UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

DAVIDE MORRONE DE AZEVEDO MUNIZ

ESTUDOS EM SUPER YANG-MILLS N=4

BRASÍLIA

20 DE JANEIRO DE 2023

Davide Morrone de Azevedo Muniz

Estudos em Super Yang-Mills N=4

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Aleksandr Nikolaievich Pinzul

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

20 de Janeiro de 2023

Resumo

Neste trabalho, buscamos estudar a teoria Super Yang-Mills com $\mathcal{N} = 4$. Para isso, desenvolvemos a teoria geral da Supersimetria. Começamos estudando a álgebra da supersimetria e suas representações, depois desenvolvemos o formalismo do super-espaço e dos supercampos considerando os tipos de supercampos mais importantes e teorias invariantes sob transformações de calibre. Então estudamos a quantização na Supersimetria empregando o método da integral de caminhos nos supercampos. Consideramos a álgebra super-conforme de um espaço quadridimensional e, por fim, trabalhamos a teoria SYM $\mathcal{N} = 4$ elencando sua lagrangeana e algumas de suas principais propriedades, como a invariância conforme.

Lista de abreviaturas e siglas

IF	Instituto de Física
UnB	Universidade de Brasilia
SYM	Super Yang-Mills
WZ	Wess-Zumino
AdS	Anti-de Sitter
CFT	Conformal Field Theorie

Sumário

Introdução

Supersimetria é um tipo de simetria que estende a simetria de Poincaré. Porém, ao contrário de uma simetria convencional realizada em termos de uma álgebra de Lie, a supersimetria emprega uma álgebra de Lie graduada que possui comutadores e anti-comutadores para lidar com geradores bosônicos e fermiônicos. Outra característica interessante da supersimetria é que ela mistura partículas fermiônicas com partículas bosônicas, a transformação supersimétrica de um campo bosônico é sempre um campo fermiônico e *vice versa*. Em conexão com esse fato, temos o resultado que em toda representação da álgebra de supersimetria o número de estados bosônicos é igual ao número de estados fermiônicos.

Por misturar bósons e férmions, as teorias supersimétricas podem ser um tanto quanto não-físicas. Por exemplo, para a supersimetria ser satisfeita, é necessário que a teoria contenha férmions e bósons de mesma massa, porém sabemos que isso não acontece no contexto das partículas elementares. Entretanto, supersimetria é interessante fisicamente por sua aplicação em outras teorias, como a Teoria das Cordas, por exemplo.

A teoria Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ é um exemplo de teoria supersimétrica que ganhou interesse físico devido à sua contribuição em outra teoria. Ela possui um papel importante na correspondência AdS/CFT, pois ela é o lado "CFT"da correspondência. Em linhas gerais, a correspondência foi originalmente construída aglomerando-se um tipo de superfície chamada D-branas de modo que a estrutura resultante fosse um buraco negro. A teoria de campos resultante nas branas é a teoria SYM $\mathcal{N} = 4$ quadridimensional, enquanto ao redor do buraco negro se estabelece uma geometria do tipo anti-de Sitter (AdS) 5-dimensional onde habita uma teoria de cordas. Desse modo, a teoria SYM $\mathcal{N} = 4$ pode ser pensada como uma teoria de campos no horizonte do espaço AdS (MALDACENA, 1998).

A teoria SYM $\mathcal{N} = 4$ também é muito especial por ser a teoria quântica de campos relativística sem gravidade mais simples no sentido de ser a teoria mais simétrica. Além de possuir a simetria de Poincaré, ela ainda tem a simetria conforme e a supersimetria com 4 supercargas, que é o número máximo para uma teoria sem partículas com spin maior do que 1. Ela é formada por partículas de spin 1, 0 e 1/2, todas sem massa, portanto, não descreve nenhum modelo real.

A Correspondência AdS/CFT faz com que o estudo da teoria SYM $\mathcal{N} = 4$ seja particularmente interessante para nós, pois ele é mais um de uma série de trabalhos realizados sobre diferentes assuntos que se conectam na correspondência. No Projeto de TCC e em duas iniciações científicas, estudamos a simetria conforme, o espaço anti-de

Sitter e diversos outros assuntos correlatos. Dessa forma, o estudo da Supersimetria e da teoria SYM $\mathcal{N} = 4$ não é um empreendimento isolado, mas parte de um projeto maior que vem sendo realizado ao longo dos anos.

1 Álgbera da Supersimetria

A Álgebra da Supersimetria é uma álgebra de Lie graduada, também chamada de super-álgebra. Ela é gerada por geradores bosônicos e fermiônicos que obedecem uma estrutura $\mathbb{Z}_2$. Os geradores bosônicos são “pares"e os fermiônicos são “ímpares". Dessa forma, o produto de dois operadores bosônicos é bosônico; de dois fermiônicos é bosônico; e de um bosônico e um fermiônico é fermiônico. Essa álgebra satisfaz a identidade de Jacobi generalizada:

$$\{A, \{B, C]] \pm \{B, \{C, A]] \pm \{C, \{A, B]] = 0, \tag{1.1}$$
$$\{A, B] \equiv AB - (-1)^{g_A g_B} BA, \tag{1.2}$$

onde g_A e g_B são as paridades de A e B.

Os geradores das transformações de supersimetria são fermiônicos, eles são chamados de supercargas, denotamos eles por Q^A_α e $\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}$ utilizando a notação de 2-spinores de Weyl, aqui temos que $A = 1, ..., \mathcal{N}$. Os outros geradores são os geradores da álgebra de Poincaré, eles são bosônicos. Assim a superalgebra da supersimetria é dada pelas relações da álgebra de Poincaré e por (WEST, 1986):

$$\left\{Q^a_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}b}\right\} = 2\delta^a_b \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu; \tag{1.3}$$
$$\left\{Q^a_\alpha, Q^b_\beta\right\} = \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{ab}; \tag{1.4}$$
$$\left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}a}, \bar{Q}_{\dot{\beta}b}\right\} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{Z}_{ab}; \tag{1.5}$$
$$[P_\mu, Q^a_\alpha] = \left[P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}a}\right] = 0; \tag{1.6}$$
$$[Q^a_\alpha, J^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})^\beta_\alpha \, Q^a_\beta; \tag{1.7}$$
$$\left[\bar{Q}^a_{\dot{\alpha}}, J^{\mu\nu}\right] = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left(\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} \bar{Q}^{\dot{\gamma}}_a. \tag{1.8}$$

Os números Z^{AB} são chamados de **cargas centrais**. Eles necessariamente são anti-simétricos nos índices AB, no caso $\mathcal{N} = 1$, eles são nulos.

1.0.1 Simetria R

Seja R uma matriz do grupo $USp(\mathcal{N})$, as equações (1.3, 1.4, 1.5) são invariantes sob as transformações (WEST, 1986)(AMMON; ERDMENGER, 2015):

$$Q^a_\alpha \mapsto R^a_b Q^b_\alpha; \tag{1.9}$$

$$\bar{Q}_{a\dot{\alpha}} \mapsto \bar{Q}_{b\dot{\alpha}}(R^\dagger)^b_a. \tag{1.10}$$

Se $Z^{ab} = 0$, podemos relaxar a condição sobre R para $R \in U(\mathcal{N})$.

1.1 Representações da Álgebra da Supersimetria

Para estudar as representações da álgebra da supersimetria, vamos dividir a análise em três casos: o caso sem massa, o caso massivo sem cargas centrais e o caso massivo com cargas centrais. Porém, como resultado geral, temos que em qualquer representação da álgebra da supersimetria, o número de estados bosônicos será igual ao número de estados fermiônicos (WEST, 1986)(WESS; BAGGER, 1992).

