panel.background=element_blank(),
          panel.grid=element_blank(),
          axis.text.x=element_blank(),
          axis.text.y=element_blank(),
          axis.title.x=element_blank(),
          axis.title.y=element_blank())
  ############################
```

```
  mdados <- x(n, m=media, s=sigma, d=delta)

  ##############################
  scatter <- ggplot(data=mdados, aes_string(x= "x1", y= "x2")) +
    geom_point(size = 1.6) +
    xlim(-5,5) + ylim(-5,5) +
    theme_classic() +
    theme(axis.title.y = element_blank(),
          axis.text.x=element_blank(),
          axis.ticks.x=element_blank()
    ) +
    geom_density_2d(bins = 6,size=1.1,color="#009E73")

  pgb <- grid.arrange(htop, blank, scatter,
                      hright, ncol=2,nrow=2,
                      widths=c(4,1), heights = c(1, 4))
  ##############################
  pgb

}
```

B simulação bivariada

B.1 f.d.p

```
library("mvtnorm")

fh <- function(X1,X2,M1=0,M2=0,D=c(0,0),S=diag(2)){
  t1 <- (X1-M1)*((abs(X1-M1))**D[1])
  t2 <- (X2-M2)*((abs(X2-M2))**D[2])
  dmvnorm(x = c(t1,t2), mean = c(0,0), sigma = S)*
    ((D[1]+1)*(D[2]+1))*(abs(X1-M1)**D[1])*(abs(X2-M2)**D[2])
}
```

B.2 F.D.A

```
FH <- function(X1,X2,M1=0,M2=0,D=c(0,0),S=diag(2)){
  T1 <- (X1-M1)*abs(X1-M1)^D[1]
  T2 <- (X2-M2)*abs(X2-M2)^D[2]
  mvtnorm::pmvnorm(lower=c(-Inf,-Inf),upper=c((T1),(T2)),mean=c(0,0),sigma = S)
}
```

B.3 Simulação Amostra aleatoria

```
xy <- function(m=c(0,0), s=diag(2), d=c(0,0),n=15){
  x <- mvtnorm::rmvnorm(n,mean=c(0,0),sigma=s)

  y1 <- sign(x[,1])*abs(x[,1])^(1/(d[1]+1)) + m[1]
  y2 <- sign(x[,2])*abs(x[,2])^(1/(d[2]+1)) + m[2]

  y <- matrix(c(y1,y2), ncol = 2,nrow =n,
              dimnames = list(c(),c("y1","y2")))
  return(y)
}
```

B.4 Gráficos

B.4.1 3D

```
g3d <- function(media=c(0,0),delta=c(0.0,0.0),sigma=diag(2),
                xlimm = c(-3,3), ylimm=c(-3,3)){
  n=30
  X1 <- X2 <- seq(-3,3,length.out=n)
  d <- expand.grid(x=X1,y=X2)
  z <- matrix(NA,ncol = n, nrow=n)
  for (i in 1:n) {
    for (j in 1:n) {
      z[i,j] = fh(X1[i], X2[j],M1=media[1],M2=media[2], D=delta, S=sigma)
    }
  }
  par(mfrow=c(1,2),
      mar = c(0,0,0,0),
      mai = c(0,0,0,0),
      oma = c(0,0,0,0),
      cex = 1
  )
  par(fig=c(0.0,6,0,10)/10)
  persp(X1,X2,z,
        theta=120,
        phi=25, expand=.5,
        ltheta = 120,
        shade = 0.75,
        r=sqrt(3),
        d=1,
        col="gold",
        lphi=3.95,
        zlim=c(0,max(z)),
        scale=TRUE,
        ticktype = "detailed"
  )
  par(fig=c(6.5,10,2,8)/10)
  par(new=T)
  c1=hcl.colors(10, "Spectral")
  contour(X1,X2,z,col=c1, labcex = 1.1,
          lwd = 2, nlevels = 6,
          xlim=xlimm,ylim=ylimm)#lty=pontilhado

}
```

B.4.2 ajustado vs estimados

```
contornos <- function(nn=10000,media=c(0,0),sigma=diag(2),delta=c(0.2,0.0),
                      xlimm=c(-3,3),ylimm=c(-3,3)){

  md <- x(n=nn, m=media, s=diag(sigma), d=delta)
  dxy1 <- xy(n=nn, m=media,
             s=sigma,
             d=delta)

  dxy1$contorno <- "Apartir das marginais"
  md$contorno <- "Bivariada Simulada"
  combinado <- rbind(dxy1, md)

  ggplot(data=combinado, aes_string(x= "x1", y= "x2")) +
    xlim(xlimm) + ylim(ylimm) +
    geom_density_2d(aes(color=contorno),
                    bins = 6,linewidth=1.1)+
    scale_colour_manual(values = c("#009E73", "#9E002A"))+
    #  theme(legend.text = element_text(size = 9),
    #        legend.position = c(.90, .60))
    theme(legend.position = "none")

}
```

B.5 Estimação

B.5.1 Estimação

```
#### teste de estimação
library("mvtnorm")
library("microbenchmark")
library("parallel")
library("doParallel")
library("foreach")
estimador <- function(theta,N){

  MFH <- function(theta,Y){

    M1 <- theta[1]
    M2 <- theta[2]
    S1 <- theta[3]
    S2 <- theta[4]
    S12 <- theta[5]
    D <- theta[6:7]
    S <- matrix(c(S1,S12,S12,S2),ncol = 2)

    X1 = Y[,1]; X2 = Y[,2]

    t1 <- (X1-M1)*((abs(X1-M1))**D[1])
    t2 <- (X2-M2)*((abs(X2-M2))**D[2])
    tm = matrix(c(t1,t2),ncol=2)
    bdgdelta <- mvtnorm::dmvnorm(x = tm, mean = c(0,0), sigma = S)*
      ((D[1]+1)*(D[2]+1))*(abs(X1-M1)**D[1])*(abs(X2-M2)**D[2])
    blogl <- sum(log(bdgdelta))
    return(-blogl)
  }#fun. a ser maximizada

  Z <- foreach::foreach(i = 1:1000) %do% {
    xy(m=theta[1:2],s=matrix(theta[c(3,5,5,4)],ncol=2),
       d=theta[6:7],n=N)
  }#lista com 1000 amostras aleatorias de tamanho N

  oi <- function(Z, theta){
    optim(par = theta, fn = MFH, Y=Z, method="BFGS")$par
  }# maximizador
```

```r
  cl <- parallel::makeCluster(detectCores())
  doParallel::registerDoParallel(cl)
  zfoi <- foreach::foreach(i = 1:10, .combine ='c') %dopar%{oi(Z[[i]], theta)}
  parallel::stopCluster(cl)#para cada amostra calcula os estimadores

  dados_e <- matrix(zfoi,ncol=7,byrow=T)
  colnames(dados_e) = c("M1","M2","S1","S2","S12","D1","D2")
  return(dados_e)#1000 valores estimados para cada parametros
}

N=10000
theta = c("M1"=0,
          "M2"=1,
          "S1"=2,
          "S2"=0.5,
          "S12"=0.99,
          "D1"=1.6,
          "D2"=0.0)

start_time <- Sys.time()
est_dados = estimador(theta, N)
end_time <- Sys.time()

theta_est <- apply(est_dados, 2, mean)
theta_res <- (theta_est - theta)^2
theta_sd <- apply(est_dados,2,sd)
(tempo =end_time - start_time)
data.frame(theta,theta_est,theta_res,theta_sd)
```