

Ian Rodrigues Massa

Relação entre *Compressive Sensing* sobre Amostras no Domínio de Fourier e medidas de Discrepância Espectral

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade UnB Gama – FGA

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso Rodrigues Mendes

Brasília, DF

2021

Ian Rodrigues Massa

Compressive Sensing e Discrepancy Theory. Ian Rodrigues Massa. – Brasília, DF, 2021-

52 p.

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso Rodrigues Mendes

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA , 2021.

1. Compressive Sensing. 2. Discrepância. I. Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso Rodrigues Mendes. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. *Compressive Sensing e Discrepancy Theory*.

Ian Rodrigues Massa

Relação entre *Compressive Sensing* sobre Amostras no Domínio de Fourier e medidas de Discrepância Espectral

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, :

**Prof. Dr. Cristiano Jacques Miosso
Rodrigues Mendes**
Orientador

Prof. Dr. Adson Ferreira da Rocha
Examinador Interno

Prof. Dr. Felipe Batista da Silva
Examinador Externo

Brasília, DF
2021

Aos meus pais, sem eles nada disso seria possível.

Agradecimentos

Para cada pessoa que ao longo desses muitos anos de estudos, satisfações e êxitos, e também, de muitas frustrações, inseguranças e fracassos, esteve ao meu lado, seja como fonte de inspiração e referência, com apoio e disponibilidade ou ainda como motivador, alguém que me cobrou responsabilidade e acreditou no meu potencial. Não só os frutos dos meus sucessos se devem a vocês, mas também a pessoa que eu me tornei e que procuro me tornar, e por isso meus mais sinceros agradecimentos.

Para meus amigos que fiz ao longo da faculdade e que compartilharam experiências similares as minhas, que dividiram momentos bons e ruins, de choros e risos, e que eu espero levar para a vida, o que eu vivi com vocês foi inesquecível. Em especial gostaria de agradecer alguns grupos de pessoas; as amizades que fiz ao chegar em Brasília: Daniel, Letícia, Larissa, Bruno, João Júnior, João Pedro, Brian, Caio e os demais calouros do primeiro semestre de 2015.

Ao João Bertoncello, uma pessoa incrível que tenho muito orgulho de chamar de amigo. Apesar das adversidades terem nos distanciando ao longo da graduação eu sei que posso contar com você para tudo e da mesma forma eu estou aqui para o que você e a Edel precisarem.

Às quatro pessoas que dividiram moradia comigo, Gabriel, Jaime, Lucas e Matão. Aos dois primeiros, muito obrigado por contribuírem para que Brasília se tornasse uma lar para mim. Ao Lucas por fazer parte, mesmo que por um curto período de tempo, dessa confusão que chamávamos de casa. Ao Matão por ter sido essa pessoa que não só dividiu o mesmo lar, mas também o mesmo cotidiano, a mesma rotina, sei que não deve ter sido fácil e agradeço imensamente pelo companheirismo.

A turma de Medida e Integração, 8 alunos que se tornaram amigos, muito obrigado por tornar essa experiência incrível.

Ao Raul, meu amigo desde o ensino médio e que o gosto em comum pela matemática nos aproximou mesmo percorrendo caminhos distintos. Espero sempre poder contar com você ao meu lado.

Aos demais amigos de Minas, que mesmo nos distanciando por conta dos interesses, motivações e das diferentes escolhas que optamos por seguir, nunca perderam o carinho e o acolhimento. Um grande abraço para: Pedro, Arthur, Letícia, Larissa, Matheus, Caio, Júlia, Virgínia, Guilherme, Nogueiras, Rodrigo, Gabriel, Bolado, Samuel, João Pacheco, Dalila, Fernanda, Flávia, Isabella, Noelle, Peterson, Vinicius, Felipe, entre tantos outros.

Em especial agradeço as pessoas que ao longo da graduação me acolheram e se

tornaram amigos para a vida, minha segunda família: Gabriel, Victor, Matão, Beatriz, Eduardo, Hugo, Adriel, Douglas, Lucas e Luso. Espero matar a saudade de cada um de vocês e anseio por nossos momentos juntos de novo.

Ao incrível corpo docente da UnB, tanto da Faculdade do Gama, quanto do Departamento de Matemática, do Departamento de Engenharia Elétrica, do Instituto de Física e do Instituto de Química. Os professores dessa instituição foram sem dúvida alguma minha maior fonte de inspiração.

Os professores Ronni, Wytler e Lindomar por terem me incentivado tanto, sempre acreditando no meu potencial. À professora Tais e ao professor Eduardo por terem trabalhado comigo, abrindo portas essenciais na minha formação. Ao professor William pela paciência e disponibilidade.

Aos professores do Departamento de Matemática, profissionais incríveis nos quais me espelho e almejo um dia poder chama-los de colegas. À professora Jaqueline, que me incentivou a perseguir a carreira de pesquisador em matemática e também de me tornar um professor didático e claro, que transparece o amor pelo que faz assim como ela. À professora Aline e ao professor João Paulo, que despertaram em mim um interesse pela suas respectivas áreas por conta do entusiasmo e imenso domínio sobre as aulas. Ao professor Diego, uma referência com pesquisador. Ao professor Celius por demonstrar a cada aula e reunião o amor e dedicação a sua profissão, pela organização e disponibilidade e por tonar a experiência de ser seu aluno e principalmente seu monitor algo tão marcante e gratificante.

Ao professor João Carlos Pádua, pelas aulas, pelas conversas e orientações, pelas referências e principalmente pelo amor pela matemática que me contagiou, obrigado por ser esse professor e escritor incrível.

Ao professor Cristiano, cujo entusiasmo e conhecimento foram essenciais para me motivar a persistir no curso de engenharia, tanto como professor, a interatividade de suas aulas são uma referência para o profissional que quero me tornar, quanto como orientador, trabalhar com o senhor é de extrema satisfação, até mesmo nos momentos de dificuldades.

Aos alunos que foram meus monitores ao longo das disciplinas da graduação, muito obrigado pela dedicação e paciência. Em especial um abraço para o Victor que veio a se tornar um grande amigo.

A todos que contribuem com a popularização da ciência e do acesso ao conhecimento, em especial a alguns autores que me marcaram: Djairo Guedes de Figueiredo, Elon Lages Lima, S. C. Coutinho, Rudin, Stein, Hatcher entre tantos outros. Também um agradecimento especial a Alexandra Elbakyan, provedora da ciência para todos, acesso pleno do conhecimento.

Agradeço a UnB e a Faculdade do Gama por fornecerem conhecimento e motivação

além de me acolherem ao longo desses anos. Muito obrigado também aos funcionários e servidores que auxiliaram em todo esse trajeto até aqui.

Por fim gostaria de agradecer a minha família, falta palavras para dizer e é difícil mensurar a importância de vocês. Muito obrigada mãe e pai pelo suporte incondicional e pela cobrança e apoio. Muito obrigado Isa por além de ser uma irmã caçula maravilhosa e uma amiga para todas as horas, é também uma mulher incrível.

*"Educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas.
Pessoas transformam o mundo"*
(Paulo Freire)

Resumo

Técnicas baseadas em *Compressive Sensing* (CS) garantem a aquisição de sinais digitais com taxas reduzidas de amostras. Entender aspectos teóricos e da implementação do método é primordial para a aplicação e otimização do problema de reconstrução via CS. Nesse contexto é proposto um estudo sobre uma abordagem teórica de validação de CS, a RIP, como um critério prático de avaliação de reconstrução. Além disso é introduzido um novo elemento de análise para o cenário de reconstrução via CS baseado em Teoria de Distribuição, a discrepância de uma sequência.

Esse estudo evidencia a RIP como um critério superestimado e ultrapassado do ponto de vista teórico e sem aplicabilidade direta em contextos práticos gerais.

Os testes para validar o efeito da discrepância sobre a reconstrução via CS consistem em gerar sinais aleatórios a serem recuperados, sub-amostrando sequências com diferentes discrepâncias na esperança de correlacionar diretamente qualidade de reconstrução com distribuição na frequência. A relação entre a qualidade de reconstrução e a grandeza de discrepância associada a sequência de frequências a serem sub-amostradas não é tão direta quanto esperado, existindo aspectos e comportamentos que contradizem as hipóteses iniciais dos testes.

Apesar dos resultados parciais, existem diversas mais possibilidades a serem exploradas relacionando CS e discrepância, algumas são discutidas visando promover trabalhos futuros.

Palavras-chaves: Compressive Sensing. Discrepância. Teoria de Distribuições. Propriedade de Isometria Restrita.

Abstract

Compressive Sensing-based techniques guarantee the acquisition of digital signals with reduced sample rates. Understanding theoretical aspects and practical implementation of the method is essential for the application and optimization of reconstruction problems based on CS. In this context, a study on a theoretical approach to CS validation, the Restrict Isometry Property, is proposed as a practical criterion for assessing reconstruction. In addition, a new element of analysis for the scenario of reconstruction via CS based on Theory of Irregularities of Distribution is introduced, the discrepancy of a sequence.

This study discusses the Restrict Isometry Property as an overestimated and outdated criterion from a theoretical point of view and without direct applicability in general practical contexts.

The tests to assess the effect of the discrepancy on the reconstruction via CS consist of generating random signals to be recovered, sub-sampling sequences with different discrepancies in the hope of directly correlating quality of reconstruction with frequency distribution. The relationship between the quality of reconstruction and the discrepancy value associated with the sequence of frequencies to be sub-sampled is not as direct as expected, with aspects and behaviors that contradict the initial hypotheses of the tests.

Despite the partial results, there are several more possibilities to be explored relating CS and discrepancy, some are discussed with a view to promoting future work.

Key-words: Compressive Sensing. Discrepancy. Theory of Irregularities of Distribution. Restrict Isometry Property.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração para problema de reconstrução por CS no caso bidimensional. Em (a) são mostradas bolas ℓ_p unitárias para $p = 2$ (preto), $p = 1$ (vermelho), $p = 0,8$ (azul) e $p = 0,4$ (verde). Em (b) são vistas bolas $\ell_{0,4}$ com diferentes raios aproximando-se da reta de possíveis soluções.	20
Figura 2 – Representação das 200 componentes do vetor \mathbf{f}^{\min} ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z}	36
Figura 3 – Representação das 200 componentes ordenadas do vetor $\mathbf{f}^{\sqrt{0,99}}$ ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z}	37
Figura 4 – Representação das 200 componentes ordenadas do vetor \mathbf{f}^ϕ ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z}	38
Figura 5 – Representação das 200 componentes ordenadas do vetor \mathbf{f}^e ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z}	39
Figura 6 – Representação das 200 componentes ordenadas do vetor \mathbf{f}^π ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z}	40
Figura 7 – Realizações para as distribuições das 200 medidas de frequência tomadas ordenadamente. Em (a) os valores associados a algum \mathbf{f}^{rand} . Em (b) medidas associadas a uma realização $\mathbf{f}^{\text{randn}}$. E por fim (c) representando medidas geradas por uma distribuição exponencial $\mathbf{f}^{\text{rande}}$	42
Figura 8 – Histograma normalizado associado a incidência dos valores estimados para a <i>Sawtooth-Discrepancy</i> para as 5000 realizações das medidas de frequência aleatoriamente geradas no Teste 4; \mathbf{f}^{rand} em azul, $\mathbf{f}^{\text{randn}}$ em vermelho e $\mathbf{f}^{\text{rande}}$ em verde.	44
Figura 9 – Histograma normalizado associado a incidência dos valores estimados para a <i>Sawtooth-Discrepancy</i> para as 5000 realizações das medidas de frequência geradas no Teste 2; as medidas geradas por irracionais, \mathbf{f}^{\min} , $\mathbf{f}^{\sqrt{0,99}}$, \mathbf{f}^ϕ , \mathbf{f}^e e \mathbf{f}^π em ordem e as medidas aleatórias \mathbf{f}^{rand} em azul, $\mathbf{f}^{\text{randn}}$ em vermelho e $\mathbf{f}^{\text{rande}}$ em verde.	45

Lista de abreviaturas e siglas

CS	<i>Compressive Sensing</i>
RIP	<i>Restrict Isometry Property</i>
DFT	Transformada Discreta de Fourier
FFT	Transformada Rápida de Fourier
IRLS	<i>Iterative Recursive Least Squares</i>
PCA	Análise de Componentes Principais
RIP	Propriedade de Isometria Restrita
SER	<i>Signal Estimator Relation</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Contextualização	14
1.2	Objetivos	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	<i>Compressive Sensing</i>	16
2.1.1	<i>Restricted Isometry Property, RIP</i>	17
2.1.2	Normas de Matrizes	18
2.1.3	Exemplificação de CS	19
2.2	Sequências e Discrepância	20
2.2.1	Equidistribuição e o \mathbb{R}/\mathbb{Z}	21
2.2.1.1	Sequências bem e mal Distribuídas e os Irracionais	21
2.2.2	<i>Sawtooth-Discrepancy</i>	22
2.2.3	<i>Low-Discrepancy</i>	24
3	ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL DE CRITÉRIOS PARA PREDIÇÃO DE RECONSTRUÇÃO VIA CS	26
3.1	Avaliação da RIP	26
3.1.1	Condicionando Φ	28
3.2	Implementação da Discrepância e Testes	29
3.3	Reconstrução por <i>Compressive Sensing</i>	32
3.4	Aplicando a <i>Sawtooth-Discrepancy</i> para a Reconstrução via CS	33
3.5	Métricas para avaliação dos resultados	34
4	AVALIAÇÃO DE RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
4.1	Medidas de Frequência Geradas por Irracionais	35
4.2	Gerações de Medidas Aleatórias	41
4.3	Rotina de Testes e a Reconstrução via CS	43
4.4	Teste Estatístico e Validação do Experimento	47
5	CONCLUSÃO	50
5.1	Contribuições e possíveis trabalhos futuros	50
	REFERÊNCIAS	52

1 Introdução

1.1 Contextualização

A aquisição, transporte, armazenamento e o processamento de dados sempre estiveram intimamente relacionadas com o desenvolvimento humano, ao ponto de que a otimização desses processos tenha se tornado um dos maiores desafios de engenharia para a ciência e suas aplicações. Isso é ainda mais evidenciado no contexto digital, onde o volume de dados brutos muitas vezes supera a capacidade de processamento das soluções de *hardwares* disponíveis em determinado cenário. Mesmo nestes casos, volumes distintos de dados podem representar a mesma informação [1], o que leva a um dos pontos-chaves da engenharia contemporânea: quão pequeno um conjunto de dados pode ser desde que ele preserve a informação de interesse para aplicação, e ainda, dado um conjunto de dados associados a uma informação, como extrair o menor subconjunto possível preservando a informação desejada.

Um resultado revolucionário nessa direção está associado a amostragem de sinais analógicos a serem convertidos em sinais digitais. A primeira vista não parece muito plausível recuperar de um conjunto finito de pontos um sinal contínuo que corresponda a informação original do sinal analógico, considerando a infinidade de sinais distintos que contém os valores amostrados. Porém, de maneira surpreendente, o critério de Nyquist garante justamente isso, condições suficientes para que o processo de amostragem recupere com sinais digitais as informações de uma classe ampla de sinais analógicos [2].

Em muitos cenários taxas de aquisição com menor número de amostras em relação ao critério de Nyquist são possíveis e assim diversas técnicas são desenvolvidas e aprimoradas. Aplicações usando *Compressive Sensing* (CS) vêm ganhando cada vez mais relevância [1] e conhecer as capacidades e limitações desse método permite uma melhor implementação nos cenários conhecidos, gerando resultados mais precisos e eficientes e ainda abre espaço para novas aplicações em cenários antes não explorados.