1.1.1 Caso sem Massa

No caso sem massa, temos que $P^2 = 0$, portanto, escolhemos o referencial em que $P_\mu = (-E, 0, 0, E)$. Nesse referencial, a álgebra se torna:

$$\left\{Q^a_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}b}\right\} = 2\delta^a_b \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Essa equação implica que os operadores Q^a_2 e $\bar{Q}_{\dot{2}a}$ devem ser nulos, o que, por sua vez, implica que as cargas centrais também devem se anular. Alteramos os operadores Q e $\bar{Q}$ por um fator de escala:

$$a^a = \frac{1}{2\sqrt{E}} Q^a_1, \tag{1.12}$$

$$(a^a)^\dagger \equiv a^\dagger_a = \frac{1}{2\sqrt{E}} \bar{Q}^a_{\dot{1}}. \tag{1.13}$$

Assim ficamos com uma álgebra de Clifford com $\mathcal{N}$ operadores de criação e aniquilação fermiônicos(RYDER, 1996):

$$\left\{a^a, a^\dagger_b\right\} = \delta^a_b. \tag{1.14}$$

Pela equação (1.7), pode ser mostrado que o operador a^a reduz a helicidade de um estado em $1/2$, enquanto o operador $a^\dagger_a$ a aumenta em $1/2$. Portanto, se $|\Omega\rangle$ for o estado de menor helicidade, temos que $a^a|\Omega\rangle = 0$.

Podemos construir novos estados atuando com os operadores de criação $a_a^\dagger$ em $|\Omega\rangle$. Atuando com n desses operadores, obtemos um estado com helicidade $\lambda + n/2$, onde λ é a helicidade do vácuo. Consequentemente, o estado de maior helicidade possui helicidade $\lambda + \mathcal{N}/2$. Além disso, a representação possui $\binom{\mathcal{N}}{n}$ estados independentes com a mesma helicidade. Portanto, a representação possui dimensão $2^{\mathcal{N}}$ (WEST, 1986)(AMMON; ERDMENGER, 2015)(GATES et al., 1983).

1.1.2 Caso Massivo sem Cargas Centrais

Começamos adotando um referencial tal que $P_\mu = (-m, 0, 0, 0)$ e fazemos a seguinte mudança nos geradores de supersimetria:

$$Q_\alpha^a = \sqrt{2m} a_\alpha^a; \tag{1.15}$$

$$\bar{Q}_{a\dot{\alpha}} = \sqrt{2m}(a_\alpha^a)^\dagger. \tag{1.16}$$

Assim, as equações (1.3, 1.4, 1.5) se tornam:

$$\left\{a_\alpha^a, (a_\beta^b)^\dagger\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta_b^a, \tag{1.17}$$

$$\left\{a_\alpha^a, a_\beta^b\right\} = \left\{(a_\alpha^a)^\dagger, (a_\beta^b)^\dagger\right\} = 0. \tag{1.18}$$

Essa é a álgebra de $2\mathcal{N}$ operadores de criação e aniquilação fermiônicos. Definimos o vácuo $|\Omega\rangle$ como de costume:

$$a_\alpha^a|\Omega\rangle = 0. \tag{1.19}$$

Criamos novos estados atuando com os operadores $(a_\alpha^a)^\dagger$. Como $\alpha \in \{1, 2\}$ e $a = 1, ..., \mathcal{N}$, temos $2\mathcal{N}$ operadores de criação. Com efeito, existem $\binom{2\mathcal{N}}{n}$ maneiras diferentes de atuarmos com n operadores de criação no vácuo. Portanto, a dimensão da representação é $2^{2\mathcal{N}}$.

O estado de maior spin é obtido simetrizando, o máximo possível, os índices espinoriais, porém, ao fazer isso, precisamos anti-simetrizar os outros índices para que eles não se repitam e o resultado se anule. Portanto, podemos simetrizar, no máximo, $\mathcal{N}$ índices espinoriais, resultando num estado de spin $\mathcal{N}/2$.

1.1.3 Caso Massivo com Cargas Centrais

Assim como no caso sem cargas centrais, adotamos um referencial em que $P^\mu = (-m, 0, 0, 0)$. Com essa escolha, a álgebra se torna:

$$\left\{Q_\alpha^a, \bar{Q}_{\dot{\beta}b}\right\} = 2m\delta_{\alpha\bar{\theta}}\delta_b^a; \tag{1.20}$$

$$\left\{Q_\alpha^a, Q_\beta^b\right\} = \varepsilon_{\alpha\beta}Z^{ab} \tag{1.21}$$

$$\left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}a}, \bar{Q}_{\dot{\beta}b}\right\} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{Z}_{ab}. \tag{1.22}$$

Realizamos uma transformação unitária em Q:

$$Q_\alpha^a \mapsto Q'^a_\alpha = U^a_b Q^b_\alpha. \tag{1.23}$$

Dessa transformação, obtemos:

$$\left\{Q'^a_\alpha, Q'^b_\beta\right\} = \varepsilon_{\alpha\beta} U^a_c U^b_d Z^{cd} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta} Z'^{ab}. \tag{1.24}$$

Como Z^{ab} forma uma matriz anti-simétrica $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, podemos escolher a transformação unitária realizada em Q de modo que Z'^{ab} é diagonal em blocos 2×2 reais e anti-simétricos. Mais explicitamente, decompomos os índices de Z em $a = (a', \bar{a})$, onde $a' = 1, 2$ e $\bar{a} = 1, ..., r$, com $2r = \mathcal{N}$ para $\mathcal{N}$ par e $2r = \mathcal{N} - 1$ para $\mathcal{N}$ ímpar. A matriz Z' é dada por:

$$Z' = \mathrm{diag}(\varepsilon Z_1, ..., \varepsilon Z_r, \Xi), \tag{1.25}$$

onde $\Xi = 0$ para $\mathcal{N}$ ímpar e está ausente para $\mathcal{N}$ par. Note que os $Z_{\bar{a}}$ são reais. Assim, a álgebra é:

$$\left\{Q'^{a'\bar{a}}_\alpha, \left(Q'^{b'\bar{b}}_\beta\right)^\dagger\right\} = 2m\delta^\beta_\alpha \delta^{\bar{a}}_{\bar{b}} \delta^{a'}_{b'}; \tag{1.26}$$

$$\left\{Q'^{a'\bar{a}}_\alpha, Q'^{b'\bar{b}}_\beta\right\} = \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{a'b'} \delta^{\bar{a}\bar{b}} Z_{\bar{a}} \tag{1.27}$$

$$\left\{\left(Q'^{a'\bar{a}}_\alpha\right)^\dagger, \left(Q'^{b'\bar{b}}_\beta\right)^\dagger\right\} = \varepsilon_{a'b'} \varepsilon^{\alpha\beta} \delta_{\bar{a}\bar{b}} Z^{\bar{a}}. \tag{1.28}$$

Definimos novos operadores realizando combinações lineares com os operadores Q e $Q^\dagger$:

$$Q^{\bar{a}}_{\alpha\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[Q^{1\bar{a}}_\alpha \pm \varepsilon_{\alpha\beta} \left(Q^{2\bar{a}_\beta}\right)\right]. \tag{1.29}$$

A única relação de anti-comutação não-nula que esses operadores satisfazem é:

$$\left\{Q^{\bar{a}}_{\alpha\pm}, \left(Q^{\bar{b}}_{\beta\pm}\right)\right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{\bar{a}\bar{b}} (2m \pm Z_{\bar{a}}). \tag{1.30}$$

Em uma representação unitária, o operador do lado esquerdo dessa equação deve ser positivo, isso implica que $2m \geq |Z_{\bar{a}}|$, essa restrição é conhecida como limite BPS. Quando um dos $Z_{\bar{a}}$ satisfaz a igualdade, um dos operadores $Q^{\bar{a}}_{\alpha\pm}$ deve se anular, dependendo do sinal de $Z_{\bar{a}}$. Se k dos $Z_{\bar{a}}$ satisfizerem a igualdade, então restarão $2(\mathcal{N} - k)$ operadores não nulos satisfazendo uma álgebra de Clifford, como a estudada no caso massivo sem cargas centrais. A representação é chamada $1/2^k$ BPS e possui dimensão $2^{2(\mathcal{N}-k)}$.

