Gustavo Soares Fernandes Coelho

Busca no leilão de posição

Brasília

2013

Gustavo Soares Fernandes Coelho

Busca no leilão de posição

Monografia apresentada como requisito para obtenção do grau de Bacharel no Curso de Ciências Econômicas do Departamento de Economia da Universidade de Brasília.

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Departamento de Economia

Orientador: Maurício Soares Bugarin

Brasília

2013

Gustavo Soares Fernandes Coelho

Busca no leilão de posição

Monografia apresentada como requisito para obtenção do grau de Bacharel no Curso de Ciências Econômicas do Departamento de Economia da Universidade de Brasília.

Trabalho aprovado. Brasília, 15 de julho de 2013:

Maurício Soares Bugarin
Orientador

Gil Riella
Membro

Brasília
2013

Este trabalho é dedicado à todos que estudam para construir uma sociedade melhor.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por estar sempre ao meu lado.

Agradeço especialmente à minha família: meus pais por sempre me apoiarem, meus irmãos por sempre me ajudarem, meus tios, tias, primos, primas e avós por compartilharem tanto amor e carinho.

Agradeço especialmente à Juliana Nogueira Garcia, que está ao meu lado mesmo distante, por seu carinho e ternura.

Agradeço aos meus amigos pelo companheirismo constante. Agradeço a todos os companheiros de UnB, especialmente aos colegas de curso e principalmente aos colegas do meu semestre por terem feito parte dessa longa jornada de quatro anos. Agradeço aos membros à Econsult, passado, presente e futuro por sua dedicação em construir uma organização que me ensinou a ter ambição. Agradecimentos especiais são devidos aos alunos do PET economia por terem me ajudado a crescer academicamente.

Agradeço aos professores da Universidade de Brasília por terem transmitido tanto conhecimento. Agradecimentos especiais para o meu orientador Maurício Bugarin, pois sua maestria no ensino tornou esse trabalho possível, e ao professor Gil Riella, por tudo que me ensinou dentro e fora da sala de aula e por ter despertado minha paixão por microeconomia. Agradeço ao professor Rodrigo Peñaloza pelas difíceis lições de vida e ao professor José Roberto Novaes por suas ótimas aulas. Devo agradecer também à professora Geovana Bertussi por sua dedicação ao PET.

Por fim, agradeço a todos os que contribuíram com esse trabalho de forma direta ou indireta e não foram mencionados acima. Todos os nomes citados acima contribuíram de alguma forma para a minha formação, não só como economista ou como cidadão, mas como pessoa. E por isso eu lhes devo muito mais do que posso oferecer nessa página.

“A experiência direta é o subterfúgio, ou o esconderijo,
daqueles que são desprovidos de imaginação. (...)
Narrar é criar, pois viver é apenas ser vivido.”
(Fernando Pessoa)

Resumo

Procura-se estudar a modelagem de leilões de posição com ênfase em aplicações de modelos de busca. Os leilões de posição são usados por ferramentas de pesquisa como Google, Yahoo! e Microsoft para ordenar seus anúncios pagos. Essas aplicações modelam as estratégias de procura dos consumidores que usam alguma ferramenta de pesquisa para encontrar algum produto de seu interesse. Esses modelos são de grande interesse por serem usados para desenhar os mecanismos desses leilões. Este trabalho se propõe a ser um primeiro passo no estudo desse tipo de modelo.

Palavras-chaves: Leilões. Leilão de posição. Procura. Leilão generalizado de segundo-preço.

Abstract

This work studies the model of position auctions and the application of consumer search to its setup. Position auctions are used by search engines such as Google, Yahoo! and Microsoft to price its paid advertisement. This application describer the search strategies of consumer who utilize search engines to find a desired product on the internet. These models are of great interest for the auction design. This work proposes to serve as a first step into understanding this framework.

Key-words: Auction. Position auctions. Consumer Search. Generalized Second-Price Auctions.

Lista de abreviaturas e siglas

EN	Equilíbrio de Nash
ENS	Equilíbrio de Nash Simétrico
VCG	Mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves (VCG)
SPG	Leilão de segundo preço generalizado
CNC	Critério de Não-Contradição

Sumário

Introdução

Leilão de posição é o termo usado para designar o mecanismo adotado por ferramentas de pesquisa, como Google, Yahoo! e Microsoft, para ordenar os anúncios pagos que aparecem acima dos resultados das pesquisas por palavras-chave. Esses anúncios são uma importante fonte de renda para essas empresas, portanto, é de interesse delas e dos anunciantes o estudo do desenho do mecanismo usado para precificar o serviço.

O mecanismo usado em leilões desse tipo é semelhante ao leilão de segundo preço de um único objeto, em que o participante com o maior lance ganha o leilão, mas paga apenas o segundo maior lance, diferentemente do que acontece no leilão de primeiro preço de um único objeto, no qual o vencedor paga o seu próprio lance. Uma propriedade interessante do leilão de segundo preço de um objeto é que ele possui um equilíbrio revelador, ou seja, fazer o lance igual ao valor que se atribui ao item sendo leiloado é uma estratégia (fracamente) dominante para os participantes do leilão.

No leilão de posição, também conhecido como leilão de segundo preço generalizado, são leiloados vários itens[1], que no caso são posições em uma lista de *links*. A lista aparece acima do resultado da pesquisa de uma palavra-chave em uma ferramenta de busca. Os anunciantes podem participar do leilão de quantas palavras-chave quiserem, podendo fazer um mesmo lance para um grupo de palavras-chave.

Ao fazerem seus lances, os anunciantes são ordenados de tal forma que o anunciante com o maior lance será designado para a primeira posição da lista e terá como preço o segundo maior lance do leilão. O anunciante com o segundo maior lance fica na segunda posição e tem como preço o terceiro maior lance do leilão e assim por diante.

Os leilões de anúncios virtuais utilizavam inicialmente o formato de primeiro preço, entretanto, isso fazia com que os participantes trocassem seus lances a todo momento tentando pagar o mínimo possível para ficar em suas posições. Depois percebeu-se que utilizar um leilão de segundo preço evita esse problema, que é de ordem prática.[2]

Os lances dos anunciantes são o quanto eles dizem estar dispostos a pagar por cada clique que seus *links* receberem na página de busca. O valor dos anunciantes é o quanto eles esperam receber por cada clique, ou seja, o valor esperado de vendas por clique.[3] Uma diferença importante entre o leilão de posição e o leilão de segundo preço de um objeto é que no primeiro fazer um lance igual ao seu valor não é uma estratégia ótima para os

[1] Para um aprofundamento em leilões de vários itens veja Demange, Gale e Sotomayor (1986).
[2] Veja Edelman, Ostrovsky e Schwarz (2007) para saber mais sobre a evolução dos leilões de *links* patrocinados.
[3] Por exemplo, se uma loja esportiva vende uma bicicleta de R$ 1000,00 reais a cada dois mil cliques o valor por clique dela é igual a R$ 0,50 centavos.

anunciantes.

O modelo seminal de leilões de posição afirma que os anunciantes terão incentivos para querer se posicionar nos primeiros *links*, pois os consumidores procuram pelos produtos em ordem crescente de posição. Portanto, o primeiro *link* seria mais acessado que o segundo e assim por diante. Entretanto, veremos dois modelos que assumem que as taxas de cliques são endógenas.

Esses modelos aplicam a busca de consumidores à modelagem dos leilões que estamos estudando. Eles descrevem o comportamento dos consumidores ao procurar por um produto em uma ferramenta de busca e com isso conseguem novas intuições sobre o mecanismo, podendo inclusive analisar o desenho de leilões. Apesar de não abarcar explicitamente o desenho de mecanismos em leilões e não contribuir com esse tema, este trabalho tem o objetivo de ser um primeiro passo no estudo da ferramenta.

Começamos com o estudo de dois artigos seminais de leilões de posição nos capítulos 1 e 2. Eles apresentam o modelo de leilão de posição e analisam os seus equilíbrios. Apesar de usar definições equivalentes de equilíbrios e chegarem a praticamente os mesmos resultados é interessante analisar os dois trabalhos para um melhor entendimento do modelo. Ao longo do trabalho usaremos a notação de (VARIAN, 2007) por a considerarmos mais simples e intuitiva.

No capítulo 3, veremos um trabalho que aprofunda a análise desses leilões ao considerar que o modelo estático de informação perfeita é uma simplificação do modelo dinâmico de informação incompleta e deve ser analisado com isso em mente. Por último, nos capítulos 4 e 5, vamos estudar dois modelos de leilão de posição com procura do consumidor.

Esta monografia foi feita utilizando abnTEX2, uma suíte para LaTeX que atende os requisitos das normas da ABNT.[4] Portanto, se essa monografia for acessada em sua forma digital é possível clicar em todas as referências presentes ao longo do artigo.

[4] O projeto abnTEX2 pode ser acessado em `http://abntex2.googlecode.com/`.

1 Chefia do Google leiloando posições

Este capítulo traz o resumo das principais definições e idéias presentes em (VARIAN, 2007; VARIAN, 2009), autor que hoje trabalha como economista chefe da empresa Google. Ele apresenta a estrutura básica do modelo e analisa os equilíbrios presentes no jogo, além da estratégia dos anunciantes e fazer os lances. São apresentadas propriedades importantes do equilíbrio simétrico que mostram a eficiência da alocação de anunciantes nas posições. Usando isso ele consegue estimar os valores dos anunciantes e a receita do leiloeiro.

O mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves é apresentado como uma importante referência para os leilões de posição, já que esse mecanismo apresenta a interessante propriedade de incitar que os anunciantes revelem os seus valores. Esse mecanismo gera a mesma receita do que a menor receita do equilíbrio de Nash simétrico.[1]

Incluímos, por fim, o modo como as ferramentas de pesquisa usam o leilão de posição diariamente para precificar o seu serviço. Não mostramos nesse trabalho, mas o autor apresenta em seu trabalho uma interessante interpretação gráfica do equilíbrio de Nash simétrico, além de uma análise empírica que corrobora com o equilíbrio analisado.

1.1 Notação

O autor propõe um modelo de leilões de posição como um jogo de movimento simultâneo e de informação perfeita. O modelo considera o problema de ordenar agentes $a = 1, \ldots, A$ para posições $s = 1, \ldots, S$ em que o valor que cada agente a atribui a cada posição é dado por $u_{as} = v_a x_s$.

No contexto de leilões de anúncios *on-line*, x_s pode ser interpretado como a taxa de cliques para a posição s. O valor $v_a > 0$ seria a receita esperada por clique do anunciante a. Dessa forma, u_{as} indica a receita esperada pelo anunciante a se seu anúncio estiver na posição s.

As posições são numeradas de modo que $x_1 > x_2 > \cdots > x_s$ e define-se $x_s = 0$ para todo $s > S$. Ou seja, o autor considera que quanto mais baixa a posição[2], menos ela recebe atenção dos usuários da ferramenta de busca e, portanto, é esperado que receba menos cliques. A segunda equação apenas nos diz que o anunciante que não conseguiu uma posição não receberá cliques em seu anúncio pelo simples fato de que ele não será

[1] No capítulo 3 veremos que o equilíbrio de menor receita é o mais plausível dos equilíbrios simétricos.
[2] Perceba que as posições mais baixas são denominadas por números maiores e as posições mais altas por números menores.

listado.

As posições são vendidas em um leilão. Cada agente realiza um lance b_a. A posição com maior taxa de cliques é concedida para o anunciante que realizou o maior lance e assim por diante. Como se trata de um leilão de segundo preço, o agente tem como preço não o seu lance, mas o lance do agente que ficou na próxima posição.

A partir deste ponto, o autor identifica o agente por sua posição de equilíbrio. Remunerando os agentes, v_s será o valor por clique do agente na posição s. Dessa forma, o preço que o agente s paga é $p_s = b_{s+1}$ e o lucro é dado por $(v_s - p_s)x_s = (v_s - b_{s+1})x_s$. No restante deste trabalho, usaremos a notação de (VARIAN, 2007) por a considerarmos mais concisa.

Antes de começarmos a entrar mais fundo na análise desse jogo é importante entender que o leilão de posição não é uma generalização do leilão de segundo preço. Essa generalização seria o Mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves (VCG), apresentado na seção 1.4, que incita os participantes a revelarem seus valores privados ao fazerem seus lances iguais a esses valores.

O leilão de posição não incita a realização de lances verdadeiros, pois como veremos a seguir, a estratégia de lances de um anunciante depende dos lances e dos valores dos outros anunciantes. Por exemplo[3], considere que existem três anunciantes com valores $v_1 = 10$, $v_2 = 4$ e $v_3 = 2$ em um leilão de duas posições. As taxas de clique são $x_1 = 200$ e $x_2 = 199$, se todos os jogadores fizerem os lances iguais aos seus valores o *payoff* do anunciante 1 será $(10 - 4)200 = 1200$. Se ele sombrear[4] o seu lance e só oferecer $b_1 = 3$, ele ficará com o segundo lugar na lista e terá um *payoff* de $(10 - 2)199 = 1592$.