A hipótese central associada a classe de sinais a serem recuperados por CS está ligada a existência de algum domínio conhecido na qual a representação do sinal é esparsa. Por si só essa hipótese já é uma grande motivação para o estudo e a aplicação de CS tendo considerado a proximidade com a realidade nos diversos contextos abordados pela ciência e pelo cotidiano social.

Porém os algoritmos de CS em muitos casos são complexos e podem demandar alto custo computacional e tempo, sendo sensíveis as entradas envolvidas e dependendo fortemente de teoria de otimização. Assim, um melhor entendimento tanto dos aspectos

teóricos de CS quanto das ferramentas computacionais e dos algoritmos a serem utilizadas podem garantir melhores resultados e possibilitar novos cenários de aplicação.

O primeiro aspecto a ser considerado por esse trabalho diz respeito a RIP, um critério teórico que impõe condições sobre o problema de reconstrução para garantir unicidade e consistência da solução. Posteriormente será discutido a viabilidade prática desse critério para a avaliação da qualidade de reconstrução em futuras aplicações.

Outra abordagem desse estudo propõe relacionar a qualidade de reconstrução com a distribuição de sequências no processo de amostragem. Para isso o conceito de discrepância é usado para avaliar de maneira quantitativa o quão bem ou mal distribuídos um conjunto de pontos é.

De início as análises sobre a RIP foram motivadas para obter uma referência comparativa sobre os resultados associados a discrepância como critério para avaliar a qualidade de reconstrução. Porém, com o avanço do entendimento teórico sobre esse critério e a implementação de testes buscando a validação, foi observado a insuficiência dessa abordagem para servir de comparação com os resultados associados a discrepância.

1.2 Objetivos

Dessa maneira esse trabalho apresenta uma revisão a cerca da reconstrução por CS visando garantir o entendimento do método e as particularidades associadas aos parâmetros envolvidos na formulação do problema. A partir dessa formulação, um dos objetivos do estudo consiste em avaliar a RIP como critério de reconstrução, com intuito de concluir sobre sua viabilidade e discutir aspectos associados a sua validação.

Além disso, esse trabalho propõe um estudo sobre teoria de distribuições em torno de uma definição específica de discrepância, buscando aplica-la diretamente no contexto de CS. Assim é esperado concluir sobre a qualidade de reconstrução analisando certos aspectos associados a regularidade de medidas de frequências.

2 Fundamentação Teórica

Esse trabalho propõe uma análise sobre diversos aspectos relacionados a reconstrução de um sinal baseada na teoria de *Compressive Sensing*. Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e resultados prévios relacionados ao problema proposto junto ao desenvolvimento das ferramentas utilizadas na solução.

2.1 *Compressive Sensing*

Seja \mathbb{K}^N espaço vetorial de dimensão $N \in \mathbb{N}$ sobre um corpo \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) e $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ um sinal a ser reconstruído. As técnicas em CS objetivam recuperar \mathbf{x} de um conjunto de medidas $m \in \mathbb{N}$ de modo que $m < N$, ou seja, a partir de um sinal de medidas $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ obter \mathbf{x} . A matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{K}^{m \times N}$ que satisfaz

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

é dita matriz de medidas e relaciona as m medidas com o sinal a ser recuperado \mathbf{x} [3].

Como $m < N$, o sistema 2.1 é subdeterminado, assim a adição de hipóteses sobre o sinal \mathbf{x} é necessária para que o método de reconstrução seja consistente, garantindo que um conjunto m de medidas retorne um único sinal e ainda que esse sinal seja de fato o desejado. No caso de CS a hipótese central sobre \mathbf{x} garante a existência de alguma representação $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ em domínio transformado de modo que $\hat{\mathbf{x}}$ seja esparsa [1]. De maneira geral um vetor esparsa possui componentes nulas, mais precisamente, define-se esparsidade a partir da pseudonorma ℓ_0 ($\|\cdot\|_0 : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$) [4].

Definição 1 *Um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^N$ é dito k -esparsa se $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $k < N$ satisfazendo $\|\mathbf{u}\|_0 \doteq |\{u[n] \in \mathbb{K} \mid u[n] \neq 0\}| \leq k$. É conveniente estabelecer uma referência para comparar esparsidades entre vetores, assim, seja $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^N$ com \mathbf{u} k_1 -esparsa e \mathbf{v} k_2 -esparsa, \mathbf{u} é mais esparsa que \mathbf{v} se $k_1 < k_2$.*

Note que o suporte de \mathbf{u} é dado pelas posições das componentes não nulas do vetor (*i.e.* $\text{supp}(\mathbf{u}) \doteq \{n \in [N] \mid u[n] \neq 0\}$) e parte do problema consiste em considerar os possíveis arranjos de posições para componentes não nulas da representação esparsa $\hat{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} .

Desse modo é possível exemplificar a solução de reconstrução utilizando CS como o cálculo de um vetor $\hat{\mathbf{x}}^*$ que minimiza a ℓ_0 (*i.e.* mais esparsa possível) e que satisfaça a

seguinte restrição:

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \min_{\|\hat{\mathbf{x}}\|_0} \{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^N \mid \underbrace{\mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}}_{\Phi} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \} \quad (2.2)$$

A dificuldade dessa abordagem é a complexidade combinatorial associada ao arranjo de componentes não nulos da representação esparsa $\hat{\mathbf{x}}$, um problema não-convexo [5, 6]. Nesse contexto a minimização da ℓ_0 é inviável para sinais práticos que possuem grandes dimensões.

Uma alternativa é a aproximação da pseudonorma ℓ_0 pelas pseudonormas ℓ_p com $0 < p < 1$ e pela norma ℓ_1 , expressas por:

$$\|\mathbf{u}\|_p \doteq \left(\sum_{n \in [N]} |u[n]|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, 1) \quad (2.3)$$

$$\|\mathbf{u}\|_1 \doteq \sum_{n \in [N]} |u[n]| \quad (2.4)$$

note que a norma ℓ_1 é também uma pseudonorma, e ainda, a aplicação $\|\cdot\|_p$ pode ser estendida para $p = 1$ coincidindo com a aplicação $\|\cdot\|_1$, assim é natural considerar as pseudonormas ℓ_p com $0 < p \leq 1$.

Resta concluir condições para que a solução aproximada pelas pseudonormas ℓ_p coincida com a solução de reconstrução por CS minimizando a ℓ_0 . Uma primeira abordagem nesse aspecto se dá em [7] analisando a Propriedade de Isometria Restrita (*Restricted Isometry Property*, RIP) da matriz $\Phi = \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$, como ilustrado a seguir:

2.1.1 *Restricted Isometry Property*, RIP

Dada uma matriz $\Phi = \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1} \in \mathbb{K}^{m \times N}$ associada a uma representação $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ k -esparsa, existem duas desigualdades de referência encontradas na literatura [7, 8]:

- A RIP em relação a energia do sinal ($\|\cdot\|_2$); a constante de isometria $\delta_k > 0$ a ela associada é o menor valor satisfazendo:

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{u}\|_2^2 \leq \|\Phi\mathbf{u}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{u}\|_2^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \{ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^N \mid \mathbf{x} \text{ é } k\text{-esparsa} \} \quad (2.5)$$

- A RIP em relação a norma ℓ_2 do sinal ($\|\cdot\|_2$); a constante de isometria $\epsilon_k > 0$ a ela associada é o menor valor satisfazendo:

$$(1 - \epsilon_k) \|\mathbf{u}\|_2 \leq \|\Phi\mathbf{u}\|_2 \leq (1 + \epsilon_k) \|\mathbf{u}\|_2, \quad \forall \mathbf{u} \in \{ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^N \mid \mathbf{x} \text{ é } k\text{-esparsa} \} \quad (2.6)$$

Posteriormente será discutido a relação entre as duas abordagens buscando relacionar as respectivas constantes de isometria. Aparentemente a abordagem usual é por meio da RIP

referente a energia do sinal (2.5) (pelo menos as estimativas encontradas são referentes ao valor de δ_s [7]).

O resultado principal associado a RIP diz respeito a consistência das soluções minimizando a ℓ_0 e a ℓ_1 e ainda garantindo a igualdade dessas soluções no seguinte contexto exposto em [7]:

Teorema 1 *Assume-se uma constante $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ associada a $\Phi = \mathbf{MT}^{-1}$. Então, o problema 2.2 obedece às desigualdades:*

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}\|_1 &\leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_1 \\ \|\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}\|_2 &\leq C_0 k^{-1/2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_1\end{aligned}$$

Para alguma constante C_0 . Aqui, considera-se que \mathbf{x}_k é a melhor reconstrução que se obtém no caso em que se conhece as posições e valores das k maiores entradas de \mathbf{x} .

Disso decorre o seguinte resultado [7]:

- Se $\delta_{2k} < 1$ o problema minimizando a ℓ_0 2.2 tem uma única solução k -esparsa.
- Se $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ a solução obtida minimizando a ℓ_1 é equivalente a solução da ℓ_0 .

No próximo capítulo será apresentado uma discussão sobre esse resultado junto à uma avaliação da RIP como critério prático de reconstrução via CS. Para tanto se faz necessário um desenvolvimento da teoria de matrizes relacionando um novo conceito de norma com a Decomposição por Valores Singulares (*Singular Value Decomposition, SVD*) feita a seguir.

2.1.2 Normas de Matrizes

Definição 2 *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times N}$ uma matriz, a aplicação $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^{m \times N} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup 0$ é definida por*

$$\|\mathbf{A}\|_p \doteq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d / \mathcal{O}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \quad (2.7)$$

E ainda, a aplicação $|\cdot|_p : \mathbb{K}^{m \times N} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup 0$ é definida por

$$|\mathbf{A}|_p \doteq \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^d / \mathcal{O}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \quad (2.8)$$

Onde $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{K}^m$ e $\|\cdot\|_p$ é a p -norma do espaço vetorial em questão. Desse modo, ambas as aplicações são ditas normas matriciais sobre $\mathbb{K}^{m \times N}$.

Desde já, fica evidente a proximidade dessa definição com o conteúdo da RIP que limita a aplicação $\Phi = \mathbf{MT}^{-1}$ em relação ao sinal, dado uma norma $p = 2$.

Porém essa definição apresenta uma dificuldade de implementação, tendo em vista que a norma de \mathbf{A} é obtida ao varrer todos os vetores do espaço, isso é problemático do ponto de vista computacional, claramente limitado a operações finitas. Além disso, como estamos interessados em sinais esparsos, um subconjunto do espaço total, esse supremo sobre todos os elementos de \mathbb{K}^N não nos interessa, pois ele é exagerado em relação aos sinais k -esparsos que satisfazem a RIP.

Por sorte, a definição apresentada é estendida no caso $p = 2$ para uma operação computável, descrita por:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\max \lambda(\mathbf{A}^H \mathbf{A})} = \sigma_{\max}(\mathbf{A}) \quad (2.9)$$

$$|\mathbf{A}|_2 = \sqrt{\min \lambda(\mathbf{A}^H \mathbf{A})} = \sigma_{\min}(\mathbf{A}) \quad (2.10)$$

Onde $\lambda(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$ representa um autovalor de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$, $\sigma_{\max}(\mathbf{A})$ e $\sigma_{\min}(\mathbf{A})$ o maior e o menor valor singular da matriz \mathbf{A} respectivamente.

2.1.3 Exemplificação de CS

A Figura 1 ilustra, para um sinal bidimensional, a estratégia abordada por CS para reconstrução de sinais esparsos minimizando as normas ℓ_p com p variando de 0, 4 até 2. Na Figura 1(a) são expostas as ditas “bolas unitárias” e correspondem ao conjunto de vetores em \mathbb{R}^2 que possuem $\ell_p = 1$. Já em 1(b) bolas $\ell_{0,4}$ com diferentes raios aproximam a reta com as possíveis soluções justamente nos eixos, onde os sinais são 1-esparsos.

Fica evidente que quanto menor o valor de p , a bola ℓ_p se aproxima dos eixos coordenados. Assim quanto mais próximo p for de 0, a solução em questão se aproxima da minimização da ℓ_0 .

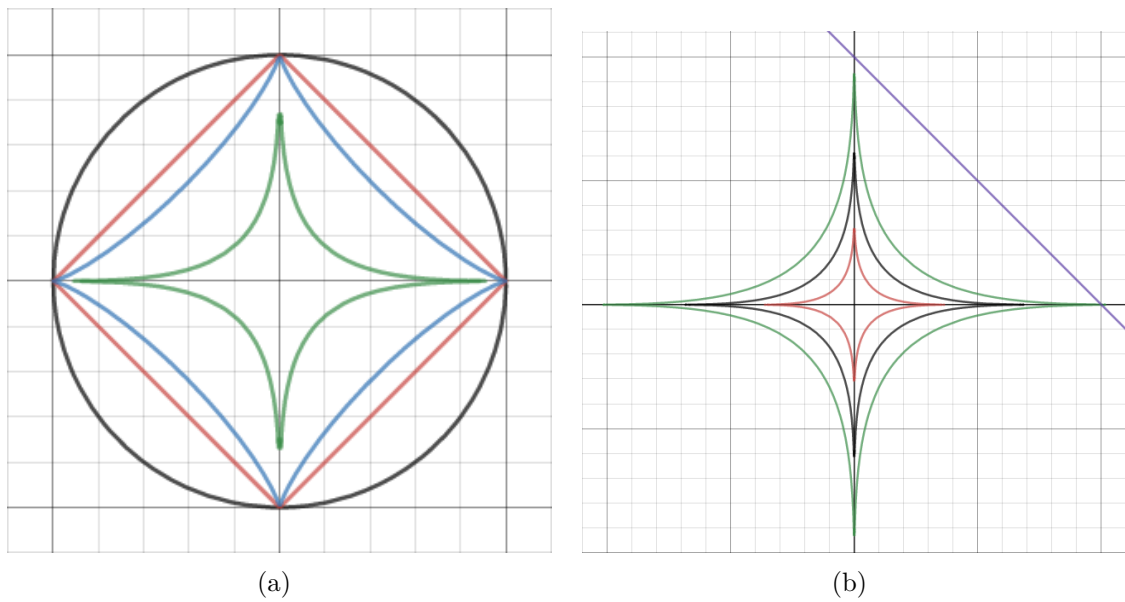


Figura 1 – Ilustração para problema de reconstrução por CS no caso bidimensional. Em (a) são mostradas bolas ℓ_p unitárias para $p = 2$ (preto), $p = 1$ (vermelho), $p = 0,8$ (azul) e $p = 0,4$ (verde). Em (b) são vistas bolas $\ell_{0,4}$ com diferentes raios aproximando-se da reta de possíveis soluções.

Na prática a dimensão dos sinais envolvidos é muito superior e o conjunto solução de 2.2 é o vetor contido no hiperplano que satisfaz

$$\underbrace{\mathbf{MT}^{-1}}_{\Phi} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

e que contém a maior quantidade de eixos (*i.e.* o vetor mais esparsos possível).

Diversos fatores, tais como a quantidade de medidas disponíveis, o condicionamento da matriz de aquisição e a esparsidade atingida no domínio transformado afetam os resultados dos algoritmos possíveis [3]. Assim, características dos sinais trabalhados (esparsidade k , quantidade m de medidas tomadas pelo *hardware*, etc.) e do sistema de aquisição devem ser avaliadas para a escolha do método mais adequado à aplicação.

2.2 Sequências e Discrepância

A maneira como um conjunto de pontos se distribui ao longo da reta \mathbb{R} pode evidenciar diversas características e comportamentos desse conjunto. O estudo sobre sequências em \mathbb{R} traz fortes resultados nas áreas de Análise de Fourier e Teoria Analítica dos Números, além de apresentar ideias intimamente ligadas a amostragem.

