



Universidade de Brasília

IE - Departamento de Estatística
Estágio Supervisionado 2

Dependência Caudal em Cópulas de Lévy
Uma aplicação no mercado financeiro

Gabriela Guimarães Olinto

Orientadora: Profa. Dra. Cira E. G. Otiniano

Brasília
Novembro de 2013

Sumário

1	Introdução	5
2	Conceitos Preliminares	6
2.1	Função Característica	6
2.2	Divisibilidade infinita	6
2.3	Processos de Lévy	8
2.4	Medida de Salto e Medida de Lévy	8
2.5	A fórmula de Lévy-Khintchine	9
2.6	Processo de Poisson	10
2.6.1	Processo de Poisson Composto	11
2.7	Movimento Browniano	11
2.8	Processos de Variância Gama	13
3	Cópulas	14
3.1	Teorema de Sklar	15
3.2	Limites de Fréchet-Hoeffding	16
3.3	Cópulas e Variáveis Aleatórias	17
3.4	Transformada Integral	18
3.5	Derivadas de uma Cópula	19
3.6	Cópulas Arquimedianas	22
3.7	Medidas de Concordância	24
3.7.1	τ de Kendall	24
3.7.2	ρ de Spearman	25
3.8	Dependência Caudal	25
4	Cópulas de Lévy e Medida de dependência caudal com saltos	26
5	Estudo de simulação: Dependência Caudal em Cópulas de Lévy	32
6	Conclusão	38
7	Anexo	39

*Aos queridos André e Lucas que me fizeram
ver os problemas de uma maneira diferente.*

Resumo

Neste trabalho estudamos a teoria de cópulas associadas a vetores aleatórios, em particular o coeficiente de dependência caudal associado as cópulas de Clayton Lévy cujas componentes marginais exibem processos de Lévy com saltos. Tais modelos são relevantes no mercado financeiro para o cálculo de estimativas agregadas de perdas ou de retornos. Verificamos que o coeficiente de dependência caudal está estritamente relacionado com a medida dos pulos dos processos marginais. Apresentamos também resultados do estudo de simulação de processos de Lévy e da estimação do coeficiente caudal.

Palavras-chave: Dependência caudal, Cópulas de Lévy, Processos de Lévy.

1 Introdução

Não é difícil se convencer que a modelagem multivariada de alguns fenômenos financeiros é mais adequada que a modelagem univariada em cada um dos seus componentes. Em contrapartida a isso, a modelagem se torna mais complexa de ser construída. Este é um dos principais desafios enfrentados no cálculo de medidas de risco. Conjuntamente a isso, a agregação de medidas de valores extremos se torna eminente.

Neste caso a teoria de cópulas mostra-se uma excelente alternativa, uma vez que permite a criação de distribuições conjuntas multivariadas sem a necessidade de se supor qualquer tipo de restrição às distribuições marginais. Esta teoria permite também, modelar ora com mais parcimônia a correlação, ora com mais rigor as distribuições marginais dessas medidas.

Modelos de dados de finanças tipicamente exibem cauda pesada, em consequência a análise de uma medida de dependência caudal para modelos multivariados desse tipo de dados é de extrema importância. Na teoria de cópulas, essa medida é chamada de coeficiente de dependência caudal. À sombra disto, neste trabalho estudamos a relação entre a medida dos pulos dos processos marginais com o coeficiente de dependência caudal das cópula de Lévy, bem como a estimação desse coeficiente. Ele é função de uma cópula e permite a captura da dependência de saltos extremos em processos de Lévy. Corresponde à probabilidade de observar um grande salto de um componente do processo dado um grande salto simultâneo em outro componente. Seu papel em aplicações de gestão de risco é especialmente grande para pequenos horizontes de investimento, em que saltos individuais têm um grande impacto sobre os valores dos ativos.

Este relatório será organizado em 5 Capítulos. No Capítulo 2 apresentamos vários conceitos preliminares necessários para o entendimento do processo de Lévy. Já no Capítulo 3 discutimos vários aspectos da teoria de cópulas para o caso bidimensional. Como os principais teoremas, medidas de concordância e a definição de dependência caudal. No Capítulo 4 a cópula de Clayton Lévy foi apresentada e o coeficiente de dependência caudal teórico foram discutidos. Para finalizar, no Capítulo 5 um estudo de simulação foi feito, utilizando os conceitos apresentados.

2 Conceitos Preliminares

2.1 Função Característica

A função característica de uma variável aleatória X (veja Hoel, Port, Stone [7]) é o mapeamento $\Phi_t : \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\phi_x(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathfrak{R}} e^{itX} f(x) dx, \quad -\infty < t < \infty$$

em que $i = \sqrt{-1}$ e $f(x)$ é a função densidade (massa) de probabilidade de X e Φ_t é contínua e positiva definida. De fato um famoso teorema de Bochner fala que todo mapeamento positivo definido de \mathfrak{R}^d para \mathbb{C} é uma transformada de Fourier de medidas definidas no \mathfrak{R}^d . A função característica possui uma vantagem sobre a função geratriz de momentos pelo fato dela ser definida para todo $t \in \mathfrak{R}$. A função característica possui as seguintes propriedades:

1. $\phi_X(0) = 1$
2. $|\phi_X(t)| < 1$
3. A função característica exerce uma relação biunívoca com a função de distribuição de uma variável aleatória X .
4. Propriedade da convolução: Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes, então:

$$\phi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX})E(e^{itY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t), \quad t \in \mathfrak{R}$$

A propriedade 4 pode ser estendida para soma de um número finito.

2.2 Divisibilidade infinita

X é infinitamente divisível (veja Meyer [10]) se cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma variável aleatória $X^{(1/n)}$ tal que:

$$\phi_X(t) = (\phi_{X^{1/n}}(t))^n$$

para todo $t \in \mathbb{R}^d$. Ou seja, essa medida de probabilidade pode ser decomposta na soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, para algum número natural n .

Muitas distribuições são infinitamente divisíveis, como a distribuição Normal, Poisson, t-Student, Qui-quadrado, dentre outras.

Exemplo 2.2.1

Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição Normal com média μ e variância σ^2 , temos que sua função característica é dada por:

$$\phi_X(t) = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Rearranjando temos:

$$\phi_X(t) = \exp\left[n\left(it\frac{\mu}{n} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)\right] = \left[\exp\left(it\frac{\mu}{n} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)\right]^n = (\phi_{X^{1/n}}(t))^n$$

Logo pelo teorema de divisibilidade infinita, $X^{(1/n)}$ segue uma distribuição Normal com média μ/n e variância σ^2/n .

Exemplo 2.2.2

Seja X uma variável aleatória que segue uma $Poisson(\lambda)$, temos que sua função característica é dada por:

$$\phi_X(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)]$$

Reescrevendo temos:

$$\phi_X(t) = \exp\left[\frac{n\lambda}{n}(e^{it} - 1)\right] = \exp\left[\frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\right]^n = (\phi_{X^{1/n}}(t))^n$$

Logo pelo teorema de divisibilidade infinita, $X^{(1/n)}$ segue uma $Poisson(\frac{\lambda}{n})$.

2.3 Processos de Lévy

Seja $L = (L_t, t \geq 0)$ um processo estocástico definido em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Dizemos que o processo L possui incrementos independentes, se para cada $L_t - L_s$ e L_t são independentes para qualquer $0 \leq s < t \leq T$ e que possui incrementos estacionários para todo $s, t \geq 0$ a distribuição $L_{(t+s)} - L_t$ não depende de t . Com isso dizemos que X é um processo de Lévy (veja Applebaum [1]) se:

1. $L_0 = 0$
2. L possui incrementos estacionários e independentes.
3. L é estocásticamente contínua, isto é, para todo $a > 0$ e para todo $t \geq 0$.

$$\lim_{t \rightarrow s} P(|L_t - L_s| > a) = 0$$

Note que os axiomas (1), (2) e (3) mostrados acima tem condição equivalente

$$\lim_{t \rightarrow s} P(|X(t)| > a) = 0$$

para todo $a > 0$.

Observação: Considere um processo de Lévy $L = (L_t)_{t \geq 0}$, usando o fato de que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $t > 0$,

$$L = L_{\frac{t}{n}} + \left(L_{\frac{2t}{n}} - L_{\frac{t}{n}} \right) + \dots + \left(L_t - L_{\frac{(n-1)t}{n}} \right)$$

Usando os axiomas (1), (2) e (3) mostrados nesta, podemos concluir que a variável aleatória L_t é infinitamente divisível.

2.4 Medida de Salto e Medida de Lévy

Para todo processo càdlàg (do francês, continua à direita, limite à esquerda) $\{X_t\}_{t \geq 0}$ com valores em \mathfrak{R}^d faz sentido definirmos $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$. A medida de contagem:

$$J_X(B) = \{\Delta X_t \neq 0, (t, \Delta X_t) \in B\}$$

para $B \in \mathcal{B}([0, \infty) \times \mathfrak{R}^d)$, é denominada medida de salto de X . Aqