

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

FELIPE DINIZ MARQUES

**INTRODUÇÃO À COSMOLOGIA  
UMA PROPOSTA DE ANÁLISE INDEPENDENTE DE  
MODELO DA EXPANSÃO ACELERADA DO  
UNIVERSO**

BRASÍLIA

20 DE JULHO DE 2023



Felipe Diniz Marques

**Introdução à cosmologia**  
**Uma proposta de análise independente de modelo da**  
**expansão acelerada do universo**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientadora: Mariana Penna Lima Vitenti

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

19 de julho de 2023

# Resumo

Este trabalho se propõe a uma análise e descrição teórica dos principais conceitos relativos à dinâmica do universo, de maneira a explicar que características são levadas em consideração na estruturação do modelo atual de universo mais aceito e que é baseado no Princípio Cosmológico. Assim, serão descritas as diferentes distâncias utilizadas na área, como a comóvel e a luminosidade, bem como explicados alguns conceitos da teoria da relatividade geral e as equações implicadas nela. Será realizada ainda uma descrição do que são Supernovas Ia e por que elas são tão importantes para se compreender a cinemática e a dinâmica do cosmos, tendo aqui a presença de uma função importante chamada de desaceleração. Ela nos informa sobre o atual estado da expansão ou contração do universo, e este trabalho pretende explicar que é possível comprovar a expansão acelerada sem a necessidade de se lançar mão de um modelo cosmológico, ou seja, sem precisar recorrer à dinâmica do universo, mas tão somente a dados que independem da teoria da relatividade geral, ou seja, baseados em cosmografia. Como se trata de um trabalho de conclusão de curso, uma abordagem didática deve marcar o texto. Logo, para além de uma exposição teórica, o segundo objetivo consiste em abrir as principais equações de maneira a mostrar ao leitor como elas são deduzidas.

**Palavras-chaves:** Dinâmica do universo; Teoria da relatividade geral; Cosmografia; Supernova Ia; Spline.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Cilindro de raio $R_e$ para uma linha de visão. . . . .	12
Figura 2 – Um vetor $\mathbf{A}$ no espaço pode ser descrito por suas componentes ( $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ ) nos diferentes eixos espaciais ( $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ ). Neste caso, o vetor $\mathbf{A}$ é orientado pelo ângulo $\alpha$ com o eixo $x_1$ . Fonte: (THORNTON; MARION, 2011). . . . .	16
Figura 3 – A velocidade de um dado objeto mensurada a partir de dois referenciais diferentes é dada pela velocidade relativa entre ambos. Fonte:(ROHLF; COLLINGS, 1994) . . . . .	17
Figura 4 – Representação espaço-temporal com um observador na origem do sistema de coordenadas e com seus cones de luz do passado e do futuro. Considerando este observador em repouso, sua linha mundo (seta vermelha) segue uma reta ascendente visto que ele está se movendo no tempo. A sigla CMB representa a Radiação Cósmica de Fundo e o eixo $ct$ indica apenas $t$ em decorrência do uso convencional em algumas obras de $c = 1$ . Fonte: [ <a href="https://rb.gy/slfr8">https://rb.gy/slfr8</a> ] . . . . .	21
Figura 5 – Mapa da CMB obtido pelo WMAP. . . . .	22
Figura 6 – Mapa da CMB obtido com os dados da Missão Planck com o método SMICA cobrindo cerca de 97% do céu. . . . .	23
Figura 7 – As coordenadas $x_1$ e $x_2$ permanecem as mesmas, indicando que a distância comóvel ( $D_c$ ) entre elas ( $ x_2 - x_1 $ não se altera. No entanto, a distância física ( $D_f$ ) aumenta proporcionalmente à $D_c$ numa relação que pode ser descrita como $D_f = D_c \times a(t)$ . . . . .	26
Figura 8 – Gráfico obtido por Hubble em 1929. . . . .	27
Figura 9 – Gráfico mostrando a relação entre as diferentes distâncias cosmológicas e o <i>redshift</i> . Fonte: (DODELSON; SCHMIDT, 2020). . . . .	32
Figura 10 – Esquema apontando o transporte paralelo de um vetor, não havendo qualquer mudança em sua dimensão ou orientação. Fonte: (CARROLL, 2004) . . . . .	36
Figura 11 – Os quatro vetores são iguais no ponto localizado em cima do equador, mas têm sua angulação alterada ao percorrerem o caminho na esfera. Fonte: (CARROLL, 2004) . . . . .	37

Figura 12 – Diagrama HR colorido, mostrando a localizando da Sequência Principal, estrelas gigantes e supergigantes e anãs brancas. os números indicam estrelas específicas, a saber: 1. Spica; 2. Eridani B; 3. Rígeq; 4. Deneb; 5. Polaris; 6. Alpha Centauri; 7. Sol; 8. Procyon B; 9. Pol-lux; 10. Aldebaran; 11. Betelgeuse; 12. Estrelade Barnard; 13. Próxima Centuri. Fonte: (FILHO; SARAIVA, 2004) . . . . .	44
Figura 13 – O gráfico à esquerda mostra as curvas de luz de 17 supernovas com o filtro B (blue) em relação ao tempo dado em dias. Para reduzir o efeito das variações, os dados são corrigidos pela distância, <i>redshift</i> $z$ e <i>stretch</i> $s$ . As curvas foram ainda deslocadas para que coincidissem, permitindo uma visualização melhor de como elas são de fato bastante semelhantes. Fonte: (FILHO; SARAIVA, 2004) . . . . .	45
Figura 14 – A curva tracejada representa a evolução da distância luminosidade $D_L$ , dada em megaparsecs, em função do <i>redshift</i> $z$ em um universo dominado apenas por matéria, ou seja, $\Omega_m = 1$ e os demais parâmetros de densidade são nulos. A curva vermelha foi obtida com $\Omega_m = 0,3$ , $\Omega_r = 0$ e $\Omega_\Lambda = 0,7$ , representando assim o modelo padrão. Fonte: (FILHO; SARAIVA, 2004) . . . . .	47
Figura 15 – Distribuição dos pontos referentes à Tabela 1. . . . .	55
Figura 16 – A curva vermelha indica o ajuste linear, ao passo que o quadrático está representado de verde escuro e o cúbico, de laranja. . . . .	56
Figura 17 – Spline linear com 500 pontos gerados randomicamente em Python para efeito de ilustração da consequência visual de se ter uma quantidade maior de dados. . . . .	58

# Lista de abreviaturas e siglas

CMB	Cosmic Microwave Background
HR	Hertzsprung–Russell
WMAP	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe





# Lista de símbolos

$\Lambda$	Constante cosmológica
$G$	Constante de gravitação universal
$h$	Constante de Plank
$H_0$	Constante de Hubble
$\kappa$	Curvatura
$\epsilon_c$	Densidade crítica
$D_a$	Distância diâmetro angular
$D_c$	Distância comóvel
$D_f$	Distância física
$D_L$	Distância Luminosidade
$a$	Fator de escala
$F$	Fluxo
$q(z)$	Função desaceleração
$E(z)$	Função normalizada de Hubble
$L$	Luminosidade
$L_0$	Luminosidade do Sol
$m$	Magnitude aparente
$M$	Magnitude Absoluta
$\mu$	Módulo de distância
$\Omega$	Parâmetro de densidade
$\Gamma$	Símbolo de Christoffel
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$T_{\mu\nu}$	Tensor energia-momento

$c$	Velocidade da luz
$v_p$	Velocidade peculiar
$z$	<i>Redshift</i>

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
1.1	A curiosidade humana	11
1.2	Universo Estático e o Paradoxo de Olbers	11
<b>2</b>	<b>MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO</b>	<b>15</b>
2.1	Isotropia, Homogeneidade e Discussões Preliminares Acerca da Teoria da Relatividade Restrita	15
2.2	Redshift e a Constante de Hubble	24
2.3	Distâncias Cosmológicas	30
<b>3</b>	<b>DINÂMICA COSMOLÓGICA</b>	<b>33</b>
3.1	A Métrica	33
3.2	A Geodésica e o Caminho das Partículas Livres em um Universo em Expansão	34
3.3	As Equações de Einstein e de Friedmann	39
3.4	Supernovas	43
<b>4</b>	<b>UMA PROPOSTA DE ANÁLISE</b>	<b>51</b>
4.1	Função Desaceleração	51
4.2	Spline	54
	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>61</b>



# 1 Introdução

## 1.1 A curiosidade humana

É inerente ao ser humano o fascínio pelas regras que regem a natureza. O voo de um pássaro, a combustão de um gás e a combinação de diferentes substâncias em processos físicos e químicos para citar três das infinitas possibilidades de estudo. Para além de uma escala tipicamente atômica ou mesmo humana e caminhando na direção de estruturas maiores, a curiosidade se expandiu há muito tempo para abarcar a rotação dos planetas, a composição das estrelas e até mesmo a ciência por trás das galáxias. Estas são questões tipicamente astronômicas e cujo impacto é de grande importância para o ser humano uma vez que permitiu o desenvolvimento de tecnologias que vão desde as mais básicas como o calendário solar até mais avançadas como satélites. Ocorre, contudo, que é possível avançar para além das escalas do sistema solar terrestre e da Via Láctea para alcançar o universo como um todo. Este é um dos grandes desafios humanos e cuja área de abordagem é a cosmologia. Assim, astronomia e cosmologia se relacionam intimamente, apesar de que a última se debruça sobre o cosmos como um todo, buscando entender como o universo surgiu, qual o seu tamanho, sua forma geométrica e sua taxa de expansão, por exemplo.

Antes, porém, de adentrar em questões mais específicas referentes à cosmologia moderna, é necessário que sejam abordados assuntos anteriores e que dão embasamento a ideias ainda hoje debatidas e desenvolvidas, visto não termos, de certo, chegado a todas as respostas sobre o universo.

## 1.2 Universo Estático e o Paradoxo de Olbers

Algo que muitos tomam como óbvio, mas sem refletir acerca do motivo ou do real impacto do fenômeno, é o fato de que o céu, à noite, é escuro. Trata-se do tipo de informação que pode parecer óbvia demais até mesmo para ser questionada visto que qualquer ser humano já nasce com esse fato dado: de noite, o sol se põe e o céu escurece. Há, destarte, a vã ideia de correlação entre os fatos. Contudo, afirmar que a ausência de luz no céu noturno seria justamente uma decorrência direta da não presença de nossa estrela se configura como um erro no mínimo inocente.

A simples explicação de senso comum para a escuridão da abóbada celeste é uma ideia equivocada, visto que o valor populacional estelar da Via Láctea sozinha é de cerca de 200 bilhões de estrelas (LI, 2016). Com tamanha quantidade de estrelas nesta galáxia,

não só seria possível iluminar o céu *ad infinitum*, como qualquer vida (pelo menos como as que conhecemos) não teriam qualquer chance de prosperar visto a absurda quantidade de calor que a Terra receberia. Assim, não faz qualquer sentido o céu noturno ser escuro uma vez que, a olho nu, seja possível ver algumas milhares de estrelas no céu, o que seria suficiente para iluminar o planeta sem qualquer dificuldade.

Este questionamento foi proposto por Thomas Digges no final do século XVI ao estranhar o fato de que a noite era escura (RYDEN, 2017), vindo a propor um modelo de universo infinitamente grande, com idade infinita, estático e uniformemente povoado por estrelas. Como veremos logo adiante, esta proposta é falha e leva a um absurdo. Outros estudiosos, como William Gilbert, Johan-nes Kepler, Edmund Halley e Otto von Guericke realizaram tentativas de compreender o fenômeno, porém também sem sucesso (HARRISON, 1984).

Sabemos que os astrônomos de antigamente entendiam o cosmos como um domo no qual estrelas estariam fixadas. Contudo, com a revolução copérnica, o modelo inicial caiu por terra e passa-se a defender um modelo de universo que ocupa um espaço infinito, com estrelas tão grandes e brilhantes quanto o nosso Sol (RYDEN, 2017). Anteriormente, havíamos realizado um exercício mental simples de imaginar que o céu de noite seria bastante iluminado se tomássemos apenas as 200 bilhões de estrelas que compõem nossa galáxia. É possível contudo, calcular uma aproximação para o quão iluminado seria o céu em um universo infinito.

Em grandes escalas, podemos aproximar a densidade de estrelas do universo em um valor de  $n_e \sim 10^9 \text{ Mpc}^{-3}$ . A despeito de estrelas variarem em tamanho, tomemos o raio do sol ( $R_s$ ) como representante do raio médio de uma estrela típica ( $R_e$ ), ou seja,  $R_e \sim R_s = 7,0 \times 10^8 \text{ m} = 2,3 \times 10^{14} \text{ Mpc}$ . Ao observar o céu, direcionando o olhar para um determinado ponto, a linha de visada abarcará um dado espaço. Imaginemos um cilindro cujo raio é  $R_e$ , conforme a Figura 1 retirada de (RYDEN, 2017). Vemos que, em algum momento, uma estrela irá impedir a visão de objetos mais distantes que ela.

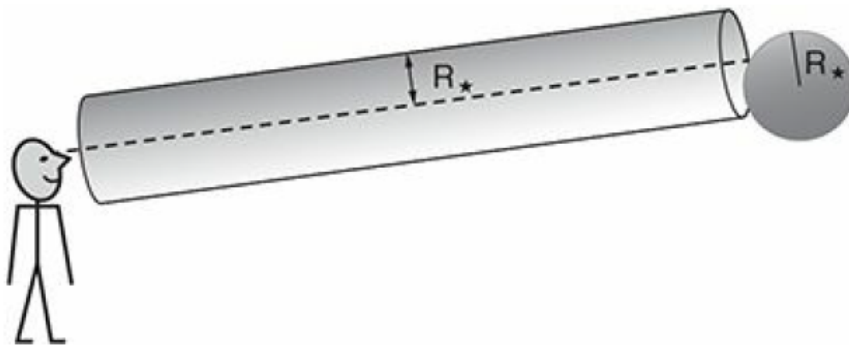


Figura 1 – Cilindro de raio  $R_e$  para uma linha de visão.

O volume do cilindro será:

$$V = \lambda \pi R_e^2, \quad (1.1)$$

e, portanto, o número médio de estrelas que terão o seu centro dentro do cilindro será:

$$N = n_e V = n_e \lambda \pi R_e^2. \quad (1.2)$$

É necessária apenas uma única estrela ( $N = 1$ ) para bloquear a linha de visão e, portanto, ela deve estar a uma distância  $\lambda$  de:

$$\lambda = \frac{1}{n_e \pi R_e^2}. \quad (1.3)$$

Considerando as aproximações  $n_e \sim 10^9 \text{ Mpc}^{-3}$  e  $\pi R_e^2 \sim \pi R_s^2 \sim 10^{-27} \text{ Mpc}^2$ , é fácil verificar que a distância necessária para que a visada intercepte uma estrela é de:

$$\lambda \cong \frac{1}{(10^9 \text{ Mpc}^{-3})(10^{-27} \text{ Mpc}^2)} \cong 10^{18} \text{ Mpc}, \quad (1.4)$$

que é uma distância considerável. Porém, mesmo grande, é um valor finito. Ou seja, num modelo infinito, o universo estará completamente recheado de estrelas (RYDEN, 2017), levando, como esperado, a um céu bastante iluminado, como será visto a seguir.

Tomando o ângulo sólido de uma estrela a uma distância  $r \gg R$

$$\Omega = \frac{\pi R_e^2}{4\pi r^2} = \frac{R_e^2}{4r^2} \quad (1.5)$$

e o fluxo  $f$  da sua luminosidade  $L_e$

$$F = \frac{L_e}{4\pi r^2}, \quad (1.6)$$

o brilho superficial desta estrela, dado em Watts por metro quadrado por esferorradiano será então

$$\Sigma_e = \frac{f}{\Omega} = \frac{L_e}{\pi R_e^2}, \quad (1.7)$$

que é completamente independente da distância até a dada estrela. Assim, conclui-se que a luminosidade superficial de um céu recheado de estrelas é igual a de uma única estrela. A luminosidade superficial do Sol é  $\Sigma_s \sim 5 \times 10^{-3} \frac{w}{m^2 \times sr}$  ao passo que a do céu noturno é de  $\Sigma = 5 \times 10^{-17} \frac{w}{m^2 \times sr}$ , valor  $10^{14}$  menor que o esperado teoricamente. Portanto, o modelo infinito de universo leva a um céu que jamais poderia ser escuro, o que contradiz de forma categórica com o observado toda noite.