2 Supercampos

2.1 Super-espaço

Começamos com a observação que a álgebra da supersimetria é totalmente expressa em termos de comutadores se utilizarmos parâmetros fermiônicos. Sejam θ e seu conjugado os parâmetros, temos que:

$$\left\{\theta^{\alpha}, \theta^{\beta}\right\} = \left\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\right\} = 0, \tag{2.1}$$

onde $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$, assim, obtemos (WESS; BAGGER, 1992):

$$\left[\theta Q, \bar{\theta}\bar{Q}\right] = 2\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}P_{\mu}; \tag{2.2}$$

$$[\theta Q, \theta Q] = \left[\bar{\theta}\bar{Q}, \bar{\theta}\bar{Q}\right] = 0; \tag{2.3}$$

$$[P_{\mu}, \theta Q] = \left[P_{\mu}, \bar{\theta}\bar{Q}\right] = 0. \tag{2.4}$$

As relações (2.2, 2.3, 2.4) mostram que podemos pensar a álgebra da supersimetria como uma álgebra de Lie com parâmetros que anti-comutam. Utilizando o mapa exponencial, definimos um elemento do grupo associado:

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i(-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})}. \tag{2.5}$$

Utilizando a fórmula de BCH, $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$ (WESS; BAGGER, 1992), e as relações (2.2, 2.3, 2.4), calculamos a multiplicação de dois elementos do grupo:

$$G(0, \xi, \bar{\xi})G(x^m, \theta, \bar{\theta}) = G(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}). \tag{2.6}$$

Definimos o super-espaço como o espaço formado pelos elementos $z^m = (x^m, \theta, \bar{\theta})$. A multiplicação (2.6) induz um respectivo movimento no super-espaço dado por:

$$(x^m, \theta, \bar{\theta}) \mapsto (x^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}). \tag{2.7}$$

Pode ser mostrado que esse movimento é gerado pelos seguintes operadores:

$$Q_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m; \tag{2.8}$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\theta^{\alpha}\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_m. \tag{2.9}$$

Esses operadores satisfazem as relações da álgebra de supersimetria (1.3, 1.4, 1.5), por isso utilizamos os mesmos símbolos Q e $\bar{Q}$.

2.2 Supercampos

Supercampos são funções do super-espaço, $F(x,\theta,\bar{\theta})$. Devido à natureza grassmaniana de θ e $\bar{\theta}$, a série de potências de F é finita quando expandida em θ e $\bar{\theta}$, temos que:

$$\begin{aligned} F(x,\theta,\bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi} \\ & + \theta^2 m(x) + \bar{\theta}^2 n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) \\ & + \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2\theta\psi(x) + \theta^2\bar{\theta}^2 d(x), \end{aligned} \tag{2.10}$$

nessa expressão, f, m, n, d são campos escalares, v_m é um campo vetorial e os demais são campos espinoriais, de modo que: $\theta\phi \equiv \theta^\alpha\phi_\alpha$, $\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} \equiv \theta^2\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$ *etc.*.

Definimos a transformação de F da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})F \equiv \delta_\xi F = & \delta_\xi f(x) + \theta\delta_\xi\phi(x) + \bar{\theta}\delta_\xi\bar{\chi} \\ & + \theta^2\delta_\xi m(x) + \bar{\theta}^2\delta_\xi n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}\delta_\xi v_m(x) \\ & + \theta^2\bar{\theta}\delta_\xi\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}^2\theta\delta_\xi\psi(x) + \theta^2\bar{\theta}^2\delta_\xi d(x). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para determinar as transformações individuais de cada campo da soma, basta aplicar o operador $(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})$ em todo o F e comparar os coeficientes das potências de θ e $\bar{\theta}$.

2.3 Supercampos Quirais

Considere o elemento de grupo $G(x^m,\theta,\bar{\theta})$, dado por (2.5), porém agora vamos multiplicar por $G(0,\xi,\bar{\xi})$ pela direita, obtemos:

$$G(x^m,\theta,\bar{\theta})G(0,\xi,\bar{\xi}) = G(x^m + i\xi\sigma^m\bar{\theta} - i\theta\sigma^m\bar{\xi}, \theta+\xi, \bar{\theta}-\bar{\xi}). \tag{2.12}$$

O movimento induzido no super-espaço é gerado pelos operadores (WESS; BAGGER, 1992):

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m; \tag{2.13}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_m. \tag{2.14}$$

Pode ser mostrado que esses operadores, D e $\bar{D}$, satisfazem as relações de comutação abaixo:

$$\left\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\right\} = -2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m; \tag{2.15}$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 0; \tag{2.16}$$

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \left\{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 0; \tag{2.17}$$

$$\left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\right\} = \left\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 0. \tag{2.18}$$

Definimos campos quirais, Φ, como sendo supercampos que satisfazem a condição:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \tag{2.19}$$

Para solucionar essa equação, vamos utilizar uma nova variável: $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$. Em termos das variáveis $(y^m, \theta, \bar{\theta})$, os operadores D e $\bar{D}$ são dados por:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m}; \tag{2.20}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}. \tag{2.21}$$

Portanto, qualquer supercampo que dependa explicitamente apenas de y e θ é solução de (2.19). Por exemplo:

$$\Phi = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta^2 F(y). \tag{2.22}$$

A partir da expressão em termos de y, obtemos a forma em termos de x expandindo os campos:

$$\begin{aligned}\Phi =& A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box A(x)\\ &+ \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta^2 F(x).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Definimos também o campo anti-quiral que, por sua vez, satisfaz a equação conjugada de (2.19):

$$D_\alpha\Phi^\dagger = 0. \tag{2.24}$$

Podemos realizar o mesmo procedimento que foi feito para o campo quiral para determinar a forma de $\Phi^\dagger$, porém com a modificação de utilizar a coordenada $y^m_- = x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}$. No entanto, sabendo a expressão de Φ, obtemos a expressão de $\Phi^\dagger$ diretamente calculando o hermitiano conjugado:

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger =& A^*(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box A^*(x)\\ &+ \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^2\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}^2 F^*(x).\end{aligned} \tag{2.25}$$

2.3.1 Transformação de Supersimetria de um Campo Quiral

Para calcular as transformações de supersimetria dos campos que compõe o campo quiral Φ, aplicamos a equação (2.11), obtemos como resultado (WESS; BAGGER, 1992)(AMMON; ERDMENGER, 2015):

$$\delta_\xi A = \sqrt{2}\xi\psi; \tag{2.26}$$

$$\delta_\xi\psi = i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\xi F; \tag{2.27}$$

$$\delta_\xi F = 2i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\partial_m\psi. \tag{2.28}$$

Note que o termo F se transforma em uma derivada espacial, essa propriedade será usada para construirmos uma ação invariante sob transformações de supersimetria.

2.4 Supercampos Vetoriais

Supercampos vetoriais são supercampos que satisfazem a condição:

$$V = V^\dagger. \tag{2.29}$$

A forma mais geral desses campos é dada por (WESS; BAGGER, 1992):

$$\begin{aligned} V =&C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ &+ \frac{i}{2}\theta^2(M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2}\bar{\theta}^2(M(x) - iN(x)) - \theta\sigma^m\bar{\theta}A_m(x) \\ &+ i\theta\bar{\theta}^2\left(\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right) - i\bar{\theta}^2\theta\left(\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\chi(x)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2\left(D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right), \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde C, D, M, N e A_m são reais. Agora, note que $\Phi + \Phi^\dagger$ é um campo vetorial, portanto, $V + \Phi + \Phi^\dagger$ também é um campo vetorial. Esse fato nos permite definir a transformação de calibre da supersimetria:

$$V \to V + \Phi + \Phi^\dagger. \tag{2.31}$$

Sob essa transformação, os campos se transformam do seguinte modo:

$$C \to C + A + A^*; \tag{2.32}$$
$$\chi \to \chi - i\sqrt{2}\psi; \tag{2.33}$$
$$M + iN \to M + iN - 2iF; \tag{2.34}$$
$$A_m \to A_m - i\partial_m(A - A^*). \tag{2.35}$$

Os campos λ e D são invariantes. Através dessa transformação, podemos eliminar os campos C, χ, M e N em favor dos outros campos, esse calibre é conhecido como calibre de Wess-Zumino (WZ). O campo V e suas potências possuem a seguinte expressão nesse calibre (WESS; BAGGER, 1992):

$$V =- \theta\sigma^m\bar{\theta}A_m + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}^2\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D; \tag{2.36}$$
$$V^2 =- \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 A_m A^m; \tag{2.37}$$
$$V^3 =0. \tag{2.38}$$

O campo V é a generalização supersimétrica do potencial de Yang-Mills. O correspondente campo de força é obtido a partir dos campos W e $\bar{W}$, definidos por:

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V, \tag{2.39}$$
$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} V. \tag{2.40}$$

W é quiral e $\bar{W}$ é anti-quiral, ambos são invariantes sob a transformação de calibre $V \to V + \Phi + \Phi^\dagger$. Além disso, eles satisfazem o vínculo: $D^\alpha W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}$ (WESS; BAGGER, 1992)(AMMON; ERDMENGER, 2015).

