

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA**

**ESTER COSTA NASCIMENTO**

**ESTIMANDO PARÂMETROS COSMOLÓGICOS  
COM SUPERNOVAS DO TIPO IA**

**BRASÍLIA**

**11 DE JULHO DE 2023**



**Ester Costa Nascimento**

**Estimando Parâmetros Cosmológicos com  
Supernovas do Tipo Ia**

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
ao Instituto de Física da Universidade de  
Brasília como parte dos requisitos necessários  
à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Mariana Penna Lima Vitenti

Coorientador: Simony Santos da Costa

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

11 de julho de 2023



# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a minha família. Em especial, aos meus avós, que nunca mediram esforços para proporcionar melhores condições de vida e, sobretudo, de educação para seus filhos. Não estaria aqui se não fossem vocês. Aos meus pais, Daniela e Kledson, por fazerem meu sonho, o de vocês e por nunca duvidarem de mim, mesmo quando eu o fizesse. Não estaria aqui se não fossem vocês. Agradeço as minhas irmãs, Melissa e Milena, pelos conselhos, pelo companheirismo e sinceridade. Vocês são meu porto seguro e não estaria aqui se não fossem vocês. Agradeço também ao meu sobrinho, Nicolas, por sempre me fazer lembrar da leveza da vida. Não estaria aqui se não fosse você.

Agradeço ao meu melhor amigo e namorado, Eduardo, pelo eterno companheirismo, pela paciência e pelo carinho que sempre me deu. Você foi essencial nessa caminhada e não estaria aqui se não fosse você. Agradeço também aos meus amigos de vida e da UnB. Em especial, agradeço aos meus amigos Uislei e João por esses quatro anos juntos. Obrigada por cada conversa, conselho, ajuda em exercício e explicação de teoria. Não estaria aqui se não fossem vocês.

Agradeço aos pesquisadores e professores da Universidade de Brasília e do Observatório Nacional. Em especial, a professora Mariana, por ter aceitado me orientar e a Dra. Simony, por ter me proporcionado a melhor primeira orientação científica possível. Vocês me inspiram a ser uma mulher na ciência! Aproveito para agradecer também aos professores Arsen, Bernardo, José Leonardo e Vanessa que, em algum momento e em alguma medida, contribuíram para o meu trabalho.

Por fim, mas talvez mais importante, agradeço a mim pela simples coragem de buscar o que sonho. Valeu a pena.



*“Somos feitos de cinza estelar. Nossa origem e nossa evolução têm sido ligadas a eventos cósmicos distantes. A exploração do cosmos é uma jornada de autodescobrimento.” — Carl Sagan*





# Resumo

Neste projeto, tivemos como objetivo restringir parâmetros cosmológicos, em específico, a constante de Hubble  $H_0$  e o parâmetro de desaceleração  $q_0$ , utilizando supernovas do tipo Ia. Para isso, utilizamos uma abordagem cosmográfica, ou seja, sem a necessidade de recorrer a um modelo cosmológico, possibilitando uma análise sem maiores pressupostos e mais geral. Os dados de supernovas utilizados fazem parte do *Supernova Cosmology Project*. Em específico, utilizamos os dados das compilações Union2 (2010) e Union2.1 (2011), que analisaram 557 e 580 supernovas do tipo Ia, respectivamente. Por meio da função estatística  $\chi^2$ , que possibilita a avaliação da concordância entre um modelo teórico e os dados observacionais, obtivemos os valores de melhor ajuste para os parâmetros como sendo  $H_0 = 68,8\text{km/s/Mpc}$  e  $q_0 = -0,20$ , para os dados do Union2, e  $H_0 = 68,7\text{km/s/Mpc}$  e  $q_0 = -0,17$ , para os dados do Union2.1. Os resultados obtidos se mostram em acordo com aqueles presentes na literatura, com algumas diferenças que podem ser atribuídas ao uso de uma amostra de dados diferente. Além dos valores de melhores ajustes, construímos ainda as regiões com os intervalos de confiança de 68%, 95% e 99%. Vale salientar que esse foi um trabalho de revisão, em que visamos reproduzir resultados já presentes na literatura.

**Palavras-chave:** cosmologia; constante de Hubble; parâmetro de desaceleração; distância de luminosidade; supernovas Ia; método de  $\chi^2$ .



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de um espaço isotrópico e inhomogêneo (1), de um espaço homogêneo e anisotrópico (2) e de um espaço homogêneo e isotrópico (3). Fonte: Autora. . . . .	21
Figura 2 – Radiação Cósmica de Fundo observada pelo Planck. Fonte: ESA — Planck. . . . .	22
Figura 3 – Representação bidimensional das três possíveis curvaturas para um universo homogêneo e isotrópico. Fonte: (RIBEIRO, 2023). . . . .	23
Figura 4 – Distância de diâmetro angular medida a partir da origem até uma régua padrão de comprimento $l$ com coordenadas $(r, \theta_1, \phi)$ e $(r, \theta_2, \phi)$ . Fonte: Autora. . . . .	30
Figura 5 – Imagem ilustrativa do processo evolutivo de uma supernovas do tipo Ia. Fonte: ESA/ATG medialab. . . . .	36
Figura 6 – Curvas de contorno no espaço de parâmetros $(h, q_0)$ para os dados de supernovas da compilação Union2. O ponto representa o melhor ajuste ( <i>best fit</i> — <i>bf</i> ) enquanto as três curvas representam os intervalos de confiança de 68%, 95% e 99%. . . . .	45
Figura 7 – Curvas de contorno no espaço de parâmetros $(h, q_0)$ para os dados de supernovas da compilação Union2.1. O ponto representa o melhor ajuste ( <i>best fit</i> — <i>bf</i> ) enquanto as três curvas representam os intervalos de confiança de 68%, 95% e 99% para os dados. . . . .	46
Figura 8 – Definição de parsec. Fonte: Autora. . . . .	53



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Esquema das grandezas não observáveis presentes na equação 2.9 e das grandezas observáveis as quais procuramos determinar. . . . .	25
Tabela 2 – Valores de $\Delta\chi_0^2$ para diferentes níveis de confiança para um sistema com dois parâmetros livres. . . . .	43
Tabela 3 – Comparação entre os valores de $H_0$ e $q_0$ de <i>best fit</i> encontrados neste estudo, utilizando os dados do Union2 e Union2.1 e os valores encontrados na literatura (PIATTELLA, 2018) para o intervalo de confiança de 95%. . . . .	47
Tabela 4 – Exemplos de distâncias da Terra em parsec. Fonte: (RYDEN, 2006). . .	54



# Lista de abreviaturas e siglas

ACDM	<i>Lambda - Cold Dark Matter</i>
CMB	<i>Cosmic Microwave Background</i>
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
FDP	Função Densidade de Probabilidade
IF	Instituto de Física
PC	Princípio Cosmológico
SI	Sistema Internacional de Unidades ( <i>Système international d'unités</i> )
UnB	Universidade de Brasília





# Lista de símbolos

$\lambda$	Comprimento de onda
$\kappa$	Constante de curvatura
$H_0$	Constante de Hubble
$G$	Constante gravitacional
$z$	Desvio para o vermelho ( <i>redshift</i> )
$a$	Fator de escala, $a(t_0) = 1$
$q_0$	Parâmetro de desaceleração
$H$	Parâmetro de Hubble
$R$	Raio de curvatura do universo
$t_e$	Tempo de emissão
$t_0$	Tempo de observação, tempo atual
$c$	Velocidade da luz no vácuo



# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	19
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	21
2.1	Princípio Cosmológico e Métrica FLRW . . . . .	21
2.2	Distância Própria . . . . .	24
2.3	Do Fator de Escala aos Parâmetros $H_0$ e $q_0$ , e o Redshift . . . . .	25
2.4	Da Distância Própria à Distância Luminosidade . . . . .	29
2.4.1	Distância Diâmetro Angular . . . . .	30
2.4.2	Distância Luminosidade . . . . .	32
2.4.2.1	O Sistema de Magnitudes . . . . .	33
2.5	Supernovas do Tipo Ia . . . . .	35
3	METODOLOGIA . . . . .	39
3.1	Conceitos e Ferramentas para Análise Estatística . . . . .	39
3.1.1	Minimizando a Função $\chi^2$ . . . . .	40
3.1.2	Regiões de Confiança . . . . .	42
3.2	Compilações Union2 e Union2.1 . . . . .	44
4	RESULTADOS E ANÁLISE . . . . .	45
5	CONCLUSÃO . . . . .	49
	REFERÊNCIAS . . . . .	51
	APÊNDICE A – UNIDADES ASTRONÔMICAS DE DISTÂNCIA . . . . .	53
	APÊNDICE B – CÓDIGO EM PYTHON . . . . .	55



# 1 Introdução

A cosmologia é o ramo da ciência que procura entender o passado, a evolução e o futuro do universo em largas escalas de espaço e tempo (RYDEN, 2006). A matemática é a linguagem utilizada para elaborar essa descrição e os modelos de universo matematicamente possíveis são ditos modelos cosmológicos. Cada modelo cosmológico é descrito a partir de uma dinâmica, que estabelece a conexão entre o espaço-tempo e as componentes do universo, i.e. o que o constitui. A metodologia científica é a responsável então por restringir esses inúmeros modelos de universo matematicamente possíveis e selecionar aqueles que mais se aproximam da realidade, ou seja, aqueles que melhor descrevem o *nosso* universo. Em especial, o modelo cosmológico mais corroborado pelas evidências observacionais é o chamado Modelo Cosmológico Padrão ou modelo  $\Lambda$ CDM (abreviação do inglês de *Lambda Cold Dark Matter*). Esse modelo utiliza a Relatividade Geral como teoria de gravitação e considera que o conteúdo material do universo é constituído por radiação, matéria bariônica, matéria escura fria e energia escura (essa última dada pela constante cosmológica).

Além da dinâmica, que define os modelos cosmológicos, podemos descrever e obter informações importantes sobre o universo a partir de uma abordagem cinemática, relacionada a evolução do espaço-tempo. Uma abordagem cinemática é particularmente interessante pois nos permite obter informações sobre o cosmos sem recorrermos a um modelo cosmológico específico que, em geral, requer pressupostos mais rigorosos, como uma teoria de gravitação.