E quanto à questão da idade infinita do universo? Apesar de absurdamente grande quando comparada a velocidades com as quais estamos acostumados, a velocidade da luz é finita, implicando que a luz proveniente de certas estruturas ainda não teve tempo de chegar até nós. Caso o universo tenha idade finita igual a  $t_0$ , este valor deve ser bem menor que  $\frac{\lambda}{c}$ , impedindo-nos de observar estrelas a uma distância  $r \sim ct_0$ . Este resultado é o mesmo encontrado para um universo de idade infinita, levando essa teoria a uma não conclusão, portanto.

Por último, cabe pontuar que a equação (1.6) nos levou a entender que a luminosidade superficial de uma estrela não depende da distância, o que vai de encontro aos dados observados (BLAKESLEE et al., 2001) de que na verdade ocorre uma redução deste valor com a distância.

Desta forma, o modelo proposto pelos estudiosos dos séculos XVI a XVIII não é válido, pois não explica o Paradoxo de Olbers. A solução para este problema, e que já foi aqui apontada, é tomar o universo como finito, de idade fixa e não estático. O fato de não vermos todas as possíveis bilhões e bilhões de estrelas existentes se dá justamente porque a informação delas provinda ainda não teve tempo de chegar a nós.



## 2 Modelo Cosmológico Padrão

### 2.1 Isotropia, Homogeneidade e Discussões Preliminares Acerca da Teoria da Relatividade Restrita

No atual modelo cosmológico, o universo é considerado isotrópico e homogêneo em grandes escalas ( $> 100$  Mpc). A imposição dessas duas condições é importante para que possamos desconsiderar o efeito de certas perturbações e modelar o universo como um fluido, permitindo que ele possa ser descrito então a partir apenas da densidade de energia e da pressão (VITENTI, 2011). Nas seções seguintes, discutiremos em maiores detalhes a física e a matemática por trás dessa suposição. Por ora, é importante que se explique o que isotropia e homogeneidade significam neste contexto.

Ao olhar para o céu de noite, é muito óbvio que não existe similaridade entre dois pontos. Em uma dada direção, pode-se ver a lua cheia, por exemplo, ao passo que outro ponto não conterà outra lua cheia. Indo mais além, temos os planetas do sistema Solar, gases, outras estrelas e o buraco negro no centro de nossa galáxia. Seguindo ainda mais além, encontramos outras formações e corpos que aparentam estar distribuídos de tal forma que o universo deveria ser considerado anisotrópico.

Assim, se tomarmos uma determinada direção, digamos entre a Terra e Plutão, certamente será uma direção distinta da que se tomássemos a linha que une a Terra e o Sol em dado momento - considerando aqui claro que Terra, Sol e Plutão não estão alinhados. Em verdade, tomando uma linha para distâncias ainda maiores, como a distância entre a Via Láctea e alguma galáxia mais próxima, ainda assim não haveria isotropia.

Somente quando ultrapassamos distâncias da ordem de  $100$  Mpc<sup>1</sup> é que passamos a não ter mais uma direção especial a partir da qual podemos analisar o universo ao nosso redor. Dito de outra forma, somente quando grandes escalas são consideradas é que o universo é tomado como isotrópico (RYDEN, 2017).

Quanto à homogeneidade, esta característica se refere ao fato de não haver locais especiais no universo. Qualquer ponto que se tome para ser analisado parecerá o mesmo que outro ponto. Dito de outra forma, afirmar que um dado espaço é homogêneo significa dizer que a densidade dos elementos que constituem o universo (matéria e radiação<sup>2</sup>) se distribui de modo homogêneo de forma que a densidade não varia no espaço (DODEL-

<sup>1</sup> Para fornecer uma ideia dessa distância, aglomerados de galáxias, maiores estruturas ligadas do universo, possuem tamanhos da ordem de  $1$  a  $10$  Mpc.

<sup>2</sup> Para além das duas citadas, dados cosmológicos apontam para a existência de matéria e energia escura como elementos que constituem o universo, apesar de ainda não termos sido capazes de detectá-las de forma direta.

SON; SCHMIDT, 2020). Tomando o mesmo raciocínio anteriormente explicado, é óbvio que o universo, em pequena escala, é inhomogêneo. Enquanto em um determinado lugar existe a presença de grandes quantidades de gás intergaláctico, outro ponto pode apresentar uma densidade de matéria consideravelmente menor. Novamente, somente quando ultrapassamos a escala dos 100Mpc é que a densidade do universo passa a ser praticamente constante.

A autora (RYDEN, 2017) afirma que, em larga escala, podemos afirmar então que isotropia implica homogeneidade, porém um espaço pode ser isotrópico e inhomogêneo ou mesmo homogêneo e anisotrópico, o que nos leva a afirmar que é necessário cuidado ao dizer que uma característica implica a outra. Seja como for, como foi explanado, qualquer esfera de raio de 100 Mpc ou mesmo maior será estatisticamente igual a outra de mesmas dimensões .

A linha lógica utilizada aqui para provar, por enquanto quase que filosoficamente, esse modelo cosmológico foi um exercício mental de se imaginar uma linha de visada. Ocorre que nós não observamos superfícies espaciais, mas sim o que se denomina cone de luz. Estamos todos acostumados a entender o mundo ao nosso redor a partir de uma visão tridimensional, em que mapeamos, analisamos e descrevemos o espaço no qual nos encontramos a partir de coordenadas num plano cartesiano (Figura 2).

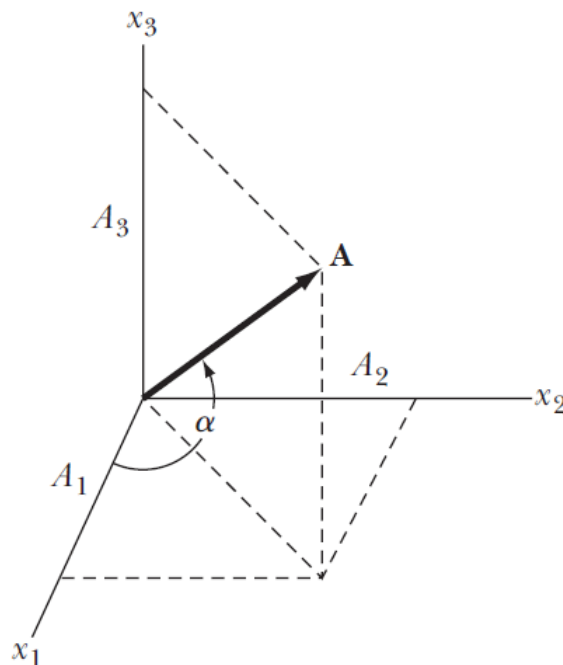


Figura 2 – Um vetor  $\mathbf{A}$  no espaço pode ser descrito por suas componentes ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ) nos diferentes eixos espaciais ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ). Neste caso, o vetor  $\mathbf{A}$  é orientado pelo ângulo  $\alpha$  com o eixo  $x_1$ . Fonte: (THORNTON; MARION, 2011).

Ocorre que em cosmologia (e outras áreas, claro), não estamos lidando com super-

fícias descritas dessa forma e aqui entram as ideias de Einstein e sua relatividade especial, também chamada de restrita. Einstein postulou que (ROHLF; COLLINGS, 1994):

- As leis da física são as mesmas em todos os sistemas inerciais de referência;
- A velocidade da radiação eletromagnética é invariante no vácuo.

O primeiro postulado é o mesmo que Newton já havia muito antes determinado. No entanto, o acréscimo do segundo implica um impacto novo e consideravelmente importante: uma vez que a velocidade da luz ( $c$ ) não muda, um observador A em repouso e um observador B em movimento devem ambos mensurar o mesmo valor para  $c$ , algo completamente inviável se tomarmos a física newtoniana, que prevê que a velocidade em um dado sistema inercial se transforma segundo uma relatividade entre ele e outro sistema inercial (LUZ, 2016).

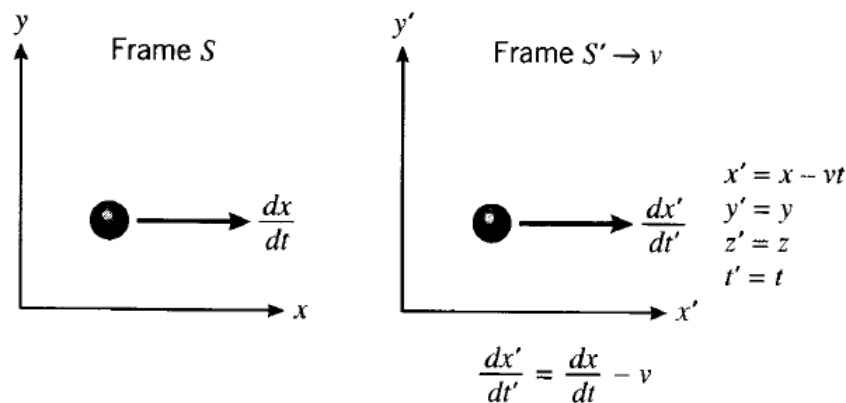


Figura 3 – A velocidade de um dado objeto mensurada a partir de dois referenciais diferentes é dada pela velocidade relativa entre ambos. Fonte:(ROHLF; COLLINGS, 1994)

A física newtoniana, portanto, parte do princípio de que o tempo mensurado por um observador em S e por um em S' é o mesmo bem como as distâncias. No entanto, essa transformação não leva, claro, à invariância da velocidade da luz. Muito se discutiu acerca da constância de  $c$ , chegando-se a afirmar que deveria haver um fluido (éter) que funcionaria como referencial universal a partir do qual a velocidade da luz de fato seria invariável. Dito em outras palavras, o éter seria um meio no qual a luz se propagaria (KOX, 1988). No entanto, o famoso experimento de Michelson-Morley (SHANKLAND, 1964) conduzido em 1887 deu fim a esta ideia que permaneceu predominante durante o Século XIX e lançou luz a novas ideias sobre compreender não o espaço, mas o espaço-tempo.

De modo resumido, dois observadores com velocidades relativas distintas entre si irão mensurar distâncias e tempo de modos distintos, o que se traduz pelos fenômenos

de dilatação temporal e contração espacial, descritas pela chamada Transformação de Lorentz.<sup>3</sup> Considerando dois referenciais com velocidade relativa  $v$  na direção  $x$ , temos

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.1)$$

$$y' = y \quad (2.2)$$

$$z' = z \quad (2.3)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right), \quad (2.4)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.5)$$

A Transformação de Lorentz apresenta propriedades facilmente verificáveis: (1) é uma função linear de  $x$  e  $t$ ; (2) neste caso não altera as coordenadas  $y$  e  $z$ ; (3) não afeta a velocidade da luz; (4) se reduz à Transformada de Galileu para baixas velocidades ( $v \ll c$ ) (ROHLF; COLLINGS, 1994). São de interesse deste trabalho elaborar as consequências dos pontos (3) e (4).

O fato de que chegamos à Transformada de Galileu para baixas velocidades confirma o porquê de nos parecer tão estranha a ideia de contração do espaço e de dilatação no tempo, já que, para que pudéssemos observar tais alterações, seria necessário viajarmos a velocidades imensas<sup>4</sup>. Já o ponto (3) garante o segundo postulado de Einstein e nos informa que a velocidade da luz é constante e igual para todos os observadores e que tal fato se dá porque não estamos mais tratando de uma superfície espacial, mas sim de uma espaço-temporal, ou seja, espaço e tempo não são mais conceitos distinguíveis. Essa conclusão leva ao fato de que deve então haver alguma grandeza física que é igual para dois observadores e a resposta é o que chamamos de Intervalo Espaço-Tempo entre dois eventos e que é dada pela equação a seguir:

<sup>3</sup> Lorentz foi um dos cientistas que mais defenderam a proposta do éter e curiosamente foi um dos nomes que contribuiu para a compreensão que temos hoje da ausência deste fluido e de como descrever o espaço-tempo. Lorentz estudou a teoria de Einstein a fundo, testando as equações e chegando a se comunicar com ele, tendo por fim desenvolvido uma relação matricial - que hoje chamamos de Transformação de Lorentz - que nos permite analisar como o tempo se dilata e como o espaço se contrai.

<sup>4</sup> Há diversos artigos de experimentos conduzidos de forma a provar de maneira observável a dilatação temporal. Um dos primeiros experimentos na área foi o de Hafele e Keating com relógios atômicos em aviões. Sugerimos a leitura de (BUZZO, 2014) como um primeiro contato com o assunto.

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2 t^2. \quad (2.6)$$

Ao tirar a raiz de ambos os lados, teremos então o que chamamos de **distância própria** e que será melhor explicada um pouco mais adiante no momento em que falarmos sobre distância comóvel.

A prova de que o Intervalo Espaço-Tempo é invariante decorre diretamente da Transformação de Lorentz ao substituir as equações 2.1 e 2.4 na equação 2.6:

$$\Delta s'^2 = \gamma^2 \left( \Delta x - v \left( \Delta t - \frac{\Delta xv}{c^2} \right) \right)^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \gamma^2 \left( \Delta t - \frac{\Delta xv}{c^2} \right)^2 \quad (2.7)$$

$$\Delta s'^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \left( \Delta x^2 + v^2 \Delta t^2 - 2 \Delta xv \Delta t - c^2 \Delta t^2 - \frac{v^2 \Delta x^2}{c^2} + 2 \Delta tv \Delta x \right) + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (2.8)$$

$$\Delta s'^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \left( (c^2 - v^2) \frac{1}{c^2} (\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2) + \Delta y^2 + \Delta z^2 \right) \quad (2.9)$$

$$\Delta s'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 \quad (2.10)$$

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2. \quad (2.11)$$

A partir da prova de que temos agora um espaço-tempo, não cabe lançar mão de um sistema de coordenadas como o da Figura 3, pois não estamos mais diante de uma geometria euclidiana, mas sim de uma geometria de Minkowski, também chamado de espaço de Minkowski. Neste espaço, além das coordenadas cartesianas já conhecidas, devemos acrescentar a coordenada temporal, formando então um espaço de quatro dimensões. Porém, é bastante difícil construir uma imagem quadridimensional então realizamos análises em um espaço bidimensional, tomando o eixo das ordenas como  $ct$  e das abscissas como  $x$  uma vez que as coordenadas  $y$  e  $z$  não se alteram (equações 2.2 e 2.3). Assim, podemos descrever o movimento de uma partícula por:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 t^2. \quad (2.12)$$

A partir da equação acima, podemos ter três possíveis situações. No caso em que  $\Delta s^2 > 0$ , teremos então que  $x^2 > c^2 t^2$ , o que mostra que a distância entre dois eventos no espaço-tempo é maior que a distância que a luz percorre no mesmo período de tempo. Como a velocidade da luz é um limite físico, tais eventos não estão casualmente conectados e o intervalo que os separa é chamado de **intervalo tipo espaço**.

Por outro lado, no caso de  $\Delta s^2 < 0$ , temos que  $x^2 < c^2 t^2$ , indicando então que a distância espacial entre eles é menor que a distância que a luz percorre no mesmo intervalo de tempo, tornando os eventos conectados casualmente, sendo este intervalo chamado de **intervalo do tipo tempo**.

Quando, por fim,  $\Delta s^2 = 0$ , temos que  $x^2 = c^2 t^2$  que descreve o intervalo entre dois eventos que são conectados através da velocidade da luz, chamado **intervalo tipo luz**.

Nesta situação, portanto, o vetor que conecta dois eventos apresenta magnitude nula e terá uma inclinação tal que representa justamente a igualdade entre o intervalo espacial e o temporal. A linha mundo de um fóton, então, é chamada de geodésica <sup>5</sup> nula. Uma vez que a linha mundo sai da origem e pode tomar qualquer direção desde que mantenha a inclinação constante cuja tangente é 1, podemos ter diversas possibilidades de direções. Retomando as coordenadas  $y$  e  $z$ , vemos então que a luz percorre um cone. Esse cone de luz, portanto, caracteriza o limite espaço-temporal, indicando que nenhuma partícula apresenta uma linha mundo fora dele, já que isso implicaria uma velocidade maior que a da luz. Além disso, partículas com massa não alcançam a velocidade  $c$  e, com isso, devem apresentar linhas mundo internas ao cone ao passo que partículas sem massa percorrem a geodésica nula, como já explicado.

O cone de luz também apresenta uma importante informação que diz respeito ao passado e ao futuro de um dado evento. Considerando um evento localizado na origem das coordenadas, podemos traçar um cone de luz abaixo dele (passado) e outro acima (futuro), sendo que qualquer evento fora dos cones não é acessível a ele. Somente quando a luz percorrer um certo caminho é que o cone deste evento pode eventualmente cruzar o cone de outro. Tal fato confirma então que sempre haverá informações que nunca chegarão até nós por uma questão de limite imposto pela velocidade da luz, que é finita.

A Figura 4 explica de maneira visual a afirmação que realizamos acerca do hiperespaço descrito: há eventos que não são acessíveis a um determinado evento, caracterizado aqui pelo nosso observador na origem (presente). Para que uma informação chegue até ele, o fóton só poderá percorrer a superfície do cone de luz (RODRIGUES, 2013). Uma vez, portanto, que existe uma limitação espaço-temporal quanto às informações que podem chegar até nós, não é possível observar todo o cosmos, o que leva à limitação de que não podemos, portanto, observar a homogeneidade do universo de forma direta, já que nós detectamos apenas a informação que percorre o cone de luz e não a superfície que o intersepta (MAARTENS, 2011).

A isotropia é observada e comprovada com as informações advindas da radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background* - CMB). Em 1965, Arno Penzias e

<sup>5</sup> Geodésica é o menor caminho possível a ser percorrido no espaço-tempo caracterizado pela curvatura. Mais adiante discutiremos a equação da geodésica e discutiremos a gravidade como manifestação da curvatura espaço-temporal.

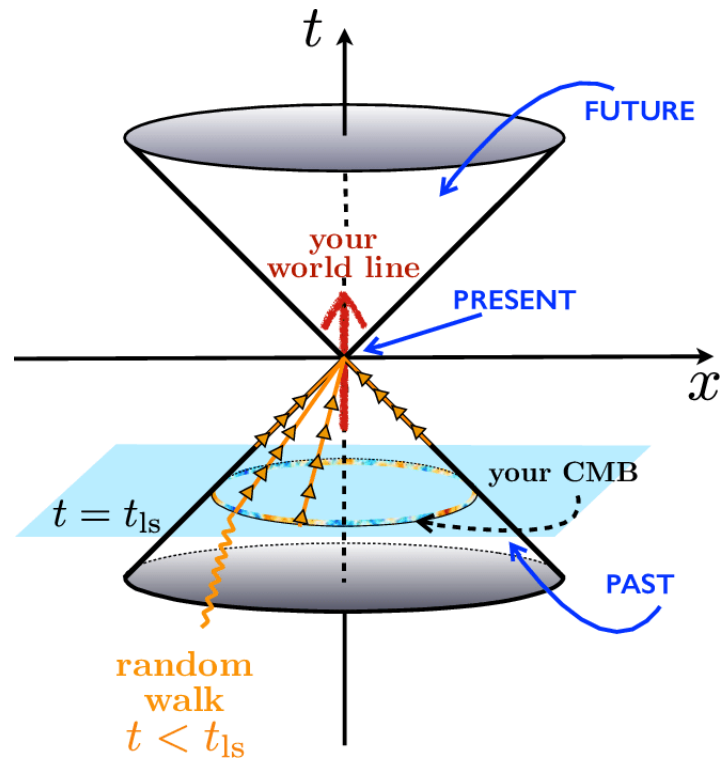


Figura 4 – Representação espaço-temporal com um observador na origem do sistema de coordenadas e com seus cones de luz do passado e do futuro. Considerando este observador em repouso, sua linha mundo (seta vermelha) segue uma reta ascendente visto que ele está se movendo no tempo. A sigla CMB representa a Radiação Cósmica de Fundo e o eixo  $ct$  indica apenas  $t$  em decorrência do uso convencional em algumas obras de  $c = 1$ . Fonte: [<https://rb.gy/slfr8>]

Robert Wilson descobriram um sinal de fundo isotrópico de micro-ondas que se encaixava quase que perfeitamente ao espectro da radiação de corpo negro, que atualmente é medida com uma temperatura de  $2,7255 \pm 0,0006\text{K}$  e com uma energia média de  $6,344 \times 10^{-4}$  eV (RYDEN, 2017). A descoberta desse tipo de radiação levou a fatos e confirmações importantes, como ao reforçamento do modelo Big Bang frente ao modelo de um universo estático. A CMB é resultado de um universo com início extremamente quente e denso. A temperaturas maiores que  $10^4$  K, a matéria bariônica se encontrava completamente ionizada e, portanto, com elétrons livres conferindo opacidade ao universo. Os fótons livres conferiram, portanto, um espectro de corpo negro. Com a expansão do universo, a temperatura então se reduziu ao ponto em que íons e elétrons passaram a poder se combinar, formando átomos neutros, permitindo que a radiação de corpo negro pudesse se ver livre para percorrer o espaço. No entanto, a temperatura da CMB é pequena demais, o que se explica pela expansão do universo (RYDEN, 2017).

Para que fosse possível a obtenção de dados ainda melhores, o uso de satélites se fez necessário, sendo o *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) um dos mais importantes a obter informações da CMB, permanecendo operante por nove anos (até

2010). Um dos mapas por ele gerado pode ser visto na Figura 5 a seguir, retirada de (DELABROUILLE et al., 2009).

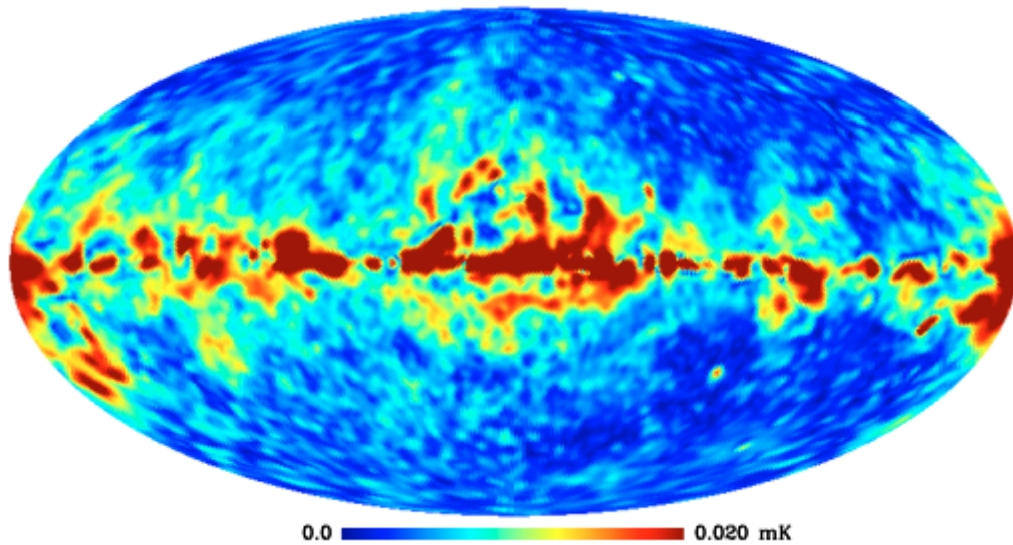


Figura 5 – Mapa da CMB obtido pelo WMAP.

A faixa central mais escura é a sombra do disco de nossa galáxia, indicando um dos obstáculos para a criação de um mapa de CMB completo do céu. Apesar do brilhante desempenho do WMAP, outras abordagens foram desenvolvidas. Em 2013, um novo satélite foi lançado, dando início à Missão Planck, gerando dados ainda mais precisos a partir de métodos diversos. Na Figura 6 retirada de (BOBIN et al., 2014) podemos notar visivelmente a melhora na resolução das medidas.



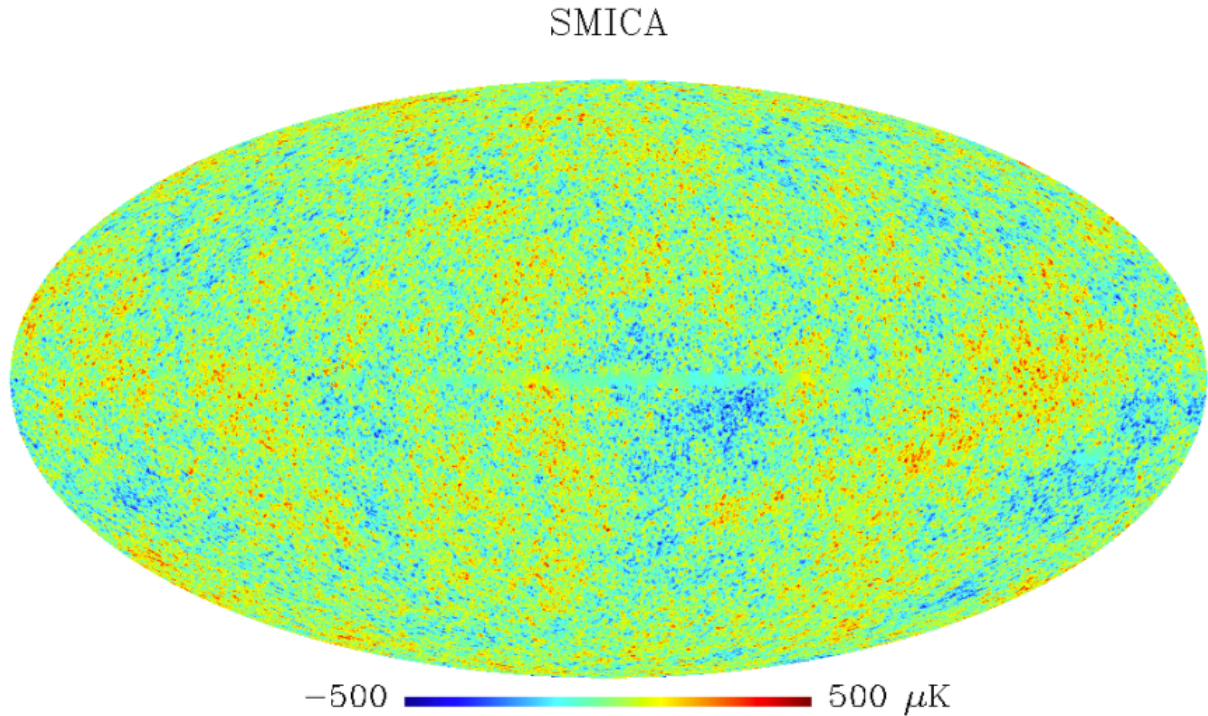


Figura 6 – Mapa da CMB obtido com os dados da Missão Planck com o método SMICA cobrindo cerca de 97% do céu.

A escala abaixo da figura mostra a variação de temperatura, indicando, portanto, que os pontos azuis e vermelhos no mapa indicam flutuações de temperatura que são da ordem de uma parte em  $10^5$  para grandes escalas angulares ( $\sim 7^\circ$ ) (BERNUI; TSALLIS; VILLELA, 2006).

Destarte, vemos que as flutuações de temperatura são extremamente pequenas, levando à conclusão de que o universo, a partir do nosso ponto de vista, é de fato isotrópico (MARINONI; BEL; BUZZI, 2012). No entanto, nada nos leva a acreditar que nosso lugar do Universo é especial o suficiente para que esses dados se comportem dessa forma somente em relação à Terra, levando-nos a crer que se obteriam os mesmos resultados em qualquer ponto. Assim, conclui-se que o Universo como um todo é isotrópico.

A noção de isotropia é importante, pois ela só pode ser detectada pelo que chamamos de observadores comóveis, para os quais há um sistema especial de coordenadas tais que formam um referencial comóvel e a velocidade deste observador em relação a este referencial é chamada de **velocidade peculiar**. Dessa forma, temos que o movimento das estruturas cosmológicas se dá pela combinação da expansão do universo ( $v_u$ ) com a velocidade peculiar ( $v_p$ ) de cada uma delas:

$$\vec{v} = \vec{v}_u + \vec{v}_p. \quad (2.13)$$

Para um observador não comóvel o céu se apresentaria com algum desvio para o

vermelho (*redshift*) ou para o azul (*blueshift*) em decorrência da mudança das distâncias (DESHWAL; GARIMA; YADAV, 2021). Observadores comóveis são aqueles regidos pela Lei de Hubble-Lemaître e nos adentraremos nesse assunto para explicar melhor esse ponto.

## 2.2 Redshift e a Constante de Hubble

O fato de o universo estar em expansão leva a um fenômeno hoje bastante conhecido: o *redshift*. A luz emitida por uma galáxia chega até nós desviada para o vermelho em decorrência do aumento do seu comprimento de onda. Falamos há pouco que este fenômeno só poderia ocorrer no caso de um observador que não detectasse a isotropia do universo, mas o fato é que nós observamos tanto a isotropia como o *redshift*. A explicação para este aparente paradoxo está no conceito de **distância própria** e **distância comóvel**.

Ocorre que por muitos anos os astrofísicos interpretaram o *redshift* como um exemplo do Efeito Doppler, explicando a queda de frequência da luz recebida como consequência do afastamento das galáxias (ou qualquer outra fonte de luz) (ROWLAND, 2020). Trata-se de um erro, pois o Efeito Doppler descreve um fenômeno de distorção perceptiva em que ondas chegam a nós em maior ou menor quantidade por conta do movimento da fonte, mas o comprimento de onda não muda. Por exemplo, imaginemos uma fonte que emite um som e que está se aproximando de um observador. Então neste caso ele irá receber mais frentes de onda em um espaço menor de tempo lhe dando a sensação de que a frequência aumentou, mas é tão somente isso, uma sensação, visto que a frequência e o comprimento de onda permanecessem iguais. No caso do *redshift* cosmológico, por outro lado, não se trata de uma distorção perceptiva, mas sim de uma mudança real no comprimento de onda, pois, com a expansão do universo, a energia de um fóton de luz, que é determinada pela sua frequência (equação 2.14), cai a uma determinada taxa, chamada de fator de escala (2.15).

$$E = hf. \quad (2.14)$$

$$E = \frac{E_0}{a(t)}. \quad (2.15)$$

A equação 2.15 é deduzida a partir de uma análise métrica que ainda será melhor desenvolvida neste trabalho. Por ora, importa saber que a taxa de expansão do universo é dada pelo fator de escala  $a(t)$ . A equação explica que, no momento em que o fóton foi emitido (por uma galáxia, por exemplo), sua energia era igual a  $E_0$ , mas ela se reduziu até  $E$  ao chegar a nós. Este fenômeno é consequência da expansão do universo, mas mais do que isso, é consequência do fato de que não são as estruturas cósmicas que se movem,

mas sim o próprio tecido espaço-tempo que se modifica. Uma vez que a luz, como já explicado, percorre esse hiperespaço, o aumento de seu comprimento de onda se dá pelo alongamento do espaço-tempo. As coordenadas de dois corpos no universo não mudam apesar de estarmos observando que eles se afastam um do outro.

Podemos imaginar um lençol cujo tecido é elástico o suficiente. Costuramos então duas bolas de lã em cima do lençol, cada uma em um lugar e medimos a distância entre elas. Em seguida, nós esticamos o lençol, puxando-o por todos os lados. Isso fará com que a distância física entre as bolas aumente, mas não porque elas se movimentaram e sim porque o espaço que elas ocupam que sofreu alongamento em todas as direções em igual magnitude, o que significa que as bolas de fato não saíram do lugar, ou seja, as suas coordenadas iniciais se mantiveram inalteradas. Assim, temos que lidar com dois tipos de distâncias: a distância física - cuja medida de fato é alterada - e a comóvel - em que não há qualquer mudança nas coordenadas dos eventos.

Desta forma, não são as estruturas que estão em movimento, mas sim o tecido espaço-tempo, o que quer dizer então que a distância física entre os corpos de fato aumenta, mas não a distância comóvel, visto que ambos são movimentados a uma mesma taxa. A Figura 7, retirada de (DODELSON; SCHMIDT, 2020), ilustra o fato.

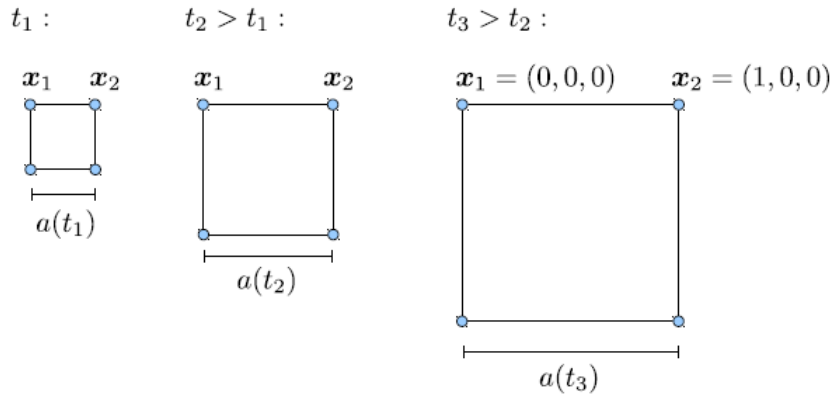


Figura 7 – As coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  permanecem as mesmas, indicando que a distância comóvel ( $D_c$ ) entre elas ( $|x_2 - x_1|$ ) não se altera. No entanto, a distância física ( $D_f$ ) aumenta proporcionalmente à  $D_c$  numa relação que pode ser descrita como  $D_f = D_c \times a(t)$

O espectro de uma galáxia apresenta regiões de absorção e de emissão de ondas. Considerando  $\lambda_{em}$  como sendo o comprimento de onda emitida e  $\lambda_{ab}$  o comprimento de onda absorvida, podemos definir o redshift ( $z$ ) como sendo:

$$z \equiv \frac{\lambda_{ab} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (2.16)$$

Quando  $z < 0$ , temos *blueshift* e a galáxia está se aproximando de nós, ao passo que  $z > 0$  configura, portanto, um *redshift*, e a galáxia está se afastando de nós <sup>6</sup>.

Em 1912, Vesto Slipher calculou  $z = -0,001$  para a galáxia M31, encontrando então uma velocidade de -300 km/s com que ela se aproximava da Terra. Em 1927, Georges Lemaître encontrou 37 galáxias com *redshift* contra 5 com *blueshift* e com velocidades de aproximadamente +600 km/s, sugerindo que velocidades tão elevadas poderiam ser decorrência da expansão do universo (RYDEN, 2017).

Edwin Hubble, um dos astrônomos mais famosos do mundo, mensurou o valor de  $z$  para 20 galáxias, chegando a conclusões importantes. Quanto mais distante era a galáxia, maior era o seu redshift, indicando que ela se afastava de nós a uma velocidade maior do que galáxias mais próximas. Ao plotar os dados, a regressão linear lhe ofereceu o que hoje é chamada de Lei de Hubble-Lemaître:

$$z = \frac{H_0}{c} r. \quad (2.17)$$

<sup>6</sup> Usaremos as expressões "afastar" e "aproximar", mas com a ressalva de que é necessário lembrarmos que não são de fato as galáxias que estão em movimento. O uso dessas expressões serve tão somente para efeitos práticos.

Hubble publicou seu famoso estudo em 1929, mostrando que a relação entre a velocidade de afastamento de nebulosas e a distância delas à Terra era linear e dada por meio da Constante de Hubble ( $H_0$ ). Esta constante é obtida a partir da razão entre a velocidade radial da galáxia e a sua distância 2.18.

A Figura 8 abaixo foi retirada de (BAHCALL, 2015) e mostra o gráfico gerado por Hubble. Os círculos pretos foram plotados com os dados de galáxias sozinhas, gerando a reta de regressão contínua. Os círculos brancos, por sua vez, representam galáxias agrupadas e cuja linha de regressão é o tracejado. A cruz é o resultado de 22 galáxias cujas distâncias foram impossíveis de mensurar separadamente. É importante ressaltar que a unidade de velocidade está errada no gráfico, devendo ter sido escrita em km/s (BAHCALL, 2015).

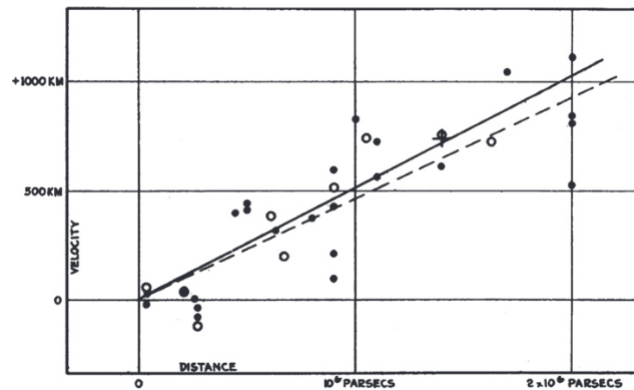


Figura 8 – Gráfico obtido por Hubble em 1929.

De mãos dos resultados, Hubble mostrou então que:

$$v = H_0 \times d, \quad (2.18)$$

que é outra maneira de expressar a Lei de Hubble-Lemaître (equação 2.17). A partir disso, Hubble encontrou que  $H_0 = 500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Porém, Hubble cometeu erros ao subestimar as reais distâncias por ele analisadas. O próprio gráfico plotado mostra que há valores que fogem das curvas e parte da explicação se dá porque, a despeito de a velocidade angular poder à época ser mensurada com certa precisão - ainda que haja interferência da velocidade peculiar -, este não era o caso para as distâncias, que acabavam sendo mensuradas com grandes erros. Foi somente a partir da década de 1970, obviamente com uma amostragem maior, que cientistas conseguiram desenvolver técnicas mais precisas e avançadas para mensurar distâncias cosmológicas (PATUREL; TEERIKORPI; BARYSHEV, 2017), sendo o valor atual utilizado igual a  $68 \pm 2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (RYDEN, 2017), consideravelmente menor.

Outra falha na teoria de Hubble é que sua lei explica bem a relação para galáxias próximas de nós, pois o modelo de universo plano no qual ele se baseou acaba sendo uma boa aproximação. Hubble acreditava que a galáxia estava se afastando e que os dados indicavam um *redshift* do tipo Efeito Doppler. Sua formulação, contudo, não explicava o real motivo de as galáxias mais distantes estarem se movimentando de forma mais rápida. A solução desse imbróglio adveio, como já explicado, da teoria da relatividade geral, mostrando que a gravidade é na verdade a manifestação da curvatura do espaço-tempo. Assim, o *redshift* é uma das consequências da expansão do espaço-tempo: quanto mais tempo passar desde que a luz foi emitida por uma dada galáxia, mais o espaço foi expandido, logo maior será o efeito sobre o comprimento de onda. Por se tratar de eventos comóveis, a velocidade é a mesma para qualquer uma das galáxias observadas, então o que ocorre é um maior efeito de *redshift*, levando a uma impressão de que galáxias distantes de nós se afastam a uma velocidade maior. Como afirma (MABKHOUT, ), "ao nos referirmos ao *redshift* cosmológico como um Efeito Doppler, estamos insistindo que nossa intuição newtoniana sobre o movimento ainda se aplica sem qualquer mudança significativa à arena cosmológica"<sup>7</sup>.

Antes de darmos prosseguimento, devemos lembrar que há galáxias que na verdade apresentam velocidade peculiar na nossa direção e que, por isso, observamos um *blueshift* uma vez que  $v_p$  se sobrepõe ao afastamento decorrente da expansão do espaço-tempo  $v_u$  (2.13) visto estarem localizadas em relação a nós em uma escala muito menor que a do universo.

Agora que está mais do que explicada a questão do afastamento da galáxias, é importante pontuar que a maioria das galáxias apresenta *redshift* e isso implica também a isotropia e homogeneidade do universo.

$\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  e  $\vec{r}_3$ , formando entre si um triângulo de forma que:

$$r_{12} \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad (2.19)$$

$$r_{23} \equiv |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| \quad (2.20)$$

$$r_{31} \equiv |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|. \quad (2.21)$$

Em um universo homogêneo expandindo uniformemente, o formato de triângulo se mantém mesmo com o afastamento progressivo das galáxias. Assim, é necessário que haja um fator de proporcionalidade que deve ser aplicado em todos os lados do triângulo de forma que:

<sup>7</sup> No original: By referring to cosmological redshifts as Doppler shifts, we are insisting that our Newtonian intuition about motion still applies without significant change to the cosmological arena.

$$r_{12}(t) = a(t)r_{12}(t_0) \quad (2.22)$$

$$r_{23}(t) = a(t)r_{23}(t_0) \quad (2.23)$$

$$r_{31}(t) = a(t)r_{31}(t_0), \quad (2.24)$$

em que  $a(t)$  é o que chamamos de **fator de escala**, sendo igual a 1 no momento presente, ou seja,  $t = t_0$ . O fator de escala, portanto, nos informa sobre como a expansão do universo depende do tempo decorrido (RYDEN, 2017).

Um observador na galáxia 1 verá as outras duas se afastando com as seguintes velocidades:

$$v_{12}(t) = \frac{dr_{12}}{dt} = \dot{a}(t)r_{12}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{12}(t), \quad (2.25)$$

$$v_{31}(t) = \frac{dr_{31}}{dt} = \dot{a}(t)r_{31}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{31}(t). \quad (2.26)$$

As mesmas relações são encontradas para observadores em qualquer uma das demais duas galáxias. Comparando as equações 2.25 e 2.26 com a equação 2.18 e sabendo-se que, neste caso,  $d = r$ , chega-se à seguinte relação:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.27)$$

que é o resultado encontrado para qualquer universo seguindo uma expansão uniforme com distribuição isotrópica e homogênea (RYDEN, 2017), o que também implica que em algum momento passado as galáxias já estiveram juntas.

Consideremos um par de galáxias separadas por uma distância  $r$  e com velocidade  $v$ . Na inexistência de forças externas,  $v$  é constante e, portanto, temos que o tempo é expresso da seguinte maneira:

$$t_0 = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = H_0^{-1}, \quad (2.28)$$

mostrando que  $t_0$  não depende da distância  $r$  que separa as duas galáxias. Este é conhecido como o Tempo de Hubble e seu valor é  $\sim 14$  bilhões de anos (BAHCALL, 2015) ou mais exatamente  $14,38 \pm 0,42$  Giga anos. Assim, a observação do *redshift* de galáxias leva naturalmente à Teoria do Big Bang.



Por outro lado, não podemos concluir que esta seja a idade do universo, visto que a gravidade gerada pela massa das galáxias atuaria para desacelerar a expansão, levando a uma idade menor que  $H_0^{-1}$ . Portanto, pode ser que, em verdade, o universo seja mais velho que o Tempo de Hubble, situação na qual é necessária a presença de uma constante cosmológica ( $\Lambda$ ).

## 2.3 Distâncias Cosmológicas

As descobertas de Hubble e demais cientistas de que as estruturas se afastam de nós leva a um desafio quando a questão é medir distâncias. Como vimos, podemos tentar mensurar a distância física ou a distância comóvel entre dois eventos no espaço-tempo. Para tanto algumas técnicas são usadas (DODELSON; SCHMIDT, 2020).

- Distância Comóvel

Em um intervalo de tempo  $dt$  a luz que sair de uma galáxia percorrerá a distância comóvel  $dD_c = \frac{dt}{a}$ , considerando claro a convenção de que  $c = 1$ , logo a distância total percorrida pelo fóton será:

$$D_c(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_{a(t)}^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (2.29)$$

mostrando que  $\chi \approx \frac{z}{H_0}$  para *redshifts* pequenos. Quando anteriormente descrevemos o cone de luz, explicamos que há eventos que não são casualmente conectados por estarem a uma distância maior do que a que a luz percorre em um determinado tempo. Podemos então imaginar uma linha que separa a Terra de todas as estruturas que conseguimos ver até esse dado ponto, chamado de **Horizonte Comóvel** e que é definido da seguinte forma:

$$\eta(t) \equiv \int_t^0 \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.30)$$

- Distância Diâmetro Angular

Quando conhecemos o tamanho físico  $l$  de um objeto cosmológico (chamado de **régua padrão**), podemos mensurar a distância através do ângulo pela relação

$$D_A = \frac{l}{\theta}, \quad (2.31)$$

em que  $d_A$  é a distância diâmetro angular. Em decorrência da expansão do universo, o tamanho comóvel do objeto em questão será dado por  $\frac{l}{a}$ , em que  $a$  é o fator de escala



no momento em que a luz foi emitida. Podemos ainda considerar  $\theta = \frac{l}{a}D_c(a)$ , chegando então a:

$$D_a = a \times D_c = \frac{D_c}{1+z}. \quad (2.32)$$

A expressão acima mostra que, para *redshifts* pequenos, a distância diâmetro angular se iguala à distância comóvel, caindo então para *redshifts* maiores, indicando que objetos mais distantes se mostram maiores para nós. Tal fato é mais uma das provas da expansão do universo, uma vez que a ilusão de tamanho se dá porque, no momento da emissão da luz, os objetos estavam mais próximos de nós, levando à conclusão de que o universo já foi menor. Temos, contudo, que tomar cuidado, pois essa análise só é válida em um universo euclidiano.

- Distância Luminosidade

Podemos ainda mensurar as distâncias usando o que chamamos de **velas padrão**, que são o fluxo de luminosidade emitido por um objeto (DODELSON; SCHMIDT, 2020). Para objetos próximos, o fluxo  $F$  observado a uma distância  $d$  de uma fonte cuja luminosidade  $L$  é conhecida é dado por

$$F = \frac{L(\chi)}{4\pi\chi^2(a)}, \quad (2.33)$$

em que  $L(\chi)$  é a luminosidade através de uma esfera comóvel de raio  $\chi(a)$ . Em decorrência da expansão do universo, quando os fótons foram emitidos, eles puderam percorrer distâncias maiores do que atualmente. Como vimos, além da quantidade de fótons atravessando a casca esférica, a energia deles também decai com fator  $a$ , levando a expressão 2.33 à forma

$$F = \frac{La^2}{4\pi\chi^2(a)}, \quad (2.34)$$

e então podemos definir a distância luminosidade como sendo

$$D_L \equiv \frac{\chi}{a}, \quad (2.35)$$

que também deve ser levada em consideração apenas em um universo euclidiano <sup>8</sup>.

A preocupação de frisar a geometria espacial se dá pelo fato de que não só a curvatura precisa ser levada em consideração, como também a presença de energia escura, cujo estudo não é objeto deste TCC.

<sup>8</sup> Para um observador a 10 parsecs (REIS; SIFFERT, 2022).

A imagem a seguir reúne os três tipos de distâncias aqui descritos, apontando para o fato de que a distância luminosidade cresce linearmente com o *redshift*, ao passo que a distância comóvel decai com o aumento de  $z$  bem como a distância diâmetro angular.

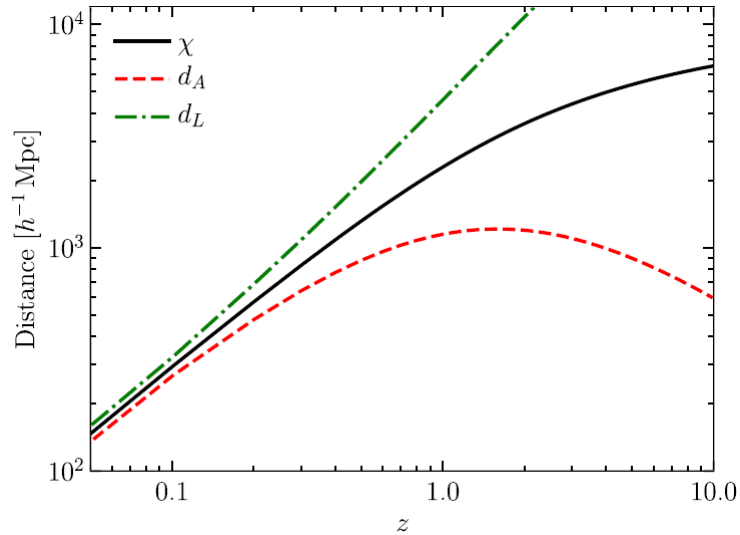


Figura 9 – Gráfico mostrando a relação entre as diferentes distâncias cosmológicas e o *redshift*. Fonte: (DODELSON; SCHMIDT, 2020).

## 3 Dinâmica Cosmológica

Esta seção é dedicada às derivações das equações de campo de Einstein e da equação de Friedmann. Fazemos especial agradecimento ao criador de vídeos bastante didáticos do canal [eigenchris \(EIGENCHRIS, 2022\)](#), cujas aulas foram de suma importância para o desenvolvimento desta seção.

### 3.1 A Métrica

Não estamos mais no campo da física newtoniana e diversas das explicações dos fenômenos naturais a nós não mais se aplicam. A teoria da relatividade restrita aponta para o fato de que nossa intuição pode ser enganosa e a relatividade geral vem abarcar os efeitos da gravidade a partir do fato de que espaço e tempo não são mais entidades físicas separáveis entre si.

Para compreender a expansão do universo e a curvatura do espaço-tempo, lançamos mão, como já explicado, da geometria de Minkowski, que descreve o espaço não mais como plano, mas a partir de uma formulação hiperbólica. O pontapé inicial destas ideias foi dado na seção 2.1, mas precisaremos aprofundar alguns conceitos para compreender as equações de Einstein e chegarmos à solução delas dada por Friedmann e então descrever o universo a partir delas.