Utilizando as coordenadas y e y_-, calculamos as componentes de W e $\bar{W}$:

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + \left[\delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta F_{mn}(y)\right]\theta_\beta + \theta^2\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y), \tag{2.41}$$
$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(y_-) + \left[\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}D(y_-) + \frac{i}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\sigma^m\bar{\sigma}^n)^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}F_{mn}(y_-)\right]\bar{\theta}^{\dot{\beta}} - \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}^2\bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\dot{\alpha}}\partial_m\lambda_\alpha(y_-), \tag{2.42}$$

onde $F_{mn} \equiv \partial_m A_n - \partial_n A_m$. (2.43)

2.4.1 Transformação de Supersimetria de um Campo Vetorial

Calculamos as transformações de supersimetria para os campos do supercampo V (WESS; BAGGER, 1992):

$$\delta_\xi A_m = -2i(\xi\sigma^m\bar{\lambda} + \bar{\xi}\sigma^m\lambda); \tag{2.44}$$
$$\delta_\xi\lambda = \frac{1}{2}\xi(\sigma^m\bar{\sigma}^n)\partial_m A_n + i\xi D; \tag{2.45}$$
$$\delta_\xi\bar{\lambda} = \frac{1}{2}\bar{\xi}(\bar{\sigma}^m\sigma^n)\partial_m A_n - i\bar{\xi}D; \tag{2.46}$$
$$\delta_\xi D = \partial_m(\lambda\sigma^m\bar{\xi} - \xi\sigma^m\bar{\lambda}). \tag{2.47}$$

Note que, análogo ao supercampo quiral, a componente $\theta^2\bar{\theta}^2$ se transforma como uma derivada espacial.

2.5 Calibre Não-Abeliano

Queremos construir uma teoria invariante sob as transformações

$$\Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi, \tag{2.48}$$
$$\Phi'^\dagger = \Phi^\dagger e^{i\Lambda}. \tag{2.49}$$

onde Λ é uma matriz dada por: $\Lambda_{ij} = T^a_{ij}\Lambda_a$, T^a são geradores hermitianos do grupo de calibre na representação determinada por $\Phi = (\Phi^1, ..., \Phi^n)$ e Λ_a é um campo quiral.

Normalizamos os geradores T^a de modo que, na representação adjunta, $Tr(T^aT^b) = k\delta^{ab}$ com $k > 0$.

Agora, generalizamos os supercampos vetoriais para campos que se transformam segundo:

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger}e^V e^{i\Lambda}. \tag{2.50}$$

Assim como Λ, V também é uma matriz dada em termos dos geradores do grupo de calibre: $V_{ij} = T^a_{ij}V_a$. Pode ser mostrado que transformação (2.50) também permite um calibre WZ tal que $V^3 = 0$. Para transformações infinitesimais, podemos calcular que (WESS; BAGGER, 1992)(GATES et al., 1983):

$$\delta V = \frac{i}{2}L_V\left[\Lambda + \Lambda^\dagger + \coth\left(\frac{1}{2}L_V\right)(\Lambda - \Lambda^\dagger)\right], \tag{2.51}$$

$$\delta V = i(\Lambda^\dagger - \Lambda) - \frac{i}{2}\left[V, \Lambda^\dagger + \Lambda\right] + O(V^2). \tag{2.52}$$

Onde $L_V(A) = [V, A]$.

Também precisamos generalizar o campo de força W para o caso não-abeliano, temos:

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 e^{-V}D_\alpha e^V. \tag{2.53}$$

Sob a transformação (2.50), W_α se transforma do seguinte modo (WESS; BAGGER, 1992)(GATES et al., 1983):

$$W'_\alpha = e^{-i\Lambda}W_\alpha e^{i\Lambda}. \tag{2.54}$$

Dessa forma, $\mathrm{Tr}(W^2)$ é invariante sob a transformação de calibre (2.50).

2.6 Lagrangeana Invariante sob Transformações de Calibre

Queremos agora construir uma teoria que seja invariante sob transformações de supersimetria e transformações de calibre. Como vimos anteriormente, o termo $\mathrm{Tr}(W^2)$ é invariante sob transformações de calibre, porém adicionamos $\mathrm{Tr}(\bar{W}^2)$ seguindo a literatura, apesar de $\mathrm{Tr}(W^2)$ ser real (WEST, 1986)(GATES et al., 1983).

Também podemos adicionar o termo $\Phi^\dagger e^V\Phi$, pois ele é invariante sob as transformações de calibre (2.48, 2.49, 2.50). Esse termo é conhecido como termo cinético.

Por fim, adicionamos o seguinte termo:

$$\frac{1}{2}m_{ij}\Phi^i\Phi^j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi^i\Phi^j\Phi^k + \text{h.c.}, \tag{2.55}$$

onde m_{ij} e g_{ijk} são tensores totalmente simétricos invariantes com respeito ao grupo de calibre, essa condição garante a invariância sob as transformações de calibre.

Para que a teoria seja invariante sob supersimetria, devemos pegar o termo de maior ordem, ou seja, θ^2, $\bar{\theta}^2$ ou $\theta^2\bar{\theta}^2$, dependendo da expressão do supercampo. Fazemos isso, pois, pelas equações (2.28, 2.47), vemos que os campos de maior ordem se transformam como derivadas espaciais, assim, a ação da teoria é invariante sob as transformações de supersimetria (D'HOKER; FREEDMAN, 2002).

A Lagrangeana resultante de todas essas considerações é:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \frac{1}{16kg^2}\mathrm{Tr}\left(W^2\Big|_{\theta^2} + \bar{W}^2\Big|_{\bar{\theta}^2}\right) + \Phi^\dagger e^V \Phi\Big|_{\theta^2\bar{\theta}^2} \\ &+ \left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi^i\Phi^j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi^i\Phi^j\Phi^k\right)\Bigg|_{\theta^2} + \mathrm{h.c.}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Perceba que podemos escrever essa lagrangeana como uma integral sobre as coordenadas θ e $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \frac{1}{16kg^2}\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\left\{\mathrm{Tr}\left(W^2\delta(\bar{\theta}) + \bar{W}^2\delta(\theta)\right) + \Phi^\dagger e^V \Phi\right. \\ &+ \left.\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi^i\Phi^j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi^i\Phi^j\Phi^k\right)\delta(\bar{\theta}) + \mathrm{h.c.}\right\},\end{aligned} \tag{2.57}$$

onde utilizamos as seguintes convenções:

$$\mathrm{d}^2\theta = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}\mathrm{d}\theta^\alpha\mathrm{d}\theta^\beta, \tag{2.58}$$

$$\mathrm{d}^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\mathrm{d}, \tag{2.59}$$

$$\mathrm{d}^4\theta = \mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\bar{\theta}, \tag{2.60}$$

$$\int \theta^\alpha \mathrm{d}\theta^\beta = \varepsilon^{\beta\alpha}. \tag{2.61}$$

2.7 Quantização de Supercampos

A quantização dos supercampos por meio da integral de caminhos segue esquematicamente os métodos empregados na Teoria Quântica de Campos. Sejam V e J super campos vetoriais, e Φ e j dois supercampos quirais, definimos a amplitude de vácuo-para-vácuo da seguinte forma:

$$Z[J,j] = N\int \mathrm{D}V\mathrm{D}\Phi\mathrm{D}\bar{\Phi}\exp\left(i\int d^4x d^4\theta(\mathcal{L} + VJ) + \int d^4x d^2\theta\Phi j + \int d^4x d^2\bar{\theta}\Phi^\dagger j^\dagger\right). \tag{2.62}$$

Os supercampos J e j fazem o papel de fontes externas, eles são do mesmo tipo do que os supercampos aos quais estão acoplados.