O objetivo deste trabalho consiste então em usar uma abordagem cinemática para estimar parâmetros cosmológicos, a saber a constante de Hubble  $H_0$  e o parâmetro de desaceleração  $q_0$ , responsáveis por descrever a expansão do universo. Para isso, iniciaremos este estudo com uma breve introdução sobre conceito de métrica, que desempenha um papel fundamental em uma descrição cosmológica. Apresentaremos, assim, a métrica FLRW, bem como a motivação para usá-la. A partir da métrica estabelecida, introduziremos em seguida um importante conceito de distância para um universo não estático — a distância própria, e veremos como a constante de Hubble  $H_0$  e o parâmetro de desaceleração  $q_0$  surgem naturalmente a partir dessa definição. Mostraremos então como estes parâmetros cosmológicos podem ser restringidos usando supernovas do tipo Ia e, por fim, apresentaremos a análise de dados realizada, bem como os resultados obtidos.



## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Princípio Cosmológico e Métrica FLRW

A descrição cinemática do cosmos parte da importante hipótese de que o universo é isotrópico e homogêneo em grandes escalas ( $\sim 100 \text{ Mpc}$ )<sup>1</sup> (PIATTELLA, 2018). Tal hipótese é tão fundamental para a cosmologia atual que ganhou o nome de princípio cosmológico. Entendamos o que este princípio nos diz e quais suas implicações na descrição do universo.

Primeiramente, por isotropia entende-se que não existem direções privilegiadas no universo, ou seja, que ele possui uma simetria por rotação. Já por homogeneidade, entende-se que o universo é igual em todos os pontos, ou seja, que há uma simetria por translação (RYDEN, 2006). A figura 2.1 representa essas três situações: um espaço apenas isotrópico (1), um apenas homogêneo (2) e um com as duas características (3), assim como é esperado para o nosso universo.

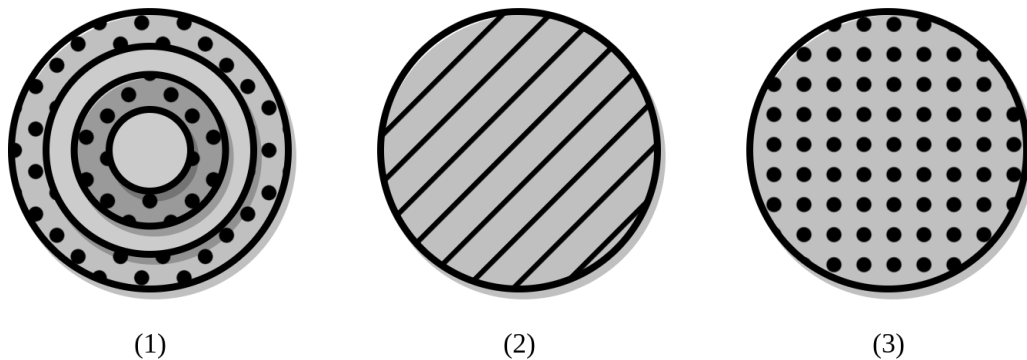


Figura 1 – Representação de um espaço isotrópico e inhomogêneo (1), de um espaço homogêneo e anisotrópico (2) e de um espaço homogêneo e isotrópico (3). Fonte: Autora.

Claramente, assumir o princípio cosmológico para pequenas distâncias é um total absurdo. É evidente que o universo é tanto anisotrópico quanto inhomogêneo em pequenas escalas. Considere, por exemplo, o sistema solar. Nele, o Sol e os planetas são muito mais densos do que o espaço ao seu redor (tornando o espaço inhomogêneo) e o sistema como um todo possui uma direção preferencial (o Sol) (tornando o espaço anisotrópico). Em escalas galáticas, o argumento se repete e é apenas na ordem de  $\sim 100 \text{ Mpc}$  que o universo aparenta ser homogêneo e isotrópico. De fato, apesar de inicialmente ser usado como um

<sup>1</sup> O apêndice A apresenta as definições das unidades de medidas de distância mais comumente usadas na astronomia.

argumento (no mínimo) audacioso para simplificação da descrição, atualmente existem fortes evidências que corroboram para a validade do princípio cosmológico. Dentre elas, a Radiação Cósmica de Fundo (do inglês, CMB) (figura 2) — uma radiação eletromagnética proveniente do desacoplamento entre a radiação e a matéria bariônica (que ocorreu  $\sim 380.000$  anos após o chamado *Big Bang*), que pode ser detectada uniformemente em todas as direções. A saber, as flutuações de temperatura do CMB são da ordem de  $\sim 10^{-5}$  K.

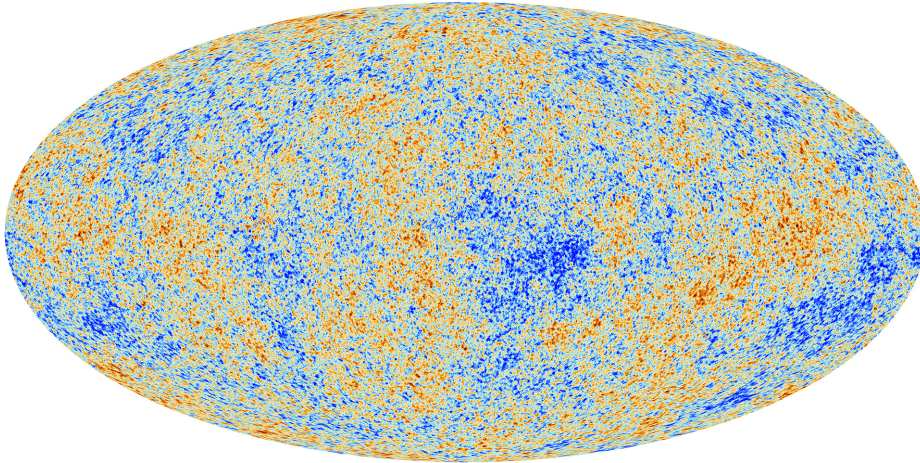


Figura 2 – Radiação Cósmica de Fundo observada pelo Planck. Fonte: ESA — Planck.

Assumir o princípio cosmológico é algo extremamente forte. Note que ao assumir que o universo é homogêneo e isotrópico, temos que todas as infinitas possibilidades de curvatura do espaço são reduzidas a apenas três (RYDEN, 2006): (1) um espaço uniformemente plano, (2) espaço com uma curvatura positiva (esférico) e uniforme ou (3) espaço com uma curvatura negativa (hiperbólico) e uniforme. Essas três possibilidades de curvatura são caracterizadas pelo chamado parâmetro de curvatura  $\kappa$  que assume o valor  $\kappa = 0$  para o espaço plano;  $\kappa = 1$  para o espaço esférico e;  $\kappa = -1$  para o espaço hiperbólico e estão representadas na figura 3.

Reduzidas as infinitas possibilidades de curvatura a apenas três, podemos agora modelar a geometria do nosso universo. Para isso, precisamos definir uma função que carregue informação sobre a geometria do universo com a qual possamos calcular a distância entre dois eventos no espaço-tempo. Tal função é dita métrica e a utilizada na nossa descrição é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Em coordenadas esféricas, a métrica FLRW é dada por:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa(r)^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.1)$$

Nessa expressão, temos que  $ds^2$  representa o elemento de intervalo do espaço-tempo,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo <sup>2</sup>,  $dt$  é a variação infinitesimal de tempo,  $r$  é a coordenada

<sup>2</sup> Por definição,  $c = 299.792.458$  m/s.



radial,  $\theta$  é a coordenada polar e  $\phi$  é a coordenada azimutal. Finalmente, temos que  $a(t)$  é o fator de escala, responsável pela expansão (ou contração) do espaço, normalizado de tal maneira que:

$$a(t_0) = 1 \quad (2.2)$$

sendo  $t_0$  a idade do universo hoje. Por fim, temos que  $S_\kappa(r)$  é o fator que depende da curvatura do espaço, sendo dado por:

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R \operatorname{sen}(r/R) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R \operatorname{senh}(r/R) & (\kappa = -1) \end{cases}, \quad (2.3)$$

onde  $R$  é o raio da curvatura para  $\kappa \neq 0$ .

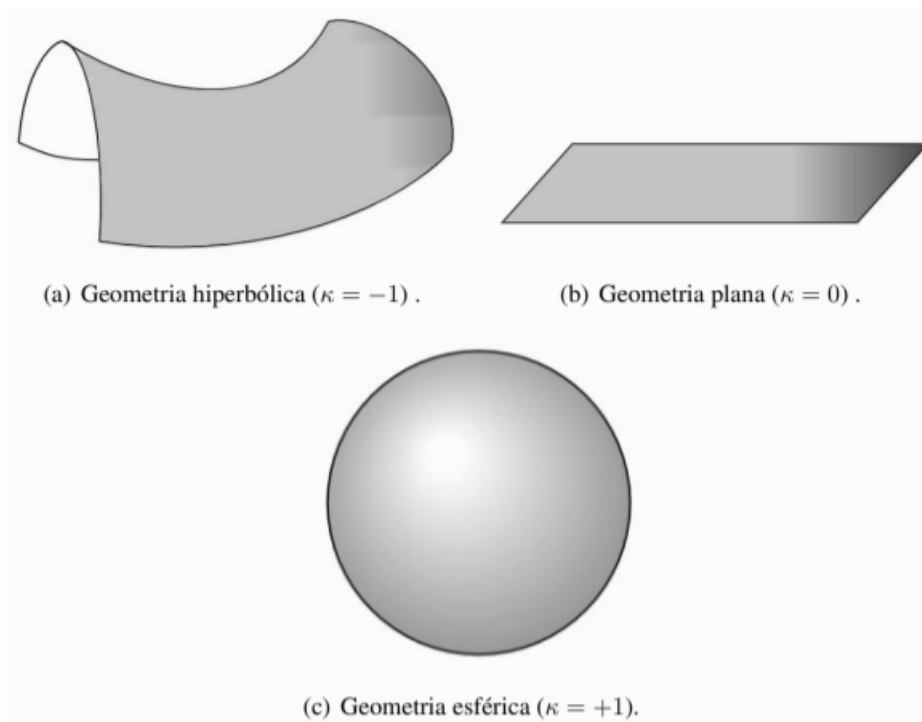


Figura 3 – Representação bidimensional das três possíveis curvaturas para um universo homogêneo e isotrópico. Fonte: (RIBEIRO, 2023).

Assim, a métrica FLRW (equação 2.1) define a distância entre dois eventos no espaço-tempo em um universo que obedece ao princípio cosmológico. Além disso, vemos que tal métrica permite também um universo dinâmico, que se expande (ou se contrai) ao longo do tempo.

## 2.2 Distância Própria

Em um universo regido pela métrica FLRW, a distância entre dois objetos<sup>3</sup>, em geral, varia com o tempo (por conta do fator de escala). Uma definição de distância que surge naturalmente, então, é aquela que calcula essa medida para um tempo  $t$  específico. Tal distância é chamada de distância própria ( $d_p$ ).

Matematicamente, se considerarmos um objeto localizado na origem do sistema e outro na posição de coordenada  $(r, \theta, \phi)$ , temos que para um tempo  $t$  e ângulos  $\theta$  e  $\phi$  fixos, a equação 2.1 se reduz a

$$ds = a(t)dr. \quad (2.4)$$

De modo que, para obter a distância própria  $d_p$ , integramos sobre a coordenada  $r$ :

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r dr = a(t)r. \quad (2.5)$$

Note agora que se considerarmos o tempo  $t$  fixo como sendo o tempo atual  $t_0$  e usando a normalização  $a(t_0) = 1$ , temos que a distância própria entre um dois objetos é dada então por:

$$d_p(t_0) = r, \quad (2.6)$$

ou seja, a distância própria no tempo atual é a própria coordenada radial  $r$ .

Por outro lado, sabemos que a luz emitida por um objeto no tempo  $t_e$  (tempo de emissão) é observada por nós no tempo  $t_0$ . Dado que a luz realiza uma geodésica nula, i.e.  $ds^2 = 0$ , e considerando  $\theta$  e  $\phi$  constantes, temos que a métrica FLRW (equação 2.1) se resume a

$$0 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 dr^2 \Rightarrow c dt = a(t) dr \Rightarrow c \frac{dt}{a(t)} = dr. \quad (2.7)$$

Integrando de  $t_e$  a  $t_0$ :

$$r = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.8)$$

Comparando com a equação 2.6, temos então que a distância própria em  $t_0$  também pode ser dada em termos da integral do fator de escala do tempo de emissão  $t_e$  ao tempo de observação  $t_0$ :

<sup>3</sup> Estamos nos referindo à variação da distância devido à própria métrica. Não estamos considerando as velocidades peculiares dos objetos.

$$d_p(t_0) = r = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.9)$$

A princípio, a equação 2.9 nos diz como podemos obter a distância própria até um objeto celeste qualquer. Entretanto, apesar de matematicamente válida, tal equação apresenta termos fisicamente inacessíveis, i.e. tanto o fator de escala quanto a distância própria não são grandezas diretamente observáveis. Explico. Primeiramente, não sabemos como a expansão (ou contração) do universo se deu (e se dará) em todos os instantes de tempo, ou seja, não sabemos a forma funcional do fator de escala de modo a realizar a integral em 2.9. Por consequência, a distância própria não pode ser calculada e tampouco pode ser observada diretamente (RYDEN, 2006).

Temos então a tarefa de reescrever a equação 2.9 a partir de quantidades que podemos obter diretamente através de observações astronômicas. Isso será feito a seguir em duas diferentes etapas: primeiramente, mostraremos como podemos obter de maneira aproximada o fator de escala (não observável) a partir de uma grandeza chamada redshift (facilmente observável) e dos parâmetros cosmológicos  $H_0$  e  $q_0$  (que definiremos na próxima seção). Em seguida, mostraremos como podemos obter uma aproximação para a distância própria (não observável) a partir de outra definição de distância cosmológica — a distância de luminosidade (observável). A tabela 1 apresenta, de maneira esquemática, as grandezas não observáveis, presentes na equação 2.9, e as grandezas observáveis de interesse.

Grandezas Não Observáveis	Grandezas Observáveis
Fator de Escala ( $a(t)$ )	Redshift ( $z$ )
Distância Própria ( $d_p$ )	Distância de Luminosidade ( $d_L$ )

Tabela 1 – Esquema das grandezas não observáveis presentes na equação 2.9 e das grandezas observáveis as quais procuramos determinar.

## 2.3 Do Fator de Escala aos Parâmetros $H_0$ e $q_0$ , e o Redshift

Iniciaremos expandindo o fator de escala  $a(t)$  em série de Taylor em torno no momento atual  $t_0$ :

$$a(t) = a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots \quad (2.10)$$

Considerando que o fator de escala evolui de forma não brusca, podemos considerar os três primeiros termos da série para obter uma boa aproximação do valor do fator de escala em um passado recente e em um futuro próximo:

$$a(t) \approx a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2. \quad (2.11)$$

Dividindo a equação acima pelo fator de escala atual ( $a(t_0)$ ) temos:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} \approx 1 + \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2. \quad (2.12)$$

Ou, usando a normalização  $a(t_0) = 1$ :

$$a(t) \approx 1 + \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\ddot{a}}{a} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2. \quad (2.13)$$

Vamos reescrever a equação acima a partir de dois novos parâmetros definidos da seguinte maneira:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \Rightarrow H(t_0) = H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (2.14)$$

$$q_0 \equiv - \left( \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right)_{t=t_0} = - \left( \frac{\ddot{a}}{aH^2} \right)_{t=t_0}. \quad (2.15)$$

$H(t)$  é o chamada função de Hubble<sup>4</sup> e está relacionado a taxa de expansão do universo (já que é definido a partir da primeira derivada do fator de escala). Quando avaliado em  $t = t_0$ ,  $H_0$  ganha o nome de constante de Hubble. O parâmetro  $q_0$ , por sua vez, é dito parâmetro de desaceleração (já que é definido a partir da segunda derivada do fator de escala) e está relacionado à taxa com a qual a expansão do universo está acelerando (ou desacelerando). Note que pela equação 2.15,  $q_0 > 0$  ( $\ddot{a} < 0$ ) indica uma expansão desacelerada do universo. Por outro lado,  $q_0 < 0$  ( $\ddot{a} > 0$ ) indica uma expansão acelerada.

Apesar de ser possível estabelecer uma relação entre os parâmetros  $H_0$  e  $q_0$  e os parâmetros de um modelo de dinâmica cosmológica (o que também nos fornece informações importantes sobre o nosso universo), vimos aqui que  $H_0$  e  $q_0$  podem ser derivados de maneira puramente cinemática. Isso é algo extremamente forte pois implica que podemos encontrar informações fundamentais sobre nosso universo sem recorrer a um modelo de gravitação que, em geral, exige suposições mais complexas. De fato, note que as únicas hipóteses feitas até aqui foram (1) que o universo é homogêneo e isotrópico e (2) que a distância entre dois eventos no espaço-tempo é dada pela métrica FLRW. Este é o motivo

<sup>4</sup> Para uma abordagem histórica do surgimento da constante de Hubble, consultar (RYDEN, 2006).

então dos cosmólogos darem uma atenção especial a estes parâmetros e o motivo pelo qual procuramos restringi-los neste trabalho.

Voltando a equação 2.13, podemos reescrever o fator de escala a partir dos novos parâmetros da seguinte maneira:

$$a(t) \approx 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2. \quad (2.16)$$

Agora, sabemos que a distância própria atual até um objeto qualquer cuja luz foi emitida em  $t_e$  e observada em  $t_0$  é dada por (2.9)

$$d_p(t_0) = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.17)$$

Fazendo a expansão de Taylor para  $1/a(t)$  e considerando os termos até a segunda ordem, temos que

$$\frac{1}{a(t)} \approx 1 - H_0 (t - t_0) + (1 + q_0/2) H_0^2 (t - t_0)^2. \quad (2.18)$$

Considerando apenas os dois primeiros termos e efetuando a integral, temos que a distância própria é

$$d_p(t_0) \approx c(t_0 - t_e) + \frac{cH_0}{2} (t_0 - t_e)^2. \quad (2.19)$$

O primeiro termo da equação acima diz respeito à distância própria caso o universo fosse estático. O segundo termo é uma correção devido à expansão do universo referente ao tempo em que a luz estava viajando (RYDEN, 2006).

Apesar de não sabermos o valor de  $t_0 - t_e$ , ou seja, o tempo decorrido desde a emissão até a observação da luz, podemos reescrever a equação da distância própria acima em termos de uma grandeza chamada redshift (que é facilmente observável). Façamos isso a seguir.

Considere uma linha de absorção de um espectro cujo comprimento de onda, medido em laboratório, é  $\lambda_{em}$ . Se medirmos o comprimento de onda da mesma linha de absorção de um espectro de um objeto distante (uma galáxia, por exemplo),  $\lambda_{ob}$ , veremos que, em geral, obteremos um valor diferente de  $\lambda_{em}$ . Diz-se que o espectro sofreu um desvio  $z$ ,

$$z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (2.20)$$

Se  $z < 0$ , chamamos de *blueshift* (desvio para o azul). Se  $z > 0$ , chamamos de *redshift* (desvio para o vermelho).

Novamente, sabemos que a distância própria atual até um objeto qualquer cuja luz foi emitida em  $t_e$  e observada em  $t_0$  é dada por (2.9)

$$d_p(t_0) = r = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.21)$$

A próxima crista da onda é emitida no tempo  $t_e + \lambda_e/c$  e observada no tempo  $t_0 + \lambda_0/c$ . Note que o lado direito da equação 2.9 é independente do tempo. Assim, para a segunda crista, temos que

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr = r. \quad (2.22)$$

Identificando as duas equações acima, obtemos:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.23)$$

Ou seja, a integral de  $dt/a(t)$  entre o tempo de emissão e o tempo de observação é a mesma para cada crista da onda da luz emitida.

Subtraindo a integral

$$\int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.24)$$

de ambos os lados da equação acima, temos que

$$\int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.25)$$

Ou seja, a integral de  $dt/a(t)$  entre a emissão de cristas de onda sucessivas é igual à integral de  $dt/a(t)$  entre a observação das cristas de onda sucessivas. Isso é um tanto óbvio se lembrarmos do fato de que o tempo de emissão ou observação entre duas cristas de onda é insignificante se comparada a escala de tempo em que a expansão do universo acontece.

Sendo assim, podemos considerar o fator de escala  $a(t)$  como constante na equação acima, de modo que

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0 + \lambda_0/c} dt. \quad (2.26)$$

Ou ainda

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}. \quad (2.27)$$

Usando a definição de redshift,  $z = (\lambda_0 - \lambda_e)/\lambda_e$ , e a convenção  $a(t_0) = 1$ , temos, finalmente, que o redshift da luz de um objeto distante se relaciona com o fator de escala no momento da emissão por

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)} \Rightarrow z = \frac{1}{a(t_e)} - 1. \quad (2.28)$$

Note que o tempo  $t_e$  é genérico, de modo que podemos generalizar a equação acima por:

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1. \quad (2.29)$$

Substituindo agora a expressão do inverso do fator de escala expandido em série de Taylor (equação 2.18), temos que

$$z \approx H_0 (t_0 - t_e) + (1 + q_0/2) H_0^2 (t_0 - t_e)^2. \quad (2.30)$$

Invertendo a equação acima, obtemos

$$t_0 - t_e \approx H_0^{-1} \left[ z - (1 + q_0/2) z^2 \right]. \quad (2.31)$$

Substituindo na expressão de distância própria (equação 2.19), temos finalmente que (considerando  $z \ll 1$ ):

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} \left[ z - (1 + q_0/2) z^2 \right] + \frac{cH_0}{2} \frac{z^2}{H_0^2} = \frac{c}{H_0} z \left[ 1 - \frac{1 + q_0}{2} z \right]. \quad (2.32)$$

Como queríamos, encontramos aqui uma forma de reescrever a distância própria em termos dos parâmetros cosmológicos  $H_0$  e  $q_0$  e em termos do redshift  $z$ . Nosso objetivo a partir de agora é encontrar maneiras de estimar  $d_p(t_0)$  a partir de outros conceitos de medidas de distância. Em especial, o conceito de distância de luminosidade que será discutido a seguir.

## 2.4 Da Distância Própria à Distância Luminosidade

Anteriormente exploramos o conceito de distância própria  $d_p$ . Apesar de sua importância teórica, vimos que essa grandeza não pode ser obtida diretamente através de observações astronômicas. Sendo assim, exploraremos a seguir outros dois conceitos de distância (a saber, a distância diâmetro angular e a distância luminosidade) que são passíveis de serem obtidos através de observações astronômicas, sendo, portanto, de extrema importância para o estudo do cosmos.

### 2.4.1 Distância Diâmetro Angular

A distância diâmetro angular é uma medida de distância baseada em objetos cujo comprimento  $l$  é bem conhecido. Tais objetos são chamados de régua padrão e veremos a seguir como eles são usados na determinação de distâncias.

Seja uma régua padrão de comprimento  $l$ , alinhada perpendicularmente com nossa linha de visão e com uma abertura angular  $\delta\theta = \theta_2 - \theta_1$  pequena o suficiente para que  $\text{tg}\theta \approx \theta$ . Considere que estamos na origem do sistema  $(0, 0, 0)$  e que as coordenadas das extremidades do objeto são dadas por  $(r, \theta_1, \phi)$  e  $(r, \theta_2, \phi)$ , como mostra a figura 4.

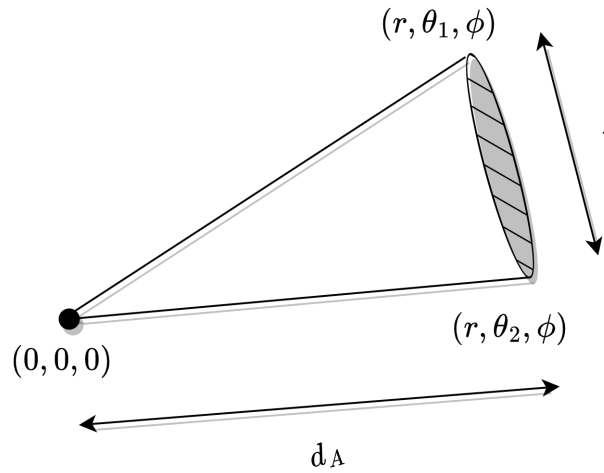


Figura 4 – Distância de diâmetro angular medida a partir da origem até uma régua padrão de comprimento  $l$  com coordenadas  $(r, \theta_1, \phi)$  e  $(r, \theta_2, \phi)$ . Fonte: Autora.

Supondo um universo estático (i.e.  $a(t) = cte$ ) e euclidiano (i.e.  $k = 0$ ) temos que a distância de diâmetro angular é facilmente obtida a partir da relação trigonométrica:

$$d_A \equiv \frac{l}{\delta\theta}. \quad (2.33)$$

Por outro lado, suponha agora um universo descrito pela métrica FLRW (equação 2.1):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa(r)^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)].$$

Considerando  $r$  e  $\phi$  constantes, a distância  $ds = l$  entre as extremidades do objeto, medida no tempo de emissão  $t_e$ , é dada por:

$$ds = l = a(t_e) S_\kappa(r) \delta\theta. \quad (2.34)$$

Ou, usando a relação 2.28:



$$l = \frac{S_\kappa(r)\delta\theta}{1+z}. \quad (2.35)$$

Assim, substituindo  $l$  na equação 2.33, temos que a distância de diâmetro angular, para um universo regido pela métrica FLRW, é

$$d_A \equiv \frac{l}{\delta\theta} = \frac{S_\kappa(r)}{1+z}. \quad (2.36)$$

Dados observacionais apontam que nosso universo é aproximadamente plano (RYDEN, 2006) ( $\kappa = 0$ ). Nesse caso, podemos efetuar a aproximação  $S_\kappa(r) \approx r = d_p(t_0)$  de modo que a distância de diâmetro angular é

$$d_A = \frac{d_p(t_0)}{(1+z)}. \quad (2.37)$$

Já vimos pela equação 2.32 que a distância própria em  $t_0$  é dada por

$$d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} z \left( 1 - \frac{1+q_0}{2} z \right).$$

Assim,

$$d_A \approx \frac{c}{H_0} z \left( 1 - \frac{1+q_0}{2} z \right) \frac{1}{(1+z)}. \quad (2.38)$$

Portanto, para  $z \ll 1$ , a distância de diâmetro angular é uma boa aproximação para a distância própria:

$$d_A \approx d_p(t_0) \approx \frac{c}{H_0} z. \quad (2.39)$$

Poderíamos usar esse fato para determinar os valores dos parâmetros  $H_0$  e  $q_0$ . Entretanto, o uso de réguas padrão é muito mais complexo na prática, principalmente porque os principais corpos celestes cujo tamanho é suficientemente grande para serem estudados com a tecnologia atual são as galáxias e aglomerados de galáxias, que não possuem tamanhos bem definidos por conta das interações gravitacionais com outros corpos, não podendo ser usadas, portanto, como réguas padrão. Sendo assim, atualmente tem-se dado muita mais ênfase na determinação de distâncias cosmológicas a partir das velas padrão (RYDEN, 2006), vistas a seguir.

### 2.4.2 Distância Luminosidade

A distância luminosidade é uma medida de distância baseada em objetos cuja luminosidade  $L$  é bem conhecida, chamados de velas padrão. Vejamos como essa distância é determinada.

A luminosidade  $L$  é definida como sendo a energia que um objeto emite por unidade de tempo. O fluxo de luz  $f$ , por sua vez, está relacionado com a energia por unidade de tempo por unidade de área que um objeto emite. Supondo um universo estático (i.e.  $a(t) = cte$ ) e euclidiano (i.e.  $k = 0$ ), temos que os fótons emitidos no tempo  $t_e$  (e observados no tempo  $t_0$ ) se espalham por uma esfera cuja área superficial é  $A_p(t_0) = 4\pi r^2 = 4\pi d_p(t_0)^2$ . O fluxo é determinado, nesse caso, por:

$$f = \frac{L}{4\pi d_p(t_0)^2}. \quad (2.40)$$

Assim, se a luminosidade  $L$  do objeto é conhecida e se conseguimos determinar o fluxo  $f$  a partir de observações, podemos definir a distância luminosidade em universo estático e euclidiano apenas invertendo a equação 2.40:

$$d_L = d_p(t_0) = \left( \frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2}. \quad (2.41)$$

Ou seja, para um universo estático e euclidiano, a distância luminosidade é identificada com a distância própria.

Suponhamos agora um universo regido pela métrica FLRW (equação 2.1):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \quad (2.42)$$

Nesse caso, a área superficial da esfera é dada por:

$$A_p(t_0) = 4\pi S_\kappa(r)^2. \quad (2.43)$$

Se o universo é positivamente curvado, temos que  $A_p(t_0) < 4\pi r^2$  e os fótons se espalham por uma área menor do que em um espaço plano. Por outro lado, se o universo é negativamente curvado, temos que  $A_p(t_0) > 4\pi r^2$  e os fótons se espalham por uma área maior do que em um universo plano.

Além dos efeitos geométricos, devemos considerar também a expansão do universo. Tal expansão faz com que o fluxo de luz observado das velas padrão decresça por um fator de  $(1+z)^{-2}$ . Explico. Primeiramente, a expansão do universo causa uma diminuição na energia de cada fóton da vela padrão: se um fóton começa com uma energia  $E_e = hc/\lambda_e$  em um fator de escala  $a(t_e)$ , então ao ser observado em  $a(t_0) = 1$ , o comprimento de onda terá crescido para:

$$\lambda_0 = \frac{1}{a(t_e)}\lambda_e = (1+z)\lambda_e, \quad (2.44)$$

e sua energia terá decrescido para:

$$E_0 = \frac{E_e}{1+z}. \quad (2.45)$$

Segundo, se dois fótons são emitidos em uma mesma direção separados por um intervalo de tempo  $\delta t_e$ , a distância própria entre eles inicialmente será  $c\delta t_e$ . No tempo de detecção  $t_0$ , entretanto, a distância própria terá aumentado para  $c(\delta t_e)(1+z)$  e iremos detectá-los em um intervalo de tempo  $\delta t_0 = \delta t_e(1+z)$ .

Considerando tais fatores, temos que o fluxo  $f$  em um universo que se expande e é espacialmente curvado é dado por:

$$f = \frac{L}{4\pi S_\kappa(r)^2(1+z)^2}. \quad (2.46)$$

Substituindo a equação acima na equação 2.41, temos que a distância de luminosidade é, nesse universo, dada por:

$$d_L = S_\kappa(r)(1+z). \quad (2.47)$$

Em particular, para um universo espacialmente plano ( $\kappa = 0$ ):

$$d_L = r(1+z) = d_p(t_0)(1+z). \quad (2.48)$$

Substituindo a expressão de distância própria (equação 2.32), temos então:

$$d_L \approx \frac{c}{H_0}z \left(1 - \frac{1+q_0}{2}z\right) (1+z) \approx \frac{c}{H_0}z \left(1 + \frac{1-q_0}{2}z\right). \quad (2.49)$$

Assim como para as réguas padrão, temos que, para  $z \ll 1$ ,

$$d_p(t_0) \approx d_L \approx \frac{c}{H_0}z. \quad (2.50)$$

Ou seja, em um universo descrito pela métrica FLRW, a distância de luminosidade é uma boa aproximação da distância própria atual para objetos com redshifts pequenos.

#### 2.4.2.1 O Sistema de Magnitudes

Comentamos anteriormente que a distância de luminosidade é uma grandeza observável (de fato, este foi o motivo pelo qual procuramos substituir a distância própria por

essa grandeza). Entretanto, isso é parcialmente verdade. O que obtemos de observações de fato é uma grandeza chamada módulo de distância, definido a partir do sistema de magnitudes que será discutido a seguir.

O sistema de magnitudes é um sistema usado para medir o brilho dos objetos celestes a partir de uma escala logarítmica na qual o brilho medido a cada unidade de magnitude muda por um fator de  $100^{1/5} \approx 5/2$  (ou seja, um objeto de magnitude 1 é 100 vezes mais brilhante que um de magnitude 6). A escala também é reversa, ou seja, quanto menor a magnitude, maior o brilho do objeto.

Tal sistema é baseado em duas definições:

- Magnitude Aparente ( $m$ ) — Mede o brilho aparente do objeto visto a partir da Terra sendo definido por

$$m \equiv -\frac{5}{2} \log_{10} \left( \frac{f}{f_x} \right), \quad (2.51)$$

onde  $f_x$  é um fluxo de referência e  $f$  é o fluxo bolométrico do objeto, ou seja, o fluxo integrado sobre todos os comprimentos de onda da luz.

- Magnitude Absoluta ( $M$ ) — Mede a luminosidade absoluta do objeto, definida como sendo a magnitude aparente do objeto visto a uma distância de  $10pc$  da Terra. Isto é:

$$M \equiv -\frac{5}{2} \log_{10} \left[ \frac{f}{f_x} \left( \frac{d_L}{10pc} \right)^2 \right] = m - 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{10pc} \right), \quad (2.52)$$

onde  $d_L$  é a distância de luminosidade ao objeto. Se tal distância é dada em *Mega-parsecs* ( $Mpc$ ), podemos reescrever a equação acima como:

$$M = m - 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{1Mpc} \right) - 25. \quad (2.53)$$

A partir desses conceitos define-se o módulo de distância, que é a diferença entre a magnitude aparente e a magnitude absoluta do objeto:

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{1Mpc} \right) + 25. \quad (2.54)$$

A magnitude aparente e o módulo de distância podem ser medidos observacionalmente. Os diferentes métodos dependem da distância que os objetos se encontram de nós (observadores). Por exemplo, utiliza-se a paralaxe estelar para objetos que se encontram na Via Láctea.

Entretanto, neste estudo, ao invés de determinarmos a distância luminosidade de um objeto, queremos determinar os parâmetros cosmológicos  $H_0$  e  $q_0$ . Para isso, podemos utilizar a equação que relaciona a distância luminosidade com esses dois parâmetros (equação 2.49), substituindo-a na equação de módulo de distância (equação 2.54). Obtemos, com isso, a seguinte relação:

$$\mu = 5 \log_{10} \left( \frac{c}{H_0} z \left( 1 + \frac{1 - q_0}{2} z \right) \right) + 25. \quad (2.55)$$

Comumente na literatura realiza-se a seguinte troca de variáveis:

$$H_0 = 100 \times h. \quad (2.56)$$

Assim, trocando  $H_0$  por  $h$ , temos que o módulo de distância é dado, em termos dos parâmetros  $h$  e  $q_0$ , por:

$$\mu = 5 \log_{10} \left[ \frac{c}{h} z \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - q_0) z \right) \right] + 25. \quad (2.57)$$

Com a equação acima podemos, finalmente, estimar os valores dos parâmetros  $h$  e  $q_0$  a partir de dados observacionais de  $z$  e  $\mu$ . A seguir, discutiremos as velas padrão utilizadas para realizar essa análise.

## 2.5 Supernovas do Tipo Ia

Supernovas são explosões que podem ocorrer em dois cenários astrofísicos distintos: a partir do colapso do núcleo de estrelas isoladas, ou a partir de uma explosão termonuclear em sistemas binários. No primeiro caso, temos que uma supernova surgirá a partir do processo evolutivo da própria estrela que, nesse caso, deve ter massa inicial superior a 10 massas solares. Esse processo dá origem as supernovas do tipo Ib, Ic e II<sup>5</sup>. Já no segundo caso, a supernova surgirá a partir de uma reação termonuclear desencadeada pela transferência de massa entre as duas estrelas pertencentes ao sistema. Nesse caso, a supernova é dita do tipo Ia (HILLEBRANDT; NIEMEYER, 2000) e é nessa classe que estamos interessados, uma vez que são velas-padrão de grande destaque para a cosmologia (RYDEN, 2006). Nessa seção, iremos brevemente discutir os processos físicos por trás desse fenômeno, bem como explicar seu uso para determinar a constante de Hubble  $H_0$  e o parâmetro de desaceleração  $q_0$ .

<sup>5</sup> Historicamente, as supernovas foram classificadas segundo suas características espectrais (e não segundo sua origem). De maneira resumida, supernovas que apresentavam linhas de absorção de hidrogênio foram denominadas do tipo II, as que não apresentavam essas linhas, foram denominadas do tipo I. As que não apresentavam linhas de hidrogênio, mas que continham linhas de silício foram denominadas do tipo Ia. As que não apresentavam tais linhas, foram chamadas do tipo Ib e Ic. Para um maior detalhamento da classificação desses objetos, consultar (CAPPELLARO; TURATTO, 2001).

Como dito anteriormente, supernovas do tipo Ia são fenômenos que ocorrem em sistemas binários. Nesses sistemas, temos que umas das estrelas transfere massa à outra que, nesse caso, deve ser uma anã branca (composta principalmente por carbono e oxigênio). Eventualmente, por conta dessa transferência, a massa da anã branca atinge o chamado limite de Chandrasekhar (de  $\sim 1.4$  massas solares), que caracteriza o fim da estabilidade entre a força gravitacional e a pressão interna da estrela. Ao atingir esse limite, é desencadeada uma reação de fusão nuclear na estrela, dando origem a supernova. A figura 5 ilustra esse processo evolutivo. Assim, a uniformidade da massa e da composição química da estrela progenitora deste tipo de supernova é o que justifica seu uso como vela-padrão (PIGOZZO, 2016).

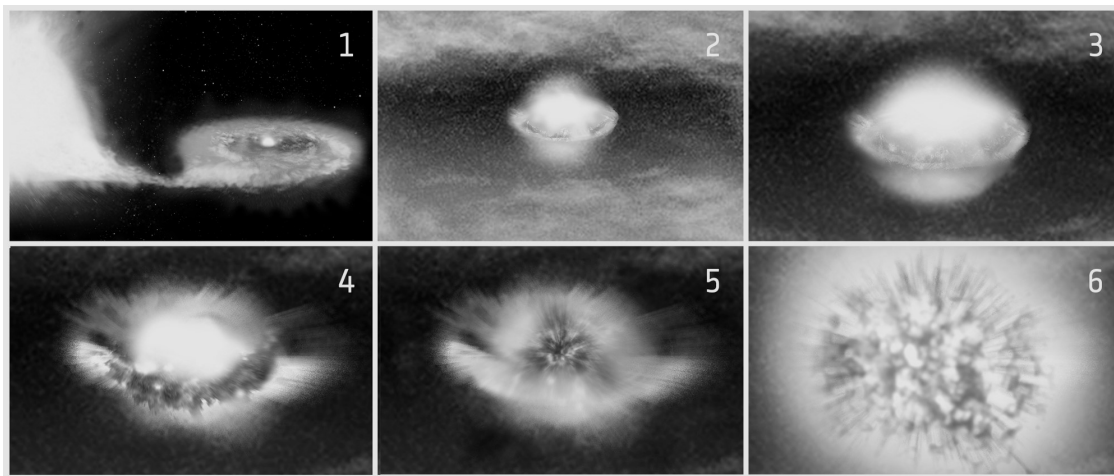


Figura 5 – Imagem ilustrativa do processo evolutivo de uma supernovas do tipo Ia. Fonte: ESA/ATG medialab.

Agora, para entendermos a aplicabilidade das supernovas do tipo Ia à cosmologia precisamos entender, primeiramente, como podemos obter informações a partir análise da luz emitida por esses objetos. De maneira geral, isso pode ser feito de duas maneiras:

- A partir do espectro eletromagnético da supernova, i.e. a partir de medidas de fluxo em função do comprimento de onda;
- A partir das curvas de luz, i.e. medidas do fluxo de luz das supernovas em função do tempo.

O espectro de luz das supernovas fornece informação sobre a distribuição da sua emissão em diferentes porções do espectro eletromagnético e é a partir dele, por exemplo, que podemos observar as linhas de emissão e absorção dos elementos e moléculas que compõem o objeto, bem como obter seu valor de desvio para o vermelho (redshift  $z$ ). Para supernovas do tipo Ia, temos que seus espectros são caracterizados por não apresentarem

linhas de absorção de hidrogênio, mas conterem fortes linhas de silício (HILLEBRANDT; NIEMEYER, 2000).