Para compreender a real distância física entre dois eventos no espaço-tempo, precisamos de uma **métrica** a partir de um sistema de coordenadas. Em um plano bidimensional, a distância entre dois pontos é invariante por mudança de coordenadas e pode ser expressa na forma:

$$dl^2 = \sum_{i,j=1,2} g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.1)$$

em que  $g$  é a métrica generalizada vinculada aos parâmetros  $i$  e  $j$  que, no caso das coordenadas cartesianas, são  $x$  e  $y$ , ou, como normalmente definimos,  $x^1$  e  $x^2$ . A métrica é uma matriz que atua sobre os elementos de distância ([DODELSON; SCHMIDT, 2020](#)). No caso cartesiano, temos:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

ao passo que em coordenadas polares ela se apresenta da seguinte forma:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

No caso do hiperespaço de Minkowski, o espaço-tempo é quadrimensional, ou seja, composto de três coordenadas espaciais ( $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ) e uma coordenada temporal ( $x^0$ ). Assim, a invariância do Intervalo Espaço-Tempo é dada por:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.4)$$

que, em acordo com a notação de Einstein, pode ser expressa de forma mais enxuta quando índices repetidos são somados, situação em que o símbolo de somatório é suprimido. A métrica  $g_{\mu\nu}$  é uma matriz 4x4 simétrica e recebe, no espaço de Minkowski, a denominação  $\eta_{\mu\nu}$ , sendo expressa da seguinte maneira:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

O sinal negativo no primeiro termo diz respeito à convenção já explicada e se refere ao termo  $-ct$ , usando  $c$  como 1. Como a expansão do universo é regida por um fator de escala  $a(t)$  que atua sobre as coordenadas espaciais, temos

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

que é a métrica FLRW para um universo Euclidiano, indicando que todas as três direções do espaço são afetadas na mesma proporção, como no exemplo do lençol.

## 3.2 A Geodésica e o Caminho das Partículas Livres em um Universo em Expansão

Da mecânica clássica, sabemos que um objeto qualquer sob a ação de uma força está sendo acelerado. Na presença de força resultante nula, este objeto mantém seu movimento com velocidade constante, sendo então considerado como uma partícula livre. Quando, porém, passamos a entender que as partículas ocupam o espaço-tempo e que a gravidade é na verdade a manifestação da sua curvatura, entendemos então que um

fóton, por exemplo, não está acelerado, mas sim percorrendo a curvatura espaçotemporal, implicando que podemos considerá-lo então como uma partícula livre.

Na ausência de qualquer força à exceção da gravidade, as partículas percorrem o menor caminho possível entre dois pontos. Na geometria euclidiana, trata-se de uma reta, ao passo que no nosso caso temos o que chamamos de **geodésica** (DODELSON; SCHMIDT, 2020). O ponto de partida é a modelagem newtoniana para um movimento livre:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0. \quad (3.7)$$

A equação acima satisfaz a descrição do movimento em coordenadas cartesianas  $x^i = (x, y)$ , mas não em coordenadas polares, em que seus vetores de base se modificam no plano, o que nos leva a crer que deve então haver uma generalização para a expressão 3.7. Para isso, uma série de passos devem ser realizados.

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{dx'^j}{dt} \quad (3.8)$$

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (3.9)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad (3.10)$$

$$z = r \cos \theta \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \begin{pmatrix} \cos x'^2 & -x'^1 \operatorname{sen} x'^2 \\ \operatorname{sen} x'^2 & x'^1 \cos x'^2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Plotando a equação 3.12 na 3.7, ficamos com:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{dx^i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{dx'^j}{dt} \right] = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{dx'^k}{dt} \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{dx'^j}{dt} \right] = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{d^2 x'^j}{dt^2} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \frac{dx'^k}{dt} \frac{dx'^j}{dt} = 0, \quad (3.15)$$

em que foi utilizada a regra da cadeia (equação 3.14) para obter a expressão 3.15. O termo  $\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$  é a matriz de transformação 3.12. Podemos então multiplicar a equação pela inversa da matriz,

$$\frac{d^2 x'^l}{dt^2} + \left( \left[ \left[ \frac{\partial x}{\partial x'} \right]^{-1} \right]^l_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \right) \frac{dx'^k}{dt} \frac{dx'^j}{dt} = 0. \quad (3.16)$$

A expressão dentro dos parênteses é chamada **Símbolo de Christoffel**, denominado  $\Gamma_{jk}^l$ , sendo seu valor nulo em coordenadas cartesianas, o que nos permite retornar à equação 3.7.

A equação da geodésica está expressa em termos de derivadas temporais, contudo o tempo deve passar a ser considerado como uma das quatro coordenadas e, portanto, devemos mudar a expressão 3.16 de forma que sua equação dependa de um parâmetro  $\lambda$ . Assim sendo,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (3.17)$$

em que o Símbolo de Christoffel ganha a seguinte forma:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left[ \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right]. \quad (3.18)$$

Antes de prosseguirmos, cabe explicar com um pouco mais de detalhe a motivação para o uso de  $\lambda$  como parâmetro na equação 3.17. Quando estamos lidando com espaços euclidianos, é natural movermos um vetor sem que isso o altere e tal mudança é chamada de **transporte paralelo**, sendo naturalmente compreendido e visualizado. Em um espaço euclidianos, vetores são elementos tangentes ao plano a que pertencem em um determinado ponto, sendo então fácil realizar uma comparação entre diferentes vetores.

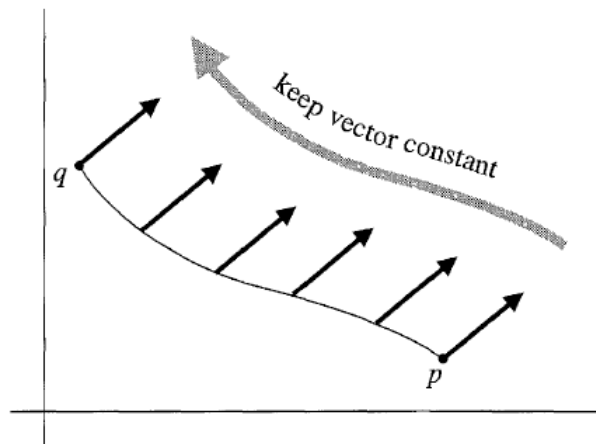


Figura 10 – Esquema apontando o transporte paralelo de um vetor, não havendo qualquer mudança em sua dimensão ou orientação. Fonte: (CARROLL, 2004)

O fato de podermos realizar tais feitos no espaço plano se dá porque não precisamos usar de forma explícita o Símbolo de Christoffel. No entanto, no contexto de um espaço

curvo, a situação não é tão fácil assim e precisamos de algum parâmetro a partir do qual o transporte paralelo ocorre, ou seja, sem mudança dos vetores. Nesta situação, o transporte paralelo dependerá do caminho percorrido entre dois pontos, como pode ser visto na imagem a seguir:

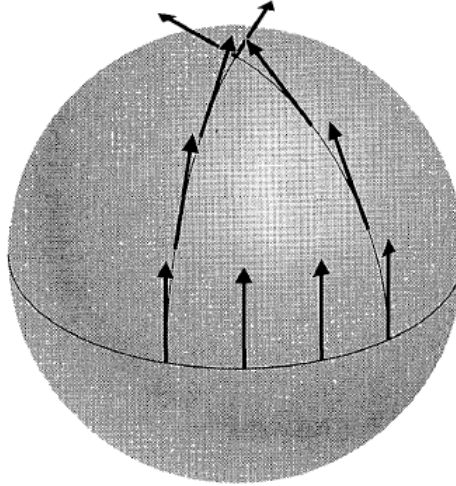


Figura 11 – Os quatro vetores são iguais no ponto localizado em cima do equador, mas têm sua angulação alterada ao percorrerem o caminho na esfera. Fonte: (CARROLL, 2004)

Vemos pela imagem acima que, no equador temos todos os vetores iguais, mas que se tornam distintos ao chegarem no polo norte em decorrência da diferença angular devido ao caminho curvo. Assim, dois vetores só podem ser comparados quando são tangentes ao mesmo plano. Esta é uma questão que reforça o que foi explicado acerca do *redshift* não ser um Efeito Doppler. Caso fosse, teríamos que considerar que dois objetos (nós e uma galáxia distante, por exemplo) estariam no mesmo plano, o que não é verdade, não sendo então possível construir uma ideia de velocidade relativa entre ambos. Logo, para que possamos realizar um transporte paralelo, este deve ser considerado em um espaço curvo, então o parâmetro  $\lambda$  contido na expressão 3.17 é o tamanho do arco em que encontramos os nossos vetores (ou tensores, se preferirmos usar um termo melhor). Para este trabalho, a noção abstrata atrelada ao parâmetro  $\lambda$  nos basta, mas para os interessados em entender melhor o formalismo por trás do que aqui explicamos sugerimos a leitura do texto *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (LÓPEZ, 2014).

Voltando ao que estávamos construindo e usando as equações 3.6 e 3.18, podemos então calcular o Símbolo de Christoffel. Começando pelos componentes cujo  $\mu = 0$ , temos que  $g^{0\nu} = 0$  para  $\nu \neq 0$  e  $-1$  caso contrário. Temos então que:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \right]. \quad (3.19)$$

Toda a primeira coluna da matriz  $g_{\alpha\beta}$  é formada por valores constantes, em que apenas o primeiro é diferente de zero. Assim, os termos  $g_{\alpha 0}$  e  $g_{\beta 0}$  são constantes, logo suas derivadas são nulas, o que faz com que reste apenas o último termo na expressão 3.19:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}. \quad (3.20)$$

Os únicos componentes da matriz  $g_{\alpha\beta}$  que não são constantes e que dependem do tempo ( $x^0$ ) são  $g_{11}$ ,  $g_{22}$  e  $g_{33}$ , todos iguais a  $a(t)^2$ , cuja derivada é certamente  $2a\dot{a}$ . Concluimos então que:

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} \dot{a} a, \quad (3.21)$$

em que os índices  $i$  e  $j$  representam as coordenadas espaciais, indo, portanto, de 1 a 3. Tomemos agora o Símbolo de Christoffel para sobrescritos espaciais  $\mu \neq 0$ :

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right] = 0. \quad (3.22)$$

Ou seja, quando todos os índices são temporais, o valor de  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  é nulo. Para o caso em que  $\alpha = 0$ , apenas a derivada central sobrevive, visto que a derivada temporal de  $g_{0\nu}$  e  $g_{0j}$  é nula.

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\partial g_{j\nu}}{\partial x^0} \quad (3.23)$$

A única possibilidade de que a derivada acima não seja nula é que  $j = \nu$ , logo precisamos que  $\mu = \nu$  e que  $i = j$ , pois todos os demais valores são zero. Assim sendo:

$$\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{0i}^j = \delta_{ij} \frac{1}{2a^2} 2a\dot{a} = \delta_{ij} \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.24)$$

Os autores (DODELSON; SCHMIDT, 2020) mostram uma aplicação interessante do que conseguimos desenvolver aqui para o caso de uma partícula com vetor energia-momento  $P^\alpha = (E, \mathbf{P})$  em um hiperespaço quadridimensional dada por:

$$P^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}. \quad (3.25)$$

Uma vez que a derivada do tempo em relação a  $\lambda$  é definida como sendo a energia ( $E$ ),

$$P^\alpha = \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{dx^0} = E \frac{dx^\alpha}{dt}. \quad (3.26)$$



Levando em consideração as conclusões a que chegamos para o Símbolo de Christoffel, podemos tomar então a componente temporal e plotá-la na equação 3.17 de forma a se obter:

$$\frac{d^2x^0}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^0 \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \quad (3.27)$$

$$E \frac{dE}{dt} + \Gamma_{ij}^0 P^i P^j = 0 \quad (3.28)$$

$$E \frac{dE}{dt} + \delta_{ij} a \dot{a} P^i P^j = 0. \quad (3.29)$$

No caso de um fóton, temos ainda:

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -E^2 + \delta_{ij} a^2 P^i P^j = 0 \quad (3.30)$$

$$\delta_{ij} P^i P^j = \frac{E^2}{a^2}. \quad (3.31)$$

Aplicando esse resultado em 3.29, ficamos com:

$$E \frac{dE}{dt} = -\frac{E^2}{a^2} a \dot{a} \quad (3.32)$$

$$\frac{dE}{dt} + \frac{E}{a} \dot{a} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (3.34)$$

$$E = \frac{E_0}{a}. \quad (3.35)$$

Que é a expressão 2.15 mostrada anteriormente ao falarmos sobre a queda de energia de uma partícula em um universo em expansão.

### 3.3 As Equações de Einstein e de Friedmann

Einstein desenvolveu equações de campo, que são as equações principais de sua teoria geral da relatividade. Essas equações são de importância extrema visto que predizem a existência de buracos negros, ondas gravitacionais e a expansão do universo. Até este momento, realizamos a descrição da métrica no intuito de mostrar como ela se relaciona

com a ideia de distâncias em espaços generalizados com o uso da equação da geodésica 3.17. Mas a relatividade geral na qual as equações de Einstein se baseiam permite que tomemos a métrica também como indicador da composição do universo a partir da relação entre a geometria do espaço-tempo ( $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$ ) com o tensor energia-momento ( $T_{\mu\nu}$ ):

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

em que  $G$  é a constante de gravitação e  $\Lambda$  é a constante cosmológica. Lembremos que partimos no início deste trabalho da imposição de que estamos lidando com um universo homogêneo e isotrópico. Isso quer dizer que, dentre todos os possíveis seccionamentos do espaço-tempo, fazemos a escolha arbitrária de desconsiderar perturbações em tais hiper-superfícies (VITENTI, 2011). Logo, em grandes escalas, a resultante média do momento e das velocidades deve ser nula, restando então lidarmos com densidade de energia  $\rho$  e pressão  $P$ . Para descrever esse universo, usamos o tensor energia-momento descrito a seguir (DODELSON; SCHMIDT, 2020):

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

cuja estrutura é consequência da métrica FRLW e descreve um universo como um fluido (DODELSON; SCHMIDT, 2020). Vale lembrar que a velocidade da luz no vácuo está embutida neste tensor, logo  $T_{00} = \rho c^2$ .

Com relação à equação 3.36, a sua parte esquerda diz respeito então à geometria do espaço-tempo, sendo função da métrica, ao passo que a direita descreve a composição do universo: matéria, radiação e outros componentes. A componente  $G_{\mu\nu}$  se relaciona com o Tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  da seguinte maneira:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (3.38)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

O Tensor de Ricci é comumente expresso em termos de Símbolos de Christoffel 3.40.

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} \quad (3.40)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \quad (3.41)$$

Uma vez que o Símbolo de Christoffel é proporcional à primeira derivada da métrica como mostrado em 3.18, a equação 3.40 indica que o Tensor de Ricci é proporcional à segunda derivada da métrica bem como ao seu quadrado. O Espaço Euclidiano descrito por 3.6, o Tensor de Ricci então será proporcional a  $\ddot{a}$  e  $\dot{a}^2$  (DODELSON; SCHMIDT, 2020). Lançando mão das manipulações algébricas exemplificadas neste trabalho para o Símbolo de Christoffel, pode-se mostrar que há apenas duas situações em que  $R_{\mu\nu}$  não é nulo:  $\mu = \nu = 0$  e  $\mu = \nu = i$ . Lembrando que  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  é nulo para ambos subíndices temporais e tomando  $\alpha$  e  $\beta$  como espaciais, temos que:

$$R_{00} = -\Gamma_{0i,0}^i - \Gamma_{j0}^i \Gamma_{0i}^j \quad (3.42)$$

$$R_{00} = -\delta_{ii} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (3.43)$$

em que o fator 3 advém de  $\delta_{ii}$ , que é a somatório sobre todos os três índices espaciais. Fazemos aqui o lembrete de que há um fator  $c^2$  dividindo a expressão de  $R_{00}$ . Para o componente  $R_{ij}$  e seguindo o mesmo raciocínio temos:

$$R_{ij} = \delta_{ij} (2\dot{a} + a\ddot{a}), \quad (3.44)$$

o que, da definição de Escalar de Ricci, gera

$$R = -R_{00} + \frac{1}{a^2} R_{ii} = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \quad (3.45)$$

Podemos calcular o tensor  $T$  incluindo nele a constante cosmológica, passando-a para o lado direito da equação 3.36 de modo a obter:

$$T_\nu^\mu(\lambda) = -\frac{\lambda}{8\pi G} \delta_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -\rho_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_\lambda \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Imputando a relação acima na expressão 3.36, ficamos com:

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi G T_{00} \quad (3.47)$$

$$-3 \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 8\pi G \rho \quad (3.48)$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (3.49)$$

que é a equação de Friedmann e que já considera a densidade contendo a constante cosmológica (DODELSON; SCHMIDT, 2020). Chegamos aonde queríamos, porém com uma limitação: a expressão 3.49 vale apenas para um universo euclidiano, que foi a suposição de que nos servimos como ponto de partida. Contudo, essa construção pode e deve ser feita de forma mais geral.

O trabalho de (VITENTI, 2011) mostra que, partindo da imposição de isotropia e homogeneidade, podemos descrever um universo plano ( $k = 0$ ), do tipo  $S^3$  ( $k > 0$ ) ou hiperbólico ( $k < 0$ ) da seguinte maneira:

$$ds^2 = dr^2 + \left( \frac{\sinh \sqrt{-kr}}{\sqrt{-k}} \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.50)$$

em que a expressão está em termos das coordenadas esféricas e que é fácil provar que ela é reduzida à expressão de distância entre pontos para o caso plano.