2.2.1 Equidistribuição e o \mathbb{R}/\mathbb{Z}

Seja $x \in \mathbb{R}$, denote por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ a parte fracionária de x , note que $\{x\} \in [0, 1)$. Desse modo é conveniente definir uma relação de equivalência entre os números reais, de maneira a comparar dois números distintos levando em consideração apenas suas respectivas partes fracionárias, ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$ então

$$x \sim y \Leftrightarrow \{x\} = \{y\} \quad (2.11)$$

Satisfazendo as propriedades reflexiva, de simetria e de transitividade. Além disso, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\{k\} = k - \underbrace{\lfloor k \rfloor}_k = 0 \Rightarrow k \sim 0$$

Assim, os números inteiros \mathbb{Z} são equivalentes entre si por essa relação (*i.e.* $\mathbb{Z} = [0]$), dando origem ao conjunto consciente \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Note que o consciente em questão é levemente diferente do conjunto $[0, 1)$ ou ainda do $[0, 1]$ por conta da equivalência $0 \sim 1$, de fato, \mathbb{R}/\mathbb{Z} é isomorfo a esfera S^1 ($\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$). Dados $x, y \in \mathbb{R}$ satisfazendo $x \sim y$, segue que $x = y$ em relação a \mathbb{R}/\mathbb{Z} , assim todo elemento de \mathbb{R} pode ser operado em \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Desse modo é natural a seguinte definição:

Definição 3 *Uma sequência $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}/\mathbb{Z} é dita Equidistribuída (ou uniformemente distribuída) se para toda $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ continua temos*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f(x) dx \quad (2.12)$$

A noção de equidistribuição está relacionada com as sequências truncadas de N elementos de $\{\xi_n\}$ representarem partições de \mathbb{R}/\mathbb{Z} com norma pequena para N grande, note que a ordem da partição em questão não corresponde com a ordem dos elementos de $\{\xi_n\}$.

2.2.1.1 Sequências bem e mal Distribuídas e os Irracionais

Alguns resultados de Teoria Analítica dos Números são particularmente úteis para a construção de sequências com certos comportamentos. Posteriormente essa construção será implementada para validar a qualidade de reconstrução por CS. O primeiro diz respeito a como a parte fracionária dos múltiplos naturais de um irracional se distribuí de maneira a preencher o \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Mais precisamente segue o seguinte resultado

Teorema 2 *Dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o conjunto $\{\{n\alpha\} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$ é denso em \mathbb{R}/\mathbb{Z} .*

Assim uma sequência candidata a equidistribuição pode ser gerada tomando um irracional α e considerando $\{\{n\alpha\}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Por outro lado a potenciação de irracionais leva para o caminho contrário dependendo da natureza do número considerado. O número de ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se relaciona com a sequência de Fibonacci de uma maneira particular. Seja F_n o n -ésimo número de Fibonacci, pela formula de Binet vale:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\phi} \right)^n - \left(\underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{1-\phi} \right)^n \right] \in \mathbb{N}$$

além disso, para a sequência de Lucas definida analogamente a de Fibonacci porém tomando $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$ vale:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} = \phi^n + (1 - \phi)^n \in \mathbb{N}$$

Note que $|1 - \phi| < 1$, assim o termo $(1 - \phi)^n$ se aproxima de zero para n suficientemente grande. Por conta disso, ϕ^n se aproxima do inteiro L_n , implicando que $\phi^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ em \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Esse resultado garante que a sequência $\{\{\phi^n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ se concentra no 0 em \mathbb{R}/\mathbb{Z} , representando um candidato para sequência má distribuída.

De maneira geral para um irracional α a sequência $\{\{\alpha^n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ se distribuirá em \mathbb{R}/\mathbb{Z} de acordo com a natureza algébrica ou transcendente de α .

2.2.2 Sawtooth-Discrepancy

A noção de distribuição em \mathbb{R}/\mathbb{Z} precisa ser trabalhada de modo a viabilizar aplicações práticas, tendo em vista que considerar sequências sobre todos os números naturais não é uma operação computável, já que não é finita. Nesse contexto surge o conceito de discrepância, que visa atribuir uma noção de distribuição a um conjunto finito de pontos de uma sequência.

Em Teoria de Discrepância existem diversas definições com aplicações distintas para a discrepância de uma sequência finita. Este trabalho se propõe a estudar um tipo específico associado a função Serra no \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Essa função denotada por $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\psi(x) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}, & \text{se } x \notin \mathbb{Z} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.13)$$

Vale ressaltar que a escolha de ψ não é arbitrária. Quando vista restrita ao \mathbb{R}/\mathbb{Z} (i.e. $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) os coeficientes de Fourier da função Serra são dados por

$$\hat{\psi}(m) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \psi(x) e^{-2\pi i m x} dx = -\frac{1}{2\pi i m}$$

note que como ψ é normalizada e de variação limitada vale **para todo ponto**:

$$\psi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(m) e^{2\pi i m x} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} -\frac{1}{2\pi i m} e^{2\pi i m x}$$

Assim, a função Serra se comporta como uma espécie de função sinal em relação a reta para o \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Nesse ponto a função Serra é usada como ferramenta para concluir o quão irregular um conjunto finito de pontos é no \mathbb{R}/\mathbb{Z} baseado na seguinte definição:

Definição 4 *Seja $\{\xi_n\}_{n \in [N]} = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ uma seqüência finita de N pontos em \mathbb{R}/\mathbb{Z} , a discrepância associada a função Serra (**Sawtooth-Discrepancy**) é uma aplicação $\Delta_N^{(\infty)} : \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por*

$$\begin{aligned} \Delta_N^{(\infty)} = \Delta^{(\infty)}(\xi_1, \dots, \xi_N) &\doteq \left\| \sum_{k=1}^N \psi(\xi_k - y) \right\|_{L^{(\infty)}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^N \psi(\xi_k - y) \right|, y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

Essa definição está relacionada com a noção de equidistribuição de uma seqüência pelo seguinte resultado

Teorema 3 *Uma seqüência $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}/\mathbb{Z} é Equidistribuída se e somente se*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Delta^{(\infty)}(\xi_1, \dots, \xi_N) = 0$$

Assim uma grande* discrepância indica uma irregularidade na distribuição de pontos do \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Porém a definição apresentada não dá a devida noção sobre os aspectos quantitativos de uma discrepância, ou seja, pela definição apenas não é possível caracterizar o valor dessa aplicação como grande ou pequeno. Assim o próximo resultado apresenta cotas para a *Sawtooth-Discrepancy*:

Teorema 4 *Seja $\Delta_N^{(\infty)}$ uma discrepância de uma seqüência finita $\{\xi_n\}_{n \in [N]} = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ em \mathbb{R}/\mathbb{Z} , então $\Delta_N^{(\infty)}$ satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\frac{1}{2} \leq \Delta^{(\infty)}(\xi_1, \dots, \xi_N) \leq \frac{N}{2} \tag{2.14}$$

O conceito de discrepância associado a função Serra abordado nesse trabalho em [2.2.2](#) faz parte de uma família mais geral de aplicações descrita a seguir

Definição 5 *Discrepância- L^p* ($1 \leq p \leq \infty$)

$$\begin{aligned} \Delta^p(\xi_1, \dots, \xi_N) &\doteq \left\| \sum_{k=1}^N \psi(\xi_k - y) \right\|_{L^p(\mathbb{R}/\mathbb{Z})} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \left| \sum_{k=1}^N \psi(\xi_k - y) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty \\ &= \Delta_N^{(\infty)}, \text{ se } p = \infty \end{aligned}$$

Nessa família, dado uma sequência finita $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ em \mathbb{R}/\mathbb{Z} vale

$$\Delta^q(\xi_1, \dots, \xi_N) \leq \Delta^p(\xi_1, \dots, \xi_N), \quad \forall 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

Essa relação de certa maneira motiva o foco desse trabalho no caso $p = \infty$ por se tratar de uma cota superior para os demais casos.

No contexto de processamento de sinais e CS, dado um sinal $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^N$ com entradas $u[n]$ com $n \in [N]$ podemos considerar a sequência finita $\{\{u[1]\}, \dots, \{u[N]\}\}$ em \mathbb{R}/\mathbb{Z} e associar a discrepância $\Delta^p(\{u[1]\}, \dots, \{u[N]\})$ a \mathbf{u} , assim

$$\Delta^p(\mathbf{u}) \doteq \Delta^p(\{u[1]\}, \dots, \{u[N]\}),$$

em particular se $u[n] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \forall n \in [N]$ então $\Delta^p(\mathbf{u}) = \Delta^p(u[1], \dots, u[N])$.

2.2.3 Low-Discrepancy

Na literatura são encontradas diversas definições distintas e que possibilitam diferentes análises e resultados. Um exemplo é a definição de discrepância tomada sobre as características dos intervalos. Lembrando que φ_χ é dita função característica de χ se

- $\varphi_\chi(x) = 1$ se $x \in \chi$;
- $\varphi_\chi(x) = 0$ se $x \notin \chi$.

Assim, segue a seguinte definição:

Definição 6 *Seja $\{\xi_n\}_{n \in [N]} = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ uma sequência finita de N pontos em \mathbb{R}/\mathbb{Z} , a discrepância associada a característica dos intervalos é uma aplicação $D_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por*

$$D_N = D(\xi_1, \dots, \xi_N) \doteq \sup \left\{ \left| \left(\sum_{k=1}^N \varphi_{u,v}(\xi_k) \right) - N(v - u) \right|, \varphi_{u,v} \in \mathcal{C} \right\}$$

onde o supremo é tomado sobre a coleção \mathcal{C} de todas as funções características de intervalos normalizados. Uma definição complementar é dada pela aplicação $d_N : \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{R}_+$ dita **Low-Discrepancy** sendo

$$d(\xi_1, \dots, \xi_N) \doteq \frac{1}{N} D(\xi_1, \dots, \xi_N)$$

note que a *Low-Discrepancy* é uma normalização da discrepância associada a característica dos intervalos.

O seguinte resultado relaciona essa definição com a *Sawthooth-Discrepancy*

Proposição 1 *Seja $\{\xi_n\}_{n \in [N]} = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ uma sequência finita de N pontos em \mathbb{R}/\mathbb{Z} , então valem as seguintes desigualdades:*

$$\begin{aligned} \Delta^{(\infty)}(\xi_1, \dots, \xi_N) &\leq D(\xi_1, \dots, \xi_N) \leq 2\Delta^{(\infty)}(\xi_1, \dots, \xi_N) \\ \frac{1}{N}\Delta^{(\infty)}(\xi_1, \dots, \xi_N) &\leq d(\xi_1, \dots, \xi_N) \leq \frac{2}{N}\Delta^{(\infty)}(\xi_1, \dots, \xi_N) \end{aligned}$$

3 Análise Teórica e Experimental de Critérios para Predição de Reconstrução via CS a partir de Medidas de Frequência

3.1 Avaliação da RIP

Em [7] a RIP é apresentada como justificativa teórica para garantir a reconstrução por CS via minimização da ℓ_0 e da ℓ_1 , motivando a análise a cerca da viabilidade desse critério para implementação em aplicações. De início o presente trabalho propõe relacionar as duas abordagens envolvendo a RIP (2.5 e 2.6) por meio do seguinte desenvolvimento.

O caso de reconstruir o sinal nulo de \mathbb{K}^N é trivial, então, sem perda de generalidade, tome uma representação $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ k -esparsa satisfazendo $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2 \neq 0$ (*i.e.* $\hat{\mathbf{x}} \neq \emptyset$). Se $\hat{\mathbf{x}}$ satisfaz 2.6 então

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon_k) &\leq \frac{\|\Phi\hat{\mathbf{x}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} \leq (1 + \epsilon_k), \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^N \setminus \emptyset \mid \hat{\mathbf{x}} \text{ é } k\text{-esparsa}\} \\ \Rightarrow (1 - \epsilon_k)^2 &\leq \left(\frac{\|\Phi\hat{\mathbf{x}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} \right)^2 \leq (1 + \epsilon_k)^2 \therefore (1 - 2\epsilon_k + \epsilon_k^2) \leq \left(\frac{\|\Phi\hat{\mathbf{x}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} \right)^2 \leq (1 + \underbrace{2\epsilon_k + \epsilon_k^2}_{\delta_k}) \\ (1 - \delta_k) &= (1 - 2\epsilon_k + \epsilon_k^2) \leq (1 - 2\epsilon_k + \epsilon_k^2) \leq \left(\frac{\|\Phi\hat{\mathbf{x}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2} \right)^2 \leq (1 + 2\epsilon_k + \epsilon_k^2) = (1 + \delta_k) \end{aligned}$$

logo 2.6 implica em 2.5 (fazendo $\delta_k = \epsilon_k^2 + 2\epsilon_k > 0$). Se $\hat{\mathbf{x}}$ satisfaz 2.5 então basta tomar

- $\epsilon_k = \max \left\{ \sqrt{(1 + \delta_k)} - 1, 1 - \sqrt{(1 - \delta_k)} \right\} > 0$, se $\delta_k \leq 1$;
- $\epsilon_k = \max \left\{ \sqrt{(1 + \delta_k)} - 1, 1 \right\} > 0$, se $\delta_k > 1$.

Implicando em 2.6. Assim as duas formulações são coerentes e se recuperam, justificando a aplicação conforme o contexto mais adequado (trabalhar com a norma ℓ_2 do sinal ou com sua energia).

Após essa conclusão a análise sobre a RIP adotou uma perspectiva de 2.5 de acordo com [7] para discutir as cotas propostas. Para a resolução minimizando a ℓ_0 a RIP é imposta com $\delta_{2k} < 1$ por conta da seguinte justificativa, se $\delta_{2k} \geq 1$ pode existir \mathbf{u} $2k$ -esparsa de modo que $\Phi\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e ainda decomposições de \mathbf{u} , \mathbf{h} e \mathbf{h}' k -esparsos satisfazendo $\mathbf{u} = \mathbf{h} - \mathbf{h}'$ implicando em

$$\Phi(\mathbf{h} - \mathbf{h}') = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

$$\Rightarrow \Phi\mathbf{h} = \Phi\mathbf{h}' \tag{3.2}$$

assim \mathbf{h} e \mathbf{h}' não são recuperados por CS por serem fibras do mesmo sinal da aplicação $\Phi = \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1}$. Note que essa decomposição não é única, na verdade para \mathbf{u} $2k$ -esparso toda combinação de k elementos não nulos gera um \mathbf{h} candidato e \mathbf{h}' é obtido tomando o inverso aditivo das demais k medidas restantes.

Apesar da coerência do argumento, fica evidente que a imposição da RIP é muito rígida para essa conclusão, tendo em vista que toda a formulação independe de uma cota superior para Φ , ao passo que a RIP impõe uma cota superior simétrica a cota inferior. Note que essa restrição só garante suficiência, tendo em vista que Φ aplicado a \mathbf{u} pode ser diferente de zero para todo \mathbf{u} $2k$ -esparso e ainda não satisfazer a RIP com constante de isometria $\delta_{2k} < 1$, basta que a constante de isometria seja determinada exclusivamente pela cota superior e inferiormente a aplicação não alcance o zero. Além disso esse argumento busca condições para garantir que todo sinal k -esparso seja reconstruído pela minimização da ℓ_0 , o que do ponto de vista prático pode representar uma restrição muito grande. Isso foi observado no primeiro teste de validação desse trabalho, que consistiu na reconstrução de diversos sinais sujeitos a matrizes distintas, uma família satisfazendo a RIP e outra extrapolando a desigualdade 2.5.

Pelo argumento apresentado em 3.1 conclui-se que o conjunto de vetores não reconstruídos são restritos a aplicação $\Phi\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e para cada $2k$ escolhe k combinações, uma família de vetores \mathbf{h} e \mathbf{h}' não são recuperados por CS minimizando a ℓ_0 . A existência dessas famílias não inviabilizam a implementação, tendo em vista que o conjunto de vetores recuperáveis (*i.e.* o conjunto complementar a união dessas famílias) é bastante extenso podendo representar uma gama de aplicações que são bem recuperadas via CS mesmo sem satisfazer a RIP.

Por outro lado as conclusões a cerca da equivalência da solução minimizando a ℓ_0 com a solução minimizando a ℓ_1 apresentadas em [7] para o problema 2.5 e em [8] para o problema 2.6 envolvem a aplicação da RIP para obtenção de uma cota superior para o termo $\|\Phi\hat{\mathbf{x}}\|_2$, logo a imposição de uma única constante de isometria para garantir cotas superiores e inferiores simétricas não tem motivação e implica em uma restrição considerável para o problema.

Junto a isso, por se tratar de uma imposição condicionada as possíveis representações k -esparso no espaço transformado, verificar a RIP é um problema combinatorial ([8] apresenta uma condição em k para o caso $m \geq 3k$ que garante 2.6 de maneira direta com probabilidade alta para N grande). De maneira geral, verificar a RIP para vetores η -esparso consiste em considerar cada possibilidade das N escolhe η disposições para as entradas não nulas e por fim verificar em cada uma delas se satisfeito ou não 2.5 ou 2.6.

Por conta desses diversos fatores, uma abordagem alternativa é proposta, considerando cotas assimétricas para a aplicação Φ e ainda explicitando o processo de validação.

3.1.1 Condicionando Φ

Seja $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^N$ η -esparso, note que Φ opera da seguinte maneira sobre as $N - \eta$ entradas nulas de \mathbf{u} : lembrando que o suporte de \mathbf{u} são as posições das entradas não nulas do vetor, tome $j_k \in [N] \setminus \text{supp}(\mathbf{u})$ com $k \in [N - \eta]$ e $j_1 < j_2 < \dots < j_{N-\eta}$, então $u[j_k] = 0$, assim j_k representa a k -ésima entrada nula de \mathbf{u} e ainda, fazendo $a_{i \times j} \in \Phi$, vale

$$a_{i \times j_k} u[j_k] = a_{i \times j_k} \cdot 0 = 0, \quad \forall i \in [N]$$

Assim todo elemento da coluna j_k de Φ é anulado pelo correspondente termo $u[j_k]$ de \mathbf{u} no produto $\Phi \mathbf{u}$. É natural então definir um vetor e uma matriz restritos apenas ao suporte de \mathbf{u} . Dessa forma, defina $\mathbf{u}_\eta \in \mathbb{K}^\eta$ de modo que $u_\eta[n] = u[i_n]$, $\forall i_n \in \text{supp}(\mathbf{u})$ com $i_1 < i_2 < \dots < i_\eta$, ou seja, \mathbf{u}_η é o vetor dos elementos não nulos de \mathbf{u} tomados ordenadamente. Além disso, $\Phi_\eta \in \mathbb{K}^{m \times \eta}$ com $b_{l \times n} = a_{l \times i_n} \in \Phi_\eta$ é a matriz obtida retirando as j_k colunas da matriz Φ . Note que o produto $\Phi_\eta \mathbf{u}_\eta$ equivale a $\Phi \mathbf{u}$ e ainda $\|\mathbf{u}_\eta\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{K}^N$. Logo segue o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{\|\Phi \mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} = \frac{\|\Phi_\eta \mathbf{u}_\eta\|_2}{\|\mathbf{u}_\eta\|_2} \quad (3.3)$$

$$\|\Phi_\eta\|_2 \leq \frac{\|\Phi \mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \leq \|\Phi_\eta\|_2 \quad (3.4)$$

$$\sigma_{\min}(\Phi_\eta) \leq \frac{\|\Phi \mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \leq \sigma_{\max}(\Phi_\eta) \quad (3.5)$$

Assim, para cada distribuição de η componentes não nulas possíveis para \mathbf{u} é possível obter uma cota inferior e uma cota superior associada aos extremos dos valores singulares de Φ condicionado a essa distribuição. Repetindo o processo para todas as N escolhe η combinações possíveis, basta tomar o mínimo sobre as cotas inferiores e o máximo sobre as superiores para obter cotas globais para todo vetor η -esparso.

Esse método, semelhante a verificação da RIP, possui alto custo computacional, por se tratar de um problema combinatorial. Porém, diferentemente da RIP, essa abordagem garante independência entre as cotas inferiores e superiores, tanto em relação a uma mesma distribuição de entradas não nulas quanto em distribuições distintas, possibilitando substituir as hipóteses a cerca de uma constante de isometria para Φ satisfazendo 2.5 ou 2.6 por imposições mais razoáveis e menos restritivas. Essa é uma grande motivação para adequar resultados baseados na RIP para a formulação proposta; em 1 é possível substituir as imposições associadas a constante de isometria para garantir a unicidade da solução do problema minimizando a ℓ_0 da seguinte forma:

Corolário 1 *Seja $\Phi = \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1} \in \mathbb{K}^{m \times N}$, satisfazendo*

$$\min_{\substack{N \\ 2k}} \sigma_{\min}(\Phi_{2\mathbf{k}}) > 0 \quad (3.6)$$

então o problema 2.2 possui uma única solução minimizando a ℓ_0 .

Seguindo o apresentado em [7], a restrição 3.6 é ainda mais forte, de fato o critério exposto é equivalente a unicidade de solução (*i.e.* o problema 2.2 possui uma única solução minimizando a $\ell_0 \Leftrightarrow \min \sigma_{\min}(\Phi_{2\mathbf{k}}) > 0$). Note que o custo computacional dessa abordagem é o mesmo da validação da RIP, porém com um critério menos restrito.

Considerar restrições independentes sobre as cotas da aplicação Φ também pode resultar em melhoras para resultados relacionando a equivalência de soluções minimizando alguma ℓ_p com $0 < p \leq 1$ com a solução obtida por CS minimizando a ℓ_0 . Em [8] é apresentado um exemplo para o caso $m \geq \eta = 3k$ a seguinte imposição sobre a RIP:

Teorema 5 *Seja $\Phi = \mathbf{M}\mathbf{T}^{-1} \in \mathbb{K}^{m \times N}$ uma matriz gaussiana independente e identicamente distribuída e ainda se*

$$m \geq \eta \geq ck \log\left(\frac{N}{k}\right)$$

para alguma constante c pequena, então Φ satisfaz a RIP 2.6 tomando $0 < \epsilon_k < 1$ com grande probabilidade para N suficientemente grande.

Esse resultado substituí o custo combinatorial da verificação da RIP para uma expressão direta no caso explicitado. Migrar do uso da RIP para a proposta de cotas independentes pode resultar em uma nova constante para a expressão, ainda menor que a citada dados N e ϵ_k fixos, ou ainda, no caso mais otimista, em uma expressão assintoticamente mais permissiva para valores de m menores (um exemplo seria a substituição da função logaritmo da expressão por composições de logaritmos).

A análise proposta evidenciou a inviabilidade da RIP como critério de avaliação prático para reconstruções via CS. De fato, até como objeto teórico considerar os valores principais σ_{\min} e σ_{\max} das decomposições da aplicação Φ é uma abordagem mais atual do que o tratamento de cotas simétricas proposto pela imposição da RIP, como observado em [1]. Apesar dos resultados desenvolvidos e as observações apontadas terem colaborado para o entendimento como um todo do método de reconstrução via CS, a expectativa de utilizar da RIP como uma métrica de comparação para avaliar a discrepância não se concretizou.

3.2 Implementação da Discrepância e Testes

As definições apresentadas em 2.2 possuem certas peculiaridades e detalhes relacionadas a implementação desses conceitos em um contexto digital. Nessa sessão será proposto uma discussão sobre esses aspectos, apresentando a maneira como esses conceitos foram aplicados.

O conceito da *Sawtooth-Discrepancy* apresentado em 2.2.2 toma o supremo sobre as translações em \mathbb{R}/\mathbb{Z} do módulo da soma da função Serra aplicada nos pontos da

sequência transladados. A dificuldade dessa definição para o cálculo da discrepância de uma sequência qualquer está em varrer todas as translações do \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Uma alternativa é estimar por baixo o valor de $\Delta^{(\infty)}$ para uma sequência formada pelas entradas de um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$ calculando o valor de distintas somas parciais para um conjunto de translações finito. O supremo tomado todas as translações pode ser aproximado pelo seguinte argumento: seja $\{\xi_n\}$ uma sequência finita de N pontos em \mathbb{R}/\mathbb{Z} e dado $\varepsilon > 0$, pela definição de supremo vale

$$\Delta^{(\infty)} \geq \left| \sum_{k=1}^N \psi(\xi_k - y) \right|, \forall y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (3.7)$$

$$\exists y_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : \Delta^{(\infty)} - \varepsilon < \left| \sum_{k=1}^N \psi(\xi_k - y_0) \right|, \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow \Delta^{(\infty)} - \left| \sum_{k=1}^N \psi(\xi_k - y_0) \right| < \varepsilon, \forall y_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (3.9)$$

ou seja, existe algum $y_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ cuja a soma parcial do módulo da função Serra aplicada na sequência $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ transladada de y_0 aproxima bem $\Delta^{(\infty)}$.

Tomando uma partição \mathcal{P} de \mathbb{R}/\mathbb{Z} uniformemente espaçada de modo que a norma da partição seja $\rho > 0$, pelo princípio da casa dos pontos vale que para algum $y_p \in \mathcal{P}$, $|y_p - y_0| < \rho$; logo y_0 pode ser bem aproximado por algum elemento de \mathcal{P} . Assim o candidato proposto para estimar por baixo $\Delta^{(\infty)}$ é

$$\Delta_{\leq}^{(\infty)} = \max \left\{ \left| \sum_{k=1}^N \psi(\xi_k - y_p) \right|, y_p \in \mathcal{P} \right\} \quad (3.10)$$

e vale

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \Delta_{\leq}^{(\infty)} = \Delta^{(\infty)} \quad (3.11)$$

Note que $\Delta_{\leq}^{(\infty)}$ é obtido tomando o máximo sobre um conjunto finito, sendo bem definido e computável. Assim o algoritmo proposto em 1 descreve o estimador da *Sawtooth-discrepancy* de um vetor \mathbf{x} em função de uma norma de partição ρ .

Posteriormente a estrutura de repetição proposta em 1 foi substituída por uma abordagem matricial, associando para cada elemento da partição uma coluna de uma matriz dada por \mathbf{x} transladado desse elemento, operando o módulo da soma da função Serra aplicado a cada coluna, tomando o máximo resultante. Essa mudança visa diminuir o custo computacional do estimador, considerando que esse estimador será aplicado para cada sinal teste gerado, que no caso de sinais aleatórios essa função será iterada para cada realização e qualquer ganho de eficiência possibilita testes mais completos e análises mais finas sobre o estudo.

É importante notar que o algoritmo proposto em 1 é sensível a entrada ρ e a natureza da sequência associada aos elementos de \mathbf{x} . Apesar de 3.11 garantir a convergência

Algoritmo 1: *Sawtooth-Discrepancy estimator*

Entrada: \mathbf{x} , ρ ;
Saída: $\Delta_{\leq}^{(\infty)}$;

- 1 **início**
- 2 $\mathbf{y} \leftarrow$ Vetor que particiona o \mathbb{R}/\mathbb{Z} uniformemente, com partição de tamanho ρ ;
- 3 $\mathbf{D} \leftarrow$ Vetor do tamanho de \mathbf{y} com entradas nulas;
- 4 **repita**
- 5 $D[p] \leftarrow \left| \sum_{k=1}^N \psi(x[k] - y[p]) \right|$;
- 6 **até** todos os elementos da partição \mathbf{y} de \mathbb{R}/\mathbb{Z} serem computados;
- 7 $\Delta_{\leq}^{(\infty)} \leftarrow \max \mathbf{D}$;
- 8 **fim**

para uma partição fina, em alguns casos o erro associado a operação é muito maior que a norma da partição (*i.e.* $\Delta^{(\infty)} - \Delta_{\leq}^{(\infty)} \gg \rho$). Dois argumentos relacionados foram propostas para explicar esse comportamento, a primeira diz respeito a irregularidade da função Serra no ponto de descontinuidade 0, possibilitando um comportamento oscilatório para certas translações.

Complementar a isso o algoritmo proposto ao tomar uma partição sobre \mathbb{R}/\mathbb{Z} aproxima y_0 por números racionais e o erro dessa aproximação é iterado N vezes aplicado a função Serra e somado. No caso dos elementos de \mathbf{x} pertencerem aos números racionais, pode ocorrer das partições não coincidirem com a translação associada ao supremo da soma. Caso os elementos de \mathbf{x} forem irracionais, há a possibilidade dos números das sequências serem mal aproximados por racionais, como por exemplo o número de ouro ϕ que por conta da sua expansão em frações contínuas ser composta exclusivamente por 1's não é bem aproximado por números racionais.

Assim um pouco de cautela é recomendado ao tratar da estimativa de $\Delta^{(\infty)}$ por meio do algoritmo 1. Alguns resultados apresentados em 2.2 são úteis para conferir a coerência da estimativa obtida. Por 2.14 estimativas inferiores a 1/2 são pouco acuradas, indicando que a escolha para a norma da partição ρ é inadequada (vale ressaltar que não necessariamente uma norma menor resulta em melhores resultados, tendo em vista as respostas oscilatórias associadas a $\Delta_{\leq}^{(\infty)}$).

Além disso, iterar com diferentes valores para ρ a estimativa no caso de um sinal com entradas irracionais, tentando adequar a sensibilidade ao tamanho da partição. Lembrando que uma partição pequena aumenta o custo computacional da estimativa. Felizmente para os casos onde essa estimativa será iterada, as componentes do sinal são racionais pseudoaleatórios, não tão sensíveis ao tamanho da partição.

É de interesse futuro o estudo sobre o comportamento assintótico dessa estimativa, e ainda, explorar diferentes ideias associadas a Teoria de Discrepância para melhorar

a cota proposta com custo computacional menor. Uma comparação de imediato se dá com a definição de discrepância apresentada em 2.2.3, a *Low-Discrepancy*, que possui maior dificuldade de implementação inerente da sua definição.

A partir do estimador proposto em 1, o passo seguinte para implementação é gerar sequências distribuídas no \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Para isso foram propostas duas fontes distintas de geração, a primeira tomando como referência um irracional arbitrário α e a partir dele obter a sequência das partes fracionárias do produto $k\alpha$ para $k \in [N]$ descrita em 2.2.1.1. Assim segue o algoritmo 2.

Algoritmo 2: *Generate Sequence from an Irrational α*

Entrada: α, N ;

Saída: \mathbf{x} ;

1 **início**

2 $\mathbf{x} \leftarrow$ Vetor de tamanho N onde a k -ésima componente do sinal ($x[k]$) recebe a parte fracionária do produto $k\alpha$ ($\{k\alpha\}$);

3 **fim**

De fato, para uma escolha apropriada de α , há a expectativa da discrepância do sinal gerado ser relativamente baixa (próxima a $1/2$) por se tratar de uma subsequência finita de uma sequência densa em \mathbb{R}/\mathbb{Z} . O que pode ocorrer é que para um determinado N , as componentes $\{k\alpha\}$ não serem suficientes para preencher o \mathbb{R}/\mathbb{Z} com $k \in [N]$, levando assim a acumulações e por consequência a valores elevados para a *Sawtooth-Discrepancy*. Isso é facilmente observado escolhendo α pequeno ($\alpha \ll 1/N$) mas também pode ocorrer para valores menos óbvios. Assim, outro aspecto de interesse futuro é analisar com rápido a sequência proposta preenche o \mathbb{R}/\mathbb{Z} em função de N a partir das características do irracional escolhido.

A outra proposta para geração de sinais é considerar realizações pseudo-aleatórias de distribuições diversas e a partir delas analisar a discrepância. Posteriormente, ao apresentar os resultados, será discutido as escolhas tanto dos irracionais geradores quanto dos tipos de distribuições considerados.

3.3 Reconstrução por *Compressive Sensing*

Outro ponto chave para esse trabalho consiste em implementar um algoritmo de reconstrução via CS seguindo o apresentado em 2.1. Para obter valor estatístico nos testes propostos, diversas iterações devem ser realizadas a fim de garantir autenticidade para os resultados observados. Assim se faz necessário uma algoritmo robusto de reconstrução que possibilite a implementação precisa e eficiente da reconstrução para uma vasta extensão de sinais.

Por conta disso implementar uma reconstrução via CS minimizando a ℓ_0 é computacionalmente inviável, considerando o custo combinatorial de varrer as N escolhe k possibilidades para o suporte de um sinal $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ k -esparso. Assim a alternativa proposta consiste em obter uma solução minimizando a pseudonorma ℓ_p para algum $0 < p \leq 1$.

Conforme o problema apresentado em 2.2, é conhecido a matriz de medida $\mathbf{M} \in \mathbb{K}^{m \times N}$ do sistema, o domínio esparsificante que contem o sinal k -esparso $\hat{\mathbf{x}}$ e ainda o sinal de medidas $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$. Assim o algoritmo deve gerar a partir dessas entradas conhecidas e de um valor p fornecido um sinal $\mathbf{x}_r \in \mathbb{K}^N$ que recupera \mathbf{x} , ou seja, vale $\mathbf{b} = \Phi \mathbf{x}_r$ e ainda $\hat{\mathbf{x}}_r = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}_r$ é k -esparso. Caso os valores de k e m , respectivamente a esparsidade do sinal em domínio transformado e o tamanho do sinal de medidas, sejam coerentes com Φ , a saída $\hat{\mathbf{x}}_r$ deve ser equivalente ao sinal original \mathbf{x} .

Algoritmo 3: *The Iterative Reweighted Least Squares Method for Compressive Sensing Reconstruction*

Entrada: $p, \mathbf{M}, \mathbf{b}$;

Saída: \mathbf{x}_r ;

1 início

2 | (Uma descrição breve desse algoritmo será apresentada na versão final.)

3 fim

3.4 Aplicando a *Sawtooth-Discrepancy* para a Reconstrução via CS

Com o ferramental computacional desenvolvido e os conceitos e discussões apresentados anteriormente é possível relacionar o problema de reconstrução via CS com aspectos associados a discrepância de um sinal, exemplificando uma rotina para validar a correlação dessa abordagem.

Considerando um sinal $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ k -esparso (*i.e.* $\mathbf{T} = \mathbf{I}_d$, logo $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$), o sinal de medidas $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ é obtido pelo seguinte processo, dado uma sequência de N pontos em \mathbb{R}/\mathbb{Z} , expressa por um sinal $\mathbf{f} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$ e associado a esse sinal a matriz $\Phi \in \mathbb{K}^{N \times N}$, que denota a matriz de Fourier definida por $a_{k \times l} \in \Phi$ com $k, l \in [N]$ satisfazendo

$$a_{k \times l} = e^{-2\pi i f[k](l-1)},$$

se m pontos dessa sequência são sub-amostrados, obtendo de \mathbf{f} o sinal condicionado \mathbf{f}_m e de Φ a respectiva matriz condicionada Φ_m como feito em 3.1.1, o sinal de medidas é dado por:

$$\mathbf{b} = \Phi_m \mathbf{x} \tag{3.12}$$

$$b[k] = \sum_{l \in [N]} e^{-2\pi i f_m[k](l-1)} x[l] \tag{3.13}$$

Nesse contexto foi proposto estudar a relação da *Sawtooth-Discrepancy* associada a \mathbf{f} e a qualidade de reconstrução do algoritmo 3 para um sinal $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^N$ k -esparso aleatoriamente gerado. Assim, a rotina descrita no algoritmo 4 obtém tanto o estimador da *Sawtooth-Discrepancy* do sinal \mathbf{f} ($\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f})$) quanto um vetor \mathbf{x}_r reconstruído via CS por uma pseudonorma ℓ_p .

Algoritmo 4: *Relation between Sawtooth-Discrepancy and CS*

Entrada: $p, k, m, \mathbf{f}, \rho$;
Saída: $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}), \mathbf{x}_r$;

- 1 **início**
- 2 $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}) \leftarrow \text{sawtooth-estimator}(\mathbf{f}, \rho)$ (recebe a aplicação do algoritmo 1 com os parâmetros citados);
- 3 $\mathbf{x} \leftarrow$ Recebe um sinal k -esparso aleatoriamente gerado;
- 4 $\mathbf{f}_m \leftarrow$ Recebe um condicionamento das N escolhe m possíveis sub-amostragens do sinal \mathbf{f} ;
- 5 $\Phi_m \leftarrow$ Recebe a matriz derivada de Φ condicionada a \mathbf{f}_m ;
- 6 $\mathbf{b} \leftarrow \Phi_m \mathbf{x}$;
- 7 $\mathbf{x}_r \leftarrow \text{minimize}_{\ell_p}(p, \Phi_m, \mathbf{b})$ (recebe a aplicação do algoritmo 3 com os parâmetros citados);
- 8 **fim**

A hipótese a ser verificada diz respeito a baixos valores de $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f})$ implicarem em uma melhor reconstrução estatística \mathbf{x}_r com respeito ao sinal aleatório \mathbf{x} . Para testar essa hipótese, foram propostas diferentes sequências obtidas ou por aplicações do algoritmo 2 para certos irracionais ou gerando vetores \mathbf{f} aleatoriamente de acordo com uma certa distribuição de probabilidade no \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

3.5 Métricas para avaliação dos resultados

Para concluir sobre a qualidade da reconstrução é preciso uma medida de comparação entre o sinal recuperado \mathbf{x}_r e o sinal aleatório original \mathbf{x} . No caso desse trabalho a relação adotado é a SER dos sinais, definida por:

$$\text{SER}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}) = 20 \log_{10} \left(\frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2} \right) \quad (3.14)$$

Dessa forma valores altos para a $\text{SER}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x})$ indicam uma boa reconstrução ao passo que valores baixos indicam uma má reconstrução.

4 Avaliação de Resultados e Discussões

Nesse capítulo serão apresentados e discutidos as escolhas dos parâmetros envolvidos no teste de correlação entre a qualidade de reconstrução e a discrepância das medidas de frequência. O primeiro valor determinado diz respeito a dimensão do sistema e impõe uma grande dificuldade operacional para o problema de reconstrução via CS, o tamanho $N = 200$ do sinal a ser recuperado foi escolhido considerando fatores práticos para a implementação dos testes propostos.

Apesar de longe do ideal ao comparado com aplicações usuais de CS com dimensões superiores, a escassez de tempo associada ao alto custo computacional dos algoritmos iterados múltiplas vezes culminou em uma limitação para os testes a seguir. Alguns outros parâmetros também foram afetados por justificativas similares.

Com $N = 200$ fixado, o próximo passo para a continuidade do trabalho diz respeito a determinação das medidas de frequência a serem geradas. Nesse sentido como citado em 3.2 as duas fontes de sequências consistem em medidas de frequência geradas aleatoriamente a a gerada por irracionais. A seguir será apresentado os parâmetros e resultados a cerca dos dois métodos de obtenção.

4.1 Medidas de Frequência Geradas por Irracionais

O primeiro conjunto de medidas a ser considerada é uma sequência de referência, obtida ao tomar $N = 200$ valores igualmente espaçados no \mathbb{R}/\mathbb{Z} , $\mathbf{f}^{\min} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$ de modo que

$$\mathbf{f}^{\min}[k] = \frac{k - 1}{N},$$

note que $\Delta^{(\infty)}(\mathbf{f}^{\min}) = 1/2$. A figura 2 ilustra a distribuição das 200 medidas no \mathbb{R}/\mathbb{Z} :

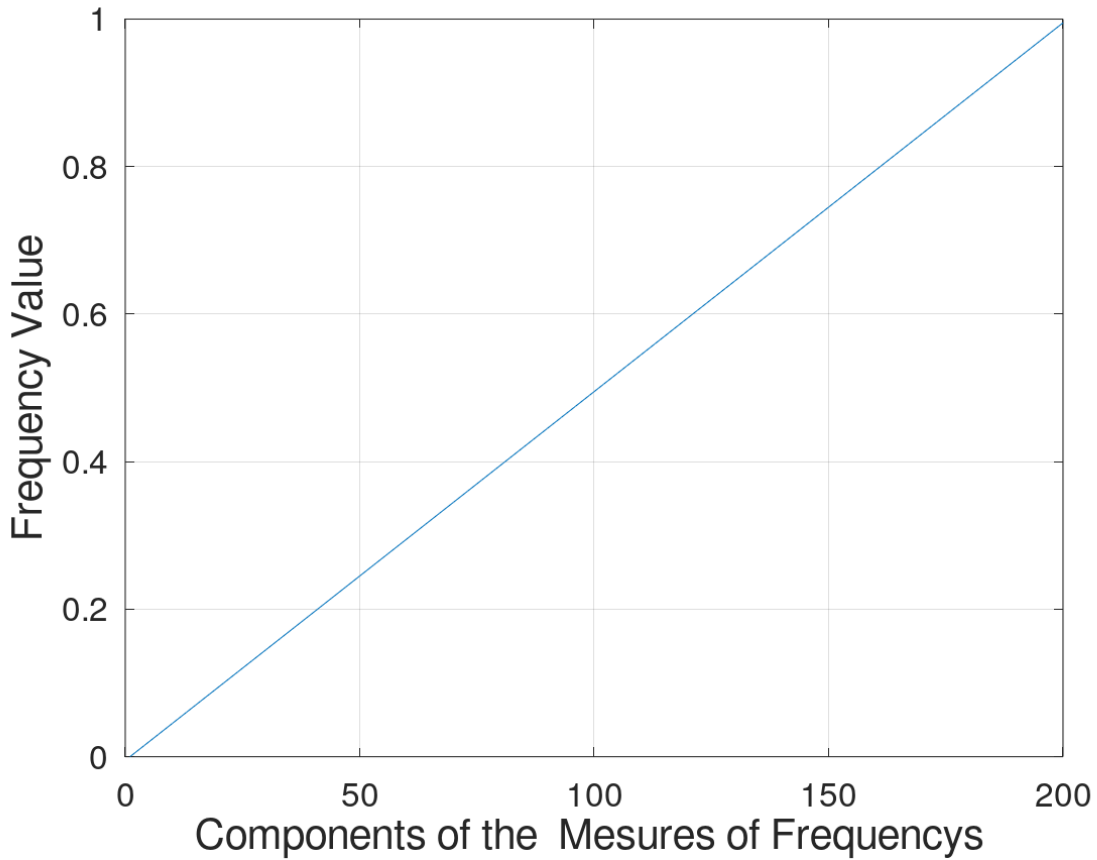


Figura 2 – Representação das 200 componentes do vetor \mathbf{f}^{\min} ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

A partir dessa referência é natural definir medidas de frequência em função de um irracional α arbitrário. Assim, $\mathbf{f}^\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$ é definido como

$$f^\alpha[k] = \{k\alpha\},$$

e a maneira como esse conjunto de medidas preenche o \mathbb{R}/\mathbb{Z} dependerá da natureza do irracional α em relação a dimensão $N = 200$.

A primeira escolha para fornecer medidas em frequência foi tomada de maneira a garantir uma boa distribuição do \mathbb{R}/\mathbb{Z} com $N = 200$, consequentemente resultando em uma baixa discrepância. O valor adotado para o irracional em questão foi obtido de forma a garantir a proximidade a esquerda de α ao 0 no \mathbb{R}/\mathbb{Z} (*i.e.* $\alpha \approx 1 - 1/N$), isso justifica a escolha do irracional $\sqrt{0,99}$ definindo as medidas em frequência $\mathbf{f}^{\sqrt{0,99}} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$. Para visualizar a distribuição próxima da uniforme a figura 3 ilustra as 200 componentes das medidas de $\mathbf{f}^{\sqrt{0,99}}$ tomadas de forma ordenada, da menor para a maior, visando uma comparação direta com a referência ilustrada na figura 2:

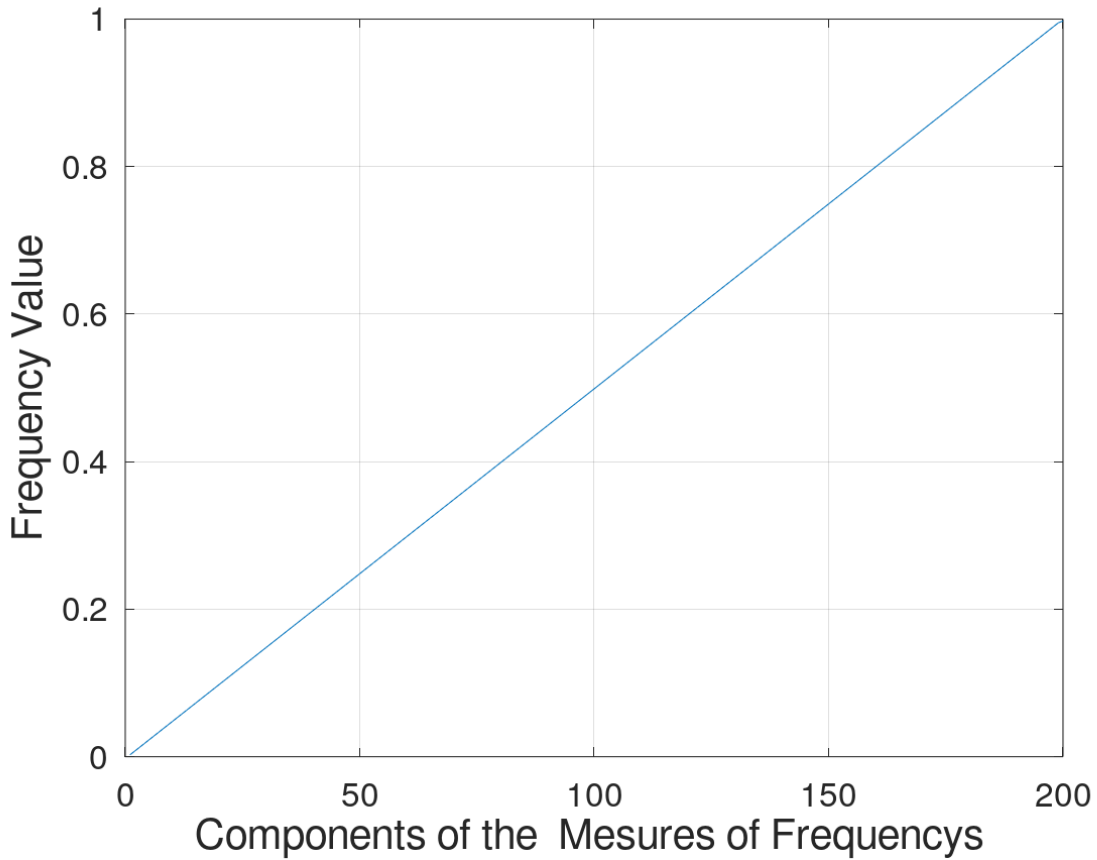


Figura 3 – Representação das 200 componentes ordenadas do vetor $\mathbf{f}^{v^{0,99}}$ ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

O estimador da *Sawtooth-Discrepancy* dessa distribuição de medidas de frequência a partir de uma tamanho de partição fixo $\rho = 0,0001$ resultou na seguinte aproximação para a discrepância $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^{v^{0,99}}) = 0,74749$, bem próximo a $1/2$ como desejado. E de fato ao observar a representação da figura 3 fica evidente a proximidade das medidas de frequência de $\mathbf{f}^{v^{0,99}}$ com a referência da figura 2 obtida pelas medidas de \mathbf{f}^{\min} .

A partir daqui as demais escolhas de irracionais buscam certa irregularidade na distribuição, de maneira a garantir valores distintos para a discrepância das frequências. O próximo candidato é obtido ao considerar o irracional $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, resultando no conjunto de medidas de frequências baseadas na razão áurea $\mathbf{f}^{\phi} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$, com valor para discrepância estimado por $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^{\phi}) = 1,3568$ para uma partição de tamanho fixo $\rho = 0,0001$.

A figura 4, analogamente as escolhas anteriores, representa as componentes tomadas ordenadamente das medidas de \mathbf{f}^{ϕ} . Aqui uma maior irregularidade já é observada, de acordo com a discrepância obtida.

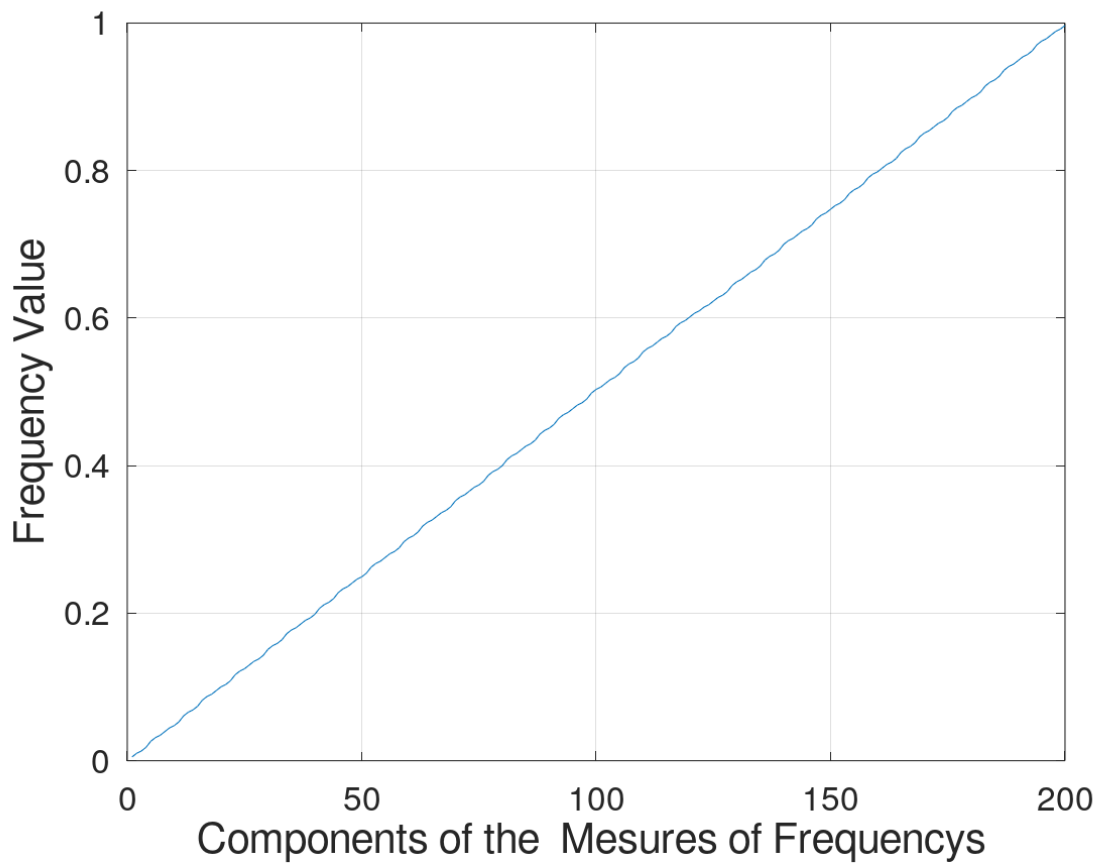


Figura 4 – Representação das 200 componentes ordenadas do vetor \mathbf{f}^ϕ ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Até aqui as duas escolhas de irracionais $\sqrt{0,99}$ e ϕ se trataram de números algébricos de grau 2, evidenciando uma grande regularidade para $N = 200$ e discrepâncias estimadas de acordo com esse comportamento próximo do uniforme. A próxima escolha de irracional será o número transcendente e dando origem ao conjunto de medidas de frequências $\mathbf{f}^e \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$. A figura 5 evidencia uma maior irregularidade das medidas de \mathbf{f}^e , novamente tomadas ordenadas da menor para a maior.

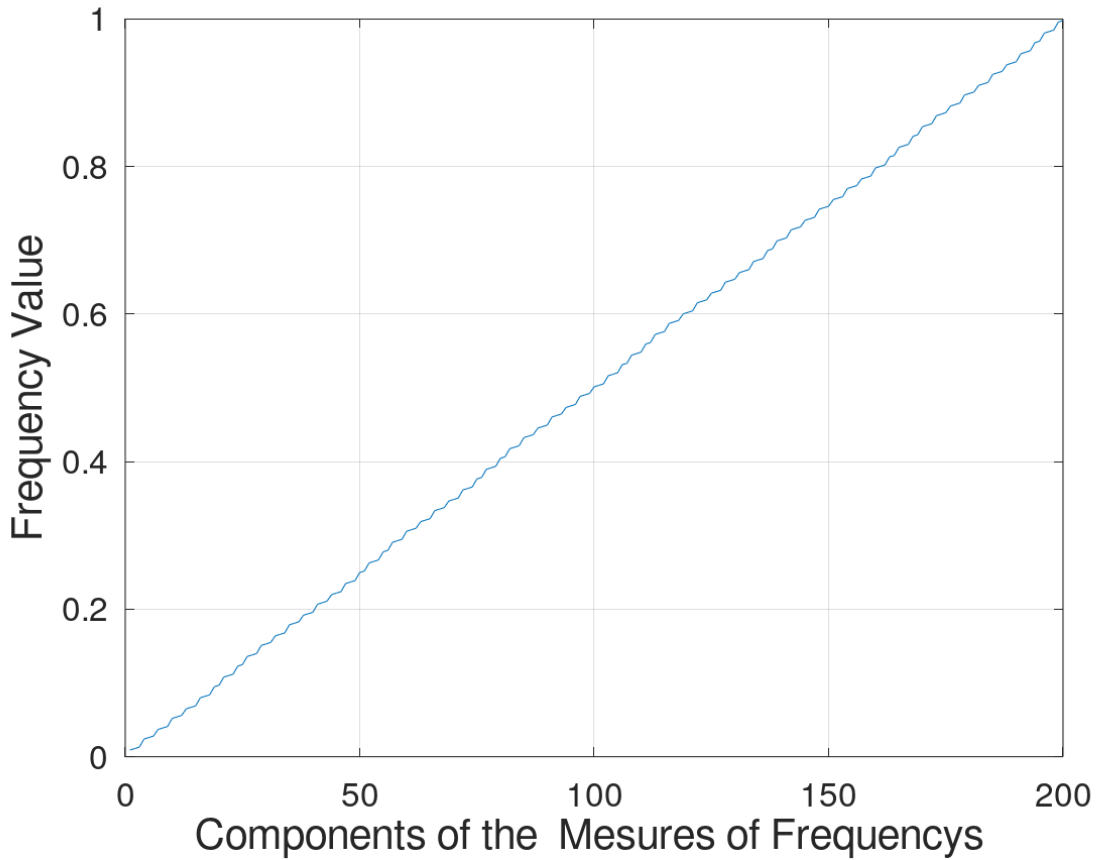


Figura 5 – Representação das 200 componentes ordenadas do vetor \mathbf{f}^e ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

E de fato esse comportamento está de acordo com o valor estimado da discrepância com o tamanho da partição fixado em $\rho = 0,0001$, $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^e) = 2,0552$. Mesmo assim, vale ressaltar que todas as escolhas até aqui recobriram bem o \mathbb{R}/\mathbb{Z} , no sentido de que não houveram buracos que não receberam medidas de frequência.

A última escolha de irracional leva em consideração o número transcendente π , gerando o conjunto de medidas em frequência $\mathbf{f}^{\pi} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$. Diferentemente das demais escolhas as partes fracionárias de $k\pi$ não cobrem bem o \mathbb{R}/\mathbb{Z} para $k \in [N] = \{1, \dots, 200\}$. A figura 6 apresenta as medidas ordenadas de \mathbf{f}^{π} e nela é possível identificar 7 buracos no \mathbb{R}/\mathbb{Z} que não receberam medidas consideráveis de frequência, dando origem a esse comportamento de oscilações interrompidas.

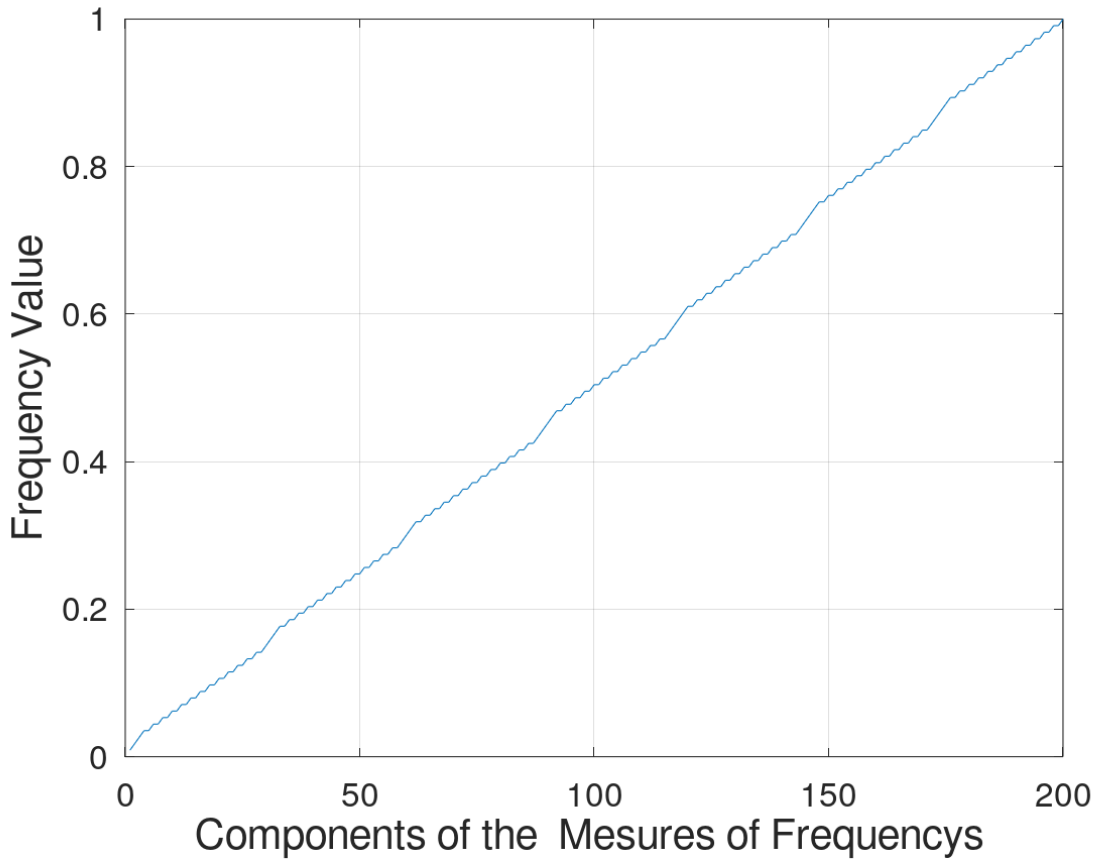


Figura 6 – Representação das 200 componentes ordenadas do vetor \mathbf{f}^π ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

A discrepância estimada para $\rho = 0,0001$ desse conjunto de frequências é dado por $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^\pi) = 3,0523$, de acordo com o observado por se tratar da distribuição mais irregular até aqui.

Assim os candidatos gerados por irracionais para avaliar a qualidade de reconstrução via CS do procedimento descrito em 3.4 foram determinados. Algumas observações sobre essa família é pertinente, entre elas o fato de que o valor médio das frequências em questão é aproximadamente $1/2$, como esperado para sequências bem distribuídas.

Outro ponto é de que apesar da ocorrência de buracos na distribuição das medidas de \mathbf{f}^π , os buracos são bem distribuídos no \mathbb{R}/\mathbb{Z} , para $N = 200$ existem irracionais que geram medidas de frequência ainda mais irregulares, porém não foram considerados para esse estudo.

E por fim, por se tratar de um conjunto de medidas determinístico, o tamanho da partição $\rho = 0,0001$ foi tomado pequeno para garantir fidelidade do estimador $\Delta_{\leq}^{(\infty)}$. Como essas medidas são fixas, não é necessário iterar o cálculo da discrepância, possibilitando dedicar custo computacional para que o algoritmo 1 seja coerente independente da

natureza dos números irracionais considerados.

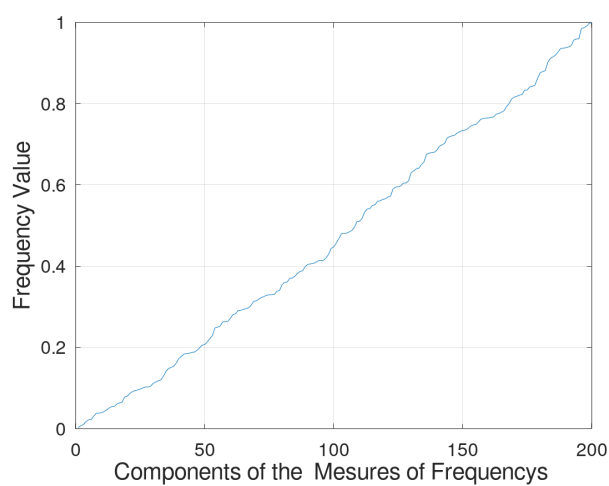
A fonte alternativa de medidas de frequência são geradas aleatoriamente baseadas em distintas distribuições de probabilidade. Para cada forma aleatória de obter sequências, várias iterações são propostas para agregar valor estatístico ao modelo. Assim, considerar uma norma da partição ρ muito pequeno inviabilizaria os testes propostos por conta das limitações de tempo e de *hardware*.

Por sorte as sequências geradas aleatoriamente são compostas por racionais, assim o algoritmo 1 é robusto o suficiente para estimar as discrepâncias das várias realizações mesmo considerando um valor mais alto para ρ . Esses aspectos são discutidos a seguir.

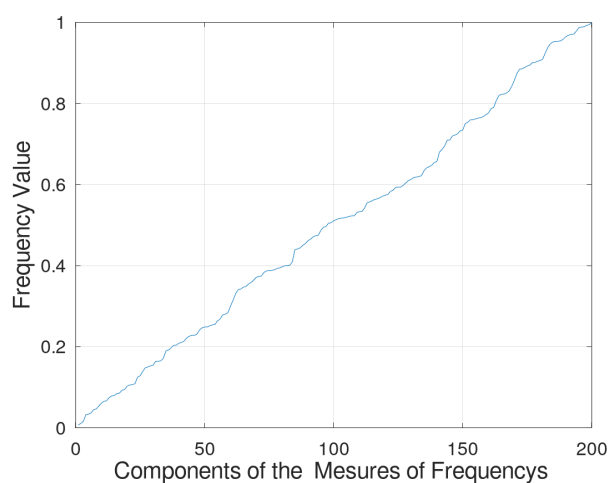
4.2 Gerações de Medidas Aleatórias

Para cada distribuição de probabilidade proposta, são geradas 5000 realizações e a cada realização é associada o estimador para a *Sawtooth-Discrepancy*. Três tipos de distribuições aleatórias foram consideradas: uma distribuição uniforme no \mathbb{R}/\mathbb{Z} , cuja as medidas de cada realização geram um vetor $\mathbf{f}^{\text{rand}} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$; uma distribuição normal da reta \mathbb{R} , considerando apenas a parte fracionária de cada realização em frequência, recebendo um vetor $\mathbf{f}^{\text{randn}} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$; e por fim uma distribuição exponencial em \mathbb{R} , de maneira análoga, considerando apenas a parte fracionária da realização, associando um vetor $\mathbf{f}^{\text{rande}} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^N$.

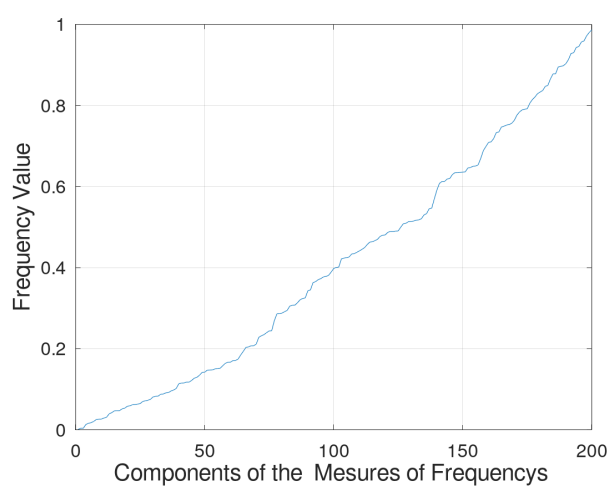
As figuras a seguir ilustram exemplos de realizações para cada umas das distribuições descritas a cima, tomadas ordenadamente:



(a)



(b)



(c)

Figura 7 – Realizações para as distribuições das 200 medidas de frequência tomadas ordenadamente. Em (a) os valores associados a algum \mathbf{f}^{rand} . Em (b) medidas associadas a uma realização $\mathbf{f}^{\text{rand}^n}$. E por fim (c) representando medidas geradas por uma distribuição exponencial $\mathbf{f}^{\text{rand}^e}$.

Vale ressaltar que as medidas associadas a parte fracionária de uma distribuição normal se comportam de maneira muito similar a distribuição uniforme.

4.3 Rotina de Testes e a Reconstrução via CS

Para relacionar a discrepância das medidas de frequência geradas à qualidade de reconstrução via CS foi implementado um experimento de reconstrução de 5000 sinais $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ k -esparsos gerados aleatoriamente por uma distribuição normal a serem reconstruídos por um sinal de m medidas $\mathbf{b}^a \in \mathbb{C}^N$ obtido da sub-amostragem de uma sequência de frequências \mathbf{f}^a específica. Assim, para cada sequência proposta em 4.1 e em 4.2, é aplicado o algoritmo 4 obtendo um valor de referência para a discrepância da sequência \mathbf{f}^a e um sinal reconstruído \mathbf{x}_r^a .

Calculando a métrica de avaliação da qualidade da reconstrução, a $\text{SER}(\mathbf{x}_r^a, \mathbf{x})$ para cada iteração das 5000 gerações é possível comparar os resultados com a discrepância obtida em cada conjunto de medidas de frequência. Esse experimento foi realizado 4 vezes, alterando certos parâmetros a cerca da reconstrução via CS, buscando inferir sobre a correlação da discrepância em diferentes condições de reconstrução.

Para $N = 200$ fixado, os testes diferem por dois valores distintos para a esparsidade do sinal \mathbf{x} , $k_1 = 10$ e $k_2 = 20$ e ainda, para dois tamanhos de medidas $m_1 = 3k$ e $m_2 = 4k$. Assim os resultados obtidos são referentes as seguintes configurações de experimentos:

- Teste 1 associado ao par de parâmetros (k_1, m_1) ;
- Teste 2 associado ao par de parâmetros (k_1, m_2) ;
- Teste 3 associado ao par de parâmetros (k_2, m_1) ;
- Teste 4 associado ao par de parâmetros (k_2, m_2) .

Nos testes o conjunto de medidas geradas por irracionais foi fixado. Já as medidas geradas aleatoriamente foram obtidas a cada iteração do sinal a ser reconstruído \mathbf{x} . Ao passo que as estimativas para discrepância associadas as medidas geradas por irracionais permanecem constante como apresentado em 4.1, as estimativas de discrepância para as frequências aleatórias \mathbf{f}^{rand} , $\mathbf{f}^{\text{randn}}$ e $\mathbf{f}^{\text{rande}}$ são realizações das 5000 iterações de reconstrução. A figura 8 exemplifica um histograma modificado obtido do Teste 4 para os 5000 valores associados a *Sawtooth-Discrepancy* de cada distribuição aleatória de frequências.

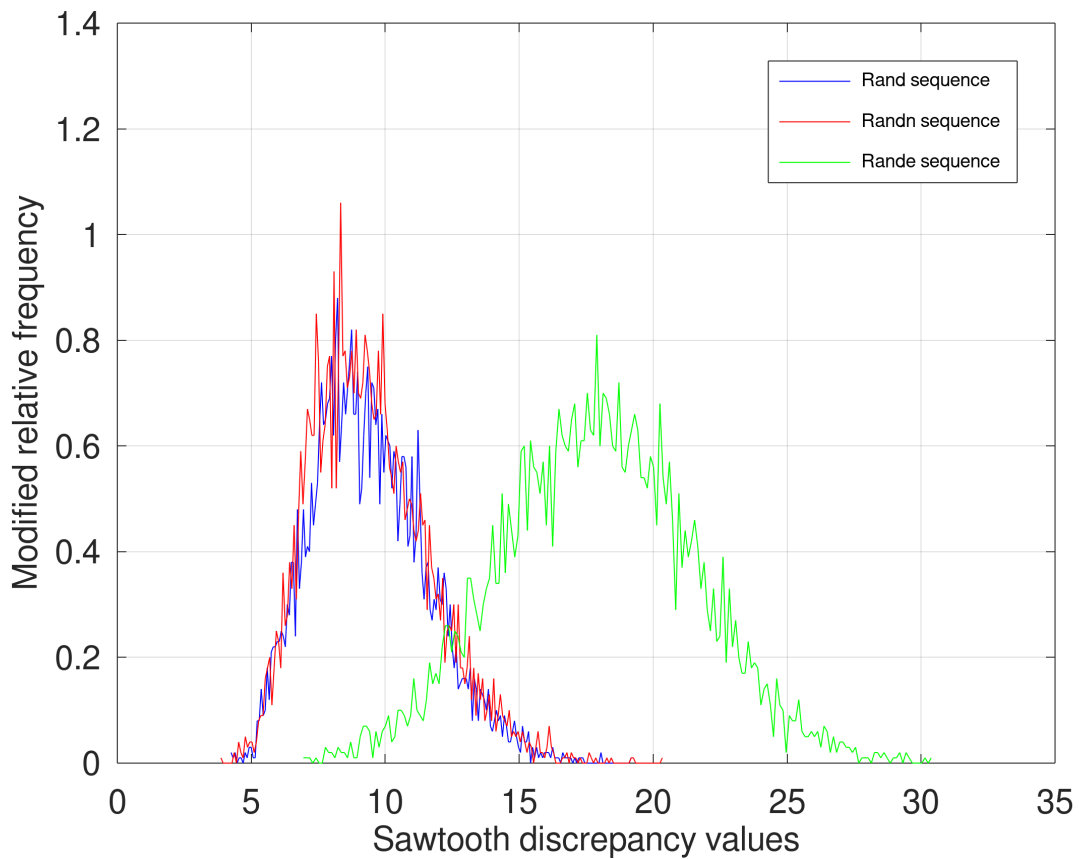


Figura 8 – Histograma normalizado associado a incidência dos valores estimados para a *Sawtooth-Discrepancy* para as 5000 realizações das medidas de frequência aleatoriamente geradas no Teste 4; \mathbf{f}^{rand} em azul, $\mathbf{f}^{\text{randn}}$ em vermelho e $\mathbf{f}^{\text{rande}}$ em verde.

Para cada iteração o algoritmo 1 foi aplicado sobre cada uma das medidas de frequência aleatoriamente geradas. Por conta disso o tamanho da partição considerado $\rho = 0,001$ foi maior que o associado as estimativas para as sequências geradas por irracionais como discutido em 4.1.

A tabela 1 representa para cada um dos testes as respectivas estimativas para as discrepâncias das frequências aleatoriamente geradas.

Tabela 1 – Valores médios para a estimativa da discrepância dos três tipos de distribuições aleatórios.

	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
$\Delta^{(\infty)}(\mathbf{f}^{\text{rand}})$	9,40	9,38	9,42	9,44
$\Delta^{(\infty)}(\mathbf{f}^{\text{randn}})$	9,36	9,45	9,39	9,41
$\Delta^{(\infty)}(\mathbf{f}^{\text{rande}})$	17,74	17,81	17,85	17,88

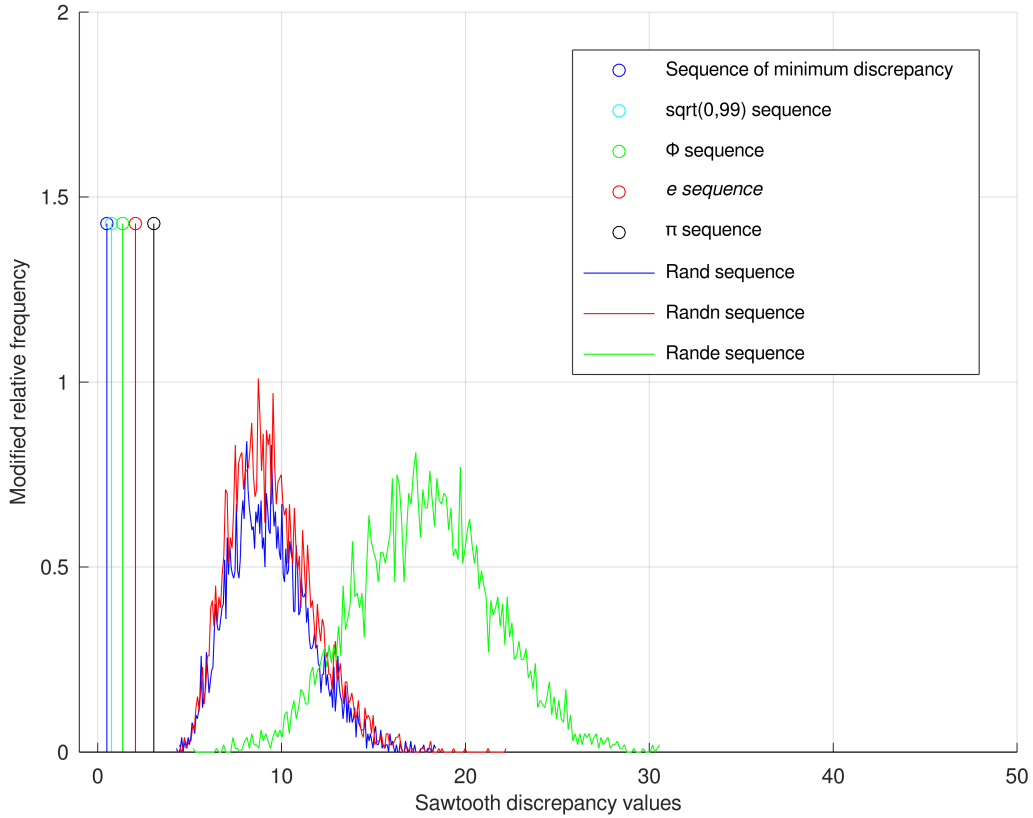


Figura 9 – Histograma normalizado associado a incidência dos valores estimados para a *Sawtooth-Discrepancy* para as 5000 realizações das medidas de frequência geradas no Teste 2; as medidas geradas por irracionais, \mathbf{f}^{\min} , $\mathbf{f}^{\sqrt{0,99}}$, \mathbf{f}^{ϕ} , \mathbf{f}^e e \mathbf{f}^{π} em ordem e as medidas aleatórias \mathbf{f}^{rand} em azul, $\mathbf{f}^{\text{randn}}$ em vermelho e $\mathbf{f}^{\text{rande}}$ em verde.

Para todos os 4 testes o problema de reconstrução via CS foi aproximado pela minimização ℓ_1 e para cada iteração do sinal \mathbf{x} , 8 soluções (\mathbf{x}_r^{\min} , $\mathbf{x}_r^{\sqrt{0,99}}$, \mathbf{x}_r^{ϕ} , \mathbf{x}_r^e , \mathbf{x}_r^{π} , $\mathbf{x}_r^{\text{rand}}$, $\mathbf{x}_r^{\text{randn}}$ e $\mathbf{x}_r^{\text{rande}}$) foram obtidas associadas aos conjuntos de medidas de frequência, cada qual com a sua respectiva $\text{SER}(\mathbf{x}_r^a, \mathbf{x})$. Os resultados relacionando os valores da discrepância com a qualidade de reconstrução são apresentados a seguir.

Tabela 2 – Valores médios de SER associados às medidas de frequência geradas por irracionais para cada teste proposto.

	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
$\text{SER}(\mathbf{x}_r^{\min}, \mathbf{x})$	40,50	103,56	89,00	115,02
$\text{SER}(\mathbf{x}_r^{\sqrt{0,99}}, \mathbf{x})$	39,99	103,60	89,55	114,95
$\text{SER}(\mathbf{x}_r^{\phi}, \mathbf{x})$	39,65	103,42	88,52	114,88
$\text{SER}(\mathbf{x}_r^e, \mathbf{x})$	38,12	95,54	70,89	111,01
$\text{SER}(\mathbf{x}_r^{\pi}, \mathbf{x})$	21,37	64,08	58,92	105,55

No caso das medidas geradas por irracionais os valores médios para as SER's obtidas se comportam de acordo com as discrepâncias estimadas. No geral, é possível inferir para esse conjunto de medidas que dados duas sequências de frequências \mathbf{f}^a e \mathbf{f}^b , se $\Delta^{(\infty)}(\mathbf{f}^a) \ll \Delta^{(\infty)}(\mathbf{f}^b)$ então $\text{SER}(\mathbf{x}_r^a, \mathbf{x}) > \text{SER}(\mathbf{x}_r^b, \mathbf{x})$ para as distintas situações de cada teste. Para pares de medidas como as de \mathbf{f}^{\min} e $\mathbf{f}^{\sqrt{0,99}}$, com valores próximos de discrepância, pode ocorrer da qualidade de reconstrução não se relacionar diretamente com a ordem das discrepâncias em questão, porém, mesmo quando isso ocorre, as SER's obtidas são similares. Nesse cenário seria interessante para trabalhos futuros introduzir alguma métrica paralela para avaliação da qualidade de reconstrução, buscando evidenciar a correlação para valores próximos da discrepância.