Definimos o funcional gerador de diagramas conectados:

$$iW[J,j] = \ln\left(Z[J,j]\right). \tag{2.63}$$

As funções de Green conectadas podem ser calculadas por meio das derivadas funcionais:

$$i\frac{\delta^m W}{\delta J(z^1)...\delta J(z^n)\delta j(z^{n+1})...\delta j(z^m)} = i^m G(1, ..., n; n+1, ..., m), \tag{2.64}$$

onde definimos a derivada funcional de supercampos por meio da função-delta do super-espaço:

$$\frac{\delta F(x,\theta)}{\delta F(x',\theta')} \equiv \delta(x-x')\delta^4(\theta-\theta') \equiv \delta(z-z') = \delta(x-x')(\theta-\theta')^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}')^2. \tag{2.65}$$

Se os supercampos forem quirais, modificamos a definição para preservar a quiralidade:

$$\frac{\delta\Phi(x,\theta)}{\delta\Phi(x',\theta')} \equiv -\frac{\bar{D}^2}{4}\delta(x-x')\delta^4(\theta-\theta'). \tag{2.66}$$

2.7.1 Supercampo Quiral Livre

Por supercampo quiral livre queremos dizer que empregamos a seguinte lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \Phi^\dagger\Phi|_{\theta^2\bar{\theta}^2} + m\Phi^2|_{\theta^2} + \text{h.c.}. \tag{2.67}$$

Portanto, a amplitude de vácuo-para-vácuo é:

$$Z_0[j] = \int \mathrm{D}\Phi\mathrm{D}\Phi^\dagger \exp\left[i\left(\int d^4xd^4\theta\Phi^\dagger\Phi + \int d^4xd^2\theta(j\Phi + m\Phi^2) + \text{h.c.}\right)\right]. \tag{2.68}$$

Podemos reescrever essa expressão como (WEST, 1986):

$$Z_0 = \int \mathrm{D}\Phi\mathrm{D}\Phi^\dagger \exp\left[i\int d^4xd^4\theta\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Phi & \Phi^\dagger\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{m}{4}\frac{D^2}{\Box} & 1 \\ 1 & -\frac{m}{4}\frac{\bar{D}^2}{\Box}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi \\ \Phi^\dagger\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\Phi & \Phi^\dagger\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{D^2}{4\Box}j \\ \frac{\bar{D}^2}{4\Box}j^\dagger\end{bmatrix}\ \right]. \tag{2.69}$$

Essa é uma integral gaussiana, realizando a integração em $\mathrm{D}\Phi\mathrm{D}\Phi^\dagger$, obtemos:

$$Z_0 = \exp\left[-i\int d^4xd^4\theta\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{D^2}{4\Box}j & \frac{\bar{D}}{4\Box}j^\dagger\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{m\bar{D}^2}{4(\Box-m^2)} & 1+\frac{m^2\bar{D}^2D^2}{16\Box(\Box-m^2)} \\ 1+\frac{m^2D^2\bar{D}^2}{16\Box(\Box-m^2)} & \frac{mD^2}{4(\Box-m^2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{D^2}{4\Box}j \\ \frac{\bar{D}^2}{4\Box}j^\dagger\end{bmatrix}\right], \tag{2.70}$$

$$Z_0 = \exp\left\{-i\int d^4xd^4\theta\left[j\frac{1}{\Box-m^2}j^\dagger + \frac{1}{2}\left(j\frac{mD^2}{\Box(\Box-m^2)}j + j^\dagger\frac{m\bar{D}^2}{\Box(\Box-m^2)}j^\dagger\right)\right]\right\}, \tag{2.71}$$

$$W_0 = -\int d^4xd^4\theta\left[j\frac{1}{\Box-m^2}j^\dagger + \frac{1}{2}\left(j\frac{mD^2}{\Box(\Box-m^2)}j + j^\dagger\frac{m\bar{D}^2}{\Box(\Box-m^2)}j^\dagger\right)\right]. \tag{2.72}$$

Com a expressão para W_0 em mãos, calculamos as funções de Green conectadas. Repare que apenas as funções de 2 pontos sobrevivem:

$$\begin{aligned}\langle\Phi(z^1)\Phi^\dagger(z^2)\rangle &= \frac{i}{16}\frac{\bar{D}_1^2 D_1^2\delta(z^1-z^2)}{\Box - m^2} \\ &= i\exp\left[i\left(\theta_1\sigma^\nu\bar{\theta}_1+\theta_2\sigma^\nu\bar{\theta}_2-2\theta_1\sigma^\nu\bar{\theta}_2\right)\partial_{1\nu}\right]\Delta_F(x^1-x^2),\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}\langle\Phi(z^1)\Phi(z^2)\rangle &= \frac{i}{4}\frac{m\bar{D}_1^2\delta(z^1-z^2)}{\Box - m^2} \\ &= -im\delta(\theta_1-\theta_2)\exp\left[i\left(\theta_1\sigma^\nu\bar{\theta}_1-\theta_2\sigma^\nu\bar{\theta}_2\right)\partial_{1\nu}\right]\Delta_F(x^1-x^2).\end{aligned} \tag{2.74}$$

2.7.2 Super Yang-Mills

Vamos quantizar a ação dada por:

$$S_{YM} = \frac{1}{64g^2}\mathrm{Tr}\int d^4xd^2\theta W^2, \tag{2.75}$$

$$= \frac{1}{16}\mathrm{Tr}\int d^4xd^4\theta[VD^\alpha\bar{D}^2D_\alpha V] + O(V^3), \tag{2.76}$$

onde da primeira para a segunda linha fizemos a mudança $V \to gV$ (WEST, 1986).

Adicionamos o termo que fixa o calibre:

$$S_{GF} = -\frac{1}{16\alpha}\mathrm{Tr}\int d^4xd^4\theta D^2V\bar{D}^2V. \tag{2.77}$$

Introduzindo os seguintes projetores:

$$P_+ \equiv \frac{\bar{D}^2D^2}{16\Box}; \tag{2.78}$$

$$P_- \equiv \frac{D^2\bar{D}^2}{16\Box}; \tag{2.79}$$

$$P_0 \equiv P_+ + P_-; \tag{2.80}$$

$$P_{1/2} \equiv -\frac{D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha}{8\Box} = -\frac{\bar{D}^{\dot{\alpha}}D^2\bar{D}_{\dot{\alpha}}}{8\Box}. \tag{2.81}$$

Vemos que podemos escrever a parte quadrática da soma das duas ações como:

$$S_{YM}+S_{GF} = \mathrm{Tr}\int d^4xd^4\theta\left[-\frac{1}{2}V\left(P_{1/2}+\frac{P_0}{\alpha}\right)\Box V\right]. \tag{2.82}$$

Com efeito, a amplitude de vácuo-para-vácuo é:

$$Z_0[J] = N_0\int \mathrm{D}V\exp\left\{i\mathrm{Tr}\int d^4xd^4\theta\left[-\frac{1}{2}V\left(P_{1/2}+\frac{P_0}{\alpha}\right)\Box V\right]+VJ\right\}, \tag{2.83}$$

$$Z_0[J] = \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4\theta J\left(P_{1/2}+\alpha P_0\right)\Box^{-1}J\right]. \tag{2.84}$$

O que nos permite calcular a função de dois pontos conectada:

$$\begin{aligned}G(z^1,z^2) &= -i\left(P_{1/2}+\alpha P_0\right)\Box^{-1}\delta(z^1-z^2), \\ &= -\frac{i}{8\Box^2}\left[\frac{\alpha}{2}\left\{D_1^2,\bar{D}_1^2\right\}-D_1^\beta\bar{D}_1^2D_{1\beta}\right]\delta(z^1-z^2).\end{aligned} \tag{2.85}$$

Note que os projetores satisfazem $P_0 + P_{1/2} = 1$. Logo, no calibre de Fermi-Feynman onde $\alpha = 1$, acabamos com uma expressão simples:

$$G(z^1, z^2) = -i\Box^{-1}\delta(z^1 - z^2). \tag{2.86}$$

Como na Teoria Quântica de Campos, ainda precisamos adicionar os campos fantasmas de Faddev-Popov, $c, c', c^\dagger, c'^\dagger$. Vamos apenas enunciar o resultado (GATES et al., 1983):

$$S_{FP} = \mathrm{Tr}\int d^4x d^4\theta (c' + c'^\dagger)\left\{-\frac{1}{2}L_V\left[c + c^\dagger + \coth\left(\frac{1}{2}L_V\right)(c - c^\dagger)\right]\right\}. \tag{2.87}$$

Finalmente, obtemos a amplitude completa (GATES et al., 1983)(WEST, 1986):

$$Z[J] = \int \mathrm{D}V\mathrm{D}c\mathrm{D}c^\dagger\mathrm{D}c'\mathrm{D}c'^\dagger \exp\left\{iS_{YM} + iS_{FP} + i\int d^4x d^4\theta\left[JV - \frac{1}{2.16\alpha}V\left(D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2D^2\right)V\right]\right\}. \tag{2.88}$$

3 Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$

3.1 Álgebra Super-Conforme e Geradores da Simetria-R

Álgebra super-conforme é a álgebra formada quando consideramos supersimetria e simetria conforme simultaneamente. Vamos considerar o caso do espaço quadridimensional com $\mathcal{N}$ supercargas. A álgebra superconforme, nesse caso, é denotada por $\mathfrak{su}(2,2|\mathcal{N})$.

Em um espaço quadridimensional, o grupo conforme é o $SO(4,2) \sim SU(2,2)$ (BLUMENHAGEN; PLAUSCHINN, 2009)(D'HOKER; FREEDMAN, 2002). Ele é constituído pela grupo de Poincaré, pelas transformações de dilatação e pelas transformações conformes especiais. Denotamos os geradores de sua álgebra por: $L_{\mu\nu}$ para o grupo de Lorentz, P_μ para translações, D para dilatações e K_μ para transformações conformes especiais.

O comutador entre D e Q^a_α é proporcional a Q^a_α, porém o comutador entre Q^a_α e K_μ nos dá um novo gerador fermiônico que chamaremos de $\bar{S}^a_\alpha$. Esse gerador também está sujeito à simetria R.

A álgebra super-conforme não possui cargas centrais, o que pode ser mostrado através da identidade de Jacobi entre os Qs e os $\bar{S}$s e seus hermitianos conjugados. Por não possuir cargas centrais, a simetria R é o grupo $U(\mathcal{N})$. O grupo $U(\mathcal{N})$ pode ser decomposto em $U(1) \otimes SU(\mathcal{N})$, chamaremos de T o gerador do $U(1)$ e T^i os geradores do grupo $SU(\mathcal{N})$.

Vamos elencar as relações de comutação de $\mathfrak{su}(2,2|\mathcal{N})$(AMMON; ERDMENGER, 2015)(GATES et al., 1983)(WEST, 1986). As relações que não expusermos podem ser obtidas por meio de conjugação hermitiana.

Primeiro as relações da álgebra do grupo conforme:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}); \tag{3.1}$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu); \tag{3.2}$$

$$[J_{\mu\nu}, K_\rho] = i(\eta_{\mu\rho}K_\nu - \eta_{\nu\rho}K_\mu); \tag{3.3}$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}); \tag{3.4}$$

$$[D, P_\mu] = iP_\mu; \tag{3.5}$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu; \tag{3.6}$$

$$[J_{\mu\nu}, D] = [P_\mu, P_\nu] = [K_\mu, K_\nu] = 0. \tag{3.7}$$

Agora as relações envolvendo os geradores fermiônicos da supersimetria e os geradores das transformações conformes são:

$$[J_{\mu\nu}, Q^a_\alpha] = -(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q^a_\beta; \tag{3.8}$$
$$[Q^a_\alpha, K^\mu] = i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{S}^{a\dot{\alpha}}; \tag{3.9}$$
$$\left[\bar{S}^{a\dot{\alpha}}, P^\mu\right] = i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\gamma} Q^a_\gamma; \tag{3.10}$$
$$[P_\mu, Q^a_\alpha] = \left[K_\mu, \bar{S}^{a\dot{\alpha}}\right] = 0; \tag{3.11}$$
$$[D, Q^a_\alpha] = \frac{i}{2} Q^a_\alpha; \tag{3.12}$$
$$\left[\bar{S}^{a\dot{\alpha}}, D\right] = \frac{i}{2}\bar{S}^{a\dot{\alpha}}; \tag{3.13}$$
$$\left\{Q^a_\alpha, \bar{Q}_{b\dot{\beta}}\right\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\delta^a_b P_\mu; \tag{3.14}$$
$$\left\{S_{a\alpha}, \bar{S}^b_\beta\right\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\delta^a_b K_\mu; \tag{3.15}$$
$$\left\{Q^a_\alpha, Q^b_\beta\right\} = \{S_{a\alpha}, S_{b\beta}\} = \left\{Q^a_\alpha, \bar{S}^b_\beta\right\} = 0; \tag{3.16}$$
$$\{Q^a_\alpha, S_{b\beta}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}\delta^a_b D - i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\gamma \varepsilon_{\gamma\beta} J_{\mu\nu}\delta^a_b - 4i\varepsilon_{\alpha\beta}(\delta^a_b T + B^{ia}_b T^i). \tag{3.17}$$

O termo B^{ia}_b na equação (3.17) é definido por meio do comutador entre os geradores da supersimetria e os geradores da simetria R. Todos os geradores do grupo conforme comutam com os geradores T e T^i. Por outro lado, as supercargas Q e $\bar{S}$ se transformam na mesma representação $\mathcal{N}$-dimensional do $SU(\mathcal{N})$, enquanto $\bar{Q}$ e S se transformam na representação conjugada. Expomos as relações de comutação envolvendo os geradores da simetria R:

$$\left[T^i, T\right] = 0; \tag{3.18}$$
$$\left[T^i, T^j\right] = i f^{ij}_k T^k; \tag{3.19}$$
$$\left[Q^a_\alpha, T^i\right] = B^{ia}_b Q^b_\alpha; \tag{3.20}$$
$$\left[\bar{S}^a_{\dot{\alpha}}, T^i\right] = B^{ia}_b \bar{S}^b_{\dot{\alpha}}; \tag{3.21}$$
$$[Q^a_\alpha, T] = \frac{4-\mathcal{N}}{4\mathcal{N}} Q^a_\alpha; \tag{3.22}$$
$$\left[\bar{S}^a_{\dot{\alpha}}, T\right] = \frac{4-\mathcal{N}}{4\mathcal{N}} \bar{S}^a_{\dot{\alpha}}. \tag{3.23}$$

3.2 Super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$

Queremos considerar uma teoria quadridimensional com o máximo possível de supersimetria, porém que não contenha campos com spin maior do que 1. Pela discussão sobre representações da álgebra de supersimetria, vemos que a teoria massiva que satisfaz essas condições possui $\mathcal{N} = 2$. Por outro lado, no caso sem massa, temos um multipleto que satisfaz essa condição com $\mathcal{N} = 4$. Qualquer outro multipleto com $\mathcal{N} > 4$ envolverá partículas com spin >1. O multipleto sem massa com $\mathcal{N} = 4$ é formado por 6 campos escalares, 4 espinores e 1 campo de calibre, tenha em mente que essa é uma formulação *on-shell*. A formulação precisa da teoria vai depender da escolha do grupo de calibre, haverá um multipleto para cada gerador do grupo.(WEINBERG, 2005)(WEST, 1986)(AMMON; ERDMENGER, 2015)

Por ser uma teoria sem massa, também não há cargas centrais, o que implica que a simetria-R seja dada pelo $U(4)$. Porém, no caso $\mathcal{N} = 4$, o fator $U(1)$ de $U(4) = U(1) \otimes SU(4)$ comuta com as supercargas. Portanto, a simetria-R é o grupo $SU(4)$ ao invés do $U(4)$.

Usamos a seguinte notação para os campos: A_μ é o campo vetorial; λ^a, com $a = 1, ..., 4$, são os campos de spin-1/2; e ϕ^i, com $i = 1, ..., 6$, são os campos escalares. Sob $SU(4)$, temos que A_μ é um singleto, λ^a se transforma na representação **4** e ϕ^i na representação **6** anti-simétrica de 2-rank.

3.2.1 Lagrangeana

A Lagrangeana da teoria é dada por(BEISERT, 2004):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\Bigg(&\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_a \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda_a - \sum_i \mathcal{D}_\mu \phi^i \mathcal{D}^\mu \phi^i \\ &- \frac{ig}{2}\sum_{a,b,i}\left(\varepsilon^{\alpha\beta}\bar{\sigma}^{iab}\lambda_{a\alpha}\left[\phi^i, \lambda_{b\beta}\right] + \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^i_{ab}\bar{\lambda}^a_{\dot{\alpha}}\left[\phi^i, \bar{\lambda}^b_{\dot{\beta}}\right]\right) - \frac{g^2}{4}\sum_{ij}\left[\phi^i, \phi^j\right]^2\Bigg),\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde: g é uma constante adimensional; $\mathcal{D}_\mu$ é a derivada covariante da teoria de calibre com os campos se transformando na representação adjunta, ou seja, $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig\left[A_\mu, \right]$; e σ^i são matrizes de Pauli para seis dimensões, elas são coeficientes de Clebsh-Gordan que acoplam duas representações **4** com uma representação **6** de $\mathfrak{su}(4)$.

Podemos calcular as seguintes equações de movimento para essa lagraneana (BEISERT, 2004):

$$\mathcal{D}_\nu F^{\mu\nu} = ig[\phi_i, \mathcal{D}^\mu \phi^i] - ig\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\left\{\bar{\lambda}^a_{\dot{\alpha}}, \lambda_{\beta a}\right\}, \tag{3.25}$$

$$\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}^\nu \phi^i = -g^2\left[\phi_j, [\phi^j, \phi^i]\right] + \frac{ig}{2}\left(\sigma^{iab}\varepsilon^{\alpha\beta}\left\{\lambda_{\alpha a}, \lambda_{\beta b}\right\} + \sigma^m_{ab}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left\{\bar{\lambda}^a_{\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}^b_{\dot{\beta}}\right\}\right), \tag{3.26}$$

$$\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\beta}\mathcal{D}_\nu \lambda_{\beta a} = ig\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^i_{ab}[\phi_i, \bar{\lambda}^b_{\dot{\beta}}], \tag{3.27}$$

$$\bar{\sigma}^{\alpha\dot{\beta}}\mathcal{D}_\nu \bar{\lambda}^a_{\dot{\beta}} = ig\varepsilon^{\alpha\beta}\bar{\sigma}^{iab}\eta_{ij}[\phi^j, \lambda_{\beta b}]. \tag{3.28}$$

As transformações de supersimetria para as quais a teoria é invariante são(BEISERT, 2004):

$$\delta_\xi \phi^i = \xi^\alpha_a \bar{\sigma}^{iab} \lambda_{\alpha b}, \tag{3.29}$$

$$\delta_\xi A_\mu = ig \xi^\alpha_a \varepsilon_{\alpha\beta} \bar{\sigma}^{\mu\beta\dot{\gamma}} \bar{\lambda}^a_{\dot{\gamma}}, \tag{3.30}$$

$$\delta_\xi \lambda_{\alpha a} = -\frac{1}{2} \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \sigma^\nu_{\dot{\gamma}\delta} \xi^\delta_a F_{\mu\nu} + \frac{ig}{2} \sigma^i_{ab} \bar{\sigma}^{jbc} \varepsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta_c [\phi_i, \phi^j], \tag{3.31}$$

$$\delta_\xi \bar{\lambda}^a_{\dot{\alpha}} = \bar{\sigma}^{jab} \sigma^\mu_{\dot{\alpha}\beta} \xi^\beta_b \mathcal{D}_\mu \phi^j. \tag{3.32}$$

Lembre-se que essa é uma formulação *on-shell* da teoria, isso significa que para a álgebra dessas transformações de supersimetria fechar, precisamos empregar as equações de movimento.

A lagrangeana (3.24) em termos dos campos componentes pode ser escrita em termos de supercampos da seguinte forma(GATES et al., 1983):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \mathrm{Tr} \left(\int \mathrm{d}^4\theta e^{-V} \Phi^\dagger_i e^V \Phi^i + \int \mathrm{d}^2\theta W^2 + \frac{i}{3!} \left\{ \int \mathrm{d}^2\theta C_{ijk} \Phi^i \left[\Phi^j, \Phi^k \right] + \text{h.c.} \right\} \right). \tag{3.33}$$

Os campos possuem dimensões de massa convencionais:

$$[A_\mu] = [\phi^i] = 1, \tag{3.34}$$

$$[\lambda_a] = \frac{3}{2}. \tag{3.35}$$

Disso resulta que todos os termos da lagrangeana possuem dimensão igual a 4, portanto, a teoria clássica é invariante sob transformações de escala. Na verdade, pode ser mostrado que a invariância por escala se estende ao caso quântico, pois a função beta da teoria é nula para todas as ordens da quantização perturbativa. A simetria por transformações de escala, juntamente com a simetria de Poincaré, implica que a teoria possui simetria conforme dada pelo grupo $SO(4,2) \sim SU(2,2)$. A mistura da simetria conforme com a supersimetria gera a simetria superconforme dada pelo grupo $SU(2,2|\mathcal{N})$, a álgebra desse grupo foi estudada na seção 'Álgebra Super-Conforme e Geradores da Simetria-R'.(D'HOKER; FREEDMAN, 2002)(GATES et al., 1983)(WEINBERG, 2005)(AMMON; ERDMENGER, 2015)

3.2.2 Redução Dimensional

A teoria SYM $\mathcal{N} = 4$ quadridimensional pode ser obtida de uma teoria SYM com $\mathcal{N} = 1$ em um espaço com 10 dimensões (9+1)(D'HOKER; FREEDMAN, 2002)(BRINK; SCHWARZ; SCHERK, 1977)(AMMON; ERDMENGER, 2015). A ação da teoria 10-dimensional é:

$$\mathcal{S} = \mathrm{Tr} \int \mathrm{d}^{10}x \left(-\frac{1}{2} F_{mn} F^{mn} + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \Gamma^m \mathcal{D}_m \Psi \right), \tag{3.36}$$

onde Γ^m são matrizes de Dirac em 10 dimensões e Ψ é um espinor de Weyl-Majorana com 16 componentes reais que se transforma na representação adjunta do grupo de calibre, para satisfazer a condição de Majorana e ser um espinor de Weyl, ele é escrito na seguinte forma:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^4 \\ \bar{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_4 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

As transformações de supersimetria são:

$$\delta_\alpha A_m = i\bar{\alpha}\Gamma_m \Psi, \tag{3.38}$$

$$\delta_\alpha \Psi = \frac{1}{2} F_{mn} \left[\Gamma^m, \Gamma^n\right] \alpha, \tag{3.39}$$

onde α também é um espinor de Weyl-Majorana.

Para realizar a redução dimensional, separamos as coordenadas em dois grupos: x^μ e x^i, onde $\mu = 0, ..., 3$ e $i = 4, ..., 9$. Então impomos que todos os campos da teoria dependam apenas das coordenadas x^μ. Decompomos o campo vetorial em $A_m = (A_\mu, \phi^i)$, formando um campo de calibre quadridimensional e seis campos escalares. Então, utilizando uma decomposição conveniente para as matrizes Γ^m, recuperamos a teoria SYM $\mathcal{N} = 4$ no espaço quadridimensional.

Conclusão

Na primeira parte desse trabalho, estudamos a teoria geral da supersimetria. Vimos que a álgebra da supersimetria é uma álgebra de Lie graduada, que os geradores das transformações supersimétricas possuem natureza fermiônica e que existe uma simetria interna chamada simetria-R. Depois estudamos as representações de partículas da supersimetria nos casos sem massa e massivo com e sem cargas centrais, notamos que os casos massivos possuem, em geral, espaços da representação maiores, porém o caso com cargas centrais sofre um encurtamento em relação ao caso sem cargas centrais.

Introduzimos o conceito de super-espaço com uma representação dos geradores da supersimetria em termos das coordenadas do super-espaço. Utilizando o super-espaço, definimos os supercampos e dois tipos de supercampos importantes: os quirais e os vetoriais. Com os supercampos, construímos a teoria supersimétrica invariante sob transformações de calibre. Também trabalhamos a quantização de supercampos através da integral de caminhos, em particular, desenvolvemos a quantização de um supercampo quiral e da teoria Super Yang-Mills.