É possível mostrar que <sup>1</sup>:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.51)$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \frac{g_{ij}}{a^2} \quad (3.52)$$

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3 \frac{\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

O fator  $k$  acima é multiplicado por  $c^2$  e, a partir de 3.51, 3.52 e 3.53, chegamos à expressão geral da equação de Friedmann (LIMA, 2021)

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (3.54)$$

cuja forma é idêntica à equação 3.49 para o caso plano ( $k = 0$ ). O termo à esquerda da equação é relacionado à Constante de Hubble pela relação 2.27. Logo, o poder da equação 3.54 reside no fato de que podemos descrever a evolução do universo caso conheçamos sua geometria ( $\kappa$ ), o valor do fator de escala ( $a$ ) e a sua composição ( $\rho$ ).

<sup>1</sup> Para melhor compreensão deste tópico, sugerimos as seguintes fontes:

<[https://vickyscowcroft.github.io/PH40112\\_rmd/ch-eqs-of-expanding.html](https://vickyscowcroft.github.io/PH40112_rmd/ch-eqs-of-expanding.html)>

<<https://www.physics.mcgill.ca/~rhb/ph514/10sol6.pdf>>

<<https://profoundphysics.com/the-ricci-tensor/>>

## 3.4 Supernovas

Como nos mostram (REIS; SIFFERT, 2022), na década de 1990 houve uma revolução na cosmologia ao se entender que poderíamos utilizar supernovas Ia como velas padrão para realizar medidas de distâncias.

Como visto na seção 2.2, quanto maior o valor do *redshift*  $z$ , maior será a velocidade com a qual um dado objeto se afasta de nós e maior será, portanto, a sua distância. Hubble chegou a estudar cefeidas, que são estrelas super gigantes e brilhantes, para determinar suas distâncias a partir da sua luminosidade. Contudo, esse tipo de objeto cosmológico não pode ser observado para além do nosso Grupo Local, o que fez com houvesse a busca por outra fonte de informação, chegando-se à conclusão de que supernovas seriam excelentes candidatas.

De maneira simplificada, uma supernova é resultado de uma explosão de uma estrela quando esta chega ao seu estágio final e é classificada a partir de suas características espectrais (REIS; SIFFERT, 2022). A análise de supernovas parte de duas principais características suas: o seu espectro, que relaciona o fluxo (energia por unidade de tempo e área) em função do comprimento de onda, e suas curvas de luz, que informam como a emissão de radiação evolui com o tempo. As supernovas que não emitem linhas de hidrogênio são chamadas de I, subdividas em Ia quando apresentam linhas de silício II, e as tipo b e c que não apresentam essa característica. Já as supernovas do tipo II apresentam linhas de hidrogênio e, junto das Ib e Ic, formam um conjunto de supernovas geradas pelo colapso gravitacional da estrela por serem extremamente massivas (mais do que oito vezes a massa do Sol). Já as supernovas Ia são geradas por explosões termonucleares de estrelas anãs brancas em sistemas binários. Uma vez que há um limite máximo para a massa deste tipo de estrela, chamado de Limite de Chandrasekhar, suas explosões seguem padrões bastante semelhantes, gerando então informações digamos sistematizadas. A título de ilustração, podemos analisar as estruturas estelares utilizando um Diagrama Hertzsprung-Russel, também chamado de HR (Figura 12) que nos mostra a relação entre a temperatura de uma estrela e a sua luminosidade, com as estrelas distribuídas a partir das suas massas. As estrelas de grande porte são chamadas luminosas e as de pequeno porte, anãs. Quanto mais à esquerda e mais acima estiver localizada uma estrela, mais quente e luminosa ela será, o que implica que também será mais massiva. Neste diagrama, "o brilho das estrelas está expresso em termos da sua luminosidade, enquanto a cor está em termos da sua temperatura superficial" (MILONE et al., 2003). A faixa diagonal central é chamada de Sequência Principal e contém as estrelas anãs. As chamadas anãs brancas se concentram mais à esquerda e abaixo da Sequência Principal e vão desde 17.000K (azuis e brancas) a 3.500K (vermelhas) de temperatura absoluta, sendo portanto menos luminosas e menos massivas (FILHO; SARAIVA, 2004). As anãs brancas são bastante densas (massa aproximadamente igual a do Sol, mas com tamanho equivalente ao da Terra). Apesar de

apresentarem elevadas temperaturas, seu tamanho pequeno confere a elas menos luminosidade. Falamos que as anãs brancas finalizam a sua vida a partir de uma explosão termonuclear. Isso porque "a sua luminosidade é unicamente devida à energia térmica ou seja, calor, ainda disponível: a estrela se esfria lentamente"(MILONE et al., 2003).

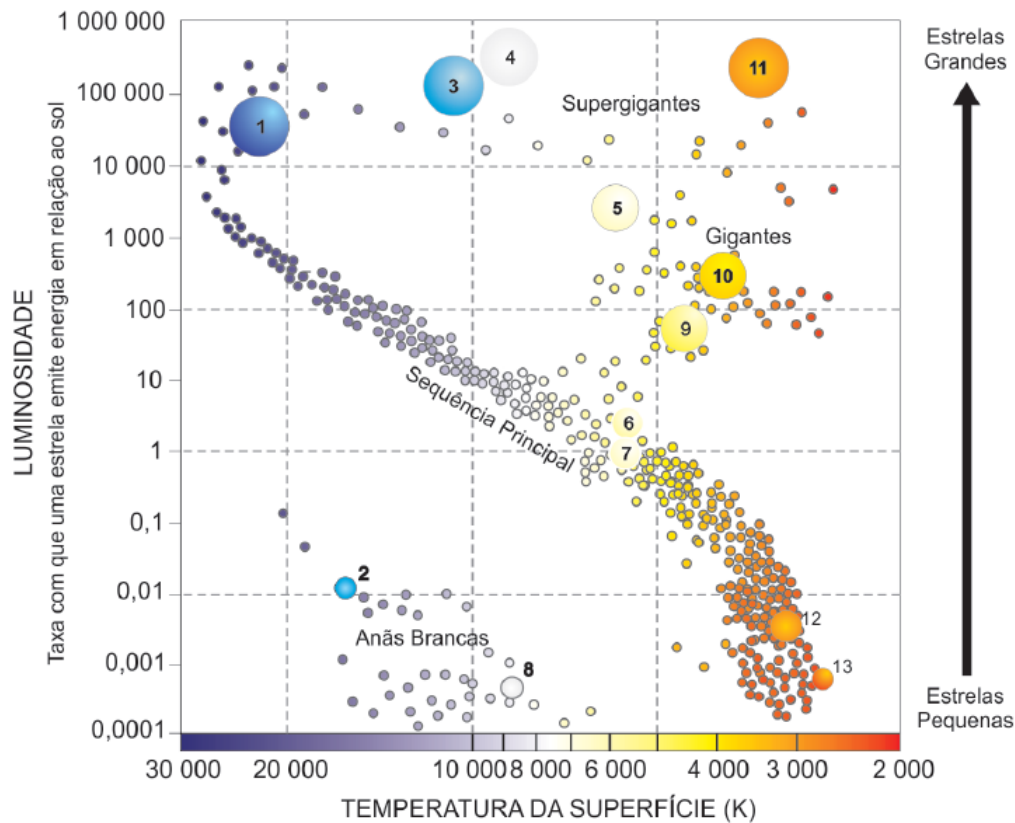


Figura 12 – Diagrama HR colorido, mostrando a localizandando da Sequência Principal, estrelas gigantes e supergigantes e anãs brancas. os números indicam estrelas específicas, a saber: 1. Spica; 2. Eridani B; 3. Rigek; 4. Deneb; 5. Polaris; 6. Alpha Centauri; 7. Sol; 8. Procyon B; 9. Pollux; 10. Aldebaran; 11. Betelgeuse; 12. Estrelade Barnard; 13. Próxima Centuri. Fonte: (FILHO; SARAIVA, 2004)

Importa pontuar ainda que é possível encontrar diferentes Diagramas HR a depender da seleção que se faz das estrelas, uma vez que as mais brilhantes apresentarão maior probabilidade de aparecer no diagrama. "A aparência do diagrama HR de estrelas pertencentes a um determinado aglomerado de estrelas depende fortemente da idade do aglomerado e, por isso, esses diagramas são importantes para estudos de evolução estelar"(FILHO; SARAIVA, 2004).

Uma vez então que as explosões de anãs brancas são relativamente semelhantes, elas passaram a ser usadas na década de 1960 como velas padrão, apesar de haver variações não desprezíveis em suas luminosidades, o que afeta a medida que obtemos para as suas distâncias.

Relembrando as equações 2.34 e 2.35 e reorganizando-as, podemos expressar a distância luminosidade da seguinte maneira:

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}. \quad (3.55)$$

Logo, de mãos da luminosidade  $L$  da estrela e do fluxo  $F$  recebido pelo telescópio, podemos encontrar a distância dessa estrela até nós. Para realizar um controle das variações, pode-se gerar um modelo de forma a se obter estimativas precisas. Para tanto, lança-se mão do logaritmo do fluxo, chegando-se ao que se chama **índice de cor**, que é a diferença entre as magnitudes (medidas de brilho) de um dado objeto quando se usam dois diferentes filtros (FILHO; SARAIVA, 2004). Em 1993, Mark Phillips concluiu haver forte correlação entre o fluxo máximo da estrela, o decaimento da sua taxa de emissão de radiação (curva de luz) e a cor das Supernovas Ia, gerando a possibilidade de ajuste das curvas de luz para se obter uma maior precisão do cálculo das distâncias.

Os autores (FILHO; SARAIVA, 2004) citam alguns métodos de ajuste da curva de luz. O método  $\Delta m_{15}$  utiliza a variação de magnitude num intervalo de 15 dias a partir do máximo como parâmetro ao passo que o *Multicolor Light Curve Shape* (MLCS) faz o mesmo, porém ajustando vários filtros e utilizando-se do módulo de distância  $\mu$  como parâmetro a ser ajustado. Pode-se ainda utilizar a média do fluxo em função do comprimento de onda e também do tempo, chamado método *Spectral Adaptive Lightcurve Template* (SALT). Outro método citado pelos referidos autores chama-se *Stretch* em que o "o eixo temporal é multiplicado por um fator para expandir ou contrair a curva de luz na direção horizontal".

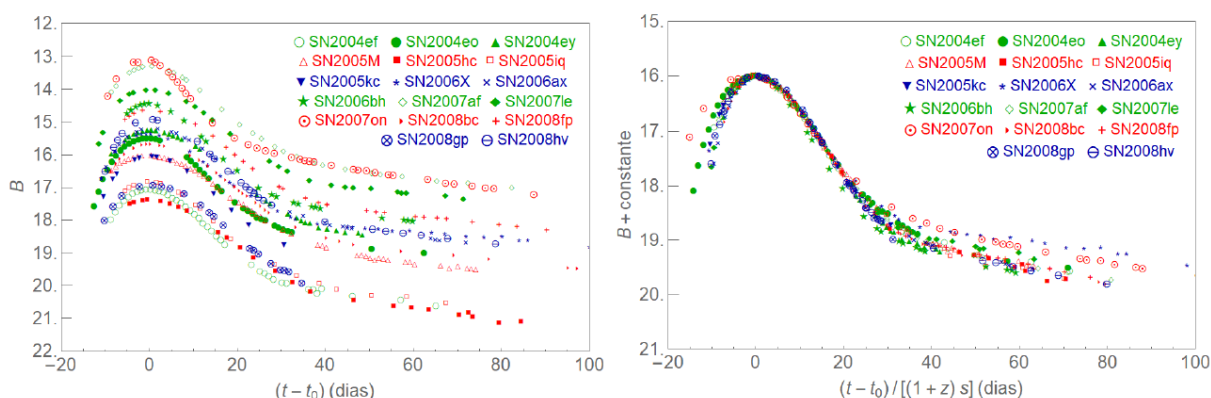


Figura 13 – O gráfico à esquerda mostra as curvas de luz de 17 supernovas com o filtro B (blue) em relação ao tempo dado em dias. Para reduzir o efeito das variações, os dados são corrigidos pela distância, *redshift*  $z$  e *stretch*  $s$ . As curvas foram ainda deslocadas para que coincidissem, permitindo uma visualização melhor de como elas são de fato bastante semelhantes. Fonte: (FILHO; SARAIVA, 2004)

Não adentramos tanto na descrição do universo a partir da teoria da relatividade geral, mas a retomamos aqui rapidamente, pois em um universo composto de matéria não relativística e radiação, ocorre desaceleração em decorrência da força gravitacional atrativa (a própria curvatura espaço-tempo, como já explicado). No entanto, desde o final da década de 1990, dados de supernovas indicam consistentemente que o universo está acelerando, sendo que atualmente consideramos a constante cosmológica  $\Lambda$  como a causa deste fenômeno, sendo então descrita pela energia escura, que seria um fluido de pressão negativa (FILHO; SARAIVA, 2004).

É possível descrevermos diversos modelos teóricos para o universo e testá-los a partir de dados cosmológicos. Como vimos, o mais aceito atualmente é o Modelo Cosmológico, em que o universo é homogêneo e isotrópico quando consideradas grandes distâncias, sendo composto por matéria não relativística, radiação e constante cosmológica. O chamado **parâmetro de densidade** permite descrever universo a partir da análise das densidades de cada uma dessas componentes e é definido da seguinte maneira:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\epsilon(t)}{\epsilon_c(t)}, \quad (3.56)$$

em que  $\epsilon(t)$  - também representado por  $\rho$  em algumas obras (REIS; SIFFERT, 2022) - descreve a densidade em função do tempo e  $\epsilon_c$  é a densidade crítica, que é obtida a partir de um dado valor para a constante de Hubble, segundo a expressão a seguir (RYDEN, 2017):

$$\epsilon_c \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2. \quad (3.57)$$

Para cada componente do universo, temos um  $\Omega$  específico e há liberdade para atribuir valores a esses parâmetros de densidade de acordo com o modelo teórico que quisermos utilizar para que então haja comparação com os dados cosmológicos. A autora (RYDEN, 2017) explica que hoje o mais aceito para o parâmetro de densidade de matéria não relativística é  $\Omega_m \approx 0,31$ , para o da constante cosmológica é  $\Omega_\Lambda \approx 0,69$  e o da radiação é  $\Omega_r \approx 9,0 \times 10^{-5}$ , o que mostra que atualmente o universo é dominado por  $\Lambda$  e que os efeitos de radiação são irrisórios. Sugerimos a leitura do capítulo 5.1 de (RYDEN, 2017) para uma descrição mais detalhada deste e de outros momentos do universo, como quando a radiação dominava sobre os outros dois componentes ou quando matéria e radiação se igualavam em seus efeitos.

É possível plotar curvas teóricas para distintos valores de parâmetros de densidade evoluindo com o *redshift*. É também possível relacionar a distância luminosidade ao  $z$  e, portanto, obter estimativas para os distintos valores de  $\Omega$  de forma a comparar os dados empíricos com o modelo utilizado.



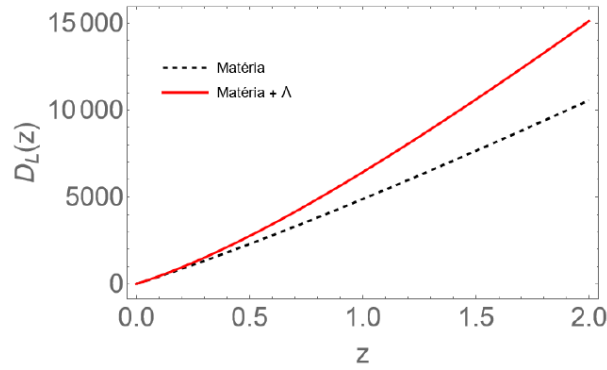


Figura 14 – A curva tracejada representa a evolução da distância luminosa  $D_L$ , dada em megaparsecs, em função do *redshift*  $z$  em um universo dominado apenas por matéria, ou seja,  $\Omega_m = 1$  e os demais parâmetros de densidade são nulos. A curva vermelha foi obtida com  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_r = 0$  e  $\Omega_\Lambda = 0,7$ , representando assim o modelo padrão. Fonte: (FILHO; SARAIVA, 2004)

Vê-se pela Figura 14 acima que somente é possível observar diferenças entre os dois modelos quando são consideradas distâncias maiores, o que gera um desafio uma vez que quanto maior a distância, mais difícil se torna detectar certos objetos, como é o caso das cefeidas. No entanto, Supernovas Ia são bilhões de vezes mais brilhantes que o Sol, sendo então boas candidatas para este tipo de estudo já que é possível, de mãos da distância luminosa  $D_L$ , calcular o módulo de distância  $\mu$ , que foi citado como sendo um dos parâmetros do método MLCS. Ele é definido como a diferença entre a magnitude aparente ( $m$ ) de um objeto astronômico e sua magnitude absoluta ( $M$ ). A primeira é uma medida do brilho observado daqui da Terra ao passo que a segunda é o valor real.