Por outro lado, as curvas de luz nos mostram a evolução da emissão de radiação em função do tempo. Para supernovas do tipo Ia, as curvas de luz apresentam comportamento extremamente homogêneo, apresentando uma taxa de declínio mais lenta em objetos mais brilhantes e uma correlação entre a espessura da curva de luz ao redor do máximo e o pico de luminosidade (HILLEBRANDT; NIEMEYER, 2000). Assim, a partir dessa correlação, podemos calibrar as curvas de luz desses objetos, de modo a utilizá-los como velas-padrão<sup>6</sup>.

De maneira resumida, possuímos uma classe de objetos que emitem grande quantidade de radiação e que possuem um comportamento padrão, com magnitude absoluta que pode ser obtida a partir da calibração das curvas de luz, e com redshift observável (obtido a partir do espectro). Assim, com os dados de redshift  $z$  e medindo a magnitude aparente desses objetos, podemos utilizar a equação 2.57 para estimar os parâmetros cosmológicos  $H_0$  e  $q_0$ .

---

<sup>6</sup> Para uma discussão mais detalhada sobre a calibração de supernovas do tipo Ia, consultar (ALTAVILLA et al., 2004)





## 3 Metodologia

A princípio, temos como objetivo ajustar os parâmetros  $\theta$  de um modelo teórico (ou uma classe de modelos) a um conjunto de dados observacionais. O modelo é motivado por argumentos físicos e descrito por uma função que pode ser tanto calculada teoricamente, quanto obtida experimentalmente de alguma propriedade física observável (direta ou indiretamente). No nosso caso, queremos ajustar os parâmetros  $\theta = \{h, q_0\}$  ( $h = H_0/100$ ) e a função utilizada para tal é o módulo de distância que, como discutido anteriormente, pode ser obtido “indiretamente” pela magnitude aparente de um objeto observado, como também previsto teoricamente, a partir da equação 2.57.

Nessa seção, abordaremos então o ferramental estatístico necessário para realizar essa estimativa dos parâmetros de interesse, bem como apresentaremos o conjunto de dados utilizado em nossa análise.

### 3.1 Conceitos e Ferramentas para Análise Estatística

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua, de modo que podemos definir uma função densidade de probabilidade (FDP)  $\varphi(x)$ , tal que  $\varphi(x)dx$  é a probabilidade de  $X$  estar no intervalo  $x < X < x + dx$  (RILEY; HOBSON; BENCE, 2006). Assim, a probabilidade de  $X$  estar em um intervalo  $a < X < b$  é dada pela integral:

$$\int_a^b \varphi(x)dx, \quad (3.1)$$

i.e. a probabilidade  $\varphi(a < X < b)$  é igual à área abaixo da curva FDP entre esses limites (RILEY; HOBSON; BENCE, 2006).

Se  $X$  é contínua em todo o espaço  $(-\infty, \infty)$  e para  $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ , a FDP deve satisfazer ainda:

- $\varphi(x) \geq 0$ ;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) = 1$ ;
- $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2|x_1)$ .

Neste último item, entendemos que a probabilidade de  $x_1$  e  $x_2$  ocorrerem é o produto da probabilidade de  $x_1$  ocorrer pela probabilidade condicional de  $x_2$  ocorrer, caso  $x_1$  já tenha ocorrido (PIGOZZO, 2016). Ora, mas  $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2, x_1)$ . Assim:

$$\wp(x_1)\wp(x_2|x_1) = \wp(x_2)\wp(x_1|x_2). \quad (3.2)$$

Substituindo  $x_1$  por  $D$  (de dados) e  $x_2$  por  $H$  (de hipótese ou modelo), obtemos então o famoso teorema de Bayes:

$$\wp(H|D) = \frac{\wp(H)\wp(D|H)}{\wp(D)}. \quad (3.3)$$

O termo  $\wp(D|H)$  nos diz a probabilidade de obter os dados que temos, admitindo que a hipótese  $H$  é verdadeira, sendo chamado de verossimilhança (ou *likelihood*).  $\wp(H)$  é chamado de *prior*, e se refere a informações que temos *a priori* do modelo  $H$ . O termo  $\wp(D)$  dá a normalização da função e, por fim,  $\wp(H|D)$  é a probabilidade posterior, i.e. a probabilidade de termos o modelo  $H$ , tendo ocorrido os dados  $D$  (PIGOZZO, 2016).

Se não temos informações *a priori* do nosso modelo, tomamos  $\wp(H)$  apenas como uma constante, de modo que:

$$\wp(H|D) \propto \wp(D|H). \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Minimizando a Função $\chi^2$

Voltemos ao problema de estimar os parâmetros. Precisamos definir uma função que quantifique a concordância entre um conjunto de dados observacionais  $D$  a um modelo dependente de um conjunto de parâmetros  $H(\theta)$ , para que maximizando a concordância, obtenhamos os parâmetros que melhor ajustam o modelo. Assim, fundamentalmente, estamos interessados em determinar o termo  $\wp(H(\theta)|D) = \wp(\theta|D)$  da equação 3.4.

Suponha que nossos dados tenham erros independentes que obedecem à distribuição Gaussiana. Então, a probabilidade dos dados (verossimilhança),  $\wp(D|H(\theta)) = \wp(D|\theta)$ , é o produto das probabilidades em cada ponto (PRESS et al., 2007):

$$\wp(D|\theta) \propto \prod_{i=1}^N \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{D_i - y(x_i|\theta)}{\sigma_i} \right)^2 \right] \right\} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{D_i - y(x_i|\theta)}{\sigma_i} \right)^2 \right], \quad (3.5)$$

sendo  $N$  o número de dados  $D_i$  com variância  $\sigma_i^2$  e  $y$  a predição do modelo ao fixar valores dos parâmetros representados por  $\theta = \{\theta_j\}$ .

Assumir que nossos dados obedecem uma distribuição gaussiana é, aparentemente, uma suposição bastante audaciosa. Note, entretanto, que sempre podemos fazer testes *a posteriori* para verificarmos nossa hipótese inicial<sup>1</sup>. Além disso e, talvez mais importante,

<sup>1</sup> Essa discussão, entretanto, foge do escopo deste trabalho.

o Teorema do Limite Central (PRESS et al., 2007) nos garante que, para um número grande o suficiente de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, a distribuição das variáveis seguirá uma distribuição normal, independentemente da distribuição original<sup>2</sup> embasando, então, a suposição feita aqui.

Assim, recorrendo à 3.4, temos que o modelo (ou os parâmetros de um modelo) mais prováveis são aqueles maximizam a equação 3.5 ou, analogamente, que minimizam:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(D_i - y(x_i|\theta))^2}{(\sigma_i)^2}. \quad (3.6)$$

Tal função recebe o nome de função qui-quadrado e nosso objetivo será determinar os parâmetros  $\theta$  que a minimizam (maior concordância entre o teórico e o observado).

No nosso caso, temos que o conjunto de parâmetros de interesse são  $\theta = \{h, q_0\}$  e que a função  $y(x_i)$  é a função módulo de distância  $\mu(z_i|h, q_0)$ , dada pela equação 2.57. Assim, podemos reescrever a equação acima como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_i^{obs} - \mu(z_i|h, q_0))^2}{(\sigma_i)^2}, \quad (3.7)$$

onde  $\mu_i^{obs}$  e  $z_i$  são os valores observados,  $\sigma_i^2$  é a variância dos dados de  $\mu_i^{obs}$ <sup>3</sup> e  $\mu(z_i|h, q_0)$  é calculado usando a equação 2.57.

A fim de determinar os parâmetros que minimizam a função  $\chi^2$  precisamos, primeiramente, adotar valores para  $h$  e  $q_0$ , construindo um de espaço de parâmetros  $(h, q_0)$ . As medidas desses parâmetros presentes na literatura são de  $h \sim 0,7 \text{ km/s/Mpc}$  e  $q_0 \sim -0,5$  (RYDEN, 2006), de modo que é razoável consideramos os seguintes intervalos para esse espaço de parâmetros:

$$\begin{cases} 0,65 < h < 0,75 ; \\ -0,7 < q_0 < 0,2 . \end{cases} \quad (3.8)$$

Mais uma vez, destaco que esses intervalos foram escolhidos pois já conhecemos os valores aproximados de  $h$  e  $q_0$ . Entretanto, intervalos maiores para esses parâmetros também podem ser explorados.

Assim, calculamos o valor de  $\chi^2$  para cada combinação de  $(h, q_0)$  no espaço de parâmetros e determinamos que a combinação de  $h$  e  $q_0$  que mais concorda com a previsão teórica é aquela para a qual o valor de  $\chi^2$  é mínimo.

<sup>2</sup> Para uma discussão mais aprofundada, consultar (PRESS et al., 2007).

<sup>3</sup> O erros de  $z$  são considerados desprezíveis.

### 3.1.2 Regiões de Confiança

Além dos valores de melhor ajuste, é necessário também obter barras de erros dos parâmetros. Isso pode ser obtido através das curvas de níveis (ou níveis de confiança) de  $\chi^2$ , construídas da seguinte maneira: a partir do valor do mínimo  $\chi^2$  ( $\chi_{min}^2$ ), associamos os pontos, no espaço de parâmetros, dentro de uma região  $\chi^2 < \chi_{min}^2 + \Delta\chi_0^2$  a uma probabilidade de que o valor correto esteja nesta região (PIGOZZO, 2016). Ou seja, queremos encontrar  $\Delta\chi_0^2$  para que, dentro da região  $\Delta\chi^2 < \Delta\chi_0^2$ , tenhamos a probabilidade (equação 3.1):

$$P = \int_{\Delta\chi^2 < \Delta\chi_0^2} d^M \theta \wp(D|\theta), \quad (3.9)$$

sendo  $M$  a quantidade de parâmetros a serem ajustados. Em nosso caso, temos  $M = 2$  ( $h$  e  $q_0$ ).

Agora, da equação 3.5, temos que a probabilidade  $\wp(D|\theta)$ , em termos de  $\chi^2$ , é:

$$\wp(D|\theta) = \alpha e^{-\chi^2/2}, \quad (3.10)$$

sendo  $\alpha$  a constante de normalização.