Na segunda parte, tratamos sobre a álgebra super-conforme e sobre a teoria Super Yang-Mills com 4 supercargas. A álgebra super-conforme é interessante porque o comutador entre os geradores de supersimetria e os geradores de transformações conformes especiais é um novo gerador fermiônico. Sobre a teoria SYM $\mathcal{N} = 4$, mostramos a lagrangeana da teoria, suas equações de movimento e transformações supersimétricas. Dentre suas propriedades, destaca-se o fato da teoria possuir invariância conforme mesmo após a quantização. Também vimos que ela pode ser obtida por redução dimensional de uma teoria SYM no espaço de 10 dimensões.

Como indicado na 'Introdução', esse trabalho é motivado pela Correspondência AdS/CFT. Supersimetria e a teoria SYM $\mathcal{N} = 4$ fazem parte da construção da correspondência assim como o espaço AdS, a simetria conforme e outros assuntos estudados previamente por nós em outros trabalhos. Agora, o próximo passo é aplicar todos esses trabalhos no estudo da correspondência propriamente dita.

Referências

AMMON, M.; ERDMENGER, J. *Gauge/Gravity Duality*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 9, 11, 15, 17, 23, 25 e 26.

BEISERT, N. The Dilatation operator of N=4 super Yang-Mills theory and integrability. *Phys. Rept.*, v. 405, p. 1–202, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

BLUMENHAGEN, R.; PLAUSCHINN, E. *Introduction to conformal field theory: with applications to String theory*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 779. Citado na página 23.

BRINK, L.; SCHWARZ, J. H.; SCHERK, J. Supersymmetric Yang-Mills Theories. *Nucl. Phys. B*, v. 121, p. 77–92, 1977. Citado na página 26.

D'HOKER, E.; FREEDMAN, D. Z. Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence. In: *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 2001): Strings, Branes and EXTRA Dimensions*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 3–158. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 26.

GATES, S. J. et al. *Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*. [S.l.: s.n.], 1983. v. 58. (Frontiers in Physics, v. 58). ISBN 978-0-8053-3161-5. Citado 5 vezes nas páginas 11, 18, 22, 23 e 26.

MALDACENA, J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, v. 2, p. 231–252, 1998. Citado na página 7.

RYDER, L. *Quantum Field Theory*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. Citado na página 10.

WEINBERG, S. *The Quantum Theorie of Fields. Vol. 3: Supersymmetry*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

WESS, J.; BAGGER, J. *Supersymmetry and Supergravity*. 2nd. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 1992. (Princeton Series in Physics). Citado 7 vezes nas páginas 10, 13, 14, 15, 16, 17 e 18.

WEST, P. *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*. 1st. ed. [S.l.]: World Scientific Publishing, 1986. Citado 9 vezes nas páginas 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 23 e 25.

Apêndices

APÊNDICE A – Números de Grassmann

Números de Grassmann, θ_i, são objetos que anti-comutam:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0, \tag{A.1}$$

$$\theta_i^2 = 0. \tag{A.2}$$

Podemos definir funções dos números de Grassmann em termos de sua série de potências, pois a série será finita. Por exemplo:

$$e^{\theta} = 1 + \theta; \tag{A.3}$$

$$f(\theta) = a + b\theta; \tag{A.4}$$

$$g(\theta_1, \theta_2) = a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_1\theta_2. \tag{A.5}$$

Definimos diferenciação com respeito aos números de Grassmann segundo as regras:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\theta_i = \delta_{ij}; \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\theta_i\theta_k) = \delta_{ij}\theta_k - \delta_{ik}\theta_j. \tag{A.7}$$

Definida dessa forma, a derivação é chamada 'à esquerda'. Poderíamos definir diferenciação 'à direita' invertendo os sinais dos termos do lado direito da equação (A.7). Pode ser mostrado que esse operador derivada satisfaz as relações:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right\} = 0, \tag{A.8}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \theta_j\right\} = \delta_{ij}. \tag{A.9}$$

Já a integração é definida pelas propriedades:

$$\{\theta_i, \mathrm{d}\theta_j\} = 0; \tag{A.10}$$

$$\{\mathrm{d}\theta_i, \mathrm{d}\theta_j\} = 0; \tag{A.11}$$

$$\int \mathrm{d}\theta_i = 0; \tag{A.12}$$

$$\int \theta \mathrm{d}\theta = 1. \tag{A.13}$$

Considere a função $f(\theta)$ dada por (A.4), aplicando as regras de integração, obtemos:

$$\int f(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = b, \tag{A.14}$$

$$\int f(\theta)\theta\mathrm{d}\theta = a. \tag{A.15}$$

Ou seja, com números de Grassmann, integração e diferenciação coincidem. Agora, definindo a função $\delta(\theta)$ através de:

$$\int f(\theta)\delta(\theta-\theta')\mathrm{d}\theta = f(\theta'), \tag{A.16}$$

vemos que podemos escrever $\delta(\theta-\theta') = \theta-\theta'$. Esses resultados generalizam para o caso de n variáveis de Grassmann.

Por fim, definimos números de Grassmann complexos especificando a conjugação pelas propriedades:

$$(\theta_i^*)^* = \theta_i, \tag{A.17}$$

$$(\theta_i\theta_j)^* = \theta_j^*\theta_i^*. \tag{A.18}$$

Os θ_i^* definem um novo conjunto de variáveis de Grassmann, de modo que o que foi dito sobre θ_i é facilmente adaptado para os θ_i^*.

APÊNDICE B – Notação de Weyl para 2-Espinores

Seja M uma matriz pertencente ao grupo $SL(2,\mathbb{C})$ e M^* seu complexo conjugado. M e M^* representam a ação do grupo de Lorentz sobre 2-espinores, a primeira forma a representação $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e a segunda a representação $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Definimos a notação de índices com ponto e sem ponto da seguinte maneira: os espinores com índice sem ponto se transformam na representação $\left(\frac{1}{2},0\right)$, enquanto os com ponto se transformam na representação $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Em suma:

$$\psi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta \psi_\beta, \qquad \bar{\psi}'_{\dot{\alpha}} = M^*{}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}}, \tag{B.1}$$

$$\psi'^\alpha = M^{-1}{}_\beta{}^\alpha \psi^\beta, \qquad \bar{\psi}'^{\dot{\alpha}} = (M^*)^{-1}{}_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} \psi^{\dot{\beta}}. \tag{B.2}$$

Assumimos que os espinores anti-comutam e utilizamos as seguintes convenções de soma dos espinores:

$$\psi\chi = \psi^\alpha \chi_\alpha, \tag{B.3}$$

$$\bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}. \tag{B.4}$$

Introduzimos as matrizes sigma:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.5}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.6}$$

Essas matrizes constituem uma base para matrizes hermitianas 2×2. Seja $P = \sigma^\mu P_\mu$ uma matriz hermitiana, temos que os coeficientes P_μ são números reais. Sob a ação da matriz M, P se transforma do seguinte modo:

$$P' = MPM^\dagger, \tag{B.7}$$

portanto, as matrizes σ^μ devem ter suas componentes escritas como $\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}$ nessa notação.

Para relacionarmos os espinores com índice em cima com os espinores com o índice em baixo através de uma matriz $g_{\alpha\beta}$ $\left(\psi_\alpha = g_{\alpha\beta}\psi^\beta\right)$, precisamos que essa matriz satisfaça a condição:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\lambda\rho} M^\lambda_\alpha M^\rho_\beta. \tag{B.8}$$

Como $M \in SL(2,\mathbb{C})$, temos que $\det(M) = 1$. Logo, a condição (B.8) é satisfeita pelo tensor anti-simétrico $\varepsilon_{\alpha\beta}$ com componentes não-nulas $\varepsilon_{21} = 1$ e $\varepsilon_{12} = -1$. Com essa convenção, temos também que: $\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\lambda\alpha} = \delta^{\beta}_{\lambda}$ e $\varepsilon^{12} = 1, \varepsilon^{21} = -1$. Usamos convenções análogas para os tensores com índices com ponto.

Através desses tensores, definimos as matrizes $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}_{\beta\dot{\beta}}. \tag{B.9}$$

Dessa forma, os geradores do grupo de Lorentz na representação dos espinores são dados por:

$$\sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{4}\left(\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\beta} - \sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\right) \tag{B.10}$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{4}\left(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\beta}} - \bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\right) \tag{B.11}$$

Por fim, relacionamos os 2-espinores com os 4-espinores através das matrizes e dos espinores de Dirac:

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.12}$$

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{B.13}$$