Como veremos na seção a seguir, essa intuição é verdadeira mesmo em equilíbrio, caso em que não vale a pena mudar de posição. Athey e Ellison (2011) usam uma modificação do leilão inglês generalizado introduzido por Edelman, Ostrovsky e Schwarz (2007), tratado no capítulo 2, em seu modelo e reforçam essa intuição de forma interessante. Apresentamos essa formulação na seção 5.2.

1.2 Nash no leilão de posição

Nessa seção estudamos os equilíbrios de Nash apresentados pelo autor. Em equilíbrio cada agente deve preferir sua posição a qualquer outra, o que motiva a primeira definição:

[3] Esse exemplo foi retirado de (EDELMAN; OSTROVSKY; SCHWARZ, 2007).
[4] Esse é o nome dado à estratégia de fazer um lance inferior ao seu valor.

Definição 1. Um conjunto de preços é um equilíbrio de Nash (EN) se:

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t, \text{ para } t > s \tag{1.1}$$

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_{t-1})x_t, \text{ para } t < s \tag{1.2}$$

No qual $p_t = b_{t+1}$.

Na equação 1.1 o agente estaria analisando a possibilidade de mudar para uma posição inferior.[5] O conjunto de preços será um EN se ele perceber que, apesar da posição inferior possuir um preço menor, sua taxa de cliques é tão menor que fará com que sua receita seja menor que a atual.

A equação 1.2 representa o caso em que o agente analisa a possibilidade de subir uma posição. Perceba que para o agente subir uma posição ele tem que fazer um lance superior ao que o agente daquela posição fez. Então terá que pagar o lance do agente na posição t e não o que esse agente paga. Outra forma de ver isso é perceber que ele pagará o preço que o agente na posição $t-1$ paga, mas ficará uma posição abaixo desse, na posição t, ou seja, pagando um preço mais caro por uma posição pior. O conjunto de preços será um EN se esse preço maior fizer com que sua receita esperada diminua apesar da maior taxa de cliques. Ou seja, o excedente por clique diminuirá tanto ao se trocar de posição, $(v_s - p_{t-1}) < (v_s - p_s)$, que compensará o aumento na taxa de clique, $x_t > x_s$, de tal forma que é melhor permanecer na mesma posição do que subir.

Essas desigualdades são lineares nos preços, portanto, dado v_s e x_s pode-se usar programação linear simples para achar a receita de equilíbrio máxima e mínima da ferramenta de pesquisa. Para simplificar a análise dos leilões de posição é interessante analisar o subconjunto de equilíbrios de Nash a seguir:

Definição 2. Um conjunto de preços é um Equilíbrio de Nash Simétrico (ENS) se:

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t, \text{ para todo } t \text{ e } s. \tag{1.3}$$

De modo equivalente,

$$v_s(x_s - x_t) \geq p_s x_s - p_t x_t, \text{ para todo } t \text{ e } s. \tag{1.4}$$

Perceba que a equação 1.3, que caracteriza o ENS é igual à equação 1.1, mas para todo t e s. Isso significa que nessa nova definição de equilíbrio, cada agente prefere ficar em sua posição mesmo que possa trocar de lugar e de lance com outro jogador.

No caso do equilíbrio de Nash o agente preferia não subir uma posição, pois teria que pagar um preço maior do que o ocupante daquela posição pagava. No equilíbrio

[5] Para melhor perceber essa interpretação, considere que o agente se encontra na posição s e lembre-se que uma posição inferior é designada por um número maior, por isso t é maior que s.

simétrico o agente prefere não subir mesmo que pudesse pagar o mesmo preço que o ocupante da posição anterior paga atualmente. Ou seja, o agente não trocaria de posição mesmo se ele pudesse trocar de posição e de lances com o agente acima dele.[6]

A equação 1.4 é apenas um rearranjo da equação 1.3. Ela mostra que a diferença na receita esperada é sempre maior do que a diferença no custo de trocar de posição. No caso de trocar para um posição inferior, ela mostra que a receita que se perde ao sair da posição s é maior do que o que se economiza ao ir para a posição t. No caso de trocar de lugar com algum jogador de um posição superior, ela mostra que o aumento na receita esperada será menor do que o aumento no custo. Para melhor perceber essa última intuição, pense nó módulo dos valores dessa equação.[7]

O ENS apresenta as seguintes propriedades:

Propriedade 1. Receita não negativa.

Em ENS $v_s \geq p_s$. Ou seja, todos os anunciantes têm receita maior ou igual a zero.

Propriedade 2. Valores monótonos.

Em ENS $v_{s-1} \geq v_s$ para todo s. Em outras palavras, os agentes são ordenados pelos seus valores.

Propriedade 3. Preços monótonos.

Em um ENS, $p_{s-1}x_{s-1} > p_s x_s$ e $p_{s-1} \geq p_s$ para todo s. Se $v_s > p_s$ então $p_{s-1} > p_s$. Posições mais altas geram custos maiores e possuem preços maiores. A segunda parte da propriedade nos diz que se um anunciante s tiver um lucro positivo o anunciante acima paga mais por clique.[8] Essa parte é mais bem entendida ao se ver a prova, aqui apresentada no apêndice A, assim como encontrada no artigo original.

Propriedade 4. EN$\supset$ENS

Se um conjunto de preços é um ENS, também será um EN.

Propriedade 5. Solução de um passo.

Se um conjunto de lances satisfaz as desigualdades do equilíbrio de Nash simétrico para $s+1$ e $s-1$ quaisquer, então satisfaz as desigualdades para todo s.

6 Essa noção lembra o conceito de equilíbrio localmente livre de inveja introduzido por Edelman, Ostrovsky e Schwarz (2007). De fato, Varian (2007) chega a citar esse trabalho falando que esse equilíbrio gera o mesmo lance que o limite inferior do ENS. Apresentaremos esse conceito no capítulo 2.

7 Lembre-se que como nesse caso ambos os lado da equação são negativos quando se compara os módulos é necessário trocar o sinal. Outra forma de perceber isso seria multiplicar a equação por -1.

8 Pela definição do ENS podemos garantir que o anunciante acima, denominado por $s-1$ tem um lucro maior do que o agente s nesse caso. Seu lucro é estritamente maior caso seu valor também seja estritamente maior.

As provas dessas propriedades, como encontradas no artigo original, estão disponíveis no apêndice A.

O autor usa essas propriedades para chegar a uma caracterização explícita dos lances e preços de equilíbrio. Ele mostra que, em equilíbrio, o lance de cada agente é limitado superior e inferiormente pela combinação convexa do lance do agente abaixo dele e um valor, o seu ou o do agente acima dele, como mostra a equação a seguir, conforme desenvolvido no apêndice A.

$$(1-\alpha_s)v_{s-1} + \alpha_s b_{s+1} \geq b_s \geq (1-\alpha_s)v_s + \alpha_s b_{s+1} \tag{1.5}$$

para $\alpha_s = x_s/x_{s-1} < 1$

É interessante notar que haverá um intervalo de lances que satisfazem as desigualdades das definições de ambos equilíbrios. O equilíbrio de Nash simétrico em estratégias puras pode, então, ser achado escolhendo recursivamente uma sequência de lances que satisfaz essas desigualdades. A solução dessas recursões será:

$$b_s^U x_{s-1} = \sum_{t \geq s} v_{t-1}(x_{t-1} - x_t) \tag{1.6}$$

$$b_s^L x_{s-1} = \sum_{t \geq s} v_t(x_{t-1} - x_t) \tag{1.7}$$

Sendo b_s^U e b_s^L as cotas superior e inferior dos lances de equilíbrio. O valor inicial para as recursões vem do fato que só existem S posições, de forma que $x_s = 0$ para $s > S$. Escrevendo o limite inferior no lance para $s = S+1$, temos:

$$b_{S+1}^L x_S = v_{S+1}(x_S - x_{S+1}) = v_{S+1} x_S$$

de forma que é ótimo para o primeiro agente a ser excluído fazer o lance igual ao seu valor. Esse resultado possui o mesmo argumento que no leilão de Vickrey para um objeto. Se você é excluído, fazer um lance menor do que o seu valor é inútil e fazer um lance maior que o seu valor pode causar prejuízo caso venha a entrar em uma posição.

O autor mostra que o limite inferior b_s^L é o maior lance que garante que o agente na posição s não piore de situação caso exceda o lance do agente acima e suba uma posição. Podemos também pensar que se um jogador s fizer um lance alto o suficiente pode fazer com que o excedente do jogador $s-1$ acima diminua o suficiente que faça com que seja vantajoso para $s-1$ descer uma posição. O limite superior b_s^U é o maior lance que o agente s pode fazer que evita com que o agente $s-1$ acima queira descer uma posição.

Pode-se perguntar o motivo de se analisar limites para os lances que consideram a possibilidade de o agente acima querer trocar se posição se esses valores obedecem ao equilíbrio simétrico. Entretanto, como podemos ver na equação 1.5, o lance de cada agente s depende da crença que ele possui sobre os lances que os outros farão. Esses limites seriam uma forma defensiva de se escolher seu lance caso houvesse a possibilidade dessas crenças não condizerem com a realidade. O fato das estratégias dependerem dos valores e lances dos outros jogadores, como mostra a equação 1.5, faz com que não seja uma estratégia dominante fazer um lance igual ao seu valor.

O autor deriva limites para os valores não observáveis v_s, do agente que ganhou a posição s, para o equilíbrio simétrico. Segue o resultado:

$$v_1 \geq \frac{p_1 x_1 - p_2 x_2}{x_1 - x_2} \geq v_2 \geq \frac{p_2 x_2 - p_3 x_3}{x_2 - x_3} \geq \cdots \geq v_s \geq p_s \tag{1.8}$$

Perceba o significado do termo $\frac{p_s x_s - p_t x_t}{x_s - x_t}$. O numerador é a diferença entre os valores totais pagos pelo agente na posição s e o agente na posição t. O denominador é a diferença de cliques entre as posições s e t. Dessa forma, essa fração nos mostra o custo de cada novo clique que recebemos ao subir de posições. Portanto, a equação 1.8 nos mostra que os custos incrementais de subir cada posição.

Perceba que o custo incremental é menor para posições inferiores e aumenta cada vez que se sobe para posições superiores. Isso sugere que o agente deve adotar uma estratégia de aumentar seu lance, subindo de posições, até que o seu valor seja menor que o custo de subir uma posição. Lembre-se que o valor é a receita esperado dos anunciantes no caso do leilão de posição, portanto, enquanto os cliques incrementais custarem menos que o seu valor, o anunciante ainda pode aumentar seu lucro.

O autor chama atenção para o fato de que essas desigualdades nos mostram que existe uma condição observável para a existência de um equilíbrio de Nash em estratégias puras. Essa condição é que esses intervalos sejam não vazios. E se os intervalos são não vazios, poderemos necessariamente achar um conjunto de valores que é consistente com o equilíbrio. Ou seja, essa condição é necessária e suficiente para a existência desse tipo de equilíbrio.

1.3 Receita do leiloeiro no equilíbrio

Para calcular as cotas superior e inferior da receita total em um ENS basta somar $b_s^U x_{s-1}$ e $b_s^L x_{s-1}$, das equações 1.6 e 1.7 sobre $s = 1, \ldots, S$. Por exemplo, se o número de posições for $S = 4$ teremos:

$$R^U = v_1(x_1 - x_2) + 2v_2(x_2 - x_3) + 3v_3(x_3 - x_4) + 4v_4 x_4 \tag{1.9}$$

$$R^L = v_2(x_1 - x_2) + 2v_3(x_2 - x_3) + 3v_4(x_3 - x_4) + 4v_5 x_4 \tag{1.10}$$

Como o Equilíbrio de Nash Simétrico está contido no Equilíbrio de Nash seria de se esperar que a cota superior da receita do ENS fosse menos que a do EN. E que a cota inferior da receita fosse menor. Entretanto, como vemos pela sexta propriedade do

ENS presente no artigo, apresentada a seguir, os dois equilíbrios possuem a mesma cota superior da receita. Entretanto, a cota inferior da receita do EN é geralmente inferior a do ENS, como esperado.

Propriedade 6. A receita máxima do EN é igual à cota superior da solução recursiva do ENS.

1.4 Mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves (VCG)

O mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves (VCG) é um outro modelo que pode ser usado para esse tipo de leilão. Esse mecanismo é interessante para comparação com o modelo original de leilões de posição, mesmo que tenha alguns problemas de aplicação prática[9]. Essa seção foi baseada na forma intuitiva e nos exemplos apresentados em (VARIAN, 2009). Entretanto, (VARIAN, 2007) e (EDELMAN; OSTROVSKY; SCHWARZ, 2007) tratam desse mecanismo de forma mais detalhada. Leonard (1983) descreve essa aplicação para o caso geral.

No VCG, assim como anteriormente, cada anunciante faz o seu lance e é alocado de acordo nas posições disponíveis. A diferença é que o anunciante não paga o segundo preço. Nesse modelo o anunciante paga uma quantia que pode ser entendida como a externalidade que ele inflige nos outros participantes do leilão.

Antes de apresentar a equação que caracteriza esse valor, vamos pensar melhor nesse conceito. A presença de um anunciante afeta o *payoff* dos outros agentes. Imagine a situação em que temos $S = 3$ posições e 4 agentes. Se o agente $s = 2$ decidisse não participar do leilão o agente $s = 3$ ficaria com a segunda posição e o agente $s = 4$, que não havia conseguido uma posição anteriormente, passaria a aparecer na lista de *links* patrocinados.

Dessa forma, a presença do anunciante $s = 2$ faz com que os agentes abaixo dele fiquem em um situação pior. O montante cobrado de cada agente é exatamente essa externalidade causada por ele. Para calcular o pagamento do agente $s = 2$, primeiro calculamos a utilidade dos outros agentes quando ele está presente:

$$u_1^{c2} + u_3^{c2} + u_4^{c2} = v_1 x_1 + v_3 x_3 \tag{1.11}$$

No qual $u_s^{c2} = v_s x_s$ é a utilidade do agente que ficou na posição s no primeiro leilão quando todos os 4 agentes participaram, v_s é a receita esperada por clique do agente s e x_s é a taxa de cliques esperada da posição s. A notação $c2$ significa que essa é a utilidade desse agente quando o anunciante 2 está presente no leilão. Agora calculamos a utilidade

[9] Como veremos no final dessa seção, esse mecanismo está sujeito a fraude de cliques.

dos outros agentes quando o agente $s = 2$ não está presente no leilão:

$$u_1^{s2} + u_3^{s2} + u_4^{s2} = v_1x_1 + v_3x_2 + v_4x_3 \tag{1.12}$$

A notação $s2$ significa que essa é a utilidade do agente sem o anunciante 2 presente no leilão. Perceba como a utilidade muda com $u_3^{c2} = v_3x_3 < v_4x_2 = u_3^{s2}$. A receita esperada por clique do agente 3 continua a mesma, mas agora ele recebe mais cliques por estar na posição que antes pertencia ao agente $s = 2$, o que aumenta sua receita total.

Fazendo $1.12 - 1.11$ obtemos:

$$P_2 = v_3(x_2 - x_3) + v_4x_3 \tag{1.13}$$

no qual P_2 é o pagamento do agente $s = 2$. Note que essa equação é igual à cota inferior dos lances de equilíbrio $b_s^L x_{s-1}$ descrita na equação 1.7, ou seja, o VCG gera a mesma receita do que a cota inferior da receita de ENS. É interessante perceber que a utilidade do agente na posição 1 não faz parte do pagamento do agente 2. Isso é intuitivo no sentido de que um agente não exerce nenhuma externalidade em agentes que estão em posições acima dele.

É preciso esclarecer alguns pontos quanto ao VCG. Nesse mecanismo uma autoridade central fica responsável por distribuir as posições entre os anunciantes de modo a maximizar as somas das utilidades reportadas. Portanto, os agente não fazem mais lances e sim reportam uma função de utilidade. Como o principal termo da utilidade dos agentes no leilão de posição é o valor privado, podemos pensar que os anunciantes reportam valores.

Entretanto, como vimos na equação 1.13, o valor do agente não influencia no seu pagamento. Além disso, como a autoridade central maximiza a soma das utilidades reportadas, fica claro que o agente terá sua utilidade maximizada se reportar o seu valor verdadeiro. Dessa forma, o agente não tem incentivos para mentir o seu valor. Ou seja, ele não ganha por reportar um valor mais baixo ou mais alto do que o seu.

Portanto, reportar seu valor verdadeiro é uma estratégia dominante nesse mecanismo. Ou seja, todos os agentes tem incentivos para revelar o seu valor. Essa é a principal característica do mecanismo VCG.

Outra propriedade interessante é que o VCG não requer que se conheça a taxa esperada de cliques para cada posição, x_s. Isso por que a equação 1.13 nos fornece um algoritmo simples para a cobrança, que é como uma regra de cobrança. Toda vez que houver um clique na posição s, basta cobrar v_{s+1} do agente s e toda vez que houver um clique em posições $t > s$ basta pagar ao agente s a quantia de $v_t - v_{t+1}$.

Para deixar mais claro como isso funciona vamos rearranjar a equação 1.13 da seguinte forma:

$$v_3x_2 + x_3(v_4 - v_3)$$

Toda vez que o agente na posição $s = 2$ receber um clique ele paga v_3. E toda vez que o agente na posição $s = 3$ receber um clique o agente $s = 2$ recebe $v_4 - v_3$. A intuição é a seguinte: se o você tem que pagar a externalidade que você causa aos outros anunciantes, toda vez que você recebe um clique é como se essa externalidade negativa aumentasse, já que esse é um clique que o agente na posição seguinte teria recebido caso você não tivesse entrado no leilão. Entretanto, toda vez que os agentes em posições inferiores recebem cliques, significa que a sua presença não está causando uma externalidade tão negativa assim, portanto, o seu pagamento diminui.

Entretanto, esse algoritmo está sujeito a fraude. Isso ocorre pois um anunciante se beneficia de cliques em posições inferiores. Provavelmente esse é o motivo que faz com que esse mecanismo não seja utilizado no mercado de *links* patrocinados.

1.5 Aplicação ao leilão de anúncios

Para a aplicação do leilão de posição na venda de posições de anúncios online, assim como feito pela empresa Google, o autor introduz uma ponderação de qualidade para a ordenação dos anunciantes. Para tanto, cada lance é ponderado pelo efeito qualidade e_s. Esse efeito qualidade visa levar em conta se o anúncio chama mais atenção, caso em que um anúncio específico receberia mais cliques do que outro anúncio que estivesse na mesma posição.

Dessa forma, a taxa de cliques observada do anunciante s seria $z_s = e_s x_s$. Em que x_s seria o efeito posição, como se fosse a taxa de cliques esperada por estar na posição s, assim como definido anteriormente. Os anunciantes são ordenados por $e_s b_s$ e cada anunciante s paga o valor mínimo para se manter na posição t, q_{st}[10], já que esse é um leilão de segundo preço. Por construção temos:

$$q_{st} e_s = b_{t+1} e_{t+1}$$

O equilíbrio de Nash requer que cada agente prefira sua posição a qualquer outra. Como o custo e a taxa de cliques de outras posições dependem da qualidade do anúncio, temos:

$$(v_s - q_{ss}) e_s x_s \geq (v_s - q_{st}) e_s x_t$$

O autor, então, desenvolve a equação até chegar às seguintes desigualdades:

$$e_1 v_1 \geq \frac{p_1 x_1 - p_2 x_2}{x_1 - x_2} \geq e_1 v_2 \geq \frac{p_2 x_2 - p_3 x_3}{x_2 - x_3} \geq \cdots \geq e_s v_s \geq p_s$$

[10] Lembre-se que identificamos o anunciante pela sua posição em equilíbrio. Isso ainda é verdade nessa modelagem. Dessa forma, o valor mínimo para um anunciante se manter em sua posição é q_{ss}. O autor usa q_{st} para identificar o valor mínimo que o agentes s teria que pagar para se manter em uma posição t qualquer.

que são desigualdades testáveis implícitas do modelo de equilíbrio de Nash simétrico. O autor menciona que caso uma página não seja totalmente vendida o último anunciante da página paga um preço reserva[11].

Pode parecer irrealista analisar equilíbrios de informação completa no caso de leilões de anúncios. Entretanto, o autor ressalta que é fácil conseguir as informações relevantes necessárias por meio de experimentação, já que o Google fornece estatísticas detalhadas dos leilões além de existirem empresas que oferecem uma variedade de serviços para administrar lances nesses leilões.

[11] Isso também é verdade para o modelo sem ponderação de qualidade. Voltaremos ao assunto do preço reserva em mais detalhes nos capítulos seguintes.

2 Interpretando leilões de posição com a ajuda de um relógio

Nesse capítulo trataremos do artigo de (EDELMAN; OSTROVSKY; SCHWARZ, 2007). Os autores apresentam duas modelagens para o leilão de posições, que é chamado de leilão de segundo preço generalizado (SPG) nesse trabalho. Primeiro eles modelam o leilão como um jogo de movimentos simultâneos e informação perfeita que lembra um leilão de segundo preço com envelope fechado, da mesma forma que Varian (2007), mas usando uma definição de equilíbrio diferente.

Depois os autores apresentam uma modelagem alternativa de um jogo de forma extensiva e informação incompleta que lembra um leilão inglês ascendente de um único objeto. Na verdade, a modelagem pode ser considerada uma generalização direta desse tipo de leilão de modo que alguns resultados interessantes chegam a se fortalecer no Leilão Inglês Generalizado, como apresentaremos ao final deste capítulo.

As definições e modelos desse trabalho serão apresentadas usando a notação presente em (VARIAN, 2007) para os termos análogos de forma a explicitar as semelhanças entre os dois trabalhos.[1]

2.1 Não desejarás o que é do teu próximo

Apresentamos a seguir a definição de equilíbrio utilizada por Edelman, Ostrovsky e Schwarz (2007) e que tem uma ligação forte com outras definições apresentadas:

Definição 3. Um equilíbrio do leilão de segundo preço generalizado (SPG) é localmente livre de inveja se um jogador não puder melhorar seu *payoff* trocando lances com o jogador posicionado diretamente acima dele. Formalmente, para $s \leq \min\{A, S\}$

$$x_s v_s - x_s p_s \geq x_{s-1} v_s - x_{s-1} p_{s-1} \tag{2.1}$$

em que A é a quantidade de agentes participando do leilão e S é a quantidade de posições sendo leiloadas.

Essa definição é semelhante à definição de Equilíbrio de Nash Simétrico. Perceba que essa equação é igual à equação 1.3, com $t = s - 1$. De fato, o lance do equilíbrio

[1] As notações correspondentes são: $\alpha_i = x_i$ para as taxas de cliques, $s_i = v_i$ para os valores e $p^{(i)} = x_i b_{i+1} = x_i p_i$. Para o número de posições $N = S$ e de agentes $K = A$, lembrando que Varian (2007) ordena os agentes de modo que $g(i) = i$ na notação de (EDELMAN; OSTROVSKY; SCHWARZ, 2007), ou seja, o primeiro autor numera os agentes de acordo com a sua posição no final do leilão tornando desnecessário o uso da função $g(i)$.

localmente livre de inveja possui a mesma cota inferior dos lances do ENS descrito na equação 1.7, e portanto, possui a mesma cota inferior das receitas do ENS da equação 1.10.

Outra forma de interpretar essa definição vem de rearranjarmos a equação 2.1 para $x_{s-1}p_{s-1} \geq v_s(x_{s-1} - x_s)$, que mostra que o custo incremental da posição superior é pelo menos tão grande quanto a receita incremental dos cliques. Dessa forma, o agente não tem interesse em subir de posição.

2.2 Leilão Inglês Generalizado e SPG

O autores introduzem o modelo do Leilão Inglês Generalizado para mostrar como os agentes convergem para o *steady state* de longo prazo postulado no modelo SPG. Esse modelo se torna um leilão inglês simples caso só haja um objeto a ser vendido.

Nesse modelo existe um relógio que mostra valores monetários ao invés da hora. Dessa forma, a medida que o tempo passa o ponteiro vai indicando cada vez valores mais altos. Os participantes podem desistir a qualquer momento. O seu lance é o valor mostrado no relógio quando o anunciante desiste e o leilão tem fim apenas quando o penúltimo anunciante desiste. O anunciante que ficou até o fim ganha a primeira posição e tem como preço por clique o lance do penúltimo anunciante, que foi o último a desistir. O penúltimo anunciante tem como preço o lance do antepenúltimo anunciante e assim por diante.

Para definir formalmente esse jogo usaremos a notação de (VARIAN, 2007) para os termos análogos. Os autores postulam que existem $S \geq 2$ posições e $A = S+1$ anunciantes para simplificar as provas. As taxas de cliques x_s são conhecidas por todos, com $x_{S+1} = 0$. Os valores por clique v_a são tirados de uma função de distribuição contínua F em $[0; +\infty)$ com uma função de densidade contínua f positiva em $(0, +\infty)$. Cada anunciante conhece o seu valor e a distribuição do valor dos outros anunciantes.

A estratégia de um anunciante pode ser representada por uma função $b_k(i, h, v_a)$ em que b_k é o preço que o relógio marca no momento em que o anunciante k desiste. i é o número de anunciantes que ainda não desistiram, $h = (b_{i+1}, \ldots, b_{S+1})$ é a história dos preços em que os anunciantes anteriores desistiram e v_a é o valor por clique do anunciante a.

Os autores, então, apresentam o seguinte teorema, que mostra que esse jogo possui um equilíbrio Bayesiano perfeito com estratégias contínuas nos valores dos anunciantes. Os *payoffs* de todos anunciantes nesse equilíbrio são iguais aos do VCG.

Teorema 1. *No equilíbrio Bayesiano perfeito único com estratégias contínuas em v_a, um anunciante com valor v_a desiste no preço*

$$b_k(i, h, v_k) = v_k - \frac{x_i}{x_{i-1}}(v_k - b_{i+1}) \tag{2.2}$$

Nesse equilíbrio, a posição e payoff *de cada anunciante são iguais aos do equilíbrio em estratégias dominantes do leilão VCG. Esse equilíbrio é* ex-post*, ou seja, a estratégia de cada anunciante é a melhor resposta para as estratégias dos outros anunciantes independente dos valores realizados deles.*

Para entender a intuição desse teorema é interessante rearranjar 2.2 para $x_{i-1}[v_k - b_k(i, h, v_k)] = x_i(v_k - b_{i+1})$. Ou seja, o anunciante irá desistir quando o preço no relógio, b_k na equação, atinge o nível em que ele fica indiferente entre pagar b_k e ficar na posição $i - 1$[2] ou pagar b_{i+1} e ficar na posição i.

É interessante perceber que a equação 2.2 também gera o mesmo lance que a cota inferior do ENS da equação 1.7 e, portanto, o mesmo lance do equilíbrio livre de inveja e a mesma receita do VCG e da cota inferior das receitas do ENS. Basta perceber que essa equação é igual à primeira equação 1.3 para $t = s - 1$ e com a igualdade.

Esse equilíbrio apresenta uma combinação impressionante de propriedades: ele é único e eficiente, a estratégia de cada anunciante não depende da distribuição do valor dos outros e mesmo assim os anunciantes não possuem estratégias dominantes.

Os autores destacam que o resultado do teorema 1 lembra a equivalência do leilão inglês de um único objeto com o leilão de envelope fechado de segundo preço de um único objeto de Vickrey (1961), mas com uma intuição diferente. O resultado de Vickrey segue da existência de equilíbrio em estratégias dominantes, enquanto nesse caso não existem estratégias desse tipo. Outro ponto importante levantado pelos autores é que esse resultado é bem diferente do teorema de equivalência da receita. A receita do Leilão Inglês Generalizado é igual à receita do VCG para todas as realizações de valores, não só em valor esperado, e o resultado não depende da hipótese de participantes simétricos ou de antecedentes comuns.

[2] Isso acontece no caso de dois anunciantes desistirem no mesmo momento, caso em que as posições são alocadas aleatoriamente. O anunciante que for sorteado para a posição $i - 1$ pagará b_k e o anunciante que ficar com a posição i pagará b_{i+1}.

3 Eliminando equilíbrios irreais

Esse capítulo trata do artigo de (EDELMAN; SCHWARZ, 2010). Nesse trabalho, os autores limitam o conjunto de equilíbrios do modelo de leilão de posição de informação completa. Eles consideram que esse modelo é uma simplificação do leilão que acontece na realidade, que seria melhor representado por um modelo de informação incompleta com vários períodos, chamado de modelo não simplificado. Assim, eles comparam os equilíbrios desses dois modelos para verificar quais equilíbrios do modelo simplificado são plausíveis, sem precisar resolver o modelo não simplificado.

Além disso, os autores tratam dos efeitos do preço reserva na receita do leiloeiro. Quando existem mais posições do que anunciantes em um leilão, o último anunciante paga um preço reserva r definido pelo leiloeiro, já que não há nenhum anunciante abaixo dele para que se use seu lance como preço.

No modelo dinâmico de informação incompleta, as ferramentas de pesquisa vendem espaços para anúncios usando SPG em tempo real. Os anunciantes podem mudar seus lances a qualquer momento. Em cada período, eles observam as posições de seus competidores e atualizam suas crenças sobre os valores dos outros anunciantes.

Dessa forma, o histórico de lances influencia o equilíbrio, pois a melhor resposta de um anunciante depende de sua expectativa do comportamento dos outros. Os autores observam que nesse ambiente é possível estabelecer um limite superior da receita em qualquer equilíbrio sem caracterizar o equilíbrio de um jogo dinâmico. Isso se dá devido à possibilidade de caracterizar um mecanismo ótimo limitando a receita em qualquer mecanismo nesse ambiente.

3.1 Mecanismo ótimo e a não contradição

Os autores introduzem o conceito de Critério de Não-Contradição (CNC). Esse conceito surge da ideia de que o jogo de informação completa é uma aproximação do jogo de informação incompleta. Dessa forma, podem-se eliminar equilíbrios do jogo de informação completa para os quais não exista um equilíbrio que convirja para o mesmo resultado no jogo de informação incompleta correspondente.

Para definir formalmente o CNC denota-se $\bar{R}(T)$ como a receita esperada no equilíbrio Bayesiano perfeito de maior receita do jogo de informação incompleta que dura por T períodos. $\bar{R}$ denota a receita esperada por período tal que $\bar{R} = \frac{1}{T}\lim_{T\to\infty}\bar{R}(T)$. $r_\mu(s)$ são as receitas esperadas em um equilíbrio de Nash μ de um jogo de um leilão SPG de informação completa no qual os valores dos participantes são dados pelo vetor s.

Definição 4. Um EN μ de um jogo de informação completa falha CNC se ele gera receitas esperadas maiores que qualquer equilíbrio do jogo de informação incompleta correspondente. Ou seja, μ falha CNC se $\int_{s_1} \dots \int_{s_A} r_\mu(s) f(s_1) \dots f(s_A) \mathrm{d}s_1 \dots \mathrm{d}s_n > \bar{R}$.

A ideia por trás do CNC é comparar dois jogos distintos em que um deles pode ser visto como uma aproximação do comportamento dos jogadores no outro jogo mais complexo . CNC restringe equilíbrios em um jogo apenas no caso desse jogo estar sendo usado para capturar o comportamento de outro jogo equivalente.

Os autores procuram um mecanismo ótimo como um resultado intermediário, de modo a encontrar um limite superior para a receita do mecanismo dinâmico sem precisar resolvê-lo. Krishna (2002, p. 67) define um mecanismo ótimo como um mecanismo que maximiza a receita esperada sujeito à compatibilidade de incentivos[1] e à racionalidade individual[2].

Eles utilizam o Leilão Inglês Generalizado no ambiente de informação incompleta de modo a fazer isso. Os autores propõem um mecanismo ótimo e apresentam um corolário como a seguir:

Proposição 1. *O leilão Inglês Generalizado com preço reserva r^* é um mecanismo ótimo que resolve $r^* - \frac{1-F(r^*)}{f(r^*)} = 0$.*

Corolário 1. *O preço ótimo de reserva no Leilão Inglês Generalizado não depende do número de participantes, de posições nem da taxa de declínio da taxa de cliques de posição para posição.*

A aplicação do CNC para o leilão SPG de informação completa com preço reserva r^* é apresentado como a seguir:

Proposição 2. *Em um leilão SPG de informação completa com preço reserva r^*, somente o equilíbrio de menor receita sobrevive ao CNC. Além disso, esse equilíbrio é único.*

Como vimos, o equilíbrio livre de inveja gera pelo menos tanta receita quanto o VCG. A proposição 1 mostra que a receita do VCG é igual à receita ótima no ambiente de informação incompleta.[3] Dessa forma, o único equilíbrio que não é maior do que a receita ótima do ambiente de informação incompleta é a menor receita de equilíbrio simétrico do leilão de posição.[4]

---

1 Krishna (2002, p. 67) diz que em qualquer mecanismo com incentivos compatíveis o pagamento esperado de um comprador depende somente da regra de alocação até uma constante aditiva.

2 Krishna (2002, p. 67) diz que um mecanismo é individualmente racional se o *payoff* esperado de todos os participantes de comprar qualquer item é maior ou igual a zero.

3 Lembre-se que o Leilão Inglês Generalizado gera a mesma receita que o VCG.

4 Lembre-se que a cota inferior das receitas de equilíbrio do ENS e do equilíbrio livre de inveja são iguais à receita do VCG.

3.2 Preço reserva

Caso existam menos participantes do que posições no leilão o preço reserva afeta diretamente o último anunciante. Entretanto, o preço reserva pode impactar o comportamento de equilíbrio de todos os jogadores. Os autores analisam o preço reserva dos leilões de posição e mostram que aumentar o preço reserva causa um efeito indireto maior que o efeito direto.

Considere um aumento no preço reserva de $\Delta r = r_{novo} - r_{velho}$. Suponha que existam mais posições do que participantes, que n participantes tenham valores maiores que r_{velho} e que j participantes deixam de participar do leilão devido ao resultado, pois tem valores menores que r_{novo}. Os autores apresentam a seguinte proposição e corolário:

Proposição 3. *Quando o preço de reserva aumenta, o pagamento de todos anunciantes que permanecem, exceto o último, aumenta em uma mesma quantidade.*

Os autores mostram que o pagamentos de todos os anunciantes aumentará em $x_n \Delta r$. Lembrando que x_n é a taxa de cliques do último anunciante, pelo modo como definimos n no parágrafo anterior. No caso em que a variação no preço reserva faz com que j anunciantes desistam de participar do leilão a variação do último anunciante, indexado por $n - j$, será diferente da dos outros, por isso a ressalva na proposição. O esboço dessa prova, assim como apresentada no artigo, se encontra no apêndice A.

Corolário 2. *O aumento esperado em receita da posição s excede o aumento esperado da posição $s + 1$, à medida que o preço reserva aumenta.*

Esse corolário mostra que os efeitos indiretos são de certa forma maiores que os efeitos diretos. Os autores ainda analisam as implicações no bem-estar mostrando, através de simulações, que o preço de reserva ótimo difere do preço reserva que maximiza o bem-estar total. Veja Ostrovsky e Schwarz (2009) para uma abordagem experimental.

4 Os consumidores chegam no leilão

Até agora, temos assumido que os consumidores que usam as ferramentas de busca procuram pelos *links* de cima para baixo e, portanto, que as primeiras posições recebem mais atenção por parte dos consumidores. Entretanto, seria interessante analisar esse jogo levando em conta o comportamento dos consumidores. É nesse sentido que o trabalho de Chen e He (2011), o qual trataremos nesse capítulo, se encaixa em nossa revisão.

No modelo apresentado por esses autores, os consumidores buscam por variedades de produtos desejados e as ferramentas de busca servem de intermediário que fornece informações sobre a relevância de diferentes vendedores. Os anunciantes são diferentes em sua relevância, que é modelada como a probabilidade de um consumidor escolhido aleatoriamente encontrar o produto desejado.

Os consumidores não têm certeza sobre qual dos anúncios irá oferecer um produto do tipo desejado e também não sabem o quanto eles estão dispostos a pagar por esse produto até achá-lo.[1] O consumidor só pode descobrir as informações sobre os produtos oferecidos inspecionando o *site* de um anunciante. Como existe um custo para se procurar entre os *sites*, o consumidor forma uma estratégia de busca, que é levada em consideração pelos anunciantes na hora de fazer lances.

Um consumidor pode usar a lista de *links* patrocinados para ajudar em sua busca. Se um consumidor acha o produto desejado ele o compra somente se o seu valor realizado for maior que o preço do produto e se não valer a pena continuar procurando nas posições seguintes. Abaixo da lista de anúncios pagos todos os outros anunciantes que não conseguiram fazer parte da lista são ordenados de forma aleatória, isso seria como se fosse os resultados livres das buscas por palavras-chaves nas ferramentas de busca. Chen e He (2011) ponderam que na realidade esses resultados não são aleatórios, mas não chegam a tratar da questão de como a forma como os resultados livres são ordenados podem afetar o valor dos *links* patrocinados.

Uma outra hipótese é que os anunciantes possuem o mesmo custo marginal de produção, o que leva ao resultado de que todos cobrarão os mesmos preços. Chen e He (2011) ainda apresentam uma extensão de seu modelo que permite que os anunciantes tenham custos diferentes. Nessa extensão cada anunciante acabam cobrando um preço de monopólio com base no seu custo marginal realizado. Os resultados encontrados são de certa forma semelhantes aos do caso de custos homogêneos, entretanto, consideramos que as são feitas hipóteses muito fortes e decidimos não apresentar essa modelagem aqui.

[1] Essa hipótese simplificadora talvez tenha sido incluída com o caso de custos heterogêneos em mente. Não apresentaremos essa modelagem nesse trabalho, refira-se ao artigo original de (CHEN; HE, 2011) para encontrá-la.

Chen e He (2011) utilizam as definições de equilíbrio separador, parcialmente separador e de equilíbrio agregador. O equilíbrio separador é um em que os agentes de um certo tipo seguem uma estratégia diferente dos demais, o que acaba os separando do resto e, portanto, revelando para os demais o tipo desses agentes. No equilíbrio parcialmente separador o mesmo ocorre, mas os agentes não são separados de forma tão perfeita como no anterior. Essa segunda definição ficará mais clara a seguir. Por último o equilíbrio agregador une todos os agentes sob uma mesma estratégia, tornando impossível a identificação de seus tipos.

Em um equilíbrio separador desse jogo um anunciante fará um lance tanto maior quanto maior for sua relevância. Nesse caso, a ordenação dos anunciantes nas posições revela informações sobre a relevância de cada anunciante. Também existe um equilíbrio parcialmente separador, no qual anunciantes mais relevantes fazem lances iguais para serem ordenados aleatoriamente.

Esses dois equilíbrios resultam em uma busca mais eficiente e aumentam o bem-estar total em relação ao caso de não haver leilão de posição. Isso acontece pois o fato de haver uma lista de anúncios com os *links* mais relevantes diminui o tempo de busca dos consumidores.

Um desses equilíbrios pode gerar mais receita do que o outro dependendo da diferença de relevância entre os anunciantes. Pois se os anunciantes são muito parecidos em sua relevância, eles vão disputar mais acirradamente as posições da lista. Os detalhes serão explicados mais a frente.

4.1 Modelo de busca

Usaremos novamente a notação presente em (VARIAN, 2007) na medida do possível para não confundir o leitor.[2] O modelo consiste de $A \geq 4$ anunciantes diferentes em relevância, com o mesmo custo marginal de produção c. Cada produto oferecidos pelos anunciantes tem relevância diferente para os consumidores que realizam uma consulta usando uma certa palavra-chave na ferramenta de pesquisa. Identifiquemos os anunciantes por $a = 1, 2, \ldots, A$ e digamos que a sejam os seus tipos. Novamente usaremos $s = 1, 2, \ldots, S$ para designar as posições disponibilizadas no leilão de posição. O produto do anunciante a atende às preferências de um consumidor qualquer, escolhido aleatoriamente, com probabilidade β_a, sendo $\beta_1 \geq \beta_2 \cdots \geq \beta_A$ sem perda de generalidade.

O valor v que o consumidor associa ao produto é a realização de uma variável aleatória com função de distribuição acumulada $F(v)$ e função densidade $f(v)$ em $[v_0; \bar{v}]$.

[2] A notação dos tipos de anunciantes foi substituída de i para a e substituímos I no artigo original por S. Outra alteração foi feita para simplificar a notação e evitar confusões, trocamos π^0 no artigo original por π_0.

Quando o produto do anunciante não atende a preferência do consumidor, $v = 0$. Os consumidores descobrem o seu v apenas quando acham o produto desejado. A relevância β_a é independente de $F(v)$ e é independente e idêntica para todo consumidor.

Cada anunciante conhece apenas o seu tipo a, mas a distribuição de tipos de anunciantes e os possíveis valores de β_a são conhecidos por todos. Chen e He (2011) supõem

$$\beta_a = \begin{cases} \gamma^{a-1}\beta & para \quad a = 1, 2, \ldots, S \\ \gamma^{S}\beta & para \quad a = S+1, \ldots, A \end{cases}$$

em que $\beta, \gamma \in (0,1)$ e $2 \leq S \leq A$.

Ou seja, a relevância dos anunciantes cai a uma taxa constante γ para S anunciantes e depois fica constante para o restante. Os autores postulam que existem $S = 3$ posições.

Sabendo de seus β_a os anunciantes fazem seus lances no leilão de posição. Após serem ordenados eles escolhem simultaneamente seus preços de forma independente, que só podem ser observados pelos consumidores se esses abrirem o *link*. Existem custos para os consumidores acessarem cada *link*, podemos ver isso como se os consumidores ficassem cansados de procurar as informações do seu produto de interesse dentro dos *sites*.

O custo de cada consumidor para conduzir sua j-ésima consulta é t_j sendo $j = 1, \ldots, A$.[3] Um consumidor realiza uma compra se ele acha o produto desejado, o preço não excede o valor realizado v e procurar em outros *links* não resulta em uma utilidade esperado maior para ele. Todos os jogadores são neutros ao risco. Além disso, os autores fazem as duas hipóteses técnicas apresentadas a seguir:

Hipótese 1. *Existe um p^0 único tal que*

$$p^0 = \arg\max_{p \in [c, \bar{v}]} (p - c)[1 - F(p)]$$

e se define

$$\pi_0 \equiv (p^0 - c)[1 - F(p^0)]$$

Essa hipótese afirma que existe só um preço que maximiza o lucro esperado do anunciante. Perceba que o termo $(p - c)$ é o lucro de uma venda e o termo $[1 - F(p)]$ é a probabilidade de um consumidor ter seu valor realizado v maior que o preço p. π_0 é definido como o lucro esperado máximo de uma venda.

[3] Perceba que se utiliza a notação j para designar o número da busca sendo feita. Por exemplo, t_3 é a terceira busca. De modo que o consumidor não precisa realizar sua busca necessariamente seguindo a ordem dos *links*.

Hipótese 2.

$$t_j = \begin{cases} t & para \quad j = 1, 2, 3, 4 \\ t^h & para \quad j > 4 \end{cases}$$

no qual

$$t < \gamma^3 \beta \int_{p^0}^{\bar{v}} (v - p^0) f(v) \mathrm{d}v < t^h$$

Os autores afirmam que a taxa $[f(p)]/[1 - F(p)]$ ser monótona crescente é uma condição suficiente, mas não necessária para a hipótese 1. Essa condição é satisfeita por várias distribuições como a normal, a exponencial e a uniforme. A segunda hipótese diz que o custo marginal de busca aumenta após se visitarem alguns *sites*.

O custo de busca é igual e menor que a utilidade esperada de procurar pelos não listados para os quatro primeiros *links*. A partir da quinta posição, o custo de busca aumenta. Ou seja, os autores assumem que os consumidores procuram nos anúncios listado e em um anúncio da parte aleatória. Isso pode ser visto como uma limitação no tempo do agente, ou como se o agente cansasse de procurar pelo produto.

4.2 Analisando os equilíbrios

Um perfil de estratégias nesse modelo consiste de uma estratégia de procura e de compra para cada consumidor, além de uma estratégia para lances e para preços para cada anunciante. Um equilíbrio Bayesiano perfeito consistirá de um perfil de estratégias e de um sistema de crenças dos consumidores consistente com as estratégias e posições dos anunciantes.

Os autores analisam primeiro as estratégias de procura dos consumidores. Supõe-se que os anunciantes estão posicionados em ordem de relevância e que todos cobram o preço p^0. Dessa forma, o retorno esperado da procura de um consumidor será:

$$\gamma^{a-1} \beta \int_{p^0}^{\bar{v}} (v - p^0) f(v) \mathrm{d}v, \text{ para } a = 1, 2, 3$$

e seu retorno esperado de procurar algum vendedor não listado será:

$$\gamma^3 \beta \int_{p^0}^{\bar{v}} (v - p^0) f(v) \mathrm{d}v$$

Em ambos os casos, as equações nos mostram a utilidade esperada da busca. Ela consiste da probabilidade de achar o produto desejado multiplicado pelo excedente esperado da compra. Da hipótese 2 os autores chegam ao lema a seguir:

Lema 1. *Suponha que os anunciantes vencedores do leilão são ordenados por relevância na lista de* links *patrocinados e que os outros anunciantes não se encontram na mesma.*

Suponha ainda que o preço de cada anunciante seja p^0. Então será ótimo para cada consumidor buscar do primeiro ao último link *da lista e depois em um* link *fora, escolhido aleatoriamente. Eles param de buscar se encontram o produto desejado ou se conduzirem essas quatro buscas sem encontrar o produto desejado. No caso em que acham o produto desejado, eles o compram se e somente se $v \geq p^0$.*

Se uma produto atende às necessidades de um consumidor então o preço que maximiza a receita esperada de um anunciante para esse consumidor, sem saber o valor realizado de v, é p^0. Como um consumidor comprará o produto se $v \geq p^0$, esse deve ser o preço ótimo para o vendedor independente da posição dele na lista, ou mesmo se ele está fora da lista.[4]

Levando em conta o comportamento de procura e compra descrito no lema 1, a receita esperada dos anunciantes será:

$$\begin{aligned}
\pi_1 =& \beta\pi_0, \\
\pi_2 = (1-\beta)\gamma\beta\pi_0 =& (1-\beta)\gamma\pi_1, \\
\pi_3 = (1-\gamma\beta)(1-\beta)\gamma^2\beta\pi_0 =& (1-\gamma\beta)\gamma\pi_2, \\
\pi_k = \frac{1}{A-3}(1-\gamma^2\beta)(1-\gamma\beta)(1-\beta)\gamma^3\beta\pi_0 =& \frac{1-\gamma^2\beta}{A-3}\gamma\pi_3, \text{ para } k = 4, \ldots, A.
\end{aligned}$$

Perceba que π_1 é a probabilidade do anunciante 1, β atender ao desejo de um consumidor multiplicado pelo lucro esperado de uma venda. π_2 é o mesmo lucro, mas multiplicado por duas probabilidades, o termo $(1-\beta)$ é a probabilidade do primeiro anunciante não satisfazer ao desejo do consumidor e $\gamma\beta$ é a probabilidade do segundo anunciante conseguir satisfazê-lo. π_3 segue a mesma lógica. Já π_k é o mesmo lucro multiplicado pelas probabilidades de nenhum dos três primeiros *links* satisfazerem o consumidor e pela probabilidade de um anúncio escolhido aleatoriamente na seção livre satisfazê-lo.

Os vendedores que não são listados podem ser interpretados como fazendo parte dos resultados não patrocinados das ferramentas de pesquisa. Perceba que quando os consumidores obedecerem ao lema 1 um vendedor no espaço livre será visitado com probabilidade $1/(A-3)$[5], que se aproxima de zero à medida que o número de anunciantes A aumenta.

Para entender como cada vendedor irá fazer seu lance os autores procuram por um equilíbrio que os vendedores façam lances maiores quanto maior for a sua relevância.

[4] Os autores afirmam que esse é um resultado familiar na literatura de busca, que segue o trabalho seminal de (DIAMOND, 1971). Os resultados desse modelo não dependem crucialmente de cada firma cobrar p^0. Os resultados qualitativos serão os mesmo caso o preço ótimo das firmas seja constante ou se a distribuição dos preços acontecer em um intervalo suficientemente pequeno relativo aos custos de busca do consumidor. Essa última modelagem não foi incluída nesse trabalho.

[5] Essa é a probabilidade de um vendedor no espaço livre ser visitado. $(A-3)$ é o número de anunciantes no espaço livre, já que existem 3 anunciantes na lista.

Nesse equilíbrio, o lucro do anunciante $a = 4$ posicionado em $s = 4$ é π_4, se esse agente estivesse em $s = 3$ seu lucro esperado seria $(1-\beta)(1-\gamma\beta)\gamma^3\beta\pi_0 = \gamma\pi_3$[6]. Dessa forma, o anunciante $s = 4$ está disposto a fazer o seguinte lance para ficar na posição 3:

$$b_4 \equiv \gamma\pi_3 - \pi_4 = \gamma\pi_3 - (1-\gamma^2\beta)\frac{\gamma}{A-3}\pi_3 = \left(1 - \frac{1-\gamma^2\beta}{A-3}\right)\gamma\pi_3$$

Ele faz esse lance pois esse é o valor máximo que ele está disposto a pagar para estar listado, que é exatamente o valor que ele ganha ao estar listado na terceira posição.

Por outro lado, o agente 3 está disposto a fazer o seguinte lance para manter sua posição:

$$b_3 = \pi_3 - (1-\beta)(1-\gamma\beta)(1-\gamma^3\beta)\frac{\gamma^2\beta}{A-3} = \left(1 - \frac{1-\gamma^3\beta}{A-3}\right)\pi_3$$

que é igual ao lucro total esperado que ele possui na posição 3 menos o lucro total esperado de estar fora da lista.[7]

Dessa forma, temos que $b_3 \geq b_4$. Essa desigualdade será estrita se $A > 4$. b_3 pode ser interpretado como o aumento da sua receita ao entrar na lista ou o valor da posição 3 para ele. O *payoff* esperado para o anunciante 3 será $\pi_3 - b_4$. Os autores desenvolvem o mesmo raciocínio para os anunciantes 1 e 2 e apresentam o teorema a seguir:

Teorema 2. *Se $\beta \geq \max\{2-(1/\gamma), (1-\gamma)/(2-\gamma)\}$ existirá um equilíbrio em que o anunciante i faz o lance:*

$$\begin{aligned}
b_1 &= \gamma\beta^2\pi_0 + \left(1 - \frac{1-\gamma^3\beta}{A-3}\right)\pi_3 \\
b_2 &= (1-\beta)\gamma^3\beta^2\pi_0 + \left(1 - \frac{1-\gamma^2\beta}{A-3}\right)\gamma\pi_3 \\
b_3 &= \left(1 - \frac{1-\gamma^3\beta}{A-3}\right)\pi_3 \\
b_k &= \left(1 - \frac{1-\gamma^2\beta}{m-3}\right)\gamma\pi_3, \ \textit{para } k = 4, \ldots, A.
\end{aligned}$$

Os agentes 1, 2 e 3 ficam com as primeiras posições e pagam b_2, b_3 e b_4. O preço de cada anunciante é p^0 e cada consumidor age como descrito no lema 1.

A restrição do parâmetro, que é satisfeita se $\beta \geq \max\left\{\frac{1}{2}, \gamma\right\}$, é uma condição suficiente mas não necessária para a existência de tal equilíbrio, quando $A > 4$. A intuição dessa restrição é que β não seja muito pequeno em relação a γ, caso em que os anunciantes

[6] Perceba que isso é π_0 vezes a probabilidade de nenhum dos dois primeiros conseguirem realizar a venda vezes a probabilidade do anunciante $a = 4$ conseguir, que é $\gamma^3\beta$. Ou seja, o lucro que ele tem nessa posição é menor do que o que o anunciante $a = 3$ tem. Já que $\gamma\pi_3 < \pi_3$.

[7] Perceba que o lucro total esperado estando fora da lista é igual a probabilidade de nenhum dos listados atender o consumidor vezes a probabilidade de ser escolhido fora da lista, $1/(A-3)$, vezes a probabilidade do anunciante $a = 3$ ter o produto que o consumidor quer.

vão ter relevâncias muito próximas fazendo com que seja difícil satisfazer a condição que nenhum anunciante deve imitar a estratégia do outro, necessária para o equilíbrio separador.

Os autores mostram que existem diversos equilíbrios Bayesianos perfeitos dependendo das crenças dos consumidores:

Proposição 4. *i. Se a crença dos consumidores é que os anunciantes são mostrados na lista em ordem decrescente de relevância e são mais relevantes do que os que estão fora da lista, então o equilíbrio separador caracterizado no Teorema 4.2 é o único equilíbrio do modelo.*

ii. Se a crença dos consumidores é de que os anunciantes na lista estão em ordem aleatória de relevância, mas são mais relevantes que os vendedores fora da lista, então existe um equilíbrio parcialmente separador no qual os anunciantes 1, 2 e 3 fazem o mesmo lance e são ordenados aleatoriamente.

iii. Se os consumidores creem que os anunciantes na lista estão ordenados aleatoriamente e não são mais relevantes que os vendedores fora da lista, então existe um equilíbrio agregador em que todos os vendedores fazem lances $b_i = 0$.

A proposição 4, apesar de não cobrir todos os sistemas de crenças possíveis, parece tratar dos mais naturais. O equilíbrio agregador, apesar de teoricamente possível, não parece muito relevante já que ferramentas de pesquisa ganham receitas enormes com leilões de posição. Os outros dois equilíbrios parecem mais plausíveis. O primeiro equilíbrio implica que os consumidores busquem vendedores na lista de forma decrescente. No equilíbrio parcialmente separador os consumidores buscam na lista de forma aleatória.

4.3 Lucros e dividendos, receba duzentos

Nessa seção, mostramos a análise dos lucros e da eficiência de cada equilíbrio presentes em (CHEN; HE, 2011). Temos que no equilíbrio separador a receita da ferramenta de pesquisa é

$$\pi_E = b_2 + b_3 + b_4 = (1-\beta)\gamma^3\beta^2\pi_0 + \frac{(A-4)(1+2\gamma)+3\beta\gamma^3}{A-3}(1-\beta)(1-\gamma\beta)\gamma^2\beta\pi_0$$

Tratando o número de anunciantes A como uma variável contínua, temos que $\frac{\partial \pi_E}{\partial A} > 0$. Ou seja, quanto mais anunciantes maior será o lucro da ferramenta de pesquisa sob o equilíbrio separador. Acha-se o β ótimo fazendo $\lim_{A\to\infty} \frac{\partial \pi_E}{\partial \beta} = 0$. Daí acha-se que:

$$\hat{\beta}(\gamma) \equiv \frac{1}{6\gamma^2}(1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - \sqrt{4\gamma + 2\gamma^2 - 4\gamma^3 + 4\gamma^4 + 1})$$

O qual é decrescente em γ. Dessa forma, quando A é grande, π_E tem uma relação de U-invertido com β. Ou seja, essa relação é crescente para $\beta < \hat{\beta}(\gamma)$ e decrescente para $\beta > \hat{\beta}(\gamma)$.

Temos também que $\lim_{A\to\infty} \frac{\partial \pi_E}{\partial \gamma} > 0$ para $\beta, \gamma \in (0,1)$. Podemos usar γ como uma *proxy* para competição já que quanto maior γ mais os anunciantes são similares em termos de relevância. Dessa forma, quando A é grande o lucro da ferramenta de pesquisa aumenta com a competição. Quanto mais anunciantes com produtos semelhantes competem pelas posições limitadas eles terão que fazer lances mais altos para garantirem que participarão da lista de *links* patrocinados, beneficiando a ferramenta de pesquisa.

No equilíbrio parcialmente separador temos que o lucro da ferramenta de pesquisa será:

$$\pi_E^p = 3b = \left[\frac{\beta^2\gamma - 3\beta\gamma - 3\beta\gamma^2 - 3\beta + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^3 + 9}{3} - \frac{3(1-\beta)(1-\gamma\beta)(1-\gamma^2\beta)}{A-3}\right]\gamma^3\beta\pi_0$$

Tratando A como uma variável contínua temos que $\frac{\partial \pi_E^p}{\partial A} > 0$, assim como tínhamos em π_E. Entretanto, ao contrário de π_E, teremos que $\lim_{A\to\infty} \frac{\partial \pi_E^p}{\partial \beta} > 0$, ou seja, que π_p^E é monótona e crescente em β mostrando que no caso do equilíbrio parcialmente separador a ferramenta de pesquisa se beneficia de β ser o maior possível. Teremos também que π_E^p é monótona crescente em γ, ou seja, $\lim_{A\to\infty} \frac{\partial \pi_E^p}{\partial \gamma} > 0$ para $\beta, \gamma \in (0,1)$, assim como em π_E.

Comparando o lucro da ferramenta de pesquisa sob os dois equilíbrios teremos que:

$$\lim_{A\to\infty}(\pi_E - \pi_E^p) = \frac{1}{3}\left[3(1-\beta-\gamma) - \beta^2\gamma^2(\gamma^2+\gamma-5) - 3\beta\gamma(1+\gamma+\gamma^2)\right]\beta\gamma^2\pi_0$$

Portanto, o lucro será maior sob o equilíbrio separador para qualquer $\beta < 1$ se γ for suficientemente pequeno e será maior sob o equilíbrio parcialmente separador se γ for suficientemente grande.

Em outras palavras, temos que o lucro da ferramenta de pesquisa será maior sob o equilíbrio separador se as firmas forem substancialmente diferentes em termos de relevância. Por outro lado, a ferramenta de pesquisa pode ter mais lucro sob o equilíbrio parcialmente separador se a concorrência for maior. Os autores resumem a discussão acima na seguinte proposição:

Proposição 5. *i. Sob ambos os equilíbrios separador e pacialmente separador, o lucro da ferramenta de pesquisa π_E e π_E^p, respectivamente, é estritamente crescente no número de anunciantes A.*

ii. Sob o equilíbrio separador, quando A é grande, π_E é crescente na relevância β para $\beta \in (b_0, \hat{\beta}(\gamma)]$ e é decrescente em β para $\beta \in [\hat{\beta}(\gamma), 1)$.

iii. π_E^p é monótona crescente em β se A for grande.

iv. $\pi_E \geq \pi_E^p$ *se* γ *for pequeno e* A *grande.*

A intuição de i. é que quanto mais anunciantes existirem menor será a probabilidade de um anunciante ser escolhido na parte aleatória fora da lista. Portanto, participar fa lista valerá mais, fazendo com que os lances aumentem.

Em ii. é preciso notar que o aumento de β faz com que a primeira posição seja mais cobiçada. Entretanto, como a probabilidade do consumidor encontrar o que procura e realizar a compra no primeiro *link* aumenta, isso faz com que seja menos provável que ele precise procurar o produto nos *links* seguintes. O item ii. mostra exatamente o balanço entre esses dois efeitos.

Para entender a intuição de iii. é interessante lembrar que no equilíbrio parcialmente separador os anunciantes listados fazem o mesmo lance. Portanto, quanto maior o β deles mais eles estarão dispostos a pagar para ficar na lista e, assim, maior será o lucro da ferramenta de pesquisa.

Já em iv. lembre-se que um γ pequeno significa que os anunciantes serão muito diferentes em termos de relevância. Também tenha em mente que quanto menor for a relevância de um anunciante, menos ele estará disposto a pagar para ser listado e, portanto, menor será seu lance. Dessa forma, o quarto anunciante vai fazer um lance muito pequeno e como esse é o preço pago por todos os listado no equilíbrio parcialmente separador o lucro será maior no equilíbrio perfeitamente separador.

Os autores analisam a eficiência dos anúncios de *links* patrocinados observando como eles afetam os custos de busca do consumidor. As probabilidades de achar o produto desejado são β, $1-(1-\beta)(1-\gamma\beta)$ e $1-(1-\beta)(1-\gamma\beta)(1-\gamma^2\beta)$[8], no equilíbrio separador, e a cada procura o consumidor tem de incorrer nos custos t, $2t$ e $3t$, respectivamente.

No equilíbrio parcialmente separador, o consumidor tem a mesma probabilidade $1-(1-\beta)(1-\gamma\beta)(1-\gamma^2\beta)$ de achar o produto desejado ao procurar por todos os anunciantes listados, mas tem menos probabilidade de achar nos dois primeiros *links*.

Sem *links* patrocinados e com A grande, a probabilidade de achar o produto desejado em cada procura será aproximadamente $\gamma^3\beta$ e a probabilidade de achar com n buscas é de $1-(1-\gamma^3\beta)^n$.[9] Portanto, o tempo esperado de procura, ou o custo esperado de busca, é menor com *links* patrocinados.

Os autores também avaliam a eficiência desse tipo de anúncio observando como ele afeta o resultado esperado. O resultado esperado sob ambos os equilíbrios separadores

8 Essas são, respectivamente, as probabilidades de um consumidor encontrar o produto que procura na primeira busca, de encontrar o que procura na primeira posição, de encontrar na primeira ou na segunda posição e de encontrar em uma das três posições.

9 Na verdade, esse é um valor aproximado. Os autores mostram que a probabilidade de uma busca ser bem sucedida é $\frac{1}{m}[1+\gamma+\gamma^2+(m-3)\gamma^3]\beta \approx \gamma^3\beta$.

é:

$$q_h = [1 - (1-\beta)(1-\gamma\beta)(1-\gamma^2\beta)(1-\gamma^3\beta)][1-F(p^0)]$$

Que é a probabilidade do consumidor achar e comprar o produto desejado em uma das quatro buscas. Enquanto o resultado esperado sem os anúncios é aproximadamente:

$$q_l = [1-(1-\gamma^3\beta)^4][1-F(p^0)] < q_h$$

que também é a probabilidade do consumidor achar e comprar o produto em uma das quatro buscas. Perceba que o primeiro termo em colchetes é menor nessa equação.

Dessa forma, os autores concluem o seguinte:

Observação 1. Anúncios de *links* patrocinados levam a uma procura por consumidores mais eficiente e a uma utilidade maior. O equilíbrio separador normalmente gera maiores ganhos de bem-estar do que o equilíbrio parcialmente separador.

De acordo com essa análise as ferramentas de busca deveriam recrutar quantas firmas fosse possível para participarem do leilão de posição. Também pode ser dito que, caso o mercado suporte um equilíbrio perfeitamente separador, talvez seja ótimo para o lucro das ferramentas de pesquisa restringir a precisão das palavras-chave de forma que a relevância do primeiro vendedor não seja tão alta.

5 Consumidores mal informados

Athey e Ellison (2011) analisam os leilões de posição sob a ótica da economia da informação, incorporando consumidores no modelo e considerando taxas de cliques endógenas[1], diferentemente dos artigos seminais. A principal diferença com relação a (CHEN; HE, 2011) é que o modelo de Athey e Ellison (2011) considera informação incompleta, caso em que a qualidade, ou probabilidade de atender às necessidades do consumidor, não é conhecida pelos consumidores.

No modelo proposto nesse trabalho os consumidores têm uma necessidade e, para identificar as empresas que podem satisfazê-la, eles precisam usar uma ferramenta de pesquisa. Eles receberão um benefício de 1 se a sua necessidade for satisfeita, o que pode ser visto como achar o produto que ele tinha interesse em comprar.

O consumidor j pode clicar em qualquer um dos S *links* patrocinados a custo t_j.[2] Podemos ver esse custo como advindo de uma restrição de tempo ou como se os consumidores ficassem cansados de ficar procurando produtos dentro de vários *sites*. Os consumidores vão clicar de forma ótima até que sua necessidade seja atendida ou até que o benefício esperado de um clique adicional seja menor do que o custo t_j. É postulado que t_j tem uma distribuição não-atômica G com suporte $[0, 1]$.

Existem A anunciantes[3] e cada uma dessas firmas tem uma probabilidade q_a de atender as necessidades de um consumidor, somente cada firma conhece o seu q. Os autores postulam que essas probabilidades são tiradas de uma distribuição comum F não-atômica com suporte $[0, 1]$. Os anunciantes recebem um *payoff* de 1 se atenderem a necessidade de um consumidor e 0 caso contrário. Dessa forma, q_a pode ser interpretado como o valor esperado de um clique em um modelo de leilão de posição padrão.

Esse trabalho segue o modelo de leilão inglês generalizado desenvolvido por Edelman, Ostrovsky e Schwarz (2007), mas com vários períodos. Isso permitirá que se entenda melhor a estratégia que as firmas usam de sombrear[4] seu lance no leilão. Em cada período as firmas são tem que dizer à qual preço elas sairão do jogo caso ninguém mais tenha

[1] As taxas de cliques são uma função dos tipos de anunciantes tanto quanto das posições na lista. Nesse modelo, assim como em (CHEN; HE, 2011), as primeiras posições terão uma taxa de cliques maior apenas se os anunciantes forem ordenados por sua relevância.

[2] Perceba que nesse trabalho j indica o consumidor, diferentemente de (CHEN; HE, 2011) em que j indicia o número da consulta realizada.

[3] No artigo original temos $A = N$, $S = M$ e $s = t$. Em alguns momentos que os autores usaram k como índice, achamos conveniente substituir essa notação por a e reservar o índice k para os momentos em que ele significa o número de anunciantes restantes no leilão.

[4] Sombrear um lance seria fazer um lance menor do que o seu valor, que é a principal diferença entre os modelos VCG e SPG. Os incentivos e a intuição desse tipo de estratégia serão explicados mais a frente. No caso desse artigo sombrear é visto claramente como diminuir o seu lance depois do primeiro período do jogo, como será visto.

saído.[5]

No primeiro período são eliminadas as $A - S$ firmas com os menores lances.[6] No período seguinte, as firmas que permaneceram no leilão fazem lances e a firma com o menor lance é designada para a posição S e eliminada do jogo. O jogo segue sendo o anunciante com o lance mais baixo designado para a última posição restante no próximo período. Isso ocorre até que cada anunciante seja designado para uma posição.

Cada período será indexado pelo número de anunciantes restantes $k \in \{A, S-1, \ldots, 2\}$. Defini-se b^k como o lance do anunciante que foi eliminado no período k. No final do leilão, as firmas nas posições $1, 2. \ldots, S$ pagarão $b^2, b^3, \ldots, b^{S+1}$ respectivamente. Ou seja, como antes cada firma paga o mínimo necessário para se manter em sua posição.

5.1 Atualização Bayesiana e bem-estar

Supondo que o lance das firmas é monótono em q, vimos que existirá um equilíbrio em que as firmas serão listadas em ordem de qualidade.[7] Como antes, identificaremos as firmas por sua posição no leilão de posição sem perda de generalidade, de modo que $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_A$. Como os consumidores sabem dessa ordenação temos que a utilidade esperada de clicar no primeiro *link* será q_1.

Definem-se $z_1, \ldots, z_A$ como variáveis aleatórias de Bernoulli iguais a 1 com essas probabilidades, elas serão usadas para denominar a probabilidade de o *payoff* de uma busca pelo consumidor ter sido 0 ou 1. Defini-se $\bar{q}_a$ como a qualidade esperada do *site a* listado, dado que o consumidor não achou o que procurava nos $a-1$ anunciantes anteriores. Os autores, então, apresentam a proposição a seguir, que é semelhante ao lema 1.

Proposição 6. *Se as firmas estão ordenadas por qualidade em equilíbrio, então os consumidores começarão a sua busca pelo primeiro* link *descendo até que a sua necessidade seja atendida ou que a utilidade esperada do próximo* link *seja menor que o custo de procura,* $\bar{q}_a < t$, *e teremos que:*

$$\bar{q}_a = E(q_a | z_1 = \cdots = z_{a-1} = 0) = \frac{\int_0^1 x f_a(x) Prob\{z_1 = \cdots = z_{a-1} = 0 | q_a = x\} \mathrm{d}x}{\int_0^1 f_a(x) Prob\{z_1 = \ldots = z_{1-1} = 0 | q_a = x\} \mathrm{d}x}$$

E a firma com posição a receberá $(1 - q_1) \cdots (1 - q_{a-1}) G(\bar{q}_a)$ *cliques.*

Perceba que $\bar{q}_a$ é o quanto o consumidor espera que seja relevância do anunciante a. A cada procura o consumidor atualiza suas crenças sobre a relevância do próximo

[5] Athey e Ellison (2011) constroem o jogo dessa forma para evitar formalizar um processo de relógio em que as firmas reagem instantaneamente à saídas e especificar o que acontece se duas ou mais firmas nunca saem do jogo. Esses autores recomendam que se veja (DEMANGE; GALE; SOTOMAYOR, 1986) para mais informações sobre as especificações da forma extensiva de leilões de vários itens.

[6] Ou seja, todas as firmas que não conseguiram uma posição na lista de *links* patrocinados.

[7] Mostraremos mais a frente que esse modelo também possui um equilíbrio em que isso ocorre.

anunciante, dado que os anunciantes anteriores não vendiam o produto desejado. Para entender a quantidade esperada de cliques que cada anunciante receberá, perceba que ela é a probabilidade de nenhum dos anunciantes anteriores terem atendido ao desejo do consumidor vezes a probabilidade de o custo do consumidor ser menor do que a relevância esperada que ele tem sobre o anunciante a.

Para analisar os ganhos de bem-estar advindos da provisão de informação os autores comparam como seria a procura dos consumidores caso a lista de *links* patrocinados fosse ordenada aleatoriamente[8]. Nesse caso, os consumidores esperam que todos os sites tenham a mesma probabilidade $\bar{q}$ de atender a sua necessidade. É, então, apresentada a seguinte proposição:

Proposição 7. *Se os anúncios forem ordenados aleatoriamente os consumidores com custo de busca $t > \bar{q}$ não vão clicar em nenhum anúncio. Consumidores com custo de busca $t < \bar{q}$ irão visitar* sites *até que a sua necessidade seja atendida, ou até que acabem os anúncios. O excedente esperado do consumidor será:*

$$E(CS(s)) = \begin{cases} 0, & se \quad s \in [\bar{q}, 1] \\ (\bar{q} - 1)\frac{1-(1-\bar{q})^S}{q} & se \quad s \in [0, \bar{q}] \end{cases}$$

Se os anúncios forem ordenados de forma decrescente em qualidade, teremos:

$$E(CS(s)) = \begin{cases} 0, & se\ s \in [\bar{q}_1, 1] \\ \bar{q}_1 - t, & se\ s \in [\bar{q}_2, \bar{q}_1] \\ \cdots & \cdots \\ (\bar{q}_1 - t) + (\bar{q}_2 - t)(1 - \bar{q}_1) + \cdots & \\ +(\bar{q}_a - t)\Pi_{j=1}^{a-1}(1 - \bar{q}_j), & se\ s \in [\bar{q}_{a+1}, \bar{q}_a] \end{cases}$$

Identificam-se os ganhos de bem-estar ao comparar as duas expressões. Os consumidores que têm custo $t \in [\bar{q}, \bar{q}_1]$ só ganham utilidade se houver uma lista ordenada[9], pois seus custo de procura são maiores do que o benefício esperado de procurar em um site. Isso acontece porque a qualidade dos *links* no topo da lista faz a procura valer a pena, o que não ocorre na lista desordenada.

Os consumidores que têm baixo custo de procura também ganham com a lista ordenada por achar o que procuram em menos tempo. Isso fica claro no caso em que o número de anunciantes A é grande. Nesse caso, o excedente do consumidor é aproximada-

[8] Note que Athey e Ellison (2011) consideram o caso de os *links* da lista serem ordenados aleatoriamente para a comparação de bem-estar, diferentemente de Chen e He (2011), que usam o caso de não haver uma lista de *links* patrocinados para a comparação.

[9] Tenha em mente que o valor de $\bar{q}_1$ é sempre maior que $\bar{q}$, já que $\bar{q}$ é uma média de todas as relevâncias dos anunciantes. E perceba que os consumidores com custos maiores que $\bar{q}_1$ não ganham nada com nenhuma lista, pois seu custo sempre maior do que a utilidade esperada da busca.

mente $1 - t$ com a lista ordenada[10] e aproximadamente $1 - \frac{t}{q}$ caso contrário. Isso ocorre, pois são necessárias aproximadamente $\frac{1}{q}$ buscas para achar o que se procura.

5.2 Analisando o equilíbrio

Para compreender o equilíbrio desse modelo, primeiro é preciso entender a estratégia dos anunciantes. Nesse jogo as firmas irão fazer lances tão grandes quanto seu valor para conseguir entrar na lista no primeiro período, mas eles irão diminuir seus lances nos períodos seguintes quando o leilão for para definir a ordenação. Os autores chamam essa prática de sombreamento.

Uma vez que a firma garantir sua entrada na lista, ela não irá querer ficar no leilão até que ele atinja o seu valor.[11] Suponha que k firmas permaneçam no leilão e que a firma $k+1$ saiu do leilão com o lance b_{k+1}. Uma firma sabe que irá receber $q - b_{k+1}$ por clique se ela sair enquanto o nível dos lances b se aproxima do valor q da firma. Se ela permanecer e ninguém sair, nada mudará. Entretanto, se outro anunciante sair em $q - \epsilon$, a firma analisada ficaria muito pior. Apesar de receber mais cliques, o seu *payoff* por clique será apenas $q - (q - \epsilon) = \epsilon$. Portanto, a firma deve sair antes que o lance chegue ao seu valor.[12]

Postula-se a partir de agora que os lances $b^*(k, b_{k+1}, q)$ são função do número de firmas restantes k, do lance feito pelo último anunciante a sair do leilão b_{k+1}[13] e da qualidade da firma, que só é conhecida por ela. Os autores supõem que o equilíbrio é de tal forma que os agentes serão indiferentes entre sair do leilão em $b^*(k, b_{k+1}, q)$ e permanecer até $b^*(k, b_{k+1}, q) + db$.

Os *payoffs* esperados da firma, caso ela seja a primeira ou a segunda a sair nesse intervalo de db, serão respectivamente:

$$E\left((1-q_1)(1-q_2)\cdots(1-q_{k-2})(1-q)|q_{k-1}=q\right)\dot{G}(\bar{q}_k)\dot{(}q-b_{k+1}) \tag{5.1}$$

$$E\left((1-q_1)(1-q_2)\cdots(1-q_{k-2})|q_{k-1}=q\right)\dot{G}(\bar{q}_{k-1})\dot{(}q-b^*) \tag{5.2}$$

O primeiro termo nas equações 5.1 e 5.2 representa a probabilidade de todos os *links* superiores não atenderem a necessidade do consumidor. O segundo é o termo da

10 Os autores afirmam que isso é verdade caso F tenha suporte total de modo que a maior probabilidade q esteja perto de 1.

11 É importante citar que a parte do leilão nesse modelo não é análoga á de (EDELMAN; OSTROVSKY; SCHWARZ, 2007). Isso acontece, pois as taxas de cliques são uma função do tipo dos anunciantes e das posições na lista. Apesar disso, a derivação do equilíbrio é similar à daquele trabalho.

12 Essa é a mesma intuição apresentada anteriormente na seção 1.1 para explicar porque os anunciantes não fazem lances iguais aos seus valores no leilão de posição.

13 Os autores notam que esses lances poderiam depender do histórico de lances de outra forma, como vimos em (EDELMAN; OSTROVSKY; SCHWARZ, 2007), mostrado seção 2.2.

demanda advinda da qualidade esperada.[14] O terceiro termo é o lucro pro clique.

Na equação 5.2 os dois primeiros termos são maiores, pois existem menos *links* acima, mostrando os dois motivos que fazem as posições superiores receberem mais cliques. Por um lado, as posições abaixo recebem menos cliques porque as posições acima atendem parte dos consumidores, isso é representado pelo primeiro termo que é maior em 5.2. Por outro lado, os consumidores com custos mais altos não chegam a procurar nas posições mais baixas, já que os anunciantes são ordenados por qualidade. Isso é mostrado por $G(\bar{q}_{k-1}) > G(\bar{q}_k)$.

Perceba que se $b^* > b_{k+1}$ então $(q - b_{k+1}) > (q - b^*)$, ou seja, o lucro por clique é menor quando o anunciante fica por cima. A igualdade das equações 5.1 e 5.2 acontecerá no caso em que $(q - b^*)$ for suficientemente menor[15] que $(q - b_{k+1})$, caso em que o número maior de cliques por estar uma posição acima for compensado por um lucro menor por cliques. Em equilíbrio, o anunciante fará o seu lance, ou sairá do leilão, quando ele for indiferente entre os dois casos. Isso é mostrado na equação a seguir:

$$G(\bar{q}_k)(1 - q)(q - b_{k+1}) = G(\bar{q}_{k-1})(q - b^*)$$

Os autores resolvem essa expressão para achar o b^* e apresentam a seguinte proposição:

Proposição 8. *O leilão possui um equilíbrio simétrico estritamente monótono de estratégias puras. Em particular, será um equilíbrio Bayesiano perfeito para as firmas que escolherem o ponto de saída de acordo com:*

$$b^*(k, b_{k+1}, q) = \begin{cases} q, & se \quad k > A \\ b_{k+1} + (q - b_{k+1})\left(1 - \frac{G(\bar{q}_k)}{G(\bar{q}_{k-1})}(1 - q)\right), & se \quad k \leq A \end{cases}$$

Nesse equilíbrio, os anunciantes fazem lances iguais ao seu valor verdadeiro até conseguirem entrar na lista, então eles começam a sombrear seus lances. Se q é próximo de 1 o sombreamento será menor do que se q for pequeno. Pode se perceber isso olhando para o caso em que $k \leq A$ na proposição, quando q tende a 1 aquela expressão tende a q.

Uma intuição parecida com essa é a de que os autores sombreiam menos seus lances quando estão disputando por posições superiores se, e somente se, $fracG(\bar{q}_k)G(\bar{q}_{k-1})$ for decrescente em k. Isso pode ser percebido melhor se reescrevermos a equação da proposição como $b^* = q - \frac{G(\bar{q}_k)}{G(\bar{q}_{k-1})}(1 - q)(q - b_{k+1})$.

Athey e Ellison (2011) ainda chegam a tratar de preços reservas e de leilões de posição com ponderações de qualidade, cuja modelagem básica foi apresentada na seção

[14] Lembre-se que G é a distribuição do custo t do consumidor. Portanto, $G(\bar{q}_k)$ é a probabilidade de um consumidor ter seu custo t ser menos do que a qualidade $\bar{q}_k$.

[15] Ou seja, que b^* for suficientemente maior que b_{k+1}.

1.5, com resultados muito interessantes devido à modelagem com busca do consumidor. Entretanto, não apresentaremos isso nesse trabalho.

Conclusão

Esse trabalho realizou uma breve introdução ao leilão de posição e a utilização da modelagem de busca do consumidor nesse tipo de mecanismo. Esses são leilões em que os participantes disputam posições ao invés de algum item específico. Isso faz com que esses leilões tenham características diferentes do leilão inglês com que estamos acostumados.

De fato, o leilão de posição tem maior semelhança com o leilão de segundo preço, em que o ganhador do leilão paga o segundo maior lance como preço do item sendo leiloado. O leilão de posição seria como um leilão de vários itens, em que vários objetos são ordenados e são vendidos pela ordem dos lances. A diferença é que são leiloadas posições em vez de objetos.

Os artigos analisados nesse trabalho permitem uma compreensão completa desse mecanismo e representam um primeiro passo para o estudo dessa nova área da economia. Varian (2007) introduz o assunto de forma intuitiva e de certa forma até didática. Ele contribui com a literatura por fornecer uma noção de equilíbrio mais ampla e por fazer uma comparação dos resultados do leilão de posição com os do mecanismo VCG.

O trabalho de Edelman, Ostrovsky e Schwarz (2007), apesar de apresentar semelhanças com o de Varian (2007), apresenta uma construção diferente do modelo e propõe o leilão inglês generalizado. Esse novo modelo permite que se compreendam melhor certos incentivos presentes no jogo e foi de grande importância em trabalhos subsequentes.

Edelman e Schwarz (2010) aprofundam a análise dos equilíbrios do leilão de segundo preço generalizado. Eles ponderam que o modelo desenvolvido até o momento, estático e de informação completa, é uma simplificação do jogo que acontece na realidade, que é dinâmico e não tem informação perfeita.

Com isso em mente, eles se utilizam do conceito de não contradição que permite eliminar os equilíbrios do modelo simplificado que não existem no modelo mais complexo, chegando à conclusão que apenas a menor receita de equilíbrio do leilão de posição é plausível. Essa que é igual a receita do leiloeiro no mecanismo VCG. Essa é uma das conclusões mais interessantes apresentadas nessa monografia, sendo bem embasado nos dois primeiros capítulos.

Os trabalhos de Chen e He (2011) e Athey e Ellison (2011) aplicam a modelagem de busca ao modelo de leilão de posição. Essa aplicação descreve o comportamento dos consumidores ao usarem as ferramentas de busca e permite que as taxas de clique das posições sejam endógenas. Isso significa que as primeiras posições receberão mais cliques caso os incentivos do jogo fizerem com que esse resultado seja alcançado e não apenas por que foi postulado que isso aconteceria.

Esses trabalhos contribuem de forma contundente à compreensão do leilão de posição. O estudo desse mecanismo é de interesse tanto da ferramenta de pesquisa, que procura desenhar o mecanismo de forma a aumentar sua receita, quanto dos anunciantes, que precisam compreender como melhor se comportar em um jogo relativamente complexo como esse.

Referências

ATHEY, S.; ELLISON, G. Position auctions with consumer search. *The Quarterly Journal of Economics*, Oxford University Press, v. 126, n. 3, p. pp. 1213–1270, 2011. ISSN 00335533. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/23015700>. Citado 6 vezes nas páginas 20, 47, 48, 49, 51 e 53.

CHEN, Y.; HE, C. Paid placement: Advertising and search on the internet. *The Economic Journal*, Wiley on behalf of the Royal Economic Society, v. 121, n. 556, p. pp. F309–F328, 2011. ISSN 00130133. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/41301345>. Citado 7 vezes nas páginas 37, 38, 39, 43, 47, 49 e 53.

DEMANGE, G.; GALE, D.; SOTOMAYOR, M. Multi-item auctions. *Journal of Political Economy*, The University of Chicago Press, v. 94, n. 4, p. pp. 863–872, 1986. ISSN 00223808. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1833206>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 48.

DIAMOND, P. A. A model of price adjustment. *Journal of Economic Theory*, v. 3, n. 2, p. 156 – 168, 1971. ISSN 0022-0531. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com-/science/article/pii/0022053171900135>. Citado na página 41.

EDELMAN, B.; OSTROVSKY, M.; SCHWARZ, M. Internet advertising and the generalized second-price auction: Selling billions of dollars worth of keywords. *The American Economic Review*, American Economic Association, v. 97, n. 1, p. pp. 242–259, 2007. ISSN 00028282. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/30034393>. Citado 8 vezes nas páginas 17, 20, 22, 25, 29, 47, 50 e 53.

EDELMAN, B.; SCHWARZ, M. Optimal auction design and equilibrium selection in sponsored search auctions. *The American Economic Review*, American Economic Association, v. 100, n. 2, p. pp. 597–602, 2010. ISSN 00028282. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/27805065>. Citado 3 vezes nas páginas 33, 53 e 61.

KRISHNA, V. *Auction Theory*. Elsevier Science, 2002. ISBN 9780080475967. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=QDnmDVfSyhUC>. Citado na página 34.

LEONARD, H. B. Elicitation of honest preferences for the assignment of individuals to positions. *Journal of Political Economy*, The University of Chicago Press, v. 91, n. 3, p. pp. 461–479, 1983. ISSN 00223808. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1837098>. Citado na página 25.

OSTROVSKY, M.; SCHWARZ, M. Reserve prices in internet advertising auctions: A field experiment. *Working paper*, 2009. Disponível em: <http://faculty-gsb.stanford.edu-/ostrovsky/>. Citado na página 35.

VARIAN, H. R. Position auctions. *International Journal of Industrial Organization*, v. 25, n. 6, p. 1163 – 1178, 2007. ISSN 0167-7187. Disponível em: <http://www-.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167718706001317>. Citado 10 vezes nas páginas 18, 19, 20, 22, 25, 29, 30, 38, 53 e 60.

VARIAN, H. R. Online ad auctions. *The American Economic Review*, American Economic Association, v. 99, n. 2, p. pp. 430–434, 2009. ISSN 00028282. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/25592436>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 25.

VICKREY, W. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of Finance*, Wiley for the American Finance Association, v. 16, n. 1, p. pp. 8–37, 1961. ISSN 00221082. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2977633>. Citado na página 31.

Apêndices

APÊNDICE A – Provas matemáticas

Nesse apêndice, apresentaremos algumas provas matemáticas de definições e propriedades apresentadas no texto. Todas as provas matemáticas aqui presentes foram retiradas dos artigos originais e são de autoria dos autores daqueles.

Prova da Propriedade 1. Pelas desigualdades de 1.3 temos

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_{S+1} - p_{S+1})x_{S+1} = 0$$

já que $x_{S+1} = 0$. □

Prova da Propriedade 2. Pela equação 1.4 da definição de Equilíbrio de Nash Simétrico temos

$$v_t(x_t - x_s) \geq p_t x_t - p_s x_s v_s(x_s - x_t) \qquad \geq p_s x_s - p_t x_t \tag{A.1}$$

Somando essas desigualdades teremos

$$(v_t - v_s)(x_t - x_s) \geq 0$$

que mostra que v_t e x_t devem ser ordenados da mesma forma. Ou seja, se $t > s$ temos que $(x_t - x_s) \leq 0 \Rightarrow (v_t - v_s) \leq 0$ □

Prova da Propriedade 3. Pela equação 1.3 da definição de Equilíbrio de Nash Simétrico temos

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_{s-1})x_{s-1}$$

que pode ser rearranjada da seguinte forma

$$p_{s-1}x_{s-1} \geq p_s x_s + v_s(x_{s-1} - x_s) > p_s x_s$$

que prova a primeira parte. Para provar a segunda parte escreve-se

$$p_{s-1}x_{s-1} \geq p_s x_s + v_s(x_{s-1} - x_s) > p_s x_s + p_s(x_{s-1} - x_s) = p_s x_{s-1}$$

Cancelando x_{s-1} vemos que $p_{s-1} \geq p_s$. Se $v_s > p_s$, a segunda desigualdade se torna estrita, o que prova a segunda parte da propriedade. □

Prova da Propriedade 4. Já que $p_{t-1} \geq p_t$,

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s - p_t)x_t \geq (v_s - p_{t-1})x_t$$

para todo s e t □

Prova da Propriedade 5. Varian (2007) fornece uma prova por exemplo. Suponha que as relações do ENS são validas para as posições 1 e 2 e para as posições 2 e 3, precisamos mostrar que elas são válidas para 1 e 3. Escrevendo a condição e usando o fato que $v_1 \geq v_2$,

$$v_1(x_1 - x_2) \geq p_1x_1 - p_2x_2$$
$$v_2(x_2 - x_3) \geq p_2x_2 - p_3x_3 \rightarrow v_1(x_2 - x_3) \geq p_2x_2 - p_3x_3$$

Somando a primeira e a última equação teremos,

$$v_1(x_1 - x_3) \geq p_1x_1 - p_3x_3$$

Como queríamos demonstrar. □

Agora mostramos o desenvolvimento feito em (VARIAN, 2007) que omitimos no capítulo 1.

Desenvolvimento da equação 1.5. Já que o agente na posição s não quer descer uma posição:

$$(v_s - p_s)x_s \geq (v_s p_{s+1})x_{s+1}$$

Já que o agente na posição $s+1$ não quer subir uma posição:

$$(v_{s+1} - p_{s+1})x_{s+1} \geq (v_{s+1} - p_s)x_s$$

Juntando essas duas desigualdades achamos

$$v_s(x_s x_{s+1}) + p_{s+1}x_{s+1} \geq p_s x_s \geq v_{s+1}(x_s - x_{s+1}) + p_{s+1}x_{s+1}$$

Lembrando que $p_s = b_{s+1}$, também podemos escrever essas desigualdades como:

$$v_{s-1}(x_{s-1} - x_s) + b_{s+1}x_s \geq b_s x_{s-1} \geq v_s(x_{s-1} - x_s) + b_{s+1}x_s \tag{A.2}$$

Definindo $\alpha_s \equiv x_s/x_{s-1} < 1$, temos outra forma de escrever essas desigualdades:

$$(1 - \alpha_s)v_{s-1} + \alpha_s b_{s+1} \geq b_s \geq (1 - \alpha_s)v_s + \alpha_s b_{s+1}$$

Para achar as cotas superior e inferior dos lances basta examinar a equação A.2. As recursões serão:

$$b_s^U x_{s-1} = v_{s-1}(x_{s-1} - x_s) + b_{s+1}x_s \tag{A.3}$$

$$b_s^L x_{s-1} = v_s(x_{s-1} - x_s) + b_{s+1}x_s \tag{A.4}$$

□

A prova a seguir é apresentada aqui como foi apresentada em (EDELMAN; SCHWARZ, 2010). A prova completa se encontra em um apêndice online daquele artigo. Entretanto, consideramos que essa prova, apesar de simples, contribui de forma suficiente para o entendimento do que foi apresentado aqui.

Esboço da prova da proposição 3. O anunciante n paga o preço reserva r. Uma mudança no preço reserva de $\Delta r = r^1 - r^0$ muda o pagamento do agente n por $x_n \Delta r$.

O anunciante $n-1$ paga por clique $p_{n-1} = b_n$. De acordo com o teorema 1, com o preço reserva r, o anunciante n faz o lance $b_n = v_n - (x_n/x_{n-1})(v_n - r)$. Então a mudança no preço reserva com que o pagamento do anunciante $n-1$ mude em

$$\begin{aligned}
\Delta p_{n-1} = \Delta b_n &= b_n^1 - b_n^0 \\
&= \left(v_n - \frac{x_n}{x_{n-1}}(v_n - r^1)\right) \\
&- \left(v_n - \frac{x_n}{x_{n-1}}(v_n - r^0)\right) \\
&= \frac{x_n}{x_{n-1}}\Delta r
\end{aligned}$$

O anunciante $n-1$ recebe x_{n-1} cliques, então o seu pagamento total muda em $x_{n-1}\Delta p_{n-1} = x_{n-1}(x_n/x_{n-1})\Delta r = x_n \Delta r$.

Resolvendo recursivamente para os anunciantes acima resulta em um cancelamento de termos idêntico em cada passo e, portanto, na mesma variação de $x_n \Delta r$ no pagamento de cada anunciante.

Agora considere o caso em que o novo preço reserva r^1 excede o valor dos j menores anunciantes. Esses anunciantes saem do leilão, por não conseguir atingir um lucro positivo. O anunciante $n-j$ fica com o papel de n na análise anterior. A mudança no pagamento de $n-j$ é irregular, mas o pagamento de cada outro anunciantes muda em $x_{n-j}\Delta r$. □

Índice