Substituindo agora  $\chi^2$  por  $\chi_{min}^2 + \Delta\chi^2$ , temos:

$$\wp(D|\theta) = \alpha' e^{-\Delta\chi^2/2}. \quad (3.11)$$

Assim, a solução (não demonstrada) da integral acima é dada por (GREGORY, 2005):

$$P = 1 - \gamma\left(1, \Delta\chi_0^2/2\right), \quad (3.12)$$

com  $\gamma(1, \Delta\chi_0^2/2)$  sendo a função gama incompleta, dada por (PRESS et al., 2007):

$$\gamma(a, x) \equiv \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt. \quad (3.13)$$

Assim, para  $\gamma(1, \Delta\chi_0^2/2)$ , temos que a probabilidade é:

$$P = 1 - \int_{\Delta\chi_0^2/2}^\infty e^{-t} dt = 1 - e^{-\Delta\chi_0^2/2}. \quad (3.14)$$

Os valores de  $\Delta\chi_0^2$  comumente usados na literatura são os que representam as probabilidades de 68%, 95% e 99%, referentes a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$ , sendo  $\sigma$  o desvio padrão da distribuição normal. A tabela 2 destaca os valores de  $\Delta\chi_0^2$  para esses diferentes níveis

de confiança, calculados a partir da equação 3.14 (para  $M = 2$ ). Consultando a tabela apresentada, temos que as curvas de 68%, 95% e 99% são construídas somando 2,3; 6,17 e 11,8, respectivamente, ao valor de melhor ajuste —  $\chi_{min}^2$ .

Nível de Confiança ( $P$ )	$\Delta\chi_0^2$
68% ( $1\sigma$ )	2,30
95% ( $2\sigma$ )	6,17
99% ( $2\sigma$ )	11,8

Tabela 2 – Valores de  $\Delta\chi_0^2$  para diferentes níveis de confiança para um sistema com dois parâmetros livres.

Assim, determinamos aqui como encontrar os valores de melhor ajuste dos parâmetros  $h$  e  $q_0$ , bem como seus intervalos de confiança, a partir do módulo de distância e da função estatística  $\chi^2$ . A seguir, apresentaremos o conjunto de dados usado na análise feita neste estudo.

## 3.2 Compilações Union2 e Union2.1

Para este estudo, utilizamos dois conjuntos de dados de supernovas do tipo Ia, ambos do *Supernova Cosmology Project* (SCP). O primeiro conjunto de dados é a compilação chamada Union2 (AMANULLAH, 2010), de 2010, que analisou 719 supernovas, das quais 557 passaram pelos “cortes de usabilidade”. O segundo conjunto de dados é uma atualização do Union2, intitulado Union2.1 (SUZUKI et al., 2012), lançado em 2011. Nessa nova compilação, 580 supernovas passaram pelos “cortes de usabilidade”. Segundo a equipe, todas as supernovas foram ajustadas usando um único filtro da curva de luz e analisadas de “maneira cega”, ou seja, sem utilizar modelo cosmológico.

## 4 Resultados e Análise

Para analisar os dados das duas compilações, Union2 e Union2.1, construiu-se um programa em Python<sup>1</sup> para calcular a função  $\chi^2$  (equação 3.7) em função do espaço de parâmetros  $(h, q_0)$ . O intervalo usado para os parâmetros foi de:

$$\begin{cases} 0,65 < h < 0,75 ; \\ -0,7 < q_0 < 0,2 . \end{cases} \quad (4.1)$$

Para o cálculo da função  $\chi^2$ , dividimos os intervalos acima em 1000 pontos, de modo que o total de pontos usados para determinar o valor de melhor ajuste e os intervalos de confiança foi de  $1000 \times 1000 = 10^6$ .

Após calcular o valor de  $\chi^2$  para cada ponto no espaço de parâmetros, determinou-se o valor mínimo dessa função  $\chi_{min}^2$  e construiu-se curvas de confiança correspondentes à 68%, 95% e 99% de confiança, somando os valores respectivos da tabela 2 no valor de  $\chi_{min}^2$ . Os resultados obtidos para os valores de melhor ajuste e as regiões de confiança são mostrados nas figuras 6 e 7 e na tabela 3.

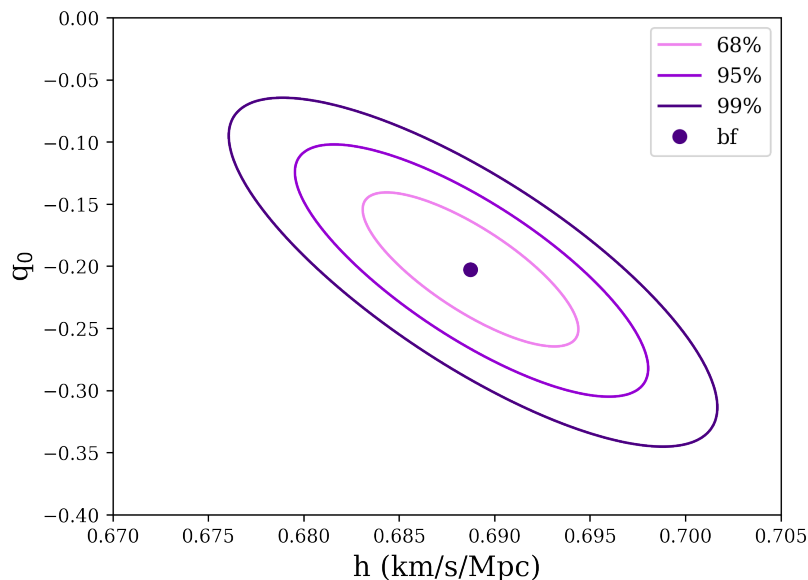


Figura 6 – Curvas de contorno no espaço de parâmetros  $(h, q_0)$  para os dados de supernovas da compilação Union2. O ponto representa o melhor ajuste (*best fit* — *bf*) enquanto as três curvas representam os intervalos de confiança de 68%, 95% e 99%.

<sup>1</sup> O programa desenvolvido encontra-se no apêndice B.

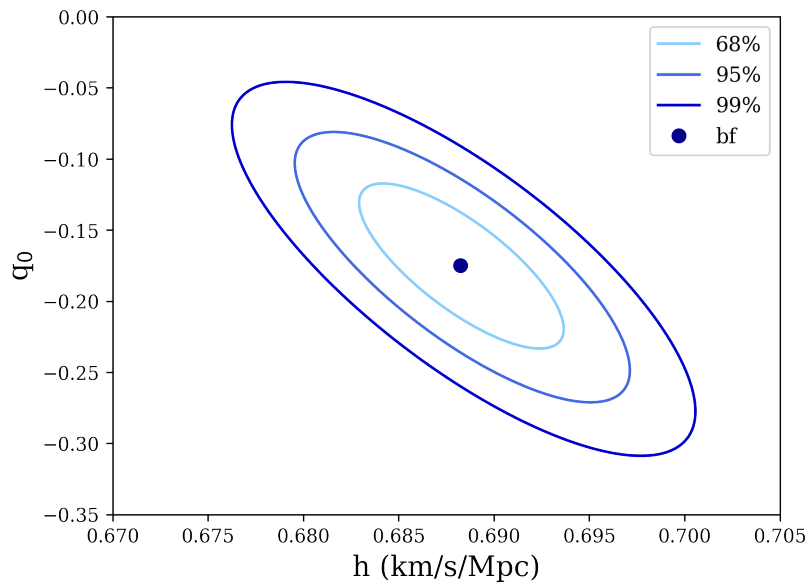


Figura 7 – Curvas de contorno no espaço de parâmetros  $(h, q_0)$  para os dados de supernovas da compilação Union2.1. O ponto representa o melhor ajuste (*best fit* — *bf*) enquanto as três curvas representam os intervalos de confiança de 68%, 95% e 99% para os dados.

Nas figuras 6 e 7, temos a projeção da função  $\chi^2$  no espaço de parâmetros  $q_0 \times h$ . O valor mínimo de  $\chi^2$  é representado por um ponto, indicado de *bf* (do inglês, a abreviação de “melhor ajuste”). Os valores de  $h$  e  $q_0$  referentes a esse ponto são  $h = 0,688$  km/s/Mpc e  $q_0 = -0,20$ , para a compilação Union2, e  $h = 0,687$  km/s/Mpc e  $q_0 = -0,17$ , para a compilação Union2.1. Ao redor do valor de  $\chi^2_{min}$  temos as curvas de níveis (valores  $\chi^2$  fixo) referentes a 68%, 95% e 99%. Em outras palavras, a curva de nível de 68%, por exemplo, representa que o valor real dos parâmetros ajustados está dentro dessa região com 68% probabilidade. Idem para as outras curvas.

Na tabela 3 mostramos os resultados para os valores de melhor ajuste no intervalo de 95% de confiança, obtidos na nossa análise. A fim de comparar nossos resultados com aqueles presentes na literatura, mostramos ainda os valores obtidos na referência (PIATTELLA, 2018).



	$H_0$ (km/s/Mpc)	$q_0$
Union2	$68,8 \pm 0,9$	$-0,20 \pm 0,08$
Union2.1	$68,7 \pm 0,9$	$-0,17 \pm 0,07$
Ref. (PIATTELLA, 2018)	$69,0 \pm 1,5$	$-0,18 \pm 0,13$

Tabela 3 – Comparação entre os valores de  $H_0$  e  $q_0$  de *best fit* encontrados neste estudo, utilizando os dados do Union2 e Union2.1 e os valores encontrados na literatura (PIATTELLA, 2018) para o intervalo de confiança de 95%.

Em (PIATTELLA, 2018), a análise é feita considerando o mesmo espaço de parâmetros  $(h, q_0)$  deste estudo, porém, com uma amostra distinta que utiliza dados binados (BETOULE, M. et al., 2014), isto é, que considera a correlação entre os dados amostrais. Apesar de tais diferenças, podemos observar pela tabela 3 que os resultados aqui apresentados foram consistentes com os apresentados em (PIATTELLA, 2018).

Note agora que, segundo as equações 2.14 e 2.15, a constante de Hubble  $H_0$  e o parâmetro de desaceleração  $q_0$  são definidos por:

$$H_0 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} .$$

$$q_0 = - \left( \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right)_{t=t_0} .$$

Assim, um valor positivo de  $H_0$  representa que o universo está em expansão. Por outro lado, temos o valor negativo de  $q_0$  representa que essa taxa de expansão é acelerada. Por fim, destaco que, apesar de não restringirmos a nossa análise a um dado modelo cosmológico, temos que os resultados encontrados concordam com aqueles propostos pelo modelo  $\Lambda$ CDM que, novamente, é a estrutura teórica mais bem aceita pela comunidade científica para a explicação da evolução e composição do universo.