Os demais resultados obtidos, tanto pela comparação das sequências geradas aleatoriamente entre si, quanto da análise global da qualidade de reconstrução das 8 soluções reconstruídas não indicam correlação com a discrepância das medidas em frequência, contradizendo a hipótese associada ao método de sub-amostragem proposto em 3.4.

A tabela 3 evidencia esse comportamento, levando em conta, por exemplo, que as medidas de frequência obtidas por uma distribuição exponencial $\mathbf{f}^{\text{rande}}$ apresentaram valores de SER próximos aos melhores resultados de reconstrução vis CS, mesmo possuindo a maior irregularidade da distribuição, evidenciada pela discrepância média das medidas superior a todas as demais. Ao passo que o pior conjunto, do ponto de vista da reconstrução dos sinais pela sub-amostragem das medidas em frequência, \mathbf{f}^π , possui uma discrepância $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^\pi) = 3,0523$ muito inferior as médias observadas na tabela 1.

Tabela 3 – Valores médios de SER associado às medidas de frequência geradas aleatoriamente para cada teste proposto.

	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4
$\text{SER}(\mathbf{x}_r^{\text{rand}}, \mathbf{x})$	38,52	103,31	87,67	114,65
$\text{SER}(\mathbf{x}_r^{\text{randn}}, \mathbf{x})$	40,34	102,92	87,44	114,64
$\text{SER}(\mathbf{x}_r^{\text{rande}}, \mathbf{x})$	39,14	103,18	87,55	114,54

Apesar dos resultados em geral serem negativos em relação a hipótese apresentada em 3.4, vale certas ressalvas e esclarecimentos que podem estar relacionados com os problemas observados ao longo dos testes. Talvez a proposta de geração de medidas de maneira aleatória não possa ser relacionada as medidas de discrepância estimadas de realizações dessa distribuição. No conjunto de frequências \mathbf{f}^π foi observados buracos ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z} , que garantem que qualquer sub-amostragem da sequência determinada pela parte fracionária do produto $k\pi$ para $k \in [N] = \{1, \dots, 200\}$ de medidas de frequência nunca cairá em algum desses buracos. Por sua vez as distribuições aleatórias não possuem essa limitação, mesmo podendo ser irregulares ao longo do \mathbb{R}/\mathbb{Z} , as distribuições de probabilidade propostas podem receber qualquer valor para a frequência, pelo menos

aproximadamente, não existindo buracos ao longo da distribuição.

Esse argumento por sua vez não explica os resultados obtidos ao comparar as medidas de frequência aleatoriamente geradas entre si, tendo em vista a proximidade da qualidade de reconstrução via CS, mesmo apresentando valores bem diferente de discrepância. Assim, novos testes e experimentos devem ser conduzidos a fim de levantar e validar novas explicações para as incoerências dos resultados. Isso será discutido no próximo capítulo junto a algumas considerações para futuros estudos.

4.4 Teste Estatístico e Validação do Experimento

A fim de verificar se de fato a discrepância associada as medidas de frequência geradas por irracionais pode ser relacionada com a qualidade de reconstrução dos sinais aleatoriamente gerados ao longo dos 4 testes, foi implementado uma análise estatística baseada no método de *Bootstrap* para verificar a existência de uma covariância normalizada entre as estimativas da *Sawtooth-Discrepancy* das frequências geradas por irracionais e as SER's obtidas pela sub-amostragem das medidas em questão. Para cada teste um valor para a covariância foi estimado, junto a uma probabilidade $p_{5\%}$ que garante que o erro da estimativa em questão é menor que 5% em probabilidade (*i.e.* $p_{5\%}$ é a probabilidade do erro associado a estimativa ser superior a 5%).

É esperado uma covariância negativa entre as duas grandezas analisadas, uma menor discrepância seria um indício de maiores valores para a SER. Já a magnitude desse valor, normalizado entre 0 e 1, é um indicativo do tamanho da relação entre elas. Um critério recorrente da literatura considera valores de $p_{5\%} \leq 5\%$ como boas estimativas e estimativas com $p_{5\%} \leq 1\%$ como excelentes.

Dos resultados obtidos, as estimativas ligadas ao Teste 1 foram as piores, tanto ao tentar evidenciar a relação esperada, quanto em relação a confiabilidade da estimativa da covariância em si. Para um $p_{5\%} = 12,26\%$, o valor estimado para a covariância foi de

$$\text{cov} \left(\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^1), \text{SER}(\mathbf{x}_r^1, \mathbf{x}) \right) \approx -0,20$$

um valor baixo, por mais que o sinal obtido esteja de acordo com o esperado. Vale ressaltar que por conta dos parâmetros do Teste 1 ($k = 10$ e $m = 2k = 20$), as SER's obtidas são as mais baixas relativamente aos outros testes, indicando uma pior qualidade de reconstrução.

Para os demais testes, a confiabilidade das estimativas foram satisfatórias; no caso do Teste 2, $p_{5\%} = 0,08\%$, valor excelente, com uma covariância estimada por

$$\text{cov} \left(\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^2), \text{SER}(\mathbf{x}_r^2, \mathbf{x}) \right) \approx -0,51.$$

Já para o Teste 3, $p_{5\%} = 2,15\%$, garantindo uma boa estimativa dada por

$$\text{cov} \left(\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^3), \text{SER}(\mathbf{x}_r^3, \mathbf{x}) \right) \approx -0,37.$$

E por fim para o Teste 4 foi obtido um valor excelente de $p_{5\%} = 0,02\%$ e a estimativa de covariância dada por

$$\text{cov} \left(\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^4), \text{SER}(\mathbf{x}_r^4, \mathbf{x}) \right) \approx -0,34.$$

Note que apesar de negativos, as magnitudes obtidas são baixas, evidenciando que para os sinais propostos a qualidade de reconstrução não é muito sensível a discrepância das medidas de frequência a serem sub-amostradas para gerar o vetor de medidas do problema de CS. Visando concluir sobre sinais de dimensões superiores um quinto teste do experimento descrito em 3.4 e em 4.3 foi executado, com algumas alterações descritas a seguir.

Foi adotado um valor $N = 2000$ para o tamanho dos sinais gerados aleatoriamente para reconstrução, com uma esparsidade $k = 50$ e o número de medidas $m = 4k = 200$. Por conta desse aumento de dimensões, o número de iterações do teste precisou ser limitado a 100 reconstruções, tendo em vista as limitações de prazo e de hardware. Essa decisão pode ter influenciado negativamente na confiabilidade das estimativas, justificando testes futuros para garantir maior valor estatístico ao experimento.

Outra mudança para esse teste foi a substituição de uma das medidas de frequências geradas por irracionais. O irracional $\sqrt{0,99}$ tinha sido escolhido como candidato para preencher bem o \mathbb{R}/\mathbb{Z} para $N = 200$. No cenário atual, as medidas de frequência obtidas de $\mathbf{f}^{\sqrt{0,99}}$ já não preenchem regularmente o \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Assim um novo irracional α é proposto, buscando replicar o comportamento anterior, $\sqrt{0,999}$ garante a condição para $N = 2000$ dada por $\alpha \approx 1 - 1/N$, dando origem a um conjunto de medidas em frequência $\mathbf{f}^{\sqrt{0,999}}$.

Assim, 5 soluções de reconstrução do sinal \mathbf{x} são geradas para cada iteração, \mathbf{x}_r^{\min} , $\mathbf{x}_r^{\sqrt{0,999}}$, \mathbf{x}_r^{ϕ} , \mathbf{x}_r^e e \mathbf{x}_r^{π} (apenas as sequências determinadas por irracionais) e junto aos respectivos valores para as SER's ($\text{SER}(\mathbf{x}_r^5, \mathbf{x})$). Aplicando o teste estatístico baseado em *Bootstrap*, a covariância estimada é dada por

$$\text{cov} \left(\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^5), \text{SER}(\mathbf{x}_r^5, \mathbf{x}) \right) \approx -0,75.$$

Um valor que indica uma maior influência da discrepância na qualidade de reconstrução via CS. Porém a confiabilidade do teste é reduzida, apresentando um valor $p_{5\%} = 12,74\%$.

Por fim, um sexto teste foi proposto, a fim de concluir sobre a relação da discrepância das sequências geradas por irracionais com a qualidade de reconstrução via CS com maior confiança. Partindo dos mesmos parâmetros do Teste 5, sinais de tamanho $N = 2000$ a serem reconstruídos com uma esparsidade $k = 50$ e o número de medidas

$m = 4k = 200$, porém tomando um número maior de iterações, 1000 sinais são gerados aleatoriamente e para cada geração 5 soluções baseadas nas respectivas medidas de frequência são obtidas junto a suas SER's para comparação.

Nesse caso a covariância estimada foi de

$$\text{cov} \left(\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^6), \text{SER}(\mathbf{x}_r^6, \mathbf{x}) \right) \approx -0,73.$$

De acordo com o valor obtido no Teste 5, indicando uma influência considerável da discrepância na qualidade de reconstrução via CS, como se esperava. Porém, nesse caso com maior número de iterações a confiabilidade do teste foi excelente, com $p_{5\%} = 0,03\%$.

Esse resultado além de evidenciar a relação esperada entre a discrepância proposta e os métodos de reconstrução via *Compressive Sensing*, apontam para uma dependência direta com o tamanho N dos sinais. De fato testes futuros podem evidenciar essa dependência e até mesmo justificar o comportamento das medidas de frequência aleatoriamente geradas.

Os valores estimados para $N = 2000$ das *Sawtooth-Discrepancy* das medidas geradas por irracionais foram:

- $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^{\sqrt{0,999}}) = 0,64975$
- $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^{\phi}) = 1,6115$
- $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^e) = 1,6613$
- $\Delta_{\leq}^{(\infty)}(\mathbf{f}^{\pi}) = 10,5002$

vale ressaltar que esse valores representam uma maior regularidade de distribuição no \mathbb{R}/\mathbb{Z} das medidas de frequência quando comparadas as dos testes com $N = 200$. Em 2.14 é apresentado uma faixa para os valores da *Sawtooth-Discrepancy* em função do tamanho da sequência N , assim para o testes 5 e 6 o valor para as discrepâncias estimadas está entre 1/2 e 1000, já para os testes iniciais entre 1/2 e 100. Assim os valores apresentados a cima são de discrepâncias mais baixas quando comparados aos testes iniciais

5 Conclusão

O presente trabalho se propôs a entender o problema de reconstrução de sinais via *Compressive Sensing* e suas técnicas de obtenção de solução, junto aos parâmetros relevantes envolvidos na formulação. Além disso, foi introduzido nesse contexto conceitos advindos da Teoria de Distribuições e Regularidade, buscando implementar a *Sawtooth-Discrepancy* associada a uma sequência de medidas de frequência, como critério de avaliação para a qualidade de reconstrução.

No que diz respeito ao entendimento das técnicas de CS e aspectos teóricos envolvidos na implementação do problema, uma restrição usual da literatura foi estudada, a RIP, de início com o objetivo de servir de critério comparativo para as futuras contribuições envolvendo ferramentas de distribuições de sequência e discrepância. Porém, posteriormente essa abordagem foi abandonada, ao concluir que as análises da RIP são imposições teóricas primitivas do início da formulação de CS e ultrapassadas, tanto no contexto prático quanto teórico.

Assim, esse estudo se voltou a correlacionar a qualidade de reconstrução com a *Sawtooth-Discrepancy* de medidas de frequência a serem sub-amostradas para compor o sinal de medidas \mathbf{b} . Pelos testes propostos, os resultados de maneira geral não evidenciaram essa correlação, principalmente ao considerar medidas de frequência geradas aleatoriamente. Porém, na formulação de sequências geradas por irracionais foi sim observado influencia do valor da discrepância estimado com a qualidade de reconstrução.

5.1 Contribuições e possíveis trabalhos futuros

Em relação a RIP, o presente trabalho exemplificou sua inviabilidade prática como critério de avaliação da qualidade de reconstrução via CS, além disso, foi proposto uma abordagem teórica alternativa, menos restritiva e mais geral, com mesmo custo computacional e com maior potencial para aplicações futuras, tanto na generalização de resultados prévios obtidos segundo a RIP, quanto no entendimento dos métodos de *Compressive Sensing*.

Por sua vez, apesar dos resultados negativos, é evidente que os conceitos associados a discrepância e regularidade de distribuições possuem enorme potencial para aplicações em Teoria de Amostragem e *Compressive Sensing*. Assim, além de se observar relação entre a discrepância de sequências geradas por irracionais e a qualidade de reconstrução via CS do processo de sub-amostragem descrito em 3.4, outras possibilidades de estudo podem ser abordadas em trabalhos futuros.

Um exemplo imediato seria melhorar as rotinas de experimentos aplicadas para validar os resultados, introduzindo novas métricas de avaliação da qualidade de reconstrução e aumentando o tamanho e o número dos testes, para, por meio de uma análise estatística, verificar os efeitos dos diversos parâmetros envolvidos na formulação do problema. Analisar o efeito de novas medidas de sequências obtidas por racionais, criando maior irregularidade nas distribuições e estudando a relação da natureza do irracional com as propriedades da sequência gerada. Considerar também novas distribuições de probabilidade para a geração de medidas de frequência aleatórias, a fim de entender os efeitos da discrepância na reconstrução via CS, coisa que foi impossibilitada pelos resultados obtidos nesse trabalho.

Caso a conclusão a cerca do método de análise sobre a discrepância de medidas de frequência a serem sub-amostradas persista em apresentar resultados negativos, há a possibilidade de considerar outros efeitos da discrepância sobre a reconstrução via CS. Por exemplo analisar a discrepância das sub-amostragens de m medidas, o sinal \mathbf{f}_m obtido ao condicionar \mathbf{f} .

Outra alternativa é considerar definições distintas de discrepância, por exemplo, analisando a relação com a *Low-Discrepancy* apresentada em 2.2.3, ou ainda, observar os efeitos de distintos valores de p para a família descrita em 2.2.2. Há também a possibilidade de tomar funções distintas a função Serra no \mathbb{R}/\mathbb{Z} , com definições análogas.

Por fim, implementar as propostas a cima em contextos mais gerais do problema de reconstrução via CS, procurando relações entre o domínio esparsificante e as definições associadas a regularidade de distribuições. Uma proposta mais ambiciosa é a de implementar o problema 2.2, acrescentando restrições a regularidade das medidas do sinal reconstruído, visando tornar a reconstrução via *Compressive Sensing* ainda mais robusta.

Referências

- 1 Donoho, D. L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 52, n. 4, p. 1289–1306, April 2006. ISSN 0018-9448. Citado 3 vezes nas páginas 14, 16 e 29.
- 2 Shannon, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, v. 27, n. 3, p. 379–423, July 1948. ISSN 0005-8580. Citado na página 14.
- 3 FOUCART, S.; RAUHUT, H. *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. Springer New York, 2013. (Applied and Numerical Harmonic Analysis). ISBN 9780817649487. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=zb28BAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 20.
- 4 Freris, N. M.; Öçal, O.; Vetterli, M. Compressed sensing of streaming data. In: *2013 51st Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton)*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1242–1249. Citado na página 16.
- 5 CANDÈS, E. J.; WAKIN, M. B.; BOYD, S. P. Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization. *Journal of Fourier analysis and applications*, Springer, v. 14, n. 5-6, p. 877–905, 2008. Citado na página 17.
- 6 DONOHO, D. L. Neighborly polytopes and sparse solution of underdetermined linear equations. In: . [S.l.: s.n.], 2005. Citado na página 17.
- 7 CANDÈS, E. J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. In: . [S.l.: s.n.], 2008. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 26, 27 e 29.
- 8 BARANIUK, R. G. Compressive sensing. In: . [S.l.: s.n.], 2007. Citado 3 vezes nas páginas 17, 27 e 29.