Carlos Eduardo Corrêa Roque

Cadeias de lógicas polivalentes em contextos semânticos

Brasil

2023

Carlos Eduardo Corrêa Roque

Cadeias de lógicas polivalentes em contextos semânticos

Monografia apresentada ao Departamento de Filosofia.

Universidade de Brasília

Departamento de Filosofia

Bacharelado em Filosofia

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Costa-Leite

Brasil

2023

Carlos Eduardo Corrêa Roque

Cadeias de lógicas polivalentes em contextos semânticos/ Carlos Eduardo Corrêa Roque. – Brasil, 2023-

50p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Costa-Leite

Monografia – Universidade de Brasília
Departamento de Filosofia
Bacharelado em Filosofia, 2023.

1. Lógicas polivalentes. 2. Graus de verdade. 2. Semântica das lógicas de Lukasiewicz. I. Orientador. II. Universidade de Brasília III. Departamento de Filosofia

Carlos Eduardo Corrêa Roque

Cadeias de lógicas polivalentes em contextos semânticos

Monografia apresentada ao Departamento de Filosofia.

Trabalho aprovado. Brasil, 15 de dezembro de 2023:

Prof. Dr. Alexandre Costa-Leite
Orientador

Prof. Dr. Rodrigo Freire
Membro da Banca Examinadora

Dr. Marcos Ruben de Oliveira
Membro Convidado
Senado Federal

Brasil
2023

Agradecimentos

À minha esposa Valéria e aos meus filhos Arthur e Lucas, agradeço pela compreensão do tempo em que não estivemos juntos para que eu pudesse me dedicar ao curso de Filosofia.

Aos professores do corpo docente do Departamento de Filosofia, agradeço não só pela qualidade das aulas, mas também pela forma cordial na condução das aulas. Em especial, agradeço aos professores: André Leclerc, André Luis Muniz Garcia, Felipe Santiago Amaral, Gilson Sobral e Marcos Aurélio Fernandes.

Em especial, ao meu orientador Prof Alexandre Costa-Leite que me motivou a cursar todas as disciplinas de lógica do Departamento de Filosofia e, com isso, ter me apresentado perspectivas do pensamento lógico que me incentivaram a realizar o estudo que resultou neste trabalho.

Resumo

O objetivo desta monografia é apresentar possíveis aplicações das lógicas polivalentes no contexto semântico. Dentre essas aplicações, a principal é a definição do conceito de *cadeia de lógicas polivalentes* que surgiu da análise das relações algébricas entre a quantidade de valores de verdade - ou graus de verdade - no contexto de lógicas e sublógicas na hierarquia de Łukasiewicz a partir de uma condição estabelecida por Lindenbaum. Nessas cadeias, os graus de verdade não designados, que se adicionam de uma lógica para a outra quando se sobe pela sequência da mesma cadeia, garantem, por exemplo, a validade das fórmulas de uma sublógica $Ł_m$ para uma lógica $Ł_n$ e das sublógicas subsequentes até se chegar na lógica clássica bivalente $Ł_2$, que é lógica comum de todas as cadeias de sublógicas polivalentes. A partir dessa cadeia de lógicas, foi possível propor três outras aplicações.

Palavras-chave: Lógicas Polivalentes. Cadeia de Lógicas polivalentes.

Abstract

The aim of this monograph is to present possible applications of the many-valued logics in the semantic approach. Among these applications, the main one is the definition of the concept of finitely many-valued chain. This concept came from the analysis of the algebraic relationships between the quantity of truth values - or truth degrees - in the context of logics and sublogics in Łukasiewicz's hierarchy from a condition established by Lindenbaum. In these chains, the unassigned degrees of truth, witch are added from one logic to the other when going up the sequence of the same chain, guarantee, for example, the validity of the formulas of a sublogic $Ł_m$ in its logic $Ł_n$ and of the subsequent sublogics until reaching the bivalent logic classical $Ł_2$, which is a common logic of all finitely many-valued chains. From this chain of logic, it was possible to propose three other applications.

Keywords: Many-Valued Logics. Finitely many-valued chain.

Sumário

Introdução

As lógicas polivalentes de Łukasiewicz constituem um sistema lógico introduzido pelo filósofo e lógico polonês Jan Łukasiewicz. Em contraste com a lógica clássica binária, que se baseia na dicotomia verdadeiro/falso, a lógica polivalente expande essa abordagem ao reconhecer outros valores de verdade - ou graus de verdade. Assim, as lógicas polivalentes não se limitam apenas aos valores binários de verdadeiro e falso, mas permitem a inclusão de múltiplos valores de verdade, como verdadeiro, falso e indeterminado, estendendo assim o escopo para representar nuances semânticas que não seriam captadas pela lógica clássica. O aspecto semântico da lógica polivalente de Lukasiewicz é fundamental, pois abrange a interpretação dos valores de verdade em contextos pragmáticos. Essa abordagem semântica permite a representação e manipulação de informações imprecisas, incertas ou paradoxais, com maior fidelidade à complexidade do raciocínio humano. A introdução de valores intermediários entre verdadeiro e falso reflete a natureza intrínseca de muitos fenômenos do mundo real, nos quais a verdade pode não ser facilmente determinável ou decidível.

O objetivo desta monografia é apresentar possíveis aplicações das lógicas polivalentes no contexto semântico. Dentre essas aplicações, a principal é a definição do conceito de *cadeia de lógicas polivalentes* que surgiu de análise entre as relações algébricas da quantidade de valores de verdade - ou graus de verdade - no contexto de lógicas e sublógicas da hierarquia de lógicas de Łukasiewicz que atende a uma condição definida por Lindenbaum.

Para atingir o objetivo proposto, esta monografia está dividia em duas partes. A primeira parte é o resultado de uma pesquisa bibliográfica a partir dos textos originais de Łukasiewicz que foram traduzidos para o inglês, reunidos e editados em 1970. Além dessas fontes primárias, também foram estudados trabalhos de outros autores - relacionados nas referências bibliográficas - que interpretam as motivações filosóficas e o formalismo lógico de Łukasiewicz ou que expandiram os conceitos polivalentes principalmente no contexto algébrico abrindo, assim, um campo vasto para diversas aplicações. A partir dessas primeiras definições de Łukasiewicz, o presente estudo se dedicou no aprofundamento da semântica dos operadores lógicos do sistema trivalente - sistema $Ł_3$ - , dos operadores modais de necessidade $\Box$ e possibilidade $\Diamond$ e, em decorrência destes, o operador de indeterminação I que é capaz de restaurar na lógica $Ł_3$ a validade dos princípios clássicos da não contradição e do terceiro excluído da lógica clássica. Posteriormente, apresenta-se a definição semântica que se aplica a toda a hierarquia de lógicas polivalentes $Ł_n$ que se segue sobre as interpretações que se dão ao valor de verdade - ou grau de verdade - designado, antidesignado e não designado. E, dentro desse contexto semântico, também será abordada a importância do operador de indeterminação na lógica trivalente na restauração de tautologias da lógica clássica. Da mesma forma, o conceito desse operador será expandido para todas as lógicas do sistema polivalente.

Na segunda parte, serão apresentadas quatro possíveis aplicações: a criação de cadeias de lógicas polivalentes, as relações tautológicas na cadeia de lógicas polivalentes, os conceitos de quase verdade e de justificações parciais nessas cadeias. Essas propostas estão fundamentadas no estudo semântico da primeira parte e, principalmente, na relação de tautologia e de validade que se estabelece entre lógicas e sublógicas dentro da hierarquia de Łukasiewicz.

Importante ressaltar que o estudo sobre a sintaxe das lógicas polivalentes de Łukasiewicz está fora do escopo do presente trabalho. Para uma introdução desse assunto, recomenda-se Gottwald (2007) e Malinowski (2007).

A linguagem formal que será utilizada nesta monografia se constituirá do seguinte alfabeto proposicional:

- Variáveis proposicionais: p,q,r.
- $\mathbb{F}$ é um conjunto de fórmulas bem formadas.
- Esquemas de fórmulas: φ, ψ,χ.
- Operadores lógicos: negação ($\neg$); conjunção ($\wedge$); disjunção ($\vee$); implicação ($\rightarrow$) e equivalência ($\leftrightarrow$).
- No fragmento modal: necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$).
- Para as definições de fórmulas, será adotado o símbolo $:=$.

Em relação às lógicas da hierarquia dos sistemas polivalentes de Łukasiewicz, a simbologia será:

- $Ł_n$, onde n é a quantidade de valores de verdade. Assim, o símbolo para o sistema trivalente será $Ł_3$, para o tetravalente será $Ł_4$, e assim por diante.
- Nas relações entre as lógicas da hierarquia de Łukasiewicz, $Ł_m$ e $Ł_n$ são duas lógicas polivalentes sendo que $m > n$, onde m também é a quantidade de valores de verdade.
- No contexto da hierarquia das lógicas polivalentes de Łukasiewicz, o símbolo para lógica clássica bivalente será $Ł_2$.
- A semântica dos operadores lógicos será conforme o sistema polivalente especificado. Por exemplo, $Ł_3(\mathbb{F}, \neg, \rightarrow, \wedge, \vee)$ especifica a semântica da lógica trivalente $Ł_3$ para as fórmulas $\mathbb{F}$ e para os respectivos operadores lógicos.
- Uma valoração é uma função $v_{Ł_n} : \mathbb{F} \rightarrow \{0, ..., 1\}$ que associa as variáveis proposicionais das fórmulas $\mathbb{F}$ aos valores de verdade do sistema $Ł_n$. Por exemplo, os valores de verdade v para $Ł_3$ será $v_{Ł_3} : \mathbb{F} \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, onde 0 é a falsidade e 1 a verdade da lógica clássica.

Demais simbologias serão introduzidas e especificadas no decorrer do texto.

1 A Semântica das lógicas polivalentes de Łukasiewicz

Com[1] o desenvolvimento da lógica matemática no século XIX, decorrente dos trabalhos matemáticos de Lobachevsky (1826) e Riemann (1854), no campo das geometrias não euclidianas, e dos trabalhos de George Boole (1854), que criou uma linguagem lógico-simbólica por meio da qual se desenvolveram cálculos algébricos, e Frege (1879), com sua *Conceitografia*, o interesse pelas lógicas polivalentes reaparece com as publicações de Post e Łukasiewicz, ambas nos anos de 1920, e que marcaram o início do que Malinowski (2007, p.13) chama de a *Era da Polivalência*. Nesse cenário, enquanto Post motivou-se pelos aspectos puramente matemáticos e formais, Łukasiewicz buscou fundamentar seu sistema a partir de questões filosóficas que, segundo da Costa (2008, p.166), derroga o princípio clássico da bivalência ao tratar dos problemas sobre os *futuros contingentes* e sobre as modalidades, conforme o livro "Da Interpretação"de Aristóteles. Dessa forma, é importante investigar como Łukasiewicz lidou com esses dois problemas que o levaram a definir o seu sistema polivalente.

O problema sobre a verdade e falsidade de proposições relativas aos futuros contingentes foi estabelecido por Aristóteles no capítulo IX de seu livro "Da Interpretação". Em termos gerais, o problema é apresentado já na abertura do referido capítulo na qual Aristóteles (2013, 18a27-26) afirma que "a respeito das coisas que são ou que ja foram, é necessário que a afirmação (ou negação) seja verdadeira ou falsa.", ou seja, os valores de verdade de tais proposições seguem a lei da bivalência. Mas, continua Aristóteles (2013, 18a34), "esse não é o caso das coisas singulares que acontecerão", pois, para o caso dos fatos futuros, não se poderia garantir essa mesma lei. Conforme o comentador de Aristóteles (2013, p.120):

> ”Ontologicamente, podemos dizer aqui que o tempo entra na lógica não apenas em sua marcação de intervalos, minutos, dias, horas e anos, que subsistem, mas que entra também pela sua estrutura primeira, pelos seus grandes quadros estruturantes, passado, presente e futuro, os quais exigem tratamento próprio. Esse tratamento não vai ser ajustado a cada uma dessas grandes molduras temporais, mas vai dividir-se em dois grandes grupos”.

[1] A introdução deste capítulo está conforme Roque (2016).

O primeiro grande grupo é formado pelos acontecimentos passados e presentes cujas proposições devem ser, necessariamente, verdadeiras ou falsas, conforme a lei do terceiro excluído. E no segundo grupo estão os acontecimentos futuros sobre os quais não é necessário, mas apenas possível, que as proposições sejam verdadeiras ou falsas e, continua o comentador de Aristóteles (2013, p.123), “disso decorre que é possível, para o futuro, que a afirmação (ou negação) seja (V ou F) ou que não seja (V ou F), mas que seja (?), onde a *interrogação* é um outro valor de verdade”.

Retornando ao texto aristotélico, têm-se os seguintes trechos:

> "É evidente, então, que nem todas as coisas são nem acontecem da necessidade, mas umas sucedem de uma forma ou de outra, e aqui não é mais verdadeira a afirmação ou a negação, ainda que, quanto a elas, também uma das duas ocorra mais, como na maior parte dos casos; todavia, é possível uma das duas acontecer ou não acontecer."Aristoteles (2013, 19a18-24).
> "Por conseguinte, é evidente não ser necessário que, de toda afirmação e negação, que se opõem entre si, uma seja verdadeira e a outra falsa. Com efeito, como já se dissera, para as coisas que podem ser e não ser, não se aplica o que se aplica às coisas que são e não são.” (Ibid. 19b4).

Assim, há fatos futuros cujas causas determinantes já se encontram em ato no presente e que, mantendo-se as mesmas condições, se pode julgar suas proposições necessariamente como verdadeiras ou falsas, segundo a lei da bivalência, garantindo, assim, o princípio do terceiro excluído. Por outro lado, também há fatos contingentes cujas causas ainda pertencem ao futuro, pois, como não se tornaram em ato, ainda estão em potência no presente e, dessa forma, ontologicamente não há como serem ou não serem. Nesse sentido, é inviável o julgamento no presente de proposições relativas a esses fatos futuros e contingentes e que, portanto, não podem ser verdadeiras ou falsas, o que também inviabiliza o princípio do terceiro excluído, pois, uma vez que neste caso não cabe a lei da bivalência, haveria a necessidade de se representar um terceiro valor de verdade que capturasse o sentido dessa indeterminação.