## 5 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem independente de modelo cosmológico para restringir a constante de Hubble  $H_0$  e do parâmetro de desaceleração  $q_0$ . Para a realização da análise, utilizamos dados de supernovas do tipo Ia, as quais são explosões que ocorrem em sistemas binários após atingirem o limite de Chandrasekhar. De fato, a existência desse limite e a uniformidade da composição química da estrela progenitora é o que justifica a homogeneidade das curvas de luz desses objetos, possibilitando utilizá-los como velas-padrão. As supernovas utilizadas neste trabalho fazem parte das compilações Union2 e Union2.1 do *Supernova Cosmology Project*.

Para estimar os parâmetros de interesse a partir dos dados das supernovas, utilizamos a função estatística  $\chi^2$ , a qual nos permite quantizar a concordância entre os dados observacionais e a teoria proposta. A função usada para tal foi a função módulo de distância  $\mu$ , que pode ser tanto calculada teoricamente, quando obtida através dos dados observacionais.

Os parâmetros cosmológicos aqui estudados são de extrema importância para a cosmologia pois nos fornecem informação direta sobre a cinemática do universo. Conforme os resultados encontrados, vimos que essa cinemática se dá por uma expansão (valor de  $H_0$  positivo) acelerada (valor de  $q_0$  negativo) a uma taxa de  $68,8 \text{ km/s por } Mpc$ , conforme os dados do Union2, e  $68,7 \text{ km/s/Mpc}$ , segundo os dados do Union2.1. Vimos ainda que, apesar de não recorrermos a um modelo cosmológico para a realização da nossa análise, os resultados apresentados corroboram com aqueles previstos pelo modelo  $\Lambda$ CDM, o qual é o modelo cosmológico mais corroborado pelas evidências.



# Referências

- ALTAVILLA, G. et al. Cepheid calibration of type ia supernovae and the hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 349, n. 4, p. 1344–1352, apr 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111%2Fj.1365-2966.2004.07616.x>>. Citado na página 37.
- AMANULLAH, R. Spectra and light curves of six type ia supernovae at  $0.511 < z < 1.12$  and the union2 compilation. American Astronomical Society, 2010. Citado na página 44.
- BETOULE, M. et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. EDP Sciences, 2014. Citado na página 47.
- CAPPELLARO, E.; TURATTO, M. Supernova types and rates. In: *The Influence of Binaries on Stellar Population Studies*. Springer Netherlands, 2001. p. 199–214. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007%2F978-94-015-9723-4\\_16](https://doi.org/10.1007%2F978-94-015-9723-4_16)>. Citado na página 35.
- GREGORY, P. *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica® Support*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. Citado na página 42.
- HILLEBRANDT, W.; NIEMEYER, J. Type ia supernova explosion models. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 38, n. 1, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.
- PIATTELLA, O. *Lecture Notes in Cosmology*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 11, 21, 46 e 47.
- PIGOZZO, C. B. M. Classificação automática de supernovas usando redes neurais artificiais. In: . [S.l.: s.n.], 2016. Citado 4 vezes nas páginas 36, 39, 40 e 42.
- PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521880688. Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 42.
- RIBEIRO, S. C. Reconstrução da equação de estado da energia escura. In: . [S.l.: s.n.], 2023. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 23.
- RILEY, K.; HOBSON, M.; BENCE, S. *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. ISBN 9781139450997. Citado na página 39.
- RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. [S.l.: s.n.], 2006. Citado 11 vezes nas páginas 11, 19, 21, 22, 25, 26, 27, 31, 35, 41 e 54.
- SUZUKI, N. et al. The hubble space telescope cluster supernova survey. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 746, n. 1, p. 85, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0004-637x%2F746%2F1%2F85>>. Citado na página 44.



# APÊNDICE A – Unidades Astronômicas de Distância

No estudo do cosmos, comumente são utilizadas unidades de medida de distância diferentes daquelas definidas pelo SI, dada as vastas escalas de distâncias presentes no universo. Apresentamos aqui algumas dessas unidades de medida.

- **Unidade Astronômica (UA):** definida como sendo a distância média da Terra ao Sol. Em unidades métricas, temos que

$$1 \text{ UA} \approx 1,5 \times 10^{11} \text{ m.}$$

Essa unidade de medida é frequentemente usada para distâncias na escala do sistema solar.

- **Ano-Luz (ly):** definido como sendo a distância que a luz percorre no vácuo durante um ano terrestre. Equivale a cerca de

$$1 \text{ ly} \approx 9,46 \times 10^{15} \text{ m.}$$

O ano-luz é amplamente utilizado para descrever as distâncias entre estrelas e galáxias.

- **Parsec (pc):** definido como sendo a distância em que 1 UA subtende um ângulo de 1 segundo de arco, como ilustrado na figura 8. Em unidades métricas:

$$1 \text{ pc} \approx 3,1 \times 10^{16} \text{ m.}$$

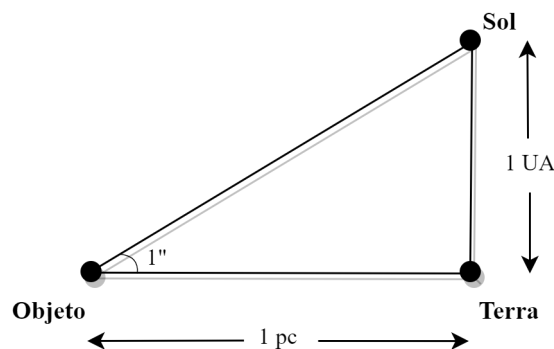


Figura 8 – Definição de parsec. Fonte: Autora.

Para distâncias extragalácticas, faz-se uso da unidade **Megaparsecs (Mpc)**:

$$1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}.$$

A tabela 4 a seguir exemplifica algumas medidas de distâncias em parsec e megaparsec a partir da Terra.

Objeto Celeste	Distância da Terra
Próxima Centauri	1,3 pc
Centro Via Láctea	8500 pc
Galáxia de Andrômeda	0,7 Mpc
Aglomerado de Virgem	15 Mpc

Tabela 4 – Exemplos de distâncias da Terra em parsec. Fonte: (RYDEN, 2006).



# APÊNDICE B – Código em Python

Apresentamos aqui o código desenvolvido em Python para a obtenção dos valores de melhor ajuste da constante de Hubble e do parâmetro de desaceleração, bem como para a obtenção das curvas de confiança mostradas nas figuras 6 e 7.

Iniciamos o código importando as bibliotecas necessárias. Nesse caso, usamos o Matplotlib, para a construção dos gráficos, e o Numpy, usado para a manipulação das equações usadas.

```
#Importação de bibliotecas e leitura de dados
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Em seguida, abrimos e lemos o arquivo com os dados de *redshift*  $z$ , módulo de distância  $\mu$  e o desvio padrão  $\sigma$  do módulo de distância das supernovas analisadas.

```
data = np.loadtxt('/content/union2data.dat')
```

```
z_data = data[:,0]      # dados de redshift
mu_data = data[:,1]    # dados de módulo de distância
erro = data[:,2]       # dados do erro do módulo de distância
```

Definimos então a função teórica do módulo de distância  $\mu_{teo}$ , conforme a equação 2.57.

```
# Cálculo do módulo de distância teórico
```

```
def mu_teo(z,h,q0):
    return 5*np.log10(3000*z*(1 + (1 - q0)*z/2)/h) + 25
```

Para o cálculo do  $\chi^2$  (equação 3.7), definimos, primeiramente, o espaço de parâmetros através da função *np.meshgrid*. Usamos 1000 pontos tanto para  $q_0$ , quanto para  $h$ . Em seguida, calculamos o  $\chi^2$  para cada um dos pares de parâmetros  $(q_0, h_0)$ .

```

# Cálculo do qui-quadrado

# Número de pontos de h e q0
Nh = 1000
Nq0 = 1000

# Intervalo de h e q0 usado
h = np.linspace(0.65,0.75,Nh)
q0 = np.linspace(-0.7,0.2,Nq0)
h_x, q0_y = np.meshgrid(h,q0)

# Matriz de dimensão Nq0 linhas e Nh colunas
Z = np.ones((Nq0,Nh))

# Cálculo em si
for i in np.arange(Nq0): # Índice para o q0
    for j in np.arange(Nh): # Índice para o h

        qui2 = np.sum(((mu_data - mu_teo(z_data,h[j],q0[i]))**2)/(erro**2))

        Z[i,j] = qui2
    # Substitui o elemento (i,j) da matriz Z pelo qui-quadrado calculado

Com os valores de  $\chi^2$  para cada par de parâmetros, encontramos o valor de melhor
ajuste a partir da determinação do menor valor de  $\chi^2 - \chi_{min}^2$ . Determinamos também
os valores de  $h$  e  $q_0$  que correspondiam ao melhor ajuste.

qui_min = Z.min() # Valor mínimo do qui-quadrado

# Determinar o índice do qui-quadrado mínimo
index = np.unravel_index(Z.argmin(), Z.shape)

H = h_x[index] # Encontra o best fit do h
Q0 = q0_y[index] # Encontra o best fit do q0

```

---

Por fim, construímos as curvas de confiança a partir de um gráfico de  $h \times q_0$ .

```
# Gráfico

# Intervalos de confiança de 68%, 95% e 99% respectivamente.
levels_h=[qui_min+2.3, qui_min+6.17, qui_min+11.8]
CS = plt.contour(h_x, q0_y, Z,levels_h)

# Constrói o gráfico para o melhor ajuste
plt.plot(H,Q0,'o', markersize=7,label='bf')

# Configurações do gráfico
plt.xlabel('$h\;\; (km/s/Mpc)$')
plt.ylabel('$q_0$')
plt.xlim([0.67,0.705])
plt.ylim([-0.4,0])

labels = ['$68\%$', '$95\%$', '$99\%$']
for i in range(len(labels)):
    CS.collections[i].set_label(labels[i])

plt.legend()
plt.plot()
```