Defini-se a magnitude aparente da estrela Vega como sendo 0 e qualquer estrela mais brilhante que ela terá magnitude negativa, implicando, portanto, que estrelas menos brilhantes terão magnitude positiva. A comparação entre as magnitudes aparentes das estrelas gera uma escala logarítmica em que uma estrela 100 vezes mais brilhantes que outra estrela estará 5 pontos abaixo desta. Assim, a diferença de um ponto nesta escala é equivalente a

$$100^{\frac{1}{5}} \approx 2,512, \quad (3.58)$$

o que mostra que a diferença entre a magnitude aparente de duas estrelas pode ser calculada da seguinte maneira

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left( \frac{F_1}{F_2} \right), \quad (3.59)$$

em que  $F_1$  e  $F_2$  são os fluxos da primeira e da segunda estrela, respectivamente. Como o Sol é o objeto mais brilhante próximo de nós, sua magnitude é bastante elevada e igual a

$-26,76 \pm 0,003$  (TORRES, 2010). A magnitude aparente é importante, pois mostra que objetos gigantes e muito brilhantes, como a estrela Betelgeuse mostrada na Figura 12, parecem muito menos brilhantes que a nossa lua, por exemplo, em decorrência da enorme distância que nos separa deles, já que mensuramos  $m$  a partir do fluxo que chega até nós.

Desta forma, é necessário que haja outra medida que possa corresponder de maneira mais precisa ao brilho real do objeto astronômico e então surge a magnitude absoluta  $M$ , que é definida como a magnitude que o objeto teria se estivesse 10 parsecs distante de nós, sendo expressa, então, da seguinte forma

$$M = 2,5 \log_{10} \left( \frac{F}{F_{10}} \right), \quad (3.60)$$

em que  $F_{10}$  é o fluxo que o objeto teria a 10 parsecs. Vale pontuar que, como (TORRES, 2010) nos mostra, é possível expressar a luminosidade  $L$  em termos da magnitude absoluta:

$$L = L_0 10^{-0,4M}, \quad (3.61)$$

Podemos então comparar as duas medidas (aparente e absoluta), definindo assim a diferença entre  $m$  e  $M$  como sendo o chamado *módulo de distância*  $\mu$  e cuja expressão pode ser deduzida a partir de 3.59 se considerarmos  $m_2$  como sendo a magnitude absoluta  $M$  referente a estrela cuja magnitude aparente é  $m_1$ , que, por sua vez, pode ser chamada de  $m$ . Na expressão 3.60, temos ainda uma relação entre dois fluxos. Porquanto o fluxo depende da área da superfície, como expresso em 1.6, o termo constante se anula na divisão entre  $F_1$  e  $F_2$  e chegamos a

$$\frac{F_1}{F_2} = \left( \frac{10}{d} \right)^2, \quad (3.62)$$

considerando, claro,  $F_2$  como sendo o fluxo da estrela a uma distância de 10 parsecs. Seguindo, temos

$$\log_{10} \left( \frac{10}{d} \right)^2 = 2 \log_{10} \left( \frac{10}{d} \right). \quad (3.63)$$

De mãos das relações deduzidas, temos:

$$m - M = -2,5 \times 2 \log_{10} \left( \frac{10}{d} \right) \quad (3.64)$$

$$m - M = -5 + 5 \log_d \quad (3.65)$$

$$\mu = 5 \log_{10}(d) - 5, \quad (3.66)$$

chegando então à expressão do módulo de distância (REIS; SIFFERT, 2022).

Ou seja, de mãos das magnitudes aparente e absoluta, bem como do fluxo por nós recebido, pode-se calcular a distância  $d$  de um dado objeto. E como as Supernovas Ia apresentam fluxo semelhante, temos informações da sua magnitude obtidas de Supernovas mais próximas e que podem ser utilizadas para as mais distantes, a partir das quais temos a magnitude aparente, o que justifica o seu uso como vela padrão.

Ocorre que toda a análise até aqui realizada descreve a expansão do universo a partir de sua dinâmica, ou seja, distâncias, forças e composição. No entanto, como mostrado por muitos autores, (VITENTI; PENNA-LIMA, 2015), (ANDRADE, 2018) e (GONG et al., 2007), é possível calcular distâncias sem especificar um modelo cosmológico, que aqui foi descrito pela relatividade geral e as equações de Friedmann. Como finalização, portanto, deste TCC, realizaremos uma breve explicação de como é possível encontrar dados consistentes que indicam um universo em aceleração sem precisar citar a teoria da relatividade geral e suas implicações.



## 4 Uma Proposta de Análise

### 4.1 Função Desaceleração

Como já explicado, de acordo com o Princípio Cosmológico, o universo pode ser considerado como isotrópico e homogêneo em grandes escalas e podemos tomar a métrica FLRW para descrevê-lo em termos da curvatura ( $k$ ) e do fator de escala ( $a$ ). A expressão 3.50 pode ser escrita da seguinte maneira:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ dr^2 + S_k^2(r) (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (4.1)$$

Podemos expandir o fator de escala em torno de  $t_0$  até segunda ordem de forma a se obter:

$$a(t) = a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 \quad (4.2)$$

$$a(t) = a_0 + \dot{a}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{a}_0(t - t_0)^2. \quad (4.3)$$

Sabemos que existe uma relação entre a Constante de Hubble e o fator de escala dada por 2.27, logo podemos expressar a equação 4.2 em termos de  $H$ , considerando  $a_0$  como sendo o fator de escala no tempo  $t_0$ :

$$\frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}_0}{a_0} (t - t_0)^2. \quad (4.4)$$

Podemos definir ainda a função desaceleração  $q(z)$  como sendo:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^{-2} = -\left( \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \right). \quad (4.5)$$

Tomando a equação 4.4 e multiplicando e dividindo o último termo pelo fator de escala  $a_0$ , sua primeira derivada ao quadrado e realizando os devidos rearranjos, temos:

$$a(t) = a_0 \left[ 1 + H_0(t - t_0) + \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 \right]. \quad (4.6)$$

A função desaceleração é um importante fator nos estudos cosmológicos, pois nos informa se o universo está desacelerando ( $\ddot{a} < 0$ ) ou acelerando ( $\ddot{a} > 0$ ). No primeiro caso, temos uma desaceleração positiva ( $q(t) > 0$ ), momento em que o universo estava

expandindo desaceleradamente. No entanto, a partir do momento em que os efeitos da energia escura se sobrepõem aos da matéria comum por assim dizer, temos uma evolução acelerada do universo ( $q(t) < 0$ ).

Considerando

$$dl = a(t)dr, \quad (4.7)$$

em que  $l$  é a distância própria e  $r$  é a distância comóvel, temos

$$r = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dl}{a(t)}. \quad (4.8)$$

Como  $dl = cdt$  e denominando  $r$  de  $D_c(t)$ , como feito na seção 2.2 chegamos a:

$$D_c(t) = \int_{t_i}^{t_f} \frac{cdt}{a(t)}, \quad (4.9)$$

que podemos transformar para que fique em função do *redshift*  $z$  seguindo alguns passos:

$$1 + z = \frac{1}{a} \quad (4.10)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a^2} = -\frac{1}{a} \frac{\dot{a}}{a} = -(1+z)H(z) \quad (4.11)$$

$$D_c(t) = \int_{t_i}^{t_f} \frac{cdt}{dz} \frac{dz}{a(t)} = -c \int_{z_i}^{z_f} \frac{dz}{(1+z)H(z)a(t)} = c \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')H(z')a(t)}, \quad (4.12)$$

em que consideramos  $z_f = 0$ , visto representar o momento cosmológico atual, e  $z_i = z$ . Agora expressando  $a(t)$  em termos de  $z$ :

$$D_c(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')H(z')\frac{1}{(1+z')}}, \quad (4.13)$$

permitindo chegar a

$$D_c(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (4.14)$$

que é a expressão 2.29 mostrada na seção 2.3.

Podemos ainda tomar a primeira e a segunda derivadas temporais do fator de escala de forma a plotá-las na equação 4.5

$$\dot{a} = Ha \quad (4.15)$$

$$\ddot{a} = \dot{H}a + H\dot{a} \quad (4.16)$$

$$q = -\frac{(\dot{H}a + H\dot{a})a}{H^2a^2} = -\frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\dot{a}}{Ha} = -\frac{\dot{H}}{H^2} - 1. \quad (4.17)$$

Ademais, é possível expressar a função de Hubble em termos do *redshift*  $e$ , com isso, modificar a equação 4.17:

$$H(z) = \frac{da}{dz} \frac{dz}{dt} (1+z) = -\frac{\dot{z}}{(1+z)^2} (1+z) = -\frac{\dot{z}}{(1+z)} \quad (4.18)$$

$$q(z) = -\frac{1}{H(z)^2} \frac{dH(z)}{dz} \frac{dz}{dt} - 1. \quad (4.19)$$

Substituindo 4.18 em 4.19, chegamos a

$$q(z) = -\frac{(1+z)^2}{\dot{z}^2} \left[ -\frac{dH(z)}{dz} \dot{z} \right] - 1 = (1+z) \frac{(1+z)}{\dot{z}} \frac{dH(z)}{dz} - 1, \quad (4.20)$$

o que nos dá finalmente a expressão que buscávamos e que pode ser encontrada em (VITENTI; PENNA-LIMA, 2015):

$$q(z) = \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH(z)}{dz} - 1, \quad (4.21)$$

podendo ser rearranjada da seguinte maneira:

$$\frac{1}{H(z)} \frac{dH(z)}{dz} = \frac{1+q(z)}{(1+z)}, \quad (4.22)$$

cuja solução é da forma

$$H(z) = H_0 \exp \int_0^z \frac{1+q(z')}{(1+z')} dz' \quad (4.23)$$

e que pode ser expressa como

$$E(z) = \exp \int_0^z \frac{1+q(z')}{(1+z')} dz' \quad (4.24)$$

em que

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0} \quad (4.25)$$

é a função normalizada de Hubble. Multiplicando e dividindo por  $H_0$  o integrando da equação 4.14, chegamos a

$$D_c(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (4.26)$$

Assim, as equações 4.21, 4.24 e 4.26 nos mostram que reconstruir a função desaceleração  $q(z)$  nos permite obter a informação local a respeito da aceleração ou desaceleração em um dado momento da evolução do universo (VITENTI; PENNA-LIMA, 2015). Uma vez que a distância comóvel se relaciona com a distância luminosidade através da expressão  $D_L = (1 + z) D_c$  e vimos que o fluxo  $F$  e a luminosidade  $L$  podem ser usados para se determinar o módulo de distância  $\mu$  a partir da magnitude aparente  $m$  e a magnitude absoluta  $M$ , temos, portanto, uma coleção de variáveis que não fazem qualquer referência à dinâmica do universo e que nos permitem chegar à função desaceleração para assim concluir pela aceleração ou não do universo. Ademais, a reconstrução de  $q(z)$  permite a de  $H(z)$ , que contém as informações do Universo e uma das técnicas para se realizar essa reconstrução é a chamada interpolação por spline, que será explicada adiante.

## 4.2 Spline

Como exemplos simples, se temos a seguinte expressão para o movimento de um veículo

$$v = 5 + 2t, \quad (4.27)$$

podemos facilmente identificar que sua aceleração é igual a  $2 \text{ m/s}^2$  e que o carro iniciou seu movimento a  $5 \text{ m/s}$  o que nos fornece a possibilidade de calcular sua velocidade em qualquer tempo. Essa é uma situação comum na física e os exemplos de funções como essa são inúmeros, abarcando desde o simples movimento de um carro até a descrição de um sistema de  $N$  partículas em um fluido. Ocorre que a dedução de tais equações depende grandemente de situações experimentais com manipulação de variáveis, situação essa que encontra limitações quando estamos lidando com sistemas em que este tipo de abordagem é impossível, como é o caso dos estudos cosmológicos.

Não podemos puxar uma corda e aproximar um dado planeta de nós e nem mesmo apertar um botão para aumentar ou reduzir o brilho de uma estrela. Somos altamente limitados nesse sentido e, portanto, precisamos de instrumentos e métodos diferentes para deduzir certas relações com os dados obtidos em nossas observações.



Imaginemos que temos o conjunto de dados da tabela abaixo. A Figura 15 que segue mostra a distribuição deles em um plano cartesiano.

Tabela 1 – Tabela de valores de x e y

X	Y
5	8
12	16
21	12
37	10
50	5
63	13,2

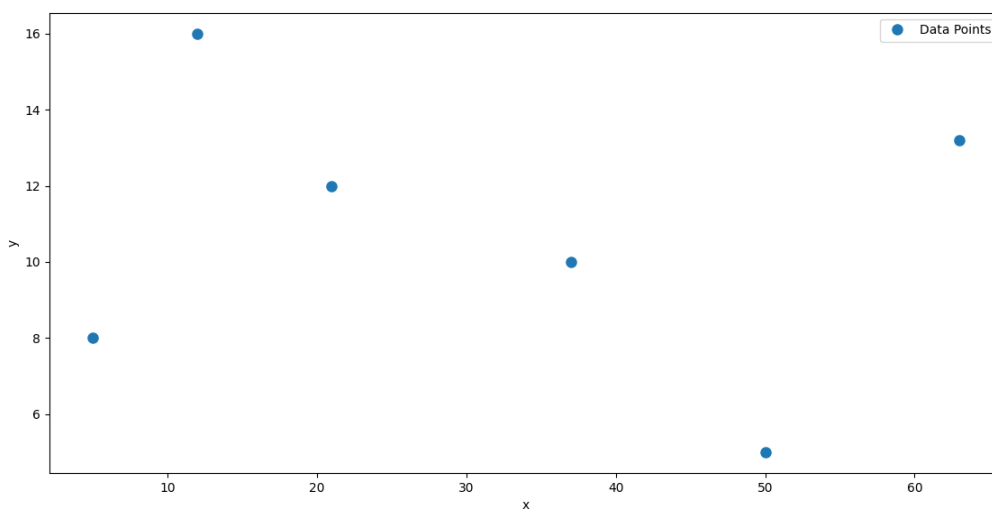


Figura 15 – Distribuição dos pontos referentes à Tabela 1.

Para obter a função que descreve o comportamento dos pontos no gráfico, podemos lançar mão de um método global, ou seja, levando em consideração todos os seis pontos ao mesmo tempo, chamado ajuste polinomial. No entanto, não só esse método encontra barreiras quando temos uma quantidade maior de dados, como também não é o objetivo deste trabalho.

Ao invés de tomar então o conjunto como um todo, podemos tomar os dados dois a dois e, com isso, ajustar uma curva que possa melhor representá-los. Assim, se temos N amostras (ou pontos), precisaremos de N-1 curvas. Podemos então ajustar tais curvas a partir de um modelo linear

$$y = ax + b, \quad (4.28)$$

quadrático

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (4.29)$$

ou cúbico

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (4.30)$$

No caso da equação 4.28, temos duas incógnitas, logo um conjunto de duas equações é suficiente para resolver a equação e encontrá-las. Ou seja, tomando dois pontos, já podemos formular a expressão desta reta. Por sua vez, as equações 4.29 e 4.30 demandam três e quatro equações, respectivamente, para que possamos solucioná-las. A saída para esse impasse é definir que a curva referente ao ajuste quadrático seja contínua em primeira ordem ( $C^1$ ), o que, em outras palavras, significa que a derivada em dado ponto seja a mesma à esquerda e à direita. Obviamente que isso exclui os pontos extremos, sobre os quais podemos estabelecer condições de contorno, que podemos retirar dos dados observados/mensurados. Seguindo essa linha de raciocínio, o ajuste cúbico demanda, portanto, que a curva a ser encontrada seja do tipo contínua em segunda ordem ( $C^2$ ). A Figura 16 a seguir mostra as três curvas plotadas para o conjunto de dados que estamos usando como exemplo.

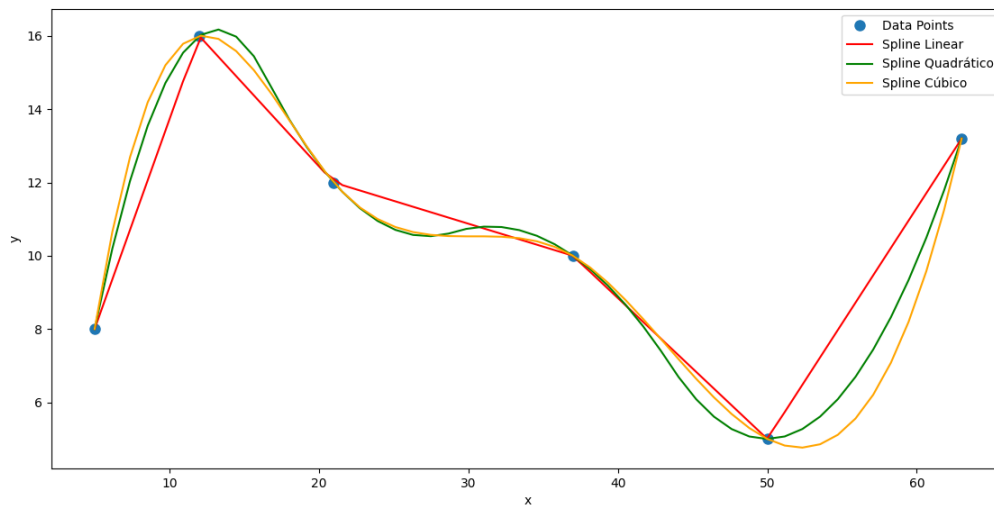


Figura 16 – A curva vermelha indica o ajuste linear, ao passo que o quadrático está representado de verde escuro e o cúbico, de laranja.

Notamos que a imposição de continuidade garante uma curva cada vez mais suave, ao contrário do ajuste linear que é marcado por mudanças bruscas na direção da curva. Apesar de a proposta deste trabalho ser focar no spline linear, decidimos por ilustrar outras duas formas de spline para que não só fique mais clara a diferença geral entre eles, como para incentivar o leitor a se aprofundar no tema.

A construção do spline linear  $S$  foi feita usando as seguintes expressões:

$$S = \begin{cases} y = \frac{8}{7}x + \frac{16}{7}, & 5 \geq x \geq 12 \\ y = -\frac{4}{9}x + \frac{64}{3}, & 12 \geq x \geq 21 \\ y = -\frac{1}{8}x + \frac{117}{8}, & 21 \geq x \geq 37 \\ y = -\frac{5}{13}x + \frac{315}{13}, & 37 \geq x \geq 50 \\ y = \frac{8,2}{13}x - \frac{345}{13}, & 50 \geq x \geq 63 \end{cases}$$

Vemos, portanto, que, como dito, a única restrição necessária é que em cada ponto do gráfico - com exceção dos extremos - as funções sejam iguais. Tais pontos são muitas vezes chamados de nós (*knots*) e, de mãos do conjunto de equações que compõem o spline, é possível realizar a interpolação, ou seja, encontrar o valor de  $y$  par qualquer valor de  $x$  dentro dos domínios estabelecidos. Dessa maneira, para  $x = 7$ , por exemplo, usamos a primeira expressão para encontrar  $y \approx 10,3$ .

Como visto, o spline linear, em comparação com outros tipos de ajustes, é matematicamente mais simples e fácil de ser calculado, sendo essa uma de suas vantagens, além de oferecer uma maneira rápida de realizar interpolação. Contudo, tais vantagens surgem a um preço elevado, pois temos uma curva com continuidade de ordem  $C^0$ , levando a um ajuste marcado por lombadas e mudanças repentinas que costumam não descrever o real estado do fenômeno que se estiver analisando.

Mas é possível contornar esse problema. Se desejarmos um ajuste visualmente menos grosseiro, podemos sempre utilizar uma quantidade maior de pontos de maneira a se obter uma curva que pareça mais suave, como é o caso da Figura 17, em que foram utilizados 500 pontos diferentes. São ao todo 499 retas que, em conjunto, criam uma imagem mais fluida do que a encontrada no spline linear da Figura 16.

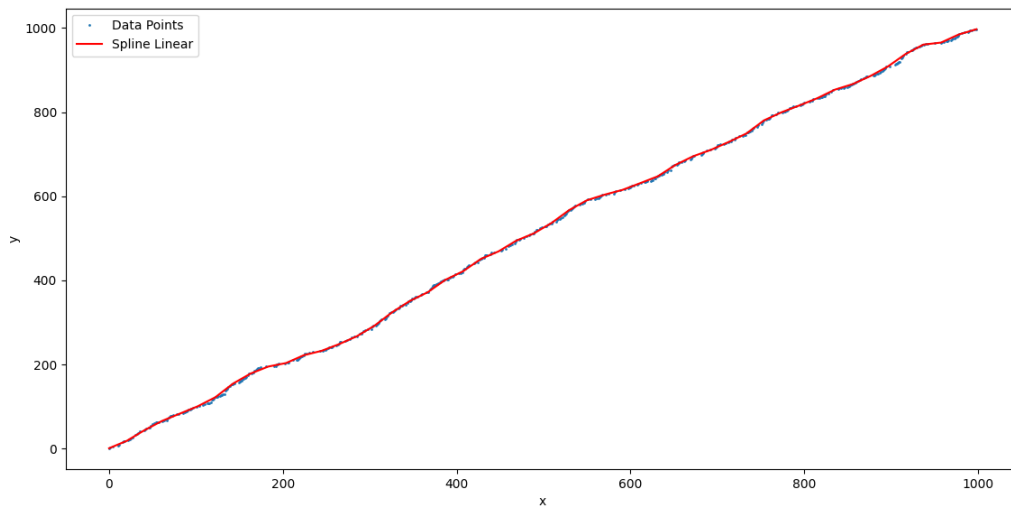


Figura 17 – Spline linear com 500 pontos gerados aleatoriamente em Python para efeito de ilustração da consequência visual de se ter uma quantidade maior de dados.

Este método pode ser utilizado para reconstruir a função desaceleração  $q(z)$ , que não é um observável direto, logo não sabemos a forma que ela tem. Para tanto, pode-se utilizar os seguintes dados de Supernovas tipo Ia: *redshift*, módulo de distância e o erro da medida, que imporão as devidas restrições aos parâmetros, ou seja, cada ponto no gráfico.

Não é objetivo deste trabalho desenvolver a modelagem aqui sugerida, mas incentivamos que o leitor se aprofunde no tema e busque outras referências de maneira a compreender melhor o assunto e observar que este arcabouço matemático leva à conclusão da expansão acelerada atual do universo.

# CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho era exposição teórica do Princípio Cosmológico, modelo atual mais aceito para a descrição do universo e de sua dinâmica, além de explicar ao leitor como as principais equações são deduzidas, visto que é algo que não costuma ser encontrado em muitos dos livros de física mais avançada. Para tanto, iniciamos com uma breve abordagem histórica acerca dos pensamentos iniciais sobre a escuridão do céu, seguindo para a explicação do Modelo Cosmológico Padrão. Aqui, foram descritas as ideias de isotropia e homogeneidade, seguindo do que seria o *redshift* e a constante de Hubble e finalizando com a explicação de distâncias cosmológicas: comóvel, diâmetro angular e luminosidade. Este trabalho mostrou como as noções de métrica e geodésica são importantes para se entender um universo não só em expansão, mas que é descrito por um espaço-tempo inerentemente curvo (do tipo hiperbólico). Compreender, portanto, a Transformação de Lorentz, a Teoria da Relatividade Geral e as equações de Einstein e de Friedmann é essencial, levando-nos a construir modelos distintos de universo dependendo de sua composição: matéria não relativística, radiação e constante cosmológica. Vemos que os dados apontam para um universo hoje dominado pela constante cosmológica, que leva a uma expansão acelerada, situação essa que pode ser colhida da observação de Supernovas do tipo Ia, por produzirem curvas de luz extremamente consistentes e semelhantes entre si, porquanto se trataram de estruturas estelares com limite de massa, levando a explosões muito parecidas entre si. A análise de tais curvas, contudo, se baseia enormemente na dinâmica do universo (composição, posições, forças) e seguimos por uma linha de raciocínio para mostrar que é possível comprovar a expansão acelerada do cosmos sem precisar utilizar este tipo de dado. De mãos da luminosidade, fluxo, magnitude aparente e absoluta, podemos encontrar o módulo de distância e, com ele, modelar uma expressão para a função desaceleração. Com valores para *redshift* e módulo de distância, bem como as devidas barras de erros de tais medidas, é possível estabelecer restrições para os parâmetros de sorte a reconstruir  $q(z)$  com método de interpolação por spline linear. Contudo, apesar da simplicidade, esta é uma abordagem que encontra impasses, pois não leva em consideração as derivadas de primeira e de segunda ordem, gerando um ajuste muitas vezes grosseiro.

De certo que este trabalho apresenta limitações importantes. Em primeiro lugar, a explicação da homogeneidade e isotropia se restringiu mais a uma descrição de evidências do que a um formalismo matemático, que demandaria um avanço maior para tanto. Também não realizamos um estudo mais aprofundado de questões geométricas implicadas nas equações de Einstein e de Friedmann, não avançando, portanto, muito nessa questão. Essas equações são importantes não só para entender a composição do universo,

mas também no sentido de explicarem, por exemplo, a existência de ondas gravitacionais, teorizadas por Einstein em 1915 e comprovadas experimentalmente 100 anos depois (CERVANTES-COTA; GALINDO-URIBARRI; SMOOT, 2016). Assim, o conteúdo que pode ser abordado a partir da teoria da relatividade geral é vasto e não se esgota, claro, com as descrições por nós realizadas. Outra limitação deste trabalho se refere à composição do universo, em que não foram abordados os distintos modelos de universo, como o dominado apenas por matéria ou constante cosmológica ou ainda o universo dominado por uma combinação de matéria e curvatura, como o faz (RYDEN, 2017). Este é um tópico importante para que se tenha uma compreensão melhor inclusive da dinâmica de momentos específicos da história do universo. Sugerimos, além disso, que trabalhos de conclusão de curso futuros se debruçam sobre o estudo da curvatura, já que o arcabouço matemático por trás deste tópico é de uma complexidade de grande interesse, mas que decidimos não abordar. Por fim, a maior limitação a nosso ver é a não análise de dados reais de forma que pudéssemos reproduzir pesquisas anteriores a respeito da comprovação da expansão acelerada do universo. Certamente esse tipo de proposta ofereceria uma robustez maior ao que aqui foi produzido, mas por questões logísticas de tempo não foi possível.

Seja como for, esperamos que a teoria aqui exposta seja útil para o leitor e o incentivamos, portanto, a um estudo mais aprofundado do tema, verificando inclusive que o ajuste por spline cúbico pode ser utilizado para a modelagem da cinemática atual do cosmos, como descrito por (VITENTI; PENNA-LIMA, 2015), (TUTUSAUS; LAMINE; BLANCHARD, 2019) e (ZHAI; WANG, 2019).

# Referências

- ANDRADE, U. dos S. Teste da isotropia cosmológica com supernovas do tipo ia. Observatorio Nacional, 2018. Citado na página 49.
- BAHCALL, N. A. Hubble's law and the expanding universe. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 112, n. 11, p. 3173–3175, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.
- BERNUI, A.; TSALLIS, C.; VILLELA, T. Temperature fluctuations of the cosmic microwave background radiation: A case of non-extensivity? *Physics Letters A*, Elsevier, v. 356, n. 6, p. 426–430, 2006. Citado na página 23.
- BLAKESLEE, J. P. et al. A synthesis of data from fundamental plane and surface brightness fluctuation surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Science Ltd Oxford, UK, v. 327, n. 3, p. 1004–1020, 2001. Citado na página 14.
- BOBIN, J. et al. Joint planck and wmap cmb map reconstruction. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 563, p. A105, 2014. Citado na página 22.
- BUZZO, D. Time travel: Time dilation. *Electronic Visualisation and the Arts (EVA 2014)*, p. 171–175, 2014. Citado na página 18.
- CARROLL, S. M. An introduction to general relativity: spacetime and geometry. *Addison Wesley*, v. 101, p. 102, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 3, 36 e 37.
- CERVANTES-COTA, J. L.; GALINDO-URIBARRI, S.; SMOOT, G. F. A brief history of gravitational waves. *Universe*, MDPI, v. 2, n. 3, p. 22, 2016. Citado na página 60.
- DELABROUILLE, J. et al. A full sky, low foreground, high resolution cmb map from wmap. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 493, n. 3, p. 835–857, 2009. Citado na página 22.
- DESHWAL, P. K.; GARIMA; YADAV, M. K. The cosmological model of universe: A review. In: AIP PUBLISHING LLC. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2021. v. 2352, n. 1, p. 030003. Citado na página 24.
- DODELSON, S.; SCHMIDT, F. *Modern cosmology*. [S.l.]: Academic press, 2020. Citado 12 vezes nas páginas 3, 16, 25, 30, 31, 32, 33, 35, 38, 40, 41 e 42.
- EIGENCHRIS. *Relativity by eigenchris*. 2022. Disponível em: <<https://www.youtube.com/playlist?list=PLJHszsWbB6hqlw73QjgZcFh4DrkQLSCQa>>. Citado na página 33.
- FILHO, K. d. S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. Astronomia e astrofísica. *São Paulo: Editora Livraria da Física*, v. 780, n. 2004, p. 183, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 4, 43, 44, 45, 46 e 47.
- GONG, Y. et al. Direct evidence of acceleration from a distance modulus–redshift graph. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2007, n. 08, p. 018, 2007. Citado na página 49.

- HARRISON, E. The dark night-sky riddle: a "paradox" that resisted solution. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 226, n. 4677, p. 941–945, 1984. Citado na página 12.
- KOX, A. J. Hendrik antoon lorentz, the ether, and the general theory of relativity. *Archive for history of exact sciences*, JSTOR, p. 67–78, 1988. Citado na página 17.
- LI, E. Modelling mass distribution of the milky way galaxy using gaia billion-star map. *arXiv preprint arXiv:1612.07781*, 2016. Citado na página 11.
- LIMA, V. P. G. Lenteamento gravitacional fraco e perfis de densidade de matéria de aglomerados de galáxias. 2021. Citado na página 42.
- LÓPEZ, R. Differential geometry of curves and surfaces in lorentz-minkowski space. *International electronic journal of geometry*, v. 7, n. 1, p. 44–107, 2014. Citado na página 37.
- LUZ, V. L. d. Geometria de galileu proposta de atividades para o ensino básico. 2016. Citado na página 17.
- MAARTENS, R. Is the universe homogeneous? *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 369, n. 1957, p. 5115–5137, 2011. Citado na página 20.
- MABKHOUT, S. A. Flaw in hubble law. Citado na página 28.
- MARINONI, C.; BEL, J.; BUZZI, A. The scale of cosmic isotropy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2012, n. 10, p. 036, 2012. Citado na página 23.
- MILONE, A. d. C. et al. Introdução à astronomia e astrofísica. *São José dos Campos: INPE*, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- PATUREL, G.; TEERIKORPI, P.; BARYSHEV, Y. Hubble law: measure and interpretation. *Foundations of Physics*, Springer, v. 47, p. 1208–1228, 2017. Citado na página 27.
- REIS, R. R.; SIFFERT, B. B. Supernovas do tipo ia e a expansão do universo. *Cadernos de Astronomia*, v. 3, n. 1, p. 21–21, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 31, 43, 46 e 49.
- RODRIGUES, M. G. Estruturas causais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 35, p. 1–5, 2013. Citado na página 20.
- ROHLF, J. W.; COLLINGS, P. J. Modern physics from  $\alpha$  to z 0. *Review Of" Modern Physics*, v. 12, p. 1–1994, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 3, 17 e 18.
- ROWLAND, D. Redefining redshift as attenuation. *OSP Journal of Physics and Astronomy*, Open Scientific Publishers, v. 1, n. 1, p. 1–3, 2020. Citado na página 24.
- RYDEN, B. *Introduction to cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. Citado 10 vezes nas páginas 12, 13, 15, 16, 21, 26, 27, 29, 46 e 60.
- SHANKLAND, R. S. Michelson-morley experiment. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 32, n. 1, p. 16–35, 1964. Citado na página 17.



- THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. [S.l.]: Cengage Learning, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 16.
- TORRES, G. On the use of empirical bolometric corrections for stars. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 140, n. 5, p. 1158, 2010. Citado na página 48.
- TUTUSAUS, I.; LAMINE, B.; BLANCHARD, A. Model-independent cosmic acceleration and redshift-dependent intrinsic luminosity in type-ia supernovae. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 625, p. A15, 2019. Citado na página 60.
- VITENTI, S.; PENNA-LIMA, M. A general reconstruction of the recent expansion history of the universe. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2015, n. 09, p. 045, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 49, 53, 54 e 60.
- VITENTI, S. D. P. *Estudo das perturbações em universos com ricochete*. Tese (Doutorado) — Ph. D. thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Brazil, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 15, 40 e 42.
- ZHAI, Z.; WANG, Y. Robust and model-independent cosmological constraints from distance measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2019, n. 07, p. 005, 2019. Citado na página 60.