Nesse sentido, Łukasiewicz faz uma nova interpretação dos futuros contingentes, utilizando o aparato lógico disponível em sua época, por meio da rejeição da tese determinista em seu artigo *On Determinism*, conforme Łukasiewicz (1970, pp. 110-128). Na página 112 desse texto, Łukasiewicz vai introduzir o problema do determinismo utilizando expressões do tipo “É verdade no instante t que p” na qual “instante” se refere a um ponto qualquer no tempo e a p uma proposição sobre um determinado fato. Assim, se é verdade no instante presente t que p, então, em um instante posterior t_{pos}, mantém-se que é verdade no instante t que p, uma vez que o fato relativo à proposição p já fora realizado no instante t. Mas, considerando agora um instante anterior ao fato t_{ant}, segundo a tese determinista, "É verdade no instante t que p" também já era verdade em t_{ant}. Assim, conclui Łukasiewicz (1970, pp. 113), com tradução nossa, "determinismo é a crença em que se uma proposição é verdadeira no instante presente, então ela também teria de ser verdadeira em um instante anterior". Para refutar o argumento determinista, Łukasiewicz vai se apoiar no princípio lógico clássico do terceiro excluído (sobre o qual também trata em Łukasiewicz (1971) *"On the Principle of Contradiction in Aristotle"*), e no princípio da causalidade.

Incialmente, conforme Łukasiewicz (1970, p. 117-119), a causalidade reforçaria a tese determinista se considerar a seguinte situação: em um dado instante qualquer t há um evento e que é efeito de um evento e_{ant} anterior que ocorreu em um tempo anterior no passado t_{ant}, bem como esse mesmo evento e será causa de um evento posterior e_{pos} que ocorrerá em um tempo posterior no futuro t_{pos}. Assim, há uma cadeia de eventos e_{ant} passados t_{ant} anteriores a t que foram causas de e, bem como haverá eventos e_{pos} futuros t_{pos} posteriores a t que serão efeitos dos evento e. Dessa forma, se a causa de um evento e existiu, inevitavelmente todos os efeitos desse mesmo evento e devem existir. Portanto, em t_{ant} já eram verdadeiras ou falsas as proposições p relativas ao evento e em t, pois o correlato real entre os eventos intermediários são todos determinados nessa cadeia de causas e efeitos. E o mesmo se pode afirmar em t sobre a verdade ou falsidade das proposições relativas aos eventos e_{pos} que ocorrerão em t_{pos}.

Em seguida, Łukasiewicz vai refutar o argumento determinista a partir de um problema nessa cadeia de causa e feito que sustenta o princípio da causalidade. Segundo Łukasiewicz (1970, p. 120-121), mesmo que a cadeia de causa e efeito seja infinita, não é necessário que essa cadeia se inicie num instante t presente. Nesse sentido, considerando o instante presente $t = 0$ e o instante da ocorrência do evento e_{pos} futuro em $t_{pos} = 1$, a sequência de causas de e_{pos} pode se iniciar num instante intermediário $t_{int} = \frac{1}{2}$ sem que isso interrompa a sequência infinita de suas causas. Pois, considerando todos os instantes intermediários t_{int} pertencentes ao conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, no intervalo entre $t_{int_1} = \frac{1}{2}$ e $t_{int_2} = \frac{3}{4}$, por exemplo, haverá infinitos outros t_{int}. Assim, se os correlatos reais do e_{pos} encontram seu limite em $t_{int} > \frac{1}{2}$, então a cadeia causal não pode regressar a um instante t presente. Seguindo esse raciocínio, há eventos e_{pos} cujos correlatos reais pertencem inteiramente ao futuro. Nesse caso, pelo fato de o princípio do terceiro excluído estar apoiado no princípio da causalidade, como no instante atual t não existem correlatos reais para se julgar uma proposição p relativa ao evento e_{pos}, nada obriga a aceitá-la como verdadeira ou falsa. Assim, continua Łukasiewicz, em razão do princípio da bivalência não ser mais autoevidente, há necessidade de aceitar a ideia de pelo menos mais um terceiro valor de verdade - o indeterminado -, para as proposições relativas a eventos e_{pos} futuros que, por ainda não existir correlato real, não podem ser decididas tais como verdadeiras ou falsas.

Conforme observado por da Costa (2008, p. 167), Łukasiewicz "constatou que certos princípios sancionados pela tradição filosófica, governando as modalidades, não podem ser formulados dentro dos marcos da lógica bivalente". Dessa forma, passa-se a investigar o segundo problema sobre o qual Łukasiewicz se debruçou para criar seu sistema polivalente, a partir de seu artigo Łukasiewicz (1970, p. 153-178) *Philosophical Remarks on Many-Valued Systems of Propositional Logic* por meio do qual Łukasiewicz aponta duas incompatibilidades entre o princípio da bivalência e o contexto modal. Na primeira, Łukasiewicz mostra a incompatibilidade semântica entre as interpretações de três teoremas modais quando se utiliza a valoração bivalente. Esses três teoremas modais estão formalizados conforme Łukasiewicz (1970), p.156 fórmulas 1 e 2, p. 160 fórmula 3, cuja simbologia foi adaptada com os operadores $\Box$ de necessidade e $\Diamond$ de possibilidade e a terceira é formulada em uma lógica de ordem superior com quantificador existencial, como se segue:

1) $\neg\Diamond\varphi \rightarrow \neg\varphi$

2) $\neg\varphi \rightarrow \neg\Diamond\varphi$

3) $\exists\varphi(\Diamond\varphi \wedge \Diamond\neg\varphi)$

Assim, conforme Łukasiewicz (1970, p. 164), com valores bivalentes, há uma valoração que satisfaz simultaneamente as fórmulas 1 e 2, assim como há uma outra valoração que satisfaz simultaneamente as fórmulas 1 e 3. Por outro lado, não se encontra uma valoração bivalente que satisfaça simultaneamente as fórmulas 2 e 3. Para uma análise pormenorizada sobre essa incompatibildiade, *cf.* Corbalan (2012, p. 118). Como se verá adiante, as definições de Łukasiewicz para os operadores modais de necessidade e possibilidade em sua lógica trivalente Ł$_3$ vão solucionar esse problema.

Em relação à segunda incompatibilidade, Łukasiewicz (1970, p.165) retoma o problema do determinismo no contexto modal para justificar seu sistema trivalente:

> “A disputa acerca de lei da bivalência tem um pano de fundo metafísico: aqueles que defendem essa lei são deterministas, enquanto seus adversários tendem a uma *visão de mundo (Weltanschauung)* indeterminista. Por isso, voltamos a entrar na área dos conceitos de possibilidade e necessidade.” (tradução nossa).

Como visto no problema sobre o determinismo, pode-se supor que um evento futuro e_{pos} em um tempo futuro t_{pos} ainda não está determinado no instante presente t. Assim, considerando p uma proposição relativa ao e_{pos} em t_{pos}, é possível p ($\Diamond p$), mas não necessário que p ($\neg\Box p$), o que faz da proposição p não ser verdadeira nem falsa no instante presente t. Pois, se fosse o caso de no instante presente t de p ser verdadeira, então seria necessário que p ($\Box p$), o que contradiz a suposição inicial. Por outro lado, se no instante presente t a proposição p for falsa, então não seria possível p ($\Box\neg p$), o que também contradiz o que se supôs inicialmente. Nesse sentido, deve-se considerar um sistema de lógica proposicional trivalente com um terceiro valor de verdade para interpretar a possibilidade das proposições relativas a eventos futuros indeterminados.

Essas foram as motivações filosóficas que levaram Łukasiewicz a desenvolver seu sistema trivalente que, posteriormente, evoluiu para os sistemas polivalentes:

> ”Um sistema lógico trivalente, cujos primeiros esboços fiz em 1920, difere da lógica bivalente ordinária, a única até então conhecida, da mesma forma que as geometrias não-euclidianas diferem da euclidiana. Apesar disso, a lógica trivalente é tão consistente e livre de contradições quanto a lógica bivalente. Seja qual for a forma que essa nova lógica vai assumir quando for trabalhada em detalhes, a tese do determinismo não será parte dela.”(ŁUKASIEWICZ, 1970, p. 126), tradução nossa.

As sessões seguintes se dedicam a apresentar a semântica da lógica trivalente Ł$_3$ de Łukasiewicz e, posteriormente, a generalização para os sistemas polivalentes Ł$_n$.

1.1 O sistema trivalente Ł$_3$ de Łukasiewicz

Em 1920, no artigo *On Three-Valued Logic*, Łukasiewicz (1970, p. 87-88) introduziu a semântica de sua lógica proposicional trivalente Ł$_3$ a partir do princípio da identidade e da implicação clássicas utilizando como valores de verdade $v_{Ł_3} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, onde 0 se refere à falsidade, 1 à verdade e $\frac{1}{2}$ à possibilidade. Conforme notas do tradutor da versão em inglês de Łukasiewicz (1970), no texto original em polonês, Łukasiewicz utilizou número 2 para a indeterminação. Somente nos artigos seguintes, Łukasiewicz passou a atribuir $\frac{1}{2}$ em seu sistema trivalente. Em relação aos valores de verdade 0 e 1, segundo Łukasiewicz (1971, p. 166),"considerei a mesma interpretação do sistema bivalente da lógica proposicional clássica para as equações que não têm o valor $\frac{1}{2}$", (tradução nossa). Nesse sentido, Rosser e Turquette (1952, p. 25) chamam de "condições padrão" as situações nas quais os sistemas polivalentes satisfazem as valorações de verdade do sistema bivalente clássico. No caso, Ł$_3$ preserva as condições padrão das operações bivalentes da lógica proposicional clássica Ł$_2$. Dessa forma, têm-se as definições para as operações de negação, disjunção e conjunção que satisfazem as condições padrão no sistema Ł$_3$, conforme Łukasiewicz (1970, p.87), com adaptações nossas:

Negação: $\neg\varphi := \varphi \to 0$

Disjunção: $\varphi \vee \psi := (\varphi \to \psi) \to \psi$

Conjunção: $\varphi \wedge \psi := \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Para a condição não padrão de Ł$_3$, ou seja, aquela cuja valoração é $v = \frac{1}{2}$, segundo Łukasiewicz (1970, p.88), as interpretações para o princípio da identidade e da operação de implicação são como se seguem:

Identidade: $(0 = \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} = 0) = (1 = \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} = 1) = \frac{1}{2}$ e $(\frac{1}{2} = \frac{1}{2}) = 1$.

Implicação: $(0 \to \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \to 1) = (\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}) = 1$ e $(\frac{1}{2} \to 0) = (1 \to \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

No final desse mesmo artigo, Łukasiewicz observa que:

> "Se esse novo sistema de lógica tem alguma importância prática só se verá quando os fenômenos lógicos, especialmente os das ciências dedutivas, forem examinados em profundidade e quando as consequências da filosofia indeterminista, que é o substrato metafísico da nova lógica, puderem ser comparadas com dados empíricos."Łukasiewicz (1970, p. 88), tradução nossa.

Segundo Haack (2002, p.270), o tratamento inicial das lógicas polivalentes de

Łukasiewicz "foi semântico a partir desenvolvimento das tabelas verdade polivalentes". Nesse sentido, no artigo *Philosophical Remarks on Many-Valued Systems of Propositional Logic*, Łukasiewicz (1970, p.166) apresentou as matrizes relativas às operações de implicação e negação considerando-as como operações primitivas de Ł$_3$:

	$\neg$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

Observa-se que a implicação preserva a validade do princípio da identidade em Ł$_3$ sendo $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ quando $v(\varphi) = (\psi) = \frac{1}{2}$. Ainda no mesmo artigo, Łukasiewicz (1970, p. 172 - 173) estabeleceu a semântica para as operações de negação e implicação para qualquer valor de verdade no intervalo $(0, 1)$, ou seja, definiu a semântica da negação e implicação para qualquer sistema polivalente Ł$_n$:

$$\neg\varphi := 1 - \varphi$$

$$\varphi \rightarrow \psi := 1 \text{ (quando } v(\varphi) \leq v(\psi))$$

Para o caso de $v(\varphi) > v(\psi)$, a definição da implicação satisfaz a condição padrão de Ł$_2$ em Ł$_3$ cuja condição de verdade é, na linguagem proposicional clássica, definida por $(\neg\varphi \vee \psi)$. Desse modo, a partir de operações da álgebra booleana, transforma-se essa fórmula em uma soma lógica (substituindo-se o operador $\vee$ pelo operador de soma lógica $+$ da álgebra booleana) ficando então $(\neg\varphi + \psi)$. Após isso, substitui-se $\neg\varphi$ por $1 - \varphi$, e a implicação em L_3 pode ser definida pela soma lógica de $(1 - \varphi)$ e ψ:

$$\varphi \rightarrow \psi := 1 - \varphi + \psi \text{ (quando } v(\varphi) > v(\psi))$$

Dessa forma, uma vez definida a semântica para as operações de negação e implicação em Ł$_3$, pode-se construir as matrizes da disjunção e conjunção em Ł$_3$, conforme Malinowski (2007, p.18):

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

Em relação à equivalência, embora possa ser definida por $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, sua matriz é resultado direto da interpretação de identidade dada por Łukasiewicz:

$\leftrightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
0	0	1/2	1

1.1.1 A semântica de Ł$_3$

Conforme Haack (2002, p. 58), "M é matriz característica para um sistema S se, e somente se, todos os teoremas de S, e apenas eles, são designados em M, e todas as inferências válidas de S, e apenas elas, preservam a designação em M". Na definição dada por Dunn e Hardegree (2001, p. 152), uma "matriz lógica é um sistema composto por um conjunto não vazio de álgebra de proposições e um subconjunto distinto não vazio de proposições designadas (verdadeiras)", tradução nossa. E essa matriz especifica duas coisas: as proposições (e seus conectivos) e quais proposições são de fato verdadeiras. Segue, portanto, a definição da matriz de Ł$_3$, conforme Epstein (1990, p. 233) e adaptado ao alfabeto proposicional desta monografia:

$$M_{Ł_3} =< U, D, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge >; \text{ onde:}$$

- $U = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ é um conjunto não vazio dos valores de verdade de Ł$_3$;
- $D = \{1\}$ é o conjunto do valor designado (ou valor distinto) de U em Ł$_3$ sendo, portanto $D \subseteq U$;
- Os operadores $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$ definidos em Ł$_3$.
- Em Ł$_3$ uma valoração é uma função $v : \mathbb{F} \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ que associa as variáveis proposicionais das fórmulas $\mathbb{F}$ aos valores de verdade de U.

A partir dessas condições, portanto, em Ł$_3$:

- Uma fórmula φ é satisfatível se, e somente se, existe alguma valoração v tal que $v(\varphi) \in D$.

- Uma fórmula φ é válida se, para toda valoração v, $v(\varphi) \in D$ e, dessa forma, φ é uma tautologia em Ł$_3$: $\vDash_{Ł_3} \varphi$.

- Sendo Γ um conjunto de fórmulas, uma fórmula ψ é consequência lógica de Γ se, e somente se, para toda valoração v que satisfaz Γ também satisfaz ψ, ou seja, $\Gamma \vDash_{Ł_3} \psi$.

- Sendo Γ um conjunto de fórmulas, uma valoração é um modelo de Γ se, para toda fórmula $\gamma \in \Gamma$, $v(\gamma) \in D$.

- $M_{Ł_3}$ é uma matriz característica de um conjunto de fórmulas bem formadas Γ em Ł$_3$, se, e somente se, $\Gamma = \{\varphi : \vDash_{Ł_3} \varphi\}$, ou seja, φ é válida em $M_{Ł_3}$.

Em virtude de as condições padrão dos valores bivalentes das matrizes em Ł$_3$ coincidirem com as de Ł$_2$ quando $v = \{0, 1\}$, as tautologias em Ł$_3$ também são tautologias em Ł$_2$, o que faz de Ł$_3$ ser *sublógica*[2] de Ł$_2$. Entretanto, em razão do valor de indeterminação $v = \frac{1}{2}$, nem todas as tautologias em Ł$_2$ serão em tautologias em Ł$_3$. Assim, sendo φ uma tautologia em Ł$_2$ ($\vDash_{Ł_2} \varphi$), também será uma tautologia em Ł$_3$ ($\vDash_{Ł_3} \varphi$) se, e somente se, para toda valoração $v = \frac{1}{2}$ aplicada a φ fizer $v(\varphi) \in D$, ou seja, fizer o valor de verdade de φ ser designado. Por exemplo, sendo o princípio do terceiro excluído uma tautologia em Ł$_2$, ($\vDash_{Ł_2} p \vee \neg p$), para verificar se também é uma $\vDash_{Ł_3}$, basta valorar $v(p) = \frac{1}{2}$ para constatar que $v(p \vee \neg p) = \frac{1}{2}$, logo não é uma tautologia em Ł$_3$ ($\nvDash_{Ł_3} p \vee \neg p$). E o mesmo ocorre para o princípio da não contradição que, embora seja $\vDash_{Ł_2} \neg(p \wedge \neg p)$, não é em Ł$_3$, pois, quando $v(p) = \frac{1}{2}$, tem-se $v(\neg(p \wedge \neg p)) = \frac{1}{2}$, ou seja, $\nvDash_{Ł_3} \neg(p \wedge \neg p)$. Portanto, sabendo-se que uma fórmula φ é $\vDash_{Ł_2} \varphi$, para verificar se φ também é tautologia em Ł$_3$, basta testar apenas se as valorações onde ocorrem o valor indeterminado $\frac{1}{2}$ satisfazem φ, ou seja, se $v(\varphi) \in D$ para qualquer valoração de φ.

Por exemplo, dada a fórmula abaixo, que é uma tautogia em Ł$_2$, e sua tabela verdade a seguir contendo apenas os valores $v = \frac{1}{2}$:

$$\vDash_{Ł_2} \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$$

[2] O conceito de *sublógica* na presente monografia se refere ao especto da quantidade de tautologias que diminui de um sistema para o outro, ou seja, como nem todas as tautologias de Ł$_2$ se matém válidas em Ł$_3$, optou-se por considerar Ł$_3$ sendo sublógica de Ł$_2$.

$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
$1/2$	1	$1/2$	$1/2$	1	0	$1/2$	$1/2$
$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	1	$1/2$	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$
1	$1/2$	0	0	1	$1/2$	1	1
1	0	0	$1/2$	1	1	1	$1/2$

Para verificar se essa fórmula também é uma tautologia em Ł$_3$, basta testar somente as valorações $v(p) = \frac{1}{2}$ ou $v(q) = \frac{1}{2}$ para concluir que $\vDash_{Ł_3} \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$. Este artifício reduz a quantidade de valorações que devem ser verificadas e, portanto, agiliza o processo de decidibilidade. Por outro lado, se não fosse o caso da referida fórmula não ser uma tautologia em Ł$_3$, o fato de Ł$_3$ ser sublógica de Ł$_2$ faz com que seja possível restaurar a validade da fórmula em Ł$_3$ por meio de mecanismo semântico decorrente de uma operação modal no sistema Ł$_3$, conforme apresentada na sessão seguinte.

1.1.2 Operadores modais em Ł$_3$

Ao tratar dos operadores modais, Łukasiewicz estava ciente da incapacidade de expressar a possibilidade e a necessidade na lógica bivalente e, conforme o artigo *Philosophical Remarks on Many-Valued Systems of Propositional Logic*, Łukasiewicz apresentou a definição de possibilidade, que fora dada por Tarski[3], para aplicá-la ao seu sistema trivalente:

$$\Diamond\varphi := \neg\varphi \rightarrow \varphi$$

Conforme Łukasiewicz (1970, p.169), "se uma proposição p pode ser inferida a partir de sua contraditória, é certo que essa proposição não é falsa, logo também não é impossível" (tradução nossa). Da definição de possibilidade, chega-se ao de necessidade da seguinte forma: se $\Diamond p = \neg\Box\neg p$, então tem-se que $\neg\Box\neg p = \neg p \rightarrow p$. Mas, negando-se as duas partes da fórmula, tem-se que $\neg\neg\Box\neg p = \neg(\neg p \rightarrow p)$. Em seguida, aplicando-se a regra da dupla-negação, tem-se que $\Box\neg p = \neg(\neg p \rightarrow p)$ e aplicando-se a regra de subsituição $(\neg p/p)$, tem-se que $\Box p = \neg(p \rightarrow \neg p)$. Portanto, tem-se a definição de necessidade que,

[3] Łukasiewicz (1970, p. 167) "A definição em questão foi descoberta por Tarski em 1921, quando assistia aos meus seminários como estudante da Universidade de Varsóvia." Tradução nossa.

conforme novamente Łukasiewicz (1970, p.169), vai estabelecer que “uma proposição p é necessária se, e somente se, ela não contém sua própria negação” (tradução nossa):

$$\Box\varphi := \neg(\varphi \to \neg\varphi)$$

Dessa forma, a partir das definições de Łukasiewicz, as matrizes em Ł$_3$ para esses operadores modais são as seguintes:

	$\Diamond$
1	1
1/2	1
0	0

	$\Box$
1	1
1/2	0
0	0

Essas definições, além de resolverem a incompatibilidade entre o sistema bivalente e os teoremas modais - conforme a introdução deste capítulo - elas captam o significado intuitivo de possibilidade e de necessidade em Ł$_3$. No caso de "ser possível p", significa que $\neg p \to p$ no sistema Ł$_3$ é falsa se, e somente se, $v(p) = 0$; e verdadeira se, e somente se, $v(p) = \frac{1}{2}$ ou $v(p) = 1$. Da mesma forma,"é necessário p"significa que, em Ł$_3$, $\neg(p \to \neg p)$ é verdadeira se, e somente se, $v(p) = 1$; e falsa se, e somente se, $v(p) = 0$ ou $v(p) = \frac{1}{2}$. Portanto, com base em sua definição de possibilidade, Łukasiewicz (1970, p.172) conclui que "todos os teoremas tradicionais para as proposições modais foram estabelecidos livres de contradições no cálculo proposicional trivalente” (tradução nossa).

Na definição inicial de seu sistema trivalente Ł$_3$ apresentado em 1920, Łukasiewicz (1971, p.87) chama o terceiro valor de verdade de possiblidade. Posteriormente, em 1953, no artigo *A System of Modal Logic* , Łukasiewicz apresenta Ł$_4$ como sendo o sistema a ser aplicado em sua lógica modal. No caso, os valores de verdade de Ł$_4$ eram $\{1, 2, 3, 4\}$ onde "1"é falso e "4"verdade. Os valores 2 e 3 são graus de possibilidade que desempenham o mesmo papel dentro desse sistema modal conforme a interpretação de 16 funções, *cf.* Łukasiewicz (1971, p.371-372).

1.1.3 Operador I de indeterminação

Uma importante aplicação das definições modais apresentadas na seção anterior é a utilização do conceito de *contingência* para definir um operador de indeterminação I que, como será mostrado mais a frente, é capaz de restaurar tautologias de Ł$_2$ em Ł$_3$. Nesse sentido, conforme observa Malinowski (2007, p. 20), dos operadores modais de possibilidade e necessidade, no sistema Ł$_3$ surge a operação de "é contingente que" ou "é modalmente indiferente" definida por:

$$I\varphi := \Diamond\varphi \wedge \neg\Box\varphi$$

Epstein (1990, p. 236), ao abordar sobre o fato de que os princípios da não contradição e do terceiro excluído não são tautologias em Ł$_3$, propõe que esses princípios deveriam ser resgatados nesse sistema trivalente, considerando seu valor indeterminado $\frac{1}{2}$ de verdade, definido pelo mesmo operador de indeterminação I, mas com conectivo de equivalência lógica:

$$I\varphi := \varphi \leftrightarrow \neg\varphi$$

Tanto pela definição modal quanto pela definição com o operador de equivalência, a matriz do operador de indeterminação I em Ł$_3$ será:

	I
1	0
$1/2$	1
0	0

Por meio do operador I, pode-se, então, restaurar os princípios da não contradição e do terceiro excluído de Ł$_2$ em Ł$_3$ com o operador I atuando sobre as valorações $v = \frac{1}{2}$ de Ł$_3$, conforme Malinowski (2007, p. 19) e Epstein (1990, p. 236), com adaptações nossas:

Princípio do quarto excluído: $\varphi \vee \neg\varphi \vee I\varphi$

Princípio da não-contradição: $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \neg I\varphi)$

Conforme a definição da não-contradição, constata-se que o operador de indeterminação I restaura a negação clássica e, por conseguinte, torna Ł$_3$ explosiva, pois dada uma proposição p em Ł$_3$, por exemplo, o operador de indeterminação I restaura a negação clássica do valor de verdade indeterminado. E, em virtude dessa restauração da negação clássica, a lógica Ł$_3$ se torna explosiva: $\varphi, \neg\varphi, \neg I\varphi \vDash \psi$.

Para exemplificar o uso do operador de indeterminação I, considera-se o seguinte argumento apresentado por Epstein (1990, p. 238): $p \wedge \neg p \vDash \neg(p \to q)$. Verifica-se na tabela verdade abaixo que, de acordo com os critérios clássicos de validade do argumento, não ocorre a verdade da premissa $p \wedge \neg p$ e a falsidade da conclusão $\neg(p \to q)$, ou seja, o argumento é, do ponto de vista clássico, válido e do ponto de vista trivalente pelo menos "indeterminado", uma vez que não se poderia afirmar formalmente sua invalidade. Mas essa indeterminação influencia na aplicação do Teorema da Dedução ao argumento, pois percebe-se que a implicação resultante do teorema não é tautológica quando o antecedente é $1/2$ e o consequente 0.

$(p$	$\wedge$	$\neg p)$	$\to$	$\neg$	$(p$	$\to$	$q)$
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$
1	0	0	1	1	1	0	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	1	1
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	1	$1/2$
$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	$1/2$
0	0	1	1	0	0	1	0

Pelos valores destacados na tabela verdade acima, percebe-se que a premissa do referido argumento corresponde ao *ex falso* da lógica clássica e, dessa forma, é válido e logicamente verdadeiro em Ł$_2$. Entretanto, o mesmo não acontece em Ł$_3$, pois $p \wedge \neg p$ não é explosiva nesta lógica trivalente. Por outro lado, aplicando-se o operador de indeterminação I, restaura-se o princípio da explosão em Ł$_3$ passando o argumento a ter a seguinte forma: $p \wedge \neg p \wedge \neg Ip \vDash_{Ł_3} \neg(p \to q)$. Assim, para qualquer valoração de p em Ł$_3$, a premissa sempre será falsa, o que torna a implicação, resultante do Teorema de Dedução, logicamente verdadeira.

1.2 A hierarquia das lógicas polivalentes de Łukasiewicz

No artigo *Investigation Into the Sentential Calculus*, em coautoria com Alfred Tarski, Łukasiewicz (1970, p. 131-152) apresenta a generalização de sua hierarquia de lógicas, que fora desenvolvida em 1922, a partir das matrizes $M_{Ł_n}$, que também se aplicam aos seus sistemas infinito-valentes $Ł_{\aleph_0}$ e $Ł_{\aleph_1}$:

$$M_{Ł_n} = (L_n, \{1\}, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow), \text{ onde:}$$

$$L_n = \begin{cases} \{0, 1/n-1, 2/n-1, ..., 1\} & \text{se } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \\ \{s/w : 0 \leq s \leq w \text{ tal que } s, w \in \mathbb{N} \text{ e } w \neq 0\} & \text{se } n = \aleph_0 \\ [0,1] & \text{se } n = \aleph_1. \end{cases}$$

Como visto na sessão anterior, Łukasiewicz definiu duas operações básicas de negação e implicação para $Ł_n$:

$\neg\varphi = 1 - \varphi$

$\varphi \rightarrow \psi = min(1, 1 - \varphi + \psi)$

E, a partir dessas, definem-se as operações de disjunção, conjunção e equivalência:

$\varphi \vee \psi = max(\varphi, \psi)$

$\varphi \wedge \psi = min(\varphi, \psi)$

$\varphi \leftrightarrow \psi = 1 - |\varphi - \psi|$

Conforme Dunn e Hardegree (2001, p. 228), em uma matriz $M_{Ł_3}$ "há uma submatriz homomórfica no sentido algébrico entre duas álgebras subjacentes" (tradução nossa) e essa submatriz é a matriz de $Ł_2$, tal que um elemento designado em uma matriz é também designado na outra. Dessa forma, continua Dunn e Hardegree (2001, p. 229), "uma matriz M é submatriz de M' se, e somente se, a álgebra de M satisfaz as funções de verdade de M em M' e os valores designados em M também são os mesmos em M'" (tradução nossa). Ou seja, o conjunto dos valores de verdade de $Ł_2$ é subconjunto dos valores de verdade de qualquer lógica $Ł_n$. Malinowski (2007, p.36) também reforça essa observação de que a álgebra de $Ł_2$ é subálgebra de qualquer álgebra de $Ł_n$.

Entretanto, considerando as matrizes polivalentes $M_{Ł_n}$, essa relação não é necessária, pois nem sempre o conjunto dos valores de verdade de uma lógica $Ł_n$ será subconjunto dos valores de $Ł_{n+1}$. É o que ocorre, por exemplo, com $Ł_3$, cujos valores de verdade são $v = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, e $Ł_4$ onde $v = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$. Como em $Ł_4$ não há valor $\frac{1}{2}$, logo $M_{Ł_3}$ não é submatriz de $M_{Ł_4}$. Entretanto, $M_{Ł_3}$ é submatriz de $M_{Ł_5}$, pois, se em $Ł_5$ os valores de verdade são $v = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, então os valores $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ de $Ł_5$ satisfazem as mesmas valorações na matriz de $Ł_3$. A partir, então, dessa relação homomórfica entre as matrizes M e submatrizes M' das lógicas $Ł_n$, pode-se estabelecer uma relação entre as tautologias dentro da hierarquia polivalente Łukasiewicz. Assim, conforme Malinowski (2007, p.36), todas as tautologias dos sistemas polivalentes (bem como as dos sistemas infinito-valentes) estão incluídas nas tautologias de $Ł_2$:

$$\models_{L_n} \subseteq \models_{L_2}$$

E, do mesmo modo que em L_n, a relação entre matriz e submatriz não é necessária, e no caso das tautologias isso também se aplica. Dessa forma, Lindenbaum definiu uma condição[4], doravante *Condição de Lindenbaum*, que deve ser atendida entre duas lógicas polivalentes quaisquer $Ł_m$ e L_n, com $m < n$, para se garantir essa mesma relação de inclusão tautológica entre as lógicas polivalentes, conforme Łukasiewicz (1970, p. 141) letra "b" do Teorema 17:

Condição de Lindenbaum: $Ł_m \subseteq Ł_n$ se, e somente se, $(n - 1)$ é um divisor de $(m - 1)$.

Essa Condição de Lindenbaum será o principal ponto de partida para as propostas de aplicação das lógicas polivalentes que serão desenvolvidas no capítulo 2 da presente monografia.

[4] Conforme termo *Lindenbaum condition* em Malinowski (2007, p.36).

1.2.1 Sobre o valor designado

O valor designado é um dos principais conceitos das lógicas polivalentes. Em termos gerais, o conjunto de valores designados em uma lógica polivalente corresponde a generalização da verdade. Łukasiewicz (1970, p. 134) adotou este termo inspirando-se no artigo *Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalkuls der Principia Mathematica* de Paul Bernays sendo que, para as lógicas $Ł_n$, o valor designado é sempre 1. Segundo Kneale e Kneale (1980, p. 698), "para Bernays, dados os valores de verdade $G = \{verdade, falsidade\}$, o valor distinguido, ou designado, como mais comumente adotado, é dado por $G^*\{verdade\}$". Importante notar que nem Bernays tampouco Łukasiewicz fazem referência aos valores não designados.

Rosser e Turquette (1952, p. 12) separam todos os valores de verdade polivalentes em dois conjuntos, um para os valores designados (*designated*) e outro para os não designados (*undesignated*), como se segue: sendo M valores de verdade com $M > 2$, S é um valor de verdade tal que: $1 \leq S < M$. Assim, os valores de verdade dentro do intervalor $[1, ..., S]$ são designados enquanto que os valores no intervalo $[S + 1, ..., M]$ são os não designados. Dessa forma, conforme esses autores[5], assim como na lógica bivalente na qual um dos valores está ligado a proposições afirmativas (o valor designado em $Ł_2$), o outro está ligado a proposições que são negadas (o valor não designado em $Ł_2$), nas lógica polivalentes também haverá essa relação entre valores de verdade designados e não designados com proposições verdadeiras e falsas, mas considerando o intervalo definido acima. Dessa forma:

> "Uma proposição afirmada será caracterizada por ter um valor de verdade designado associado a ela, enquanto que uma proposição que é negada será caracterizada por ter um valor de verdade não designado associado. Se desejarmos um pouco mais de motivação, então podemos imaginar que os valores de verdade indicam o grau de assertividade (*degree of assertability*) de uma proposição à qual estão ligadas, com os valores de verdade menores denotando maior assertividade. O valor de verdade de S é então a linha divisória entre o pouco assertivo e o não totalmente assertivo."Rosser e Turquette (1952, p. 12-13), tradução nossa.

Gottwald (2001, p. 29) se refere aos *valores de verdade* apenas no contexto bivalente da lógica clássica, conforme as constantes de falsidade ($\perp$) e de verdade ($\top$). Para as lógicas polivalentes, há *graus de verdade*, cujos valores finito ou infinito-valentes são números reais entre 0 e 1, o que leva a interpretar, nos sistemas polivalentes, situações nas quais os graus

[5] Nessa definição de Rosser e Turquette (1952), deve-se observar que a escala de valores considera números inteiros onde 1 representa a verdade clássica e o M a falsidade clássica.

de verdade se destinam a valorar, ao mesmo tempo, concepções diferentes sobre o mesmo fato. Dessa forma, deve-se assumir que cada proposição terá uma valoração conforme o grau de verdade, sendo que sempre existirá pelo menos dois graus de verdade (0 e 1), o que faz das lógicas polivalentes uma ampliação e generalização da lógica clássica quando se considera a condição padrão bivalente. Portanto, segundo Gottwald (2001, p.29), "apesar das dificuldades com uma compreensão intuitiva e uniforme do significado dos graus de verdade, existe uma concordância que esses graus realizam algum tipo de classificação da verdade e, talvez, também algum tipo de classificação da falsidade"(tradução nossa).

Seguindo a notação de Gottwald (2001, p. 30): U é um conjunto não vazio de graus de verdade, onde $0, 1 \subseteq U$ e $0 \leq u \leq 1$ para cada $u \in U$ (optou-se por utilizar U, ao invés de W do texto original, para compatibilizar com a notação utilizada na seção 1.1.1). Essa definição só informa que 1 codifica a verdade e 0 codifica a falsidade, mas ainda não resolve o problema de saber quais graus de valoração codificam "graus de verdade"e quais, eventualmente, possam codificar "graus de falsidade". Diante disso, os sistemas polivalentes necessitam primeiro da definição de um conjunto D para os graus de verdade designados. No caso, para esse conjunto D, tem-se, necessariamente, que o valor 1 lhe pertença, mas que o valor 0 não lhe pertença: $1 \in D \subseteq U$ onde $0 \notin D$. Essa restrição do valor de verdade 0, continua Gottwald (2001, p. 30), pode ser anotada da seguinte forma: conjunto D^+ não vazio para os graus de verdade designados (*designated*) e o conjunto D^- não vazio dos graus de verdade antidesignados (*antidesignated*), sendo que, para atender à condição padrão, tem-se que: $1 \in D^+$ e $0 \in D^-$. Assim, embora $D^+ \cup D^- \subseteq U$ e $D^+ \cap D^- = \emptyset$, não é necessário que $D^+ \cup D^- = U$, pois, além dos elementos desses dois conjuntos, há graus de verdade "não designados” (*undesignated*). Assim, conclui 'Gottwald (2001, p.30):

> ”Esta possibilidade indica duas posições essencialmente diferentes relativamente à designação dos graus de verdade. A primeira assume apenas uma divisão binária do conjunto de graus de verdade e pode proceder simplesmente marcando um conjunto de graus de verdade designados e tratando os não designados como antidesignados. A segunda posição assume uma tripartição e marca alguns graus de verdade como designados, alguns outros como antidesignados, e tem além destes dois tipos também alguns graus de verdade não designados, geralmente pressupostos como estando entre os designados e os antidesignados. (Esta segunda posição, portanto, geralmente também pressupõe alguma ordenação dos graus de verdade).” Tradução nossa.

Malinowski (2007, p. 67) também busca preservar a noção dos valores de verdade polivalente onde o conjunto U dos valores de verdade é divido em três subconjuntos:

conjunto D dos elementos designados, ditos elementos “aceitos”; conjuntos dos elementos não designados D^*, ditos elementos "rejeitados”; e do conjunto da diferença $U - (D \cup D^*)$, ditos elementos nem aceitos e nem rejeitados. Seguindo essa concepção, têm-se o mesmo resultado de Gottwald: dado que $D \cap D^* = \emptyset$, enquanto que na lógica bivalente $U - (D \cup D^*) = \emptyset$ em razão de $1 \in D$ e $0 \in D^*$, tem-se que nas lógicas polivalentes $U - (D \cup D^*) \neq \emptyset$. Com isso, fazendo uma adaptação dos termos de designação de Gottwald (2001) e Malinowski (2007) e considerando os conjuntos designados, antidesignados e não designados como referência aos valores de verdade lógicos, tem-se que, para qualquer lógica Ł$_n$:

- U: conjunto não vazio dos valores de verdade (ou graus de verdade).
- D^+: conjunto dos valores **designados**, do qual necessariamente $\{1\} \in D^+$.
- D^-: conjunto dos valor **antidesignados** do qual necessariamete $\{0\} \in D^-$.
- D^i: conjunto dos valores **não designados** (ou indeterminados), conforme a Ł$_n$, do qual fazem parte $U - (D^+ \cup D^-)$.

Dessa forma, para se interpretar corretamente os valores de verdade das lógicas polivalentes, há que se considerar a existência de pelo menos mais dois subconjuntos dos valores de verdade em U para que se tenha as referências com os valores lógicos de verdade, de falsidade e de quantos mais forem necessários para os graus dos valores não designados (ou indeterminados).

1.2.2 Operador de indeterminação para Ł$_n$

O operador de indeterminação I definido para Ł$_3$, conforme visto na seção 1.1.3, atua como operador de restauração para que tautologias em Ł$_2$ também sejam tautologias em Ł$_3$, tais como os princípios da não contradição e do terceiro excluído que ganharam uma versão nesse sistema trivalente. Em sua proposta para um sistema modal tetravalente, Łukasiewicz (1970, p.352-390) apresenta uma semântica distinta para dois operadores modais de possibilidade e mais dois outros de necessidade a partir de uma matriz de implicação cuja definição é diferente da que foi estabelecida para sua hierarquia polivalente. Dessa forma, as definições desse sistema específico tetravalente não poderiam ser estendidas para as demais lógicas de hierarquia.

Nesse sentido, Rosser e Turquette (1952, p.16-18) procuravam uma forma de restaurar a mesma importância que o operador de negação $\neg$ tem na lógica clássica bivalente, mas agora para as lógicas polivalentes. Assim, eles propuseram um operador de restauração $\bigtriangledown_{[i,n]}$ (Rosser e Turquette definiram esse símbolo como J, mas este será utilizado nesta monografia para outro propósito) que, a partir de uma única função aplicada aos argumentos $[i,n]$, é definido um conjunto de operadores $\bigtriangledown_{[0,n]}, \bigtriangledown_{[1,n]}, ..., \bigtriangledown_{[i,n]}$ aplicáveis a cada um dos valores de verdade em uma $Ł_n$. Portanto, para Rosser e Turquette, da mesma forma que na lógica bivalente há $p \vee \neg p$, os sistemas polivalentes teriam $\bigtriangledown_{[0,n]} \vee \bigtriangledown_{[1,n]} \vee, ..., \vee \bigtriangledown_{[i,n]}$.

Corbalan (2012, p.141) formaliza a função para esse operador $\bigtriangledown_{[i,n]}$ por meio da seguinte definição, com adaptações nossas:

$$\text{Para qualquer sistema } Ł_n \text{ com } n \in \mathbb{N}, \text{ seja } 0 \leq i \leq n-1:$$
$$v(\bigtriangledown_{[i,n]}\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ se } v(\varphi) = \frac{i}{n-1} \\ 0, \text{ se } v(\varphi) \neq \frac{i}{n-1} \end{cases}$$

Verifica-se que $\frac{i}{n-1}$ sempre vai corresponder, de forma exclusiva, a apenas um valor de verdade dos n valores de verdade de uma lógica $Ł_n$, uma vez que i assume valores entre 0 e $n-1$. Ou seja, segue a mesma sequência dos valores de verdade de qualquer $Ł_n$ polivalente : $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., 1\}$ se $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Por isso que sempre haverá n operadores $\bigtriangledown_{[i,n]}$ para cada lógica $Ł_n$. Assim, para qualquer sistema $Ł_n$ com $n \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq i \leq n-1$, a função para os graus de verdade do operador $\bigtriangledown_{[i,n]}$ é:

$$\bigtriangledown_{[i,n]} : \{0, {}^1\!/_{n-1}, {}^2\!/_{n-1}, ..., 1\} \times \{0, {}^1\!/_{n-1}, {}^2\!/_{n-1}, ..., 1\} \to \{0, 1\}$$

A partir dessa definição, na lógica bivalente $Ł_2$ as funções de verdade para os operadores $\bigtriangledown_{[i,n]}$ são:

$\bigtriangledown_{[0,2]} : \{1,0\} \times \{1,0\} \to \{1,0\}$	$\bigtriangledown_{[1,2]} : \{1,0\} \times \{1,0\} \to \{1,0\}$
$\bigtriangledown_{[0,2]}(1) = 0$	$\bigtriangledown_{[1,2]}(1) = 1$
$\bigtriangledown_{[0,2]}(0) = 1$	$\bigtriangledown_{[1,2]}(0) = 0$

Uma vez que em $Ł_2$ temos a equivalência $\bigtriangledown_{[0,2]}\varphi := \neg\varphi$, retomando à proposta inicial de Rosser e Turquette (1952, p.17), os princípios da não contradição e do terceiro excluídos podem ser formalizados apenas com operadores $\bigtriangledown_{i,n}$ (sem o operador $\neg$ clássico):

Princípio da não-contradição: $\bigtriangledown_{[0,2]}(\bigtriangledown_{[1,2]}\varphi \wedge \bigtriangledown_{[0,2]}\varphi)$

Princípio do terceiro excluído: $\bigtriangledown_{[1,2]}\varphi \vee \bigtriangledown_{[0,2]}\varphi$

Em relação à Ł$_3$, as funções de verdade para os operadores $\bigtriangledown_{[i,n]}$ são:

$\bigtriangledown_{[0,3]} : \{1, 1/2, 0\} \times \{1, 1/2, 0\} \rightarrow \{1, 0\}$
$\bigtriangledown_{[0,3]}(1) = 0$
$\bigtriangledown_{[0,3]}(1/2) = 0$
$\bigtriangledown_{[0,3]}(0) = 1$

$\bigtriangledown_{[1,3]} : \{1, 1/2, 0\} \times \{1, 1/2, 0\} \rightarrow \{1, 0\}$
$\bigtriangledown_{[1,3]}(1) = 0$
$\bigtriangledown_{[1,3]}(1/2) = 1$
$\bigtriangledown_{[1,3]}(0) = 0$

$\bigtriangledown_{[2,3]} : \{1, 1/2, 0\} \times \{1, 1/2, 0\} \rightarrow \{1, 0\}$.
$\bigtriangledown_{[2,3]}(1) = 1$
$\bigtriangledown_{[2,3]}(1/2) = 0$
$\bigtriangledown_{[2,3]}(0) = 0$

Comparando os resultados acima com a lógica Ł$_2$, verifica-se que os operadores $\bigtriangledown_{[0,3]}$ e $\bigtriangledown_{[2,3]}$ garantem as condições padrão de Ł$_2$. E isso vai se manter para as demais Ł$_n$ na hierarquia de Łukasiewicz. Portanto, pode-se generalizar que os operadores $\bigtriangledown_{[0,n]}$ e $\bigtriangledown_{[n-1,n]}$ preservam as condições padrão bivalente para qualquer sistema Ł$_n$ com $n \in \mathbb{N}$. Do mesmo modo, pode-se observar que os operadores de $\bigtriangledown_{[1,n]}$ até $\bigtriangledown_{[n-2,n]}$ vão dar conta dos graus de verdade não designados entre 1 e 0, onde $v(\bigtriangledown_{[i,n]}\varphi) = 1$ se, e somente se, $v(\varphi) = \frac{i}{n-1}$, para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Além disso, observa-se que a função de verdade de $\bigtriangledown_{[1,3]}$ é equivalente à matriz do operador de indeterminação I definido para Ł$_3$ (conforme seção 1.1.3), ou seja, $\bigtriangledown_{[1,3]}\varphi \leftrightarrow I\varphi$. Portanto, os princípios da não contradição e do quarto excluído podem ser formalizados como se seguem:

Sem o operador $\neg$ clássico:

Princípio da não-contradição:$\bigtriangledown_{[0,3]}(\bigtriangledown_{[1,3]}\varphi \wedge \bigtriangledown_{[0,3]}\varphi \wedge \bigtriangledown_{[1,3]}\varphi)$

Princípio de quarto excluído: $\bigtriangledown_{[1,3]}\varphi \vee \bigtriangledown_{[0,3]}\varphi \vee \bigtriangledown_{[1,3]}\varphi$

Com o operador $\neg$ clássico:

Princípio de quarto excluído: $\varphi \vee \neg\varphi \vee \bigtriangledown_{[1,3]}\varphi$

Princípio da não-contradição: $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \neg \bigtriangledown_{[1,3]} \varphi)$

Para Ł$_4$, os operadores $\bigtriangledown_{[i,n]}$ serão: $\bigtriangledown_{[0,4]}$, $\bigtriangledown_{[1,4]}$, $\bigtriangledown_{[2,4]}$, $\bigtriangledown_{[3,4]}$. E, considerando $v(\bigtriangledown_{[i,n]}\varphi) = 1$ se, e somente se, $v(\varphi) = \frac{i}{n-1}$, para todo $0 \leq i \leq n-1$, Têm-se as seguites valorações de φ para $\bigtriangledown_{[i,4]}\varphi = 1$:

$$v(\bigtriangledown_{[0,4]}\varphi) = 1 \text{ se, e somente se, } v(\varphi) = 0$$
$$v(\bigtriangledown_{[1,4]}\varphi) = 1 \text{ se, e somente se, } v(\varphi) = 1/3$$
$$v(\bigtriangledown_{[2,4]}\varphi) = 1 \text{ se, e somente se, } v(\varphi) = 2/3$$
$$v(\bigtriangledown_{[3,4]}\varphi) = 1 \text{ se, e somente se, } v(\varphi) = 1$$

Dessa forma, pode-se definir uma versão do "princípio do $(n+1)$ excluído" somente com os operadores $\bigtriangledown_{[i,n]}$, com base na formalização recursiva de Corbalan (2012, p.143):

Sem o operador $\neg$ clássico:

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} \bigtriangledown_{[i,n]}\varphi$$

Com o operador $\neg$ clássico:

$$\varphi \vee \neg\varphi \vee (\bigvee_{i=1}^{n-2} \bigtriangledown_{[i,n]}\varphi)$$

E as nossas versões para o princípio da não contradição serão as seguintes:

Sem o operador $\neg$ clássico:

$$\bigtriangledown_{(0,n)}(\bigwedge_{i=0}^{n-1} \bigtriangledown_{[i,n]}\varphi)$$

Com o operador $\neg$ clássico:

$$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n-2} \neg \bigtriangledown_{[i,n]} \varphi))$$

Feitas essas considerações sobre a semântica das lógicas polivalentes de Łukasiewicz, o próximo capítulo será dedicado a apresentar aplicações com base no conteúdo desenvolvido.

2 Possíveis aplicações semânticas das lógicas polivalentes

Este capítulo tem o objetivo de apresentar possíveis aplicações semânticas das lógicas polivalentes de Łukasiewicz a partir de conjecturas levantadas do conteúdo teórico do capítulo 1.

Para tanto, devem estar claras as seguintes convenções:

- Utilização do termo graus de verdade (gv) para referenciar os valores de verdade.
- Distinção dos graus de verdade em designados D^+, antidesignados D^- e não designados D^i

Outro ponto importante que também deve ser esclarecido é em relação as referências que serão feitas sobre "lógica' e "sublógica". Como visto nos exemplos da sessão 1.1.3, nem todas as tautologias de $Ł_2$ se preservam em $Ł_3$ e, como os valores de verdade das demais $Ł_n$ seguem a mesma semântica, esse problema vai ser replicado nas demais lógicas do sistema polivalente. Dessa forma, considerando essa perda das validades lógicas, pode-se afirmar que a lógica clássica $Ł_2$ é a lógica mais forte de todas as demais lógicas $Ł_n$ que, por isso, são lógicas mais fracas, pois não são capazes de sustentar todas as validades lógicas de $Ł_2$. Então, desse ponto de vista, para os propósitos desta monografia, considera-se que todas as lógicas $Ł_n$ são sublógicas de $Ł_2$. Ora, aplicando-se esse mesmo raciocínio para as lógicas polivalentes, uma vez que $Ł_5$, por exemplo, possui mais valores não designados que $Ł_3$, então pode-se dizer que todas as tautologias em $Ł_5$ serão também válidas em $Ł_3$, mas nem todas as tautologias em $Ł_3$ permanecem válidas em $Ł_5$. Portanto, também pode-se dizer que $Ł_5$ é semanticamente mais fraca que $Ł_3$, ou seja, que $Ł_5$ é sublógica de $Ł_3$. E, da mesma forma que ocorre na relação entre tautologias, parece razoável que essa relação de lógica é sublógica também deve seguir a Condição de Lindenbaum.

Dessa forma, considerando a hierarquia de lógicas polivalentes de Łukasiewicz, começando da lógica clássica bivalente $Ł_2$, a primeira lógica polivalente é $Ł_n$ com $n = 3$, ou seja a lógica trivalente $Ł_3$, seguida da lógica com $n = 4$, a lógica tetravalente $Ł_4$ e assim com n crescendo na progressão $n+1$ e com n tendendo ao infinito. Entretanto, essa progressão sequencial $n+1$ dos sistemas polivalentes não garante que quaisquer duas dessas lógicas, tomadas aleatoriamente, atenderão à Condição de Lindenbaum. Por exemplo, $Ł_4 \nsubseteq Ł_3$, pois $(3-1)$ não divide $(4-1)$.

2.1 Cadeias de lógicas polivalentes

Esta seção tem o objetivo de apresentar uma forma de gerar cadeias de lógicas polivalentes $Ł_n$ a partir da Condição de Lindenbaum.

Segundo Łukasiewicz (1970, p. 90):

> "Todas as proposições verdadeiras denotam um e o mesmo objeto, a saber, a verdade, e todas as proposições falsas denotam um e o mesmo objeto, ou seja, falsidade. Considero a verdade e a falsidade sendo objetos singulares no mesmo sentido que o número 2 ou 4. [...] Ontologicamente, a verdade tem seu análogo no ser, e a falsidade, no não-ser. Os objetos denotados por proposições são chamados de valores lógicos. A verdade é o positivo e a falsidade é o valor lógico negativo. A verdade é representada por 1, a falsidade por 0."(tradução nossa).

Shramko e Wansing (2011, p. 2) afirmam que a filosofia e a lógica têm usado os valores de verdade de forma bastante diferente, tais como: objetos abstratos primitivos denotados por sentenças em linguagens naturais e formais; entidades abstratas hipostasiadas como classes de equivalência de sentenças; o que se pretende nos julgamentos; valores que indicam o grau de verdade das sentenças; entidades que podem ser usadas para explicar a imprecisão dos conceitos; valores que são preservados em inferências válidas e valores que transmitem informações sobre uma determinada proposição.

Para além da distinção algébrica que se costuma fazer dos graus de verdade em "designados", "antidesignados"e "não designados", conforme capítulo 1, do ponto de vista epistemológico, há necessidade de atribuir um significado a esses graus de verdade como fez Łukasiewicz para suas lógicas $Ł_3$ e $Ł_4$. Assim também fizeram, por exemplo, Dunn e Hardegree (2001, p.227) para $Ł_4$ com graus de verdade $[0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1]$ onde os valores intermediários são $\frac{1}{3}$ para "na maior parte falso"e $\frac{2}{3}$ para "na maior parte verdadeiro". Para McNaughton (1951, p. 1), considerando os graus de verdade $\{0 \leq n \leq 1\}$, o valor 1 significa "verdade completa"e 0 é a "falsidade completa"e, diante disso, pode-se interpretar os demais graus com “significação incompleta”. Ou seja, em toda a história das lógicas polivalentes, cada sistema é introduzido dando interpretações novas aos novos valores de verdade. *Cf.* Malinowski (2007), Urquhart (2001) e Gottwald (2001) para outras lógicas polivalentes tais como de Kleene, Post e de Gödel.

Observando as matrizes de implicação dos sistemas $Ł_3$, $Ł_4$ e $Ł_5$, verifica-se que a quantidade do valor de verdade 1 cresce mais que a quantidade dos graus não designados, enquanto que, em qualquer $Ł_n$, há apenas um valor 0.

Matriz $Ł_3$

$\to$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

Matriz $Ł_4$

$\to$	1	2/3	1/3	0
1	1	2/3	1/3	0
2/3	1	1	2/3	1/3
1/3	1	1	1	2/3
0	1	1	1	1

Matriz $Ł_5$

$\to$	1	3/4	1/2	1/4	0
1	1	3/4	1/2	1/4	0
3/4	1	1	3/4	1/2	1/4
1/2	1	1	1	3/4	1/2
1/4	1	1	1	1	3/4
0	1	1	1	1	1

Por exemplo, a quantidade de valores 1 nessas lógicas é a seguinte: $Ł_3 = 6$, $Ł_4 = 10$ e $Ł_5 = 15$. Já a quantidade de graus não designados é: $Ł_3 = 2$, $Ł_4 = 5$ e $Ł_5 = 9$. Da mesma forma, entre as frações dos valores de não designados, a quantidade de valores mais próximos de 1 aumenta mais que a quantidade dos valores mais próximos de 0. Da perspectiva algébrica, dada uma lógica polivalente $Ł_n$, a quantidade de valores de verdade iguais a 1, resultantes da operação de implicação, é $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ainda que essa análise careça de uma formalização mais precisa, constata-se intuitivamente que não se pode simplesmente separar, de forma binária, todos os graus de verdade das lógicas polivalentes entre verdade e falsidade. Ou seja, além da valoração trivalente de verdade, falsidade e indeterminação, esta última deve receber o devido tratamento da granularidade de seus valores lógicos conforme se vai subindo na hierarquia polivalente. Essa gradação algébrica dos graus de verdade entre 0 e 1 nas lógicas polivalentes pode servir como parâmetro para diversas significações epistemológicas que se queiram atribuir ao aumentar a quantidade desses graus de verdade dentro da hierarquia. Segundo Dunn e Hardegree (2001, p.152), "por várias razões, lógicas ou metafísicas, pode-se não querer usar apenas um conjunto de proposições; consequentemente, é natural considerar coleções de matrizes lógicas"(tradução nossa).

No caso da hierarquia das lógicas polivalentes, essa coleção pode ser estabelecida dentro do contexto de lógica e sublógica. Por exemplo, considere os graus de verdade de Ł$_3$ tal como geralmente se apresentam: $0 =$ "falso", $\frac{1}{2} =$ "possível"e $1 =$ "verdadeiro"e que, a partir de Ł$_3$, se construa um conjunto de consequências lógicas. Considere agora a necessidade de aumentar esse repertório dos graus de verdade em uma lógica Ł$_5$ que adicione mais 2 graus de verdade: $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$. Como visto no capítulo 1, conforme a Condição de Lindenbaum, Ł$_5 \subseteq$ Ł$_3$, pois $(3-1)$ divide $(5-1)$, o que garante que as consequências lógicas em Ł$_5$ também serão em Ł$_3$ (embora o inverso não seja necessariamente verdadeiro). Uma vez que se constata que Ł$_5$ é sublógica de Ł$_3$, o próximo passo será atribuir significado para os demais graus de verdade em Ł$_5$, por exemplo: $0 =$"falso", $\frac{1}{4} =$ "pouco provável", $\frac{1}{2} =$ "possível", $\frac{3}{4} =$ "muito provável"e $1 =$ "verdadeiro".

Esse aumento dos graus de verdade pode progredir dentro da hierarquia desde que a lógica Ł$_m$ subsequente a uma Ł$_n$ atenda a condição de que $(n-1)$ seja divisor de $(m-1)$. Dessa forma, é fácil encontrar a próxima lógica depois de Ł$_5$ que atenda a esse critério, que no caso é Ł$_9$, ao acrescentar mais 4 graus de verdade: $\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$. Observa-se também que entre cada grau de verdade de Ł$_5$ acrescentou-se 1 grau de verdade de Ł$_9$: entre os graus 0 e $\frac{1}{4}$ de Ł$_5$ há o grau $\frac{1}{8}$ de Ł$_9$; entre os graus $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ de Ł$_5$ há o grau $\frac{3}{8}$ de Ł$_9$ e assim por diante. O esquema abaixo permite visualizar essa inclusão de graus de verdade:

Ł$_3$	0				$\frac{1}{2}$				1
Ł$_5$	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1
Ł$_9$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1

Seguindo esse mesmo raciocínio, a partir de Ł$_5$ também é possível observar que Ł$_{13}$ atende ao critério estabelecido pela Condição de Lindenbaum acrescentando a Ł$_5$ mais 8 graus de verdade: $\{0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1\}$. Também verifica-se que Ł$_{13}$ acrescenta dois graus de verdade entre os graus de Ł$_5$. Entretanto, embora Ł$_9 \subseteq$ Ł$_5$ e Ł$_{13} \subseteq$ Ł$_5$ isso não garante obviamente que Ł$_{13}$ seja sublógica de Ł$_9$. Por outro lado, considerando as lógicas polivalentes exemplificadas até o momento, é fácil determinar duas cadeias de lógica e sublógica, a primeira Ł$_9 \subseteq$ Ł$_5 \subseteq$ Ł$_3$ e a segunda Ł$_{13} \subseteq$ Ł$_5 \subseteq$ Ł$_3$, uma vez que, dadas duas lógicas quaisquer Ł$_m$ e Ł$_n$ (sequenciais ou não) dentro da mesma cadeia, sempre ocorrerá que $(n-1)$ é divisor de $(m-1)$. Adotando a terminologia de Dunn e Hardegree (2001), as matrizes de Ł$_9 \subseteq$ Ł$_5 \subseteq$ Ł$_3$ fazem parte de uma coleção de matrizes e $Ł_{13} \subseteq Ł_5 \subseteq Ł_3$ fazem parte de outra coleção.

A partir da observação desse fato, pode-se propor que: *uma cadeia de lógicas polivalentes é uma sequência de lógicas $Ł_{m_i} \subseteq ... \subseteq Ł_m \subseteq Ł_n$, com $n, m, i \in \mathbb{N}^+$, onde a Condição de Lindenbaum é atendida entre todas as lógicas da cadeia.*

A questão que se coloca agora é se a Condição de Lindenbaum é suficiente para gerar uma cadeia de lógicas polivalentes, uma vez que essa sequência pode ser infinita. Naturalmente se percebe que o critério estabelecido pela Condição de Lindenbaum é útil para verificar a relação de lógica e sublógica entre duas L_m e L_n quaisquer dentro da mesma cadeia ou não, mas não para gerar diretamente essa cadeia. Por outro lado, a própria relação de que $(n-1)$ tem que ser divisor de $(m-1)$ fornece um caminho para construir tal sequência. Essa relação é regida pelo teorema fundamental da divisão exata (com resto 0) que estabelece que, dados $a, b, q \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$, diz-se que a divide b, $a|b$, se, e somente se, $\exists q$ tal que, $a \times q = b$. Aplicando-se esse teorema para a Condição de Lindenbaum, tem-se que: $(n-1)|(m-1)$ se, e somente se, $\exists q$ tal que $(n-1) \times q = (m-1)$. Assim, considerando q o quociente de $\frac{(m-1)}{(n-1)}$, é necessário que $q \geq 2$, pois quando $q = 1$ significa que $n = m$, o que não é o caso para cadeia das lógicas polivalentes. Considerando $q = 2$, tem-se que $\frac{(m-1)}{(n-1)} = 2$ e, após tratamento algébrico, encontra-se $m = 2n - 1$. Dessa maneira, tem-se uma fórmula para gerar uma cadeia de lógicas polivalentes por meio da aplicação sucessiva de: $Ł_{(2n-1)} \subseteq ... \subseteq Ł_{(2n-1)} \subseteq Ł_n$. Por exemplo, a partir de $Ł_3$, sendo $n = 3$, então $2n - 1 = 5$, ou seja, $Ł_5$. Agora, a partir de $Ł_5$, sendo $n = 5$, então $2n - 1 = 9$, ou seja, $Ł_9$:

Para $\frac{(m-1)}{(n-1)} = 2$:

$$Ł_{1025} \subseteq Ł_{513} \subseteq Ł_{257} \subseteq Ł_{129} \subseteq Ł_{65} \subseteq Ł_{33} \subseteq Ł_{17} \subseteq Ł_9 \subseteq Ł_5 \subseteq Ł_3$$

Do ponto de vista puramente algébrico, verifica-se que o quociente q tem relação com o número de graus de verdade gv de $Ł_m$ que estão dentro do intervalo dos graus de verdade gv consecutivos em $Ł_n$. No exemplo apresentado onde $q = 2$, verifica-se essa relação dos graus de verdade gv em $Ł_3$, $Ł_5$ e $Ł_9$:

$$Ł_3 = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}$$

$$Ł_5 = \{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, 1\}$$

$$Ł_9 = \{0, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}, 1\}$$

Entre cada dois graus de verdade consecutivos de $Ł_3$, em $Ł_5$ se inclui um grau de verdade. Por exemplo, entre os graus de verdade 0 e $\frac{1}{2}$ de $Ł_3$ há o grau de verdade $\frac{1}{4}$ em $Ł_5$. Da mesma forma, para cada dois graus de verdade consecutivos de $Ł_5$, em $Ł_9$ se inclui um grau de verdade. É o caso, por exemplo, dos graus de verdade 0 e $\frac{1}{4}$ de $Ł_5$ entre os quais foi adicionado o grau de verdade $\frac{1}{8}$ em $Ł_9$. Dessa forma, considerando os graus de verdade gv na cadeia $Ł_9 \subseteq Ł_5 \subseteq Ł_3$, a quantidade g de graus de verdade incluídas em uma $Ł_m$ com relação a $Ł_n$, anotado por $g_{(Ł_m/Ł_n)}$, será:

$Ł_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$Ł_5 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$, onde $g_{(Ł_5/Ł_3)} = 1$

$Ł_9 = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$, onde $g_{(Ł_9/Ł_5)} = 1$

Pode-se generalizar a fórmula para geração da cadeia de lógicas a partir do valor de qualquer quociente q em $\frac{(m-1)}{(n-1)}$ para $m = qn - (q-1)$. No caso de $q = 3$, partindo de $Ł_3$, a cadeia inicial será: $Ł_{19} \subseteq Ł_7 \subseteq Ł_3$, cujos graus de verdade são:

$$Ł_3 = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}$$

$$Ł_7 = \{0, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{6}, 1\}$$

$$Ł_{19} = \{0, \tfrac{1}{18}, \tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{5}{18}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{7}{18}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{9}, \tfrac{11}{18}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{13}{18}, \tfrac{7}{9}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{8}{9}, \tfrac{17}{18}, 1\}$$

É fácil verificar que, com $q = 3$, para cada dois graus de verdade consecutivos em $Ł_3$ incluem-se dois graus de verdade em $Ł_7$, por exemplo, entre 0 e $\frac{1}{2}$ de $Ł_3$, foram adicionados dois graus de verdade em $Ł_7$: $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$. Ou seja, $g_{(Ł_7/Ł_3)} = 2$. E esse mesmo comportamento também pode ser observado em todas as valorações acima listadas. Assim, considerando esse comportamento como padrão, pode-se perceber que, da mesma forma que quando $q = 2$ a quantidade g de graus de verdade de $Ł_m$ entre os graus de verdade consecutivos de uma $Ł_n$ é 1, quando $q = 3$ essa quantidade g será 2, quando $q = 4$ g será 3 e assim por diante. Portanto, a quantidade de graus de verdade g que serão adicionados será sempre $g = q - 1$.

Dessa forma, a partir desses fatos algébricos desenvolvidos na presente monografia, considerando que g é a quantidade de valores de graus de verdade que serão inseridos entre os graus de consecutivos de uma sublógica: se $g = q - 1$, então $q = g + 1$. Com isso, pode-se generalizar a fórmula de geração da cadeia de lógicas a partir de qualquer valor de q na forma $m = qn - (q - 1)$. E, substituindo-se q por $g + 1$, tem-se a seguinte fórmula geral para a geração da cadeia: $m = n + g(n - 1)$. Portanto, propõe-se a seguinte definição: *uma cadeia de lógicas polivalentes é gerada a partir da fórmula* $m = n+g(n-1)$, *com* $m, n, g \in \mathbb{N}^+$, $m > n$, *onde* m *é a sublógica* $Ł_m$ *sequencial a* n *da lógica* $Ł_n$ *e* g *é quantidade de graus de verdade a serem incluídos na sublógica* $Ł_m$ *com relação a dois graus de verdade consecutivos da lógica* $Ł_n$.

Como exemplo de aplicação da definição proposta, abaixo seguem três cadeias de sequências de 5 sublógicas $Ł_m$ a partir da lógica $Ł_3$ com valores de g iguais a 1, 2 e 3 respectivamente:

$$Ł_{65} \subseteq Ł_{33} \subseteq Ł_{17} \subseteq Ł_9 \subseteq Ł_5 \subseteq Ł_3 \text{ , para } g = 1$$

$$Ł_{487} \subseteq Ł_{163} \subseteq Ł_{55} \subseteq Ł_{19} \subseteq Ł_7 \subseteq Ł_3 \text{ , para } g = 2$$

$$Ł_{2049} \subseteq Ł_{513} \subseteq Ł_{129} \subseteq Ł_{33} \subseteq Ł_9 \subseteq Ł_3 \text{ , para } g = 3$$

E, a partir da fórmula de geração, pode-se construir qualquer cadeia de lógicas polivalentes na qual todas as relações entre lógicas e sublógicas atenderão, de forma automática, a Condição de Lindenbaum. Além disso, é importante lembrar que, conforme fora tratado na seção 1.2 do capítulo 1, sobre a preservação das tautologias da lógica $Ł_n$ na sublógica subsequente $Ł_m$, considerando que as condições padrão das lógicas polivalentes, segunda as quais os sistemas $Ł_n$, por terem os graus de verdade designado $\{1\} \in D^+$ e o antidesignado $\{0\} \in D^-$, esses sistemas polivalentes satisfazem as valorações de verdade e falsidade do sistema $Ł_2$ bivalente, ou seja, as tautologias em de um sistema $Ł_n$ qualquer serão preservadas em $Ł_2$ uma vez que a matriz bivalente $M_{Ł_2}$ é submatriz de todas as matrizes polivalentes $M_{Ł_n}$. Portanto, a lógica clássica bivalente $Ł_2$ será a lógica inicial a partir da qual serão geradas infinitas cadeias de sequências igualmente infinitas de sublógicas $Ł_n$.

Assim, propõe-se a seguinte definição para todas as cadeias de lógicas polivalentes: *podem-se gerar infinitas cadeias, de sequências igualmente infinitas, de lógicas a partir de* $Ł_2$, *que é lógica de qualquer sublógica* $Ł_{n>2}$, *aplicando-se sucessivamente a fórmula de geração de cadeia de lógicas:*.

$$\text{Ł}_{[n+g(n-1)]_{n,g\to\infty}} \subseteq ... \subseteq \text{Ł}_{[n+g(n-1)]} \subseteq \text{Ł}_n \subseteq \text{Ł}_2$$

O diagrama abaixo exemplifica a geração de cadeias de lógicas a partir de Ł_2 e com g começando em 1 e n começando em 3:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Ł}_3 \supseteq \text{Ł}_5 \supseteq \text{Ł}_9 \supseteq \text{Ł}_{17} \supseteq ... \supseteq \text{Ł}_{[n+g(n-1)]} \\
 & \text{Ł}_3 \supseteq \text{Ł}_7 \supseteq \text{Ł}_{19} \supseteq \text{Ł}_{55} \supseteq ... \supseteq \text{Ł}_{[n+g(n-1)]} \\
 & \text{Ł}_3 \supseteq ... \supseteq \text{Ł}_{[n+g(n-1)]_{g\to\infty}} \\
\text{Ł}_2 \arrow[uuur, "{n=3,g=1}"] \arrow[uur, "{n=3,g=2}"] \arrow[ur, "{n=3,g\to\infty}"] \arrow[r, "{n=4,g=1}"] \arrow[dr, "{n=4,g=2}"] \arrow[ddr, "{n=4,g\to\infty}"] \arrow[dddr, "{n,g\to\infty}"] & \text{Ł}_4 \supseteq \text{Ł}_7 \supseteq \text{Ł}_{13} \supseteq \text{Ł}_{25} \supseteq ... \supseteq \text{Ł}_{[n+g(n-1)]} \\
 & \text{Ł}_4 \supseteq \text{Ł}_{10} \supseteq \text{Ł}_{28} \supseteq \text{Ł}_{82} \supseteq ... \supseteq \text{Ł}_{[n+g(n-1)]} \\
 & \text{Ł}_4 \supseteq ... \supseteq \text{Ł}_{[n+g(n-1)]_{g\to\infty}} \\
 & ... \supseteq \text{Ł}_{[n+g(n-1)]_{n,g\to\infty}}
\end{tikzcd}$$

Do ponto de vista algébrico, essas três propostas de definições são meras transformações da Condição de Lindenbaum. Entretanto, são importantes não só para verificar o critério de lógica e sublógica, mas também para gerar várias cadeias de lógicas polivalentes com base na quantidade de graus de verdade g que se deseja adicionar em cada sequência. Portanto, sob a perspectiva lógica e epistemológica, uma vez que se atribua um significado para os graus de verdade de uma lógica polivalente Ł_n, para ampliar a capacidade de mais graus de verdade, basta aplicar a fórmula de geração da cadeia de lógicas para encontrar a Ł_m seguinte que inclua graus de verdade no intervalo correspondente a dois graus de verdade sucessivos em Ł_n. A quantidade g de novos graus de verdade pode ser definida conforme a necessidade de ampliar a cardinalidade do conjunto D^i dos valores "não designados".

Sobre as consequências lógicas dentro de uma mesma cadeia de lógicas polivalentes, as relações tautológicas são preservadas em virtude da fórmula de geração de cadeias derivar diretamente da Condição de Lindenbaum. Portanto, *dada uma mesma cadeia de lógicas, gerada a partir da fórmula* $m = n + g(n-1)$ *, as tautologias de qualquer lógica* Ł_m *são também tautologias em qualquer lógica* Ł_n *se, somente se,* Ł_m *for sublógica de* Ł_n.

Disso decorre que, em razão de Ł_2 ser lógica de qualquer cadeia de sublógicas, todas as tautologias preservadas em uma cadeia de lógicas e sublógicas polivalentes também serão preservadas em Ł_2. Por outro lado, em razão de nem todas as taulologias de uma lógica $Ł_n$ não se preservarem tautologicamente em uma sublógica $Ł_m$, com $m > n$, quanto mais se sobe dentro da cadeia, eu seja, quanto mais m tende ao infinito, menor serão as relações de consequência lógica e, portanto, menor a quantidade de tautologias, o que causa o enfraquecimento dessas lógicas.

2.2 Cadeias de lógicas polivalentes e as relações tautológicas

Conforme a seção anterior, pelo fato da lógica bivalente ser a lógica de todas as sublógicas $Ł_n$ nas cadeias de lógicas polivalentes, em razão das condições padrão dos graus de verdade 1 e 0, qualquer tautologia em uma dessas sublógicas $Ł_n$ também será tautologia em $Ł_2$. Por outro lado, dada uma tautologia na lógica bivalente $\vDash_{L_2} \varphi$ ela só será uma tautologia em $Ł_n$, ou seja, $\vDash_{L_n} \varphi$ se, e somente se, também for válida para toda valoração dos graus de verdade de $Ł_n$. Entretanto, com o aumento dos graus de verdade, as sublógicas subsequentes vão se enfraquecendo, ou seja, dado que $\vDash_{L_n} \varphi$ isso não garante que $\vDash_{L_m} \varphi$, com $m > n$, mesmo dentro da mesma cadeia de lógicas.

Considere as seguintes tautologias em $Ł_2$ é :

1) $\vDash_{Ł_2} (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (Lei da Contraposição). Esquema: φ.

Em $Ł_3$ essa fórmula também é uma tautologia com as valorações de $v(p) = 1/2$ ou $v(q) = 1/2$. E, verificando[1] todas as valorações adicionais dessa fórmula na cadeia $Ł_9 \subseteq Ł_5 \subseteq Ł_3 \subseteq Ł_2$, constata-se que se mantém tautológica.

2) $\vDash_{Ł_2} ((p \to q) \to p) \to p$ (Lei de Peirce). Esquema: ψ.

Em $Ł_3$ essa fórmula assume valor $\frac{1}{2}$ somente quando $v(p) = v(q) = \frac{1}{2}$, ou seja, não é uma tautologia em $Ł_3$. Verificando também essa fórmula na cadeia $Ł_9 \subseteq Ł_5 \subseteq Ł_3 \subseteq Ł_2$, constata-se que permanece não tautológica nessa cadeia. Neste caso, há dois pontos importantes. O primeiro é que não existem valorações nas lógicas da cadeia que façam a fórmula ser falsa(0). O segundo é que a quantidade de valores não designados da fórmula aumenta conforme se vai subindo na cadeia. Intuitivamente, este parece ser o comportamento esperado na medida que há um enfraquecimento das lógicas conforme vai ocorrendo essa subida na cadeia.

3) $\vDash_{Ł_2} \neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p)$. Esquema: χ.

[1] Método semântico de tabelas verdade.

Em $Ł_3$ essa fórmula assume valor 0 quando $v(p) = \frac{1}{2}$. Nos testes dessa mesma fórmula na cadeia $Ł_9 \subseteq Ł_5 \subseteq Ł_3 \subseteq Ł_2$ esse valor 0 se manteve apenas na valoração $v(p) = \frac{1}{2}$, nos demais casos das valorações não designadas, o resultado também foi não designado.

Um conceito importante, que parece ter uma conexão com esses três casos, é o da *quase tautologia* que foi definido por Rescher (1969, p.169). Segundo esse autor, "a ausência de certas tautologias em sistemas polivalentes pode ser mitigada se adotarmos a concepção de quase tautologias, ou seja, fórmulas que invariavelmente assumem ou podem assumir um valor de verdade designado para toda e qualquer valoração." Tradução nossa.

O primeiro caso (Lei da Contraposição) na qual a fórmula φ é $\vDash_{Ł_9} \varphi$, $\vDash_{Ł_5} \varphi$ e $\vDash_{Ł_3} \varphi$, parece refletir a força do significado lógico dessa lei dentro da cadeia de lógicas $Ł_n$. Portanto, para o que se pretende nessa seção, esse tipo de fórmula está fora de discussão. Mas no segundo caso, da Lei de Peirce, é importante observar que pelo menos na cadeia de lógicas analisadas, não houve nenhuma valoração de graus de verdade não designados que a fizesse ser 0. Embora essa fórmula, cujo esquema é ψ, não seja tautologia em $\nvDash_{Ł_9} \psi$, $\nvDash_{Ł_5} \psi$ e $\nvDash_{Ł_3} \psi$, não há nenhuma valoração nas lógicas dessa cadeia que a torne refutável. Dessa forma, parece que esse caso se encaixa com o conceito de quase tautologia, uma vez que é possível que ela se torne uma tautologia, por não ter sido refutada pelos valores não designados. Nesse sentido, uma das formas para torná-la tautológica em $Ł_3$ seria com a adição do operador de indeterminação I. E nas demais $Ł_n$ dessa cadeia, a restauração poderia se dar por meio dos operadores $\bigtriangledown_{[i,n]}$. No terceiro caso da fórmula $\neg(p \to \neg p) \vee \neg(\neg p \to p)$, a valoração $v(p) = \frac{1}{2}$ a torna refutável na cadeia $Ł_9 \subseteq Ł_5 \subseteq Ł_3 \subseteq$. Dessa forma, pelo fato de ser tautologia em $Ł_2$, ou seja, de não ser refutável nas condições padrão, sua decidibilidade depende apenas dos valores não designados.

Em virtude da observação desses três fatos, pode-se deixar em aberto, para estudos futuros, a seguinte afirmação: *dada uma cadeia de lógicas polivalentes, uma fórmula φ que é $\vDash_{Ł_2} \varphi$, mas $\nvDash_{L_n} \varphi$, será quase tautologia em $Ł_n$ se, e somente se, não houver valoração de grau de verdade não designado em $Ł_n$ que a torne refutável.*

Ampliando-se um pouco mais essa ideia, uma característica inerente às cadeias de lógicas polivalentes é que todos os graus de verdade de uma $Ł_n$ também estão presentes na $Ł_m$, com $m > n$. Com isso, se uma fórmula φ, que é quase tautologia em uma sublógica $Ł_m$, for restaurada para ser $\vDash_{Ł_m} \varphi$, então também será $\vDash_{Ł_n} \varphi$ assim como também será uma tautologia em todo o restante da cadeia abaixo de $Ł_n$. Por outro lado, o contrário não é verdade da mesma forma que nem toda $\vDash_{Ł_2}$ é $\vDash_{Ł_n}$. Esse fato pode ser verificado conforme o item 1.2.2 sobre o operador de indeterminação $\bigtriangledown_{[i,n]}$. Portanto, pode-se propor a seguinte definição: *dada uma cadeia de lógicas polivalentes, uma tautologia restaurada em uma sublógica* $Ł_m$*, também será tautologia na lógica* $Ł_n$ *, com* $m > n$*, e em todas as outras lógicas de* $Ł_n$ *da cadeia até chegar em* $Ł_2$.

E esse raciocínio também poderia ser aplicado à validade dos argumentos construídos nas lógicas $Ł_n$, uma vez que todo argumento válido em qualquer L_n também será válido em $Ł_2$, mas nem todas as validades em $Ł_2$ vão se preservar em $Ł_n$. Assim, se pensarmos do ponto de vista do critério de validade na lógica bivalente $Ł_2$, o argumento é inválido se ocorre a verdade das premissas e a falsidade da conclusão. Dessa forma, em virtude do princípio do terceiro excluído, no mundo bivalente, uma conclusão que não é verdadeira só poderá ser falsa. No caso das lógicas polivalentes $Ł_n$, como o princípio do terceiro excluído não se aplica, um argumento cujas premissas têm grau de verdade designado e conclusão tem grau de verdade não designado, cogita-se que não se poderia decretar a sua invalidade em virtude da própria situação de indeterminação dada pelo grau de verdade. Dessa forma, o conceito de quase tautologia, no contexto da cadeia de lógicas polivalentes, também poderia ser aplicado na validade do argumento pelos motivos aqui apresentados. No caso, também fica em aberto a viabilidade de se definir uma quase validade do argumento no qual não ocorra a verdade das premissas e a falsidade da conclusão e nem há uma valoração de grau de verdade não designado que o torne refutável, na medida que há possibilidade de aplicar operadores de indeterminação que possam ser capazes de restaurar a sua validade.

2.3 Cadeias de lógicas polivalentes aplicadas à quase verdade

O conceito de quase verdade é explorado em outros contextos lógicos, dentre eles a quase verdade em estruturas parciais desenvolvida por Newton da Costa, Mikenberg e Chuaqui (1986) se aplica em conhecimentos parciais nos contextos das ciências pragmáticas. A partir dessa interpretação da quase verdade, outros trabalhos científicos têm sido publicados no sentido ou de desenvolver a proposta original de da Costa ou no sentido de propor alternativas a ela, conforme aponta Costa-Leite (2014, p.181). Dessa forma, verifica-se a possibilidade de conectar a cadeia de lógicas polivalentes com o conceito de quase verdade conforme a proposta de Oliveira (2016) que definiu a quase verdade pura, fraca e forte a partir do grau de verdade nos seguintes termos:

> *"1. se $v(\alpha) = 1$, então $v(\alpha) \in D$ (conjunto dos valores designados) e α é dita verdadeira.*
>
> *2. se $\frac{1}{2} < v(\alpha) < 1$, então α é dita **quase verdade forte** (qv^+).*
>
> *3 se $n \in \mathbb{N}^{ímpar}$ e $v(\alpha) = \frac{1}{2}$, então α é dita **quase verdade pura** ou, simplesmente, quase verdade (qv).*
>
> *4. se $0 < v(\alpha) < \frac{1}{2}$, então α é dita **quase verdade fraca** (qv^-).*
>
> *5. se $v(\alpha) = 0$, então $v(\alpha)$ é uma proposição falsa."*
>
> Oliveira (2016, p. 46-47), Definição 17.

Pelo fato de essa definição se aplicar a qualquer lógica polivalente $Ł_n$, os conceitos propostos também são aplicáveis à cadeia de lógicas polivalentes de Łukasiewicz considerando três cenários possíveis. O primeiro é relativo às cadeias geradas a partir de $n > 2$, com n sendo ímpar, e para qualquer valor de $g \geq 1$, por exemplo, a cadeia $Ł_3 \supseteq Ł_5 \supseteq Ł_9 \supseteq Ł_{17} \supseteq Ł_{33} \supseteq Ł_{65} \supseteq ... \supseteq Ł_{[n+g(n-1)]}$. Observa-se que o grau de verdade $\frac{1}{2}$ é a valoração para a quase verdade pura (qv) que aparece em todas a lógicas da cadeia e, conforme se vai subindo pelas sublógicas, a quantidade de valores de quase verdade forte (qv^+) e quase fraca (qv^+) também vai aumentando. Como já se sabe, a subida na cadeia de lógicas causa o enfraquecimento de uma lógica $Ł_n$ para a sublógica $Ł_m$ seguinte, com $m > n$, mas aumenta-se a cardinalidade dos graus de qv^+ e de qv^-. Por outro lado, a partir de uma sublógica $Ł_m$ qualquer nessa cadeia, a cardinalidade dos graus de qv^+ e de qv^- reduz conforme vai se retornando à $Ł_3$. Ou seja, qualquer percurso de subida ou descida na cadeia preserva as qv^+ e qv^-.

O segundo cenário é relativo às cadeias geradas a partir de $n > 2$ e $g \geq 2$, sendo n e g números pares. Um exemplo desse tipo de cadeia é $Ł_4 \supseteq Ł_{10} \supseteq Ł_{28} \supseteq Ł_{82} \supseteq Ł_{244} \supseteq Ł_{730} \supseteq ... \supseteq Ł_{[n+g(n-1)]}$, ou seja, com essas condições para n e g, a cadeia será formada por lógicas $Ł_n$ com n sempre par. Com isso, nesse tipo de cadeia não ocorre a quase verdade pura e as quase verdade forte e fraca vão seguir o mesmo comportamento do primeiro cenário.

E o terceiro e último cenário, ocorre quando a geração das cadeias se dá com $n > 2$ e n par, mas com $g \geq 1$ e g ímpar. Nesse caso, basta observar a sequência inicial da cadeia, por exemplo, $Ł_4 \supseteq Ł_7 \supseteq Ł_{13}$, para constar que, pelo fato de a lógica inicial $Ł_n$ ser com n par, a sublógica na sequência será $Ł_m$ com m ímpar. Isso implica no aparecimento da quase verdade pura qv quando se passa de L_4 para L_7, conforme o exemplo dado. E esse comportamento vai se repetir para qualquer n e g que atendam às mesmas condições estabelecidas para este caso. Observa-se também que a partir da primeira sublógica $Ł_m$ com m ímpar, todas as demais sublógicas da cadeia também terão a quantidade de graus de verdade sendo um número ímpar.

Dessa forma, acredita-se na relevância da aplicação das cadeias de lógicas polivalentes para a quase verdade pura, fraca e forte uma vez que a cadeia de lógicas, pela forma como é gerada, preserva esses tipos de quase verdade. Atenção especial deve ser dada para o terceiro caso, pois inclui a quase verdade pura qv nas cadeias iniciadas por lógicas $Ł_n$, com n par que, originalmente, não comportam a quase verdade pura.

2.4 Cadeias de lógicas polivalentes nas justificações parciais

Esta seção tem o objetivo de propor uma conexão entre os graus de verdade de lógicas em uma cadeia polivalente com o conceito de *justificações parciais*. Segundo Costa-Leite (2014, p.175):

> O conceito de justificação tem lugar de relevância central em qualquer teoria, independente de sua natureza. Sejam nas ciências (formais ou empíricas) ou na filosofia, justificar uma proposição fornece critérios para dizer o quanto um determinado enunciado se conecta com a verdade, a qual é aqui vista de modo padrão e tradicional como correspondência ou adequação do enunciado com a realidade. Ainda, dada uma proposição verdadeira, ela pode ser qualificada, quanto a sua força metafísica, como uma verdade possível, contingente ou necessária. Se um enunciado está justificado como sendo verdadeiro, ou se possui uma ampla variedade de justificações, então alguém tem boas razões para aceitá-lo. Grande parte das proposições que acreditamos não estão, contudo, justificadas plenamente, ou não possuem uma justificação total capaz de gerar certezas.

A partir desse conceito inicial sobre a justificação, deve-se obervar que há duas categorias de justificação, *cf.* Costa-Leite (2014, p.175-176). A primeira categoria é das justificações fortes (J), completas e totais, relativas as verdades necessárias que, uma vez demonstráveis, não podem ser falsas. Por outro lado, a segunda categoria é das justificações fracas(J'), incompletas e parciais, nas quais vigoram a possibilidade e verdades contingentes. E a esta última, pode-se associar a graus de verdade. Segundo ainda Costa-Leite (2014, p.181), "a diferença crucial entre os dois tipos de justificação reside no fato de que a justificação forte não permite que uma proposição φ seja justificada e sua negação $\neg\varphi$ também seja justificada, ao passo que a justificação fraca aceita esse tipo de situação".

Dessa abordagem geral, Costa-Leite (2018) vai tratar de uma questão levantada por Newton da Costa[2], chamando-a de Problema das Justificações Parciais (PJP): *"como é possível que proposições contraditórias sejam simultaneamente justificadas sem que isso destrua o sistema de inferências?"*.[3]

Para desenvolver as três soluções propostas, Costa-Leite (2018, 98-99) estabelece o seguinte critério: "deve-se notar que um operador para modelar a justificação parcial não pode ser explosivo e não pode ser, idealmente, nem factual e nem coerente". As fórmulas apresentadas para aplicar esse critério a um operador $*$ qualquer são as seguintes:

$*$ é factual se, e somente se, $*\varphi \to \varphi$;

$*$ é coerente se, e somente se, $*\varphi \to \neg * \neg\varphi$;

$*$ é explosivo se, e somente se, $*\varphi, *\neg\varphi \vdash \psi$.

Uma das soluções propostas foi para o operador de indeterminação I da lógica trivalente Ł3 de Łukasiewicz. No caso, Costa-Leite (2018, p.110) vai mostrar que o operador I não é tautologicamente válido em $I\varphi \to \varphi$ para $v(\varphi) = \frac{1}{2}$, ou seja, não é factual. Também não é válido em $I\varphi \to \neg I\neg\varphi$ para $v(\varphi) = \frac{1}{2}$, o que mostra que ele não é coerente. E, da mesma forma, esse operador não é explosivo em $I\varphi, I\neg\varphi \vdash \psi$ para a mesma valoração $v(\varphi) = \frac{1}{2}$. Diante disso, Costa-Leite (2018, p.111) conclui que "parece razoável que a justificação parcial seja pensada e concebida como um tipo de indeterminação", e, continua o autor, "essa leitura do terceiro valor e do operador de indeterminação no âmbito das justificações fracas pode ser vista como mais uma motivação para as lógicas polivalentes em geral".

2 da Costa (p.6 199 apud Costa-Leite, 2018, p.97)

3 Eis a explicação de (COSTA-LEITE, 2018, p.97):"Considere o princípio da não contradição formulado do seguinte modo: $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$. Na lógica clássica, estamos falando de uma tautologia, [...]. E isso pode ser verificado semanticamente e também por via de métodos de prova. Assim, podemos dizer que há uma justificação forte para tal princípio [...]. Considere agora a lógica trivalente $Ł_3$ de Łukasiewicz. Usando as $Ł_3$ -valorações é fácil ver que o princípio da não contradição obtém valor não designado para alguma valoração e, como tal, é inválido. Consequentemente, podemos também dizer que há uma justificação forte para a invalidade do princípio da não contradição. Diante do exposto, pode-se pensar então que há uma justificação para a validade do princípio da não contradição e que há, simultaneamente, uma justificação para a sua invalidade. Mas justificar uma proposição e justificar também a sua negação é uma característica das justificações fracas."

Diante dessas considerações sobre justificação fraca e as lógicas polivalentes, decidiu-se por verificar como se dá o comportamento do operador de restauração $\bigtriangledown_{[i,n]}$ (discutido na seção 1.2.2) diante desses mesmos critérios de factualidade, coerência e explosão.

Primeiro, o teste será realizado com os operadores $\bigtriangledown_{[i,n]}$ relativos aos valores indeterminados de $Ł_4$ que, no caso, são: $\bigtriangledown_{[1,4]}$ que, conforme já visto as respectivas matrizes, restaura o grau de verdade $\frac{1}{3}$, e $\bigtriangledown_{[2,4]}$ que restaura o grau de verdade $\frac{2}{3}$:

$\nvDash_{Ł_4} \bigtriangledown_{[1,4]}\varphi \rightarrow \varphi$, para $v(\varphi) = \frac{1}{3}$.

$\nvDash_{Ł_4} \bigtriangledown_{[1,4]}\varphi \rightarrow \neg \bigtriangledown_{[1,4]} \neg\varphi$, para $v(\varphi) = \frac{1}{3}$.

$\bigtriangledown_{[1,4]}\varphi, \bigtriangledown_{[1,4]}\neg\varphi \vdash \psi$, não é explosiva para $v(\varphi) = \frac{1}{3}$.

$\nvDash_{Ł_4} \bigtriangledown_{[2,4]}\varphi \rightarrow \varphi$, para $v(\varphi) = \frac{2}{3}$.

$\nvDash_{Ł_4} \bigtriangledown_{[2,4]}\varphi \rightarrow \neg \bigtriangledown_{[1,4]} \neg\varphi$, para $v(\varphi) = \frac{2}{3}$.

$\bigtriangledown_{[1,4]}\varphi, \bigtriangledown_{[2,4]}\neg\varphi \vdash \psi$, não é explosiva para $v(\varphi) = \frac{2}{3}$.

E esse mesmo comportamento vai se repetir para os demais operadores $\bigtriangledown_{[i,n]}$ para toda lógica $Ł_n$ em virtude da soma lógica de todos os seus operadores de restauração dos valores indeterminados serem da forma:

$$\bigvee_{i=1}^{n-2} \bigtriangledown_{[i,n]}\varphi$$

Com isso, o mesmo resultado de Costa-Leite (2018) para $Ł_3$ se aplica às lógicas polivalentes $Ł_n$. E esse resultado também pode ser estendido para as cadeias de lógicas polivalentes nas quais se garante, em todas as cadeias, as relações de lógica-sublógica conforme a Condição de Lindenbaum. Portanto, pelos critérios de factualidade, coerência e explosão, conforme vai se subindo na mesma cadeia de lógicas, as justificações vão ficando cada vez mais enfraquecidas, o que também é compatível com o próprio enfraquecimento das $Ł_n$ e, por conseguinte, as justificações parciais podem ser usadas para definir quase verdade.

3 Conclusão

Esta monografia teve como objetivo apresentar quatro aplicações das lógicas de Łukasiewicz por via do estudo semântico dessa hierarquia polivalente a partir das relações de lógica e sublógica. Mas essas relações não se limitaram apenas entre uma sublógica $Ł_m$ e outra lógica $Ł_n$, com $m > n$, que atendam à Condição de Lindenbaum. Mas, a partir dessa condição, foi possível estabelecer uma fórmula para geração de cadeias infinitas de lógicas polivalentes nas quais a relação lógica-sublógica pela Condição de Lindenbaum seja automaticamente atendida, ao contrário da sequência convencional da hierarquia de lógicas de Łukasiewicz. Essa fórmula de geração de cadeias de lógicas polivalentes, que é a primeira aplicação proposta, permitiu desenvolver as três aplicações seguintes.

A segunda aplicação está associada aos graus de verdade não designados que se adicionam de uma lógica para a outra quando se sobe na sequência da mesma cadeia, o que garante, portanto, a validade das fórmulas de uma sublógica $Ł_m$ em sua lógica $Ł_n$ e das sublógicas subsequentes até chegar na lógica clássica bivalente $Ł_2$, que é lógica comum de todas as cadeias de lógicas polivalentes. Dessa forma, se uma fórmula φ é tautologia na lógica $Ł_n$, mas não na sublógica $Ł_m$, se não houver grau de verdade em $Ł_m$ que faça φ refutável, ou seja, valor 0, a fórmula φ será uma quase tautologia e que, portanto, por depender somente de valores não designados, pode vir a se tornar válida em $Ł_m$ com a utilização, por exemplo, de algum operador de indeterminação. E essa mesma relação de quase tautologia pode ser transportada para a validade do argumento.

A terceira aplicação considerou os conceitos de quase verdade pura, quase verdade fraca e quase verdade forte aplicados dentro das cadeias de lógicas polivalentes, a partir das quais foi possível observar comportamentos distintos da quase verdade conforme os parâmetros de geração das cadeias. Entre esses comportamentos, o mais notável foi a inclusão da quase verdade pura em cadeias de lógicas polivalentes $Ł_n$, com n sendo incialmente par, mas que crescem com valores ímpares de n. Assim, dentro da mesma cadeia, ao passar, por exemplo, de $Ł_4$ para $Ł_7$, a quase verdade pura, que não estava presente na primeira, aparece na sublógica $Ł_7$.

E a última proposta de aplicação das cadeias de lógicas polivalentes foi no contexto do problema das justificações parciais. Conforme os critérios de factualidade, coerência e de explosão aplicados aos operadores de restauração em qualquer $Ł_n$ da cadeia, verificou-se que as justificações vão se enfraquecendo conforme vai se subindo na sequência das lógicas da mesma cadeia.

Observa-se, entretanto, que as definições propostas carecem de uma verificação formalmente mais rigorosa que pode ser desenvolvida em trabalhos futuros. Da mesma forma, uma vez que a ideia da cadeia de lógicas polivalentes de Łukasiewicz se mostre promissora, ela pode ser expandida tanto para o contexto as lógicas polivalentes de Łukasiewicz quanto para outros sistemas polivalentes e infinito-valentes.

Referências

ARISTOTELES. *Da Interpretação*. Tradução José Veríssimo Teixeira da Mata. 1ª. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2013. Citado na página 12.

CORBALAN, M. I. Conectivos de restauração local. *Dissertação (Mestrado) Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.*, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 14, 29 e 31.

COSTA-LEITE, A. Lógicas da justificação e quase-verdade. *Principia: an international journal of epistemology*, p. 175–186, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 44.

COSTA-LEITE, A. O problema das justificações parciais. *Revista de Filosofia Moderna e Contemporânea*, v. 6, n. 2, p. 95–104, dez. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

COSTA, N. C. A. da. *Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica*. 3. ed. São Paulo: Editora Hucitec, 2008. 289 p. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.

DUNN, J. M.; HARDEGREE, G. M. *Algebraic Methods in Philosophical Logic*. 1. ed. New York: Oxford University Press, 2001. 487 p. (Oxford Logic Guides: 41). Citado 5 vezes nas páginas 18, 24, 33, 34 e 35.

EPSTEIN, R. L. *The Semantic Foundations of Logic*: Volume 1: Propositional logics. NL: Springer, 1990. 388 p. (Nijhoff International Philosophy Series 35). Citado 3 vezes nas páginas 18, 22 e 23.

GOTTWALD, S. *A treatise on many-valued logics*. Baldock, UK: Research Studies Press Ltd, 2001. (Studies in Logic and Computation, vol. 9). Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 28 e 34.

GOTTWALD, S. Many-valued logics. In: JACQUETTE, D. (Volume Editor). *Handbook of the Philosophy of Science. Philosophy of Logic*. Amsterdam, NH: Elsevier, 2007. p. 675–722. Citado na página 9.

HAACK, S. *Filosofia das Lógicas*. Tradução de Cezar A. Mortari, Luiz Henrique A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP, 2002. 359 p. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.

KNEALE, W. C.; KNEALE, M. *O Desenvolvimento da Lógica*. Tradução de Manuel S. Lourenço. 2. ed. Lisboa, PT: Fundação Calouste Gulbenkian, 1980. 773 p. Citado na página 26.

ŁUKASIEWICZ, J. *Selected Works*. Ed. by L. Borkowski. Warzawa, PL: North-Holland Pub. Co., 1970. (Studies in logic and the foundations of mathematics). Citado 13 vezes nas páginas 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 26, 28 e 33.

ŁUKASIEWICZ, J. On the principle of contradiction in aristotle. In: MCCARTHY, J. C. (Ed.). *The Review of Metaphysics Volume 24, Issue 3*. Charlottesville, US: Philosophy Documentation Center, 1971. p. 485–509. Citado 3 vezes nas páginas 13, 16 e 21.

MALINOWSKI, G. Many-valued logic and its philosophy. In: GABBAY, D. M.; WOODS, J. (Ed.). *Handbook of the History of Logic - Volume 8 The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic*. Amsterdam, NH: Elsevier B.V., 2007. p. 13–94. Citado 9 vezes nas páginas 9, 11, 17, 22, 24, 25, 27, 28 e 34.

MCNAUGHTON, R. A theorem about infinite-valued sentential logic. In: *The Journal of Symbolic Logic*. [S.l.]: Association for Symbolic Logic, 1951. v. 16, n. 1, p. 1–13. Citado na página 33.

MIKENBERG, N. C. A. D. C. I.; CHUAQUI, R. Pragmatic truth and approximation to truth. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 51, n. 1, p. 201–221, mar. 1986. Citado na página 42.

OLIVEIRA, M. R. de. A quase verdade nas lógicas polivalentes. p. 59, 2016. Monografia apresentada ao Departamento de Filosofia - Universidade de Brasília. Citado na página 43.

RESCHER, N. *Many-valued logic*. [S.l.]: New York : McGraw-Hill, 1969. Citado na página 41.

ROQUE, C. E. C. A hierarquia das lógicas polivalentes de lukasiewicz. *22º Congresso de Iniciação Científica da UnB*, 2016. Citado na página 11.

ROSSER, J. B.; TURQUETTE, A. R. *Many-valued Logics*. Amsterdam, NL: North-Holland Publishing, 1952. Citado 3 vezes nas páginas 16, 26 e 29.

SHRAMKO, Y.; WANSING, H. *Truth and Falsehood. An Inquiry into Generalized Logical Values*. [S.l.]: Springer Dordrecht Heidelberg London New York, 2011. Citado na página 33.

URQUHART, A. Basic many-valued logic. In: GABBAY, D. M.; GUENTHNER, F. (Ed.). *Handbook of Philosophical Logic*. London, UK: Springer, 2001. p. 249–292. Citado na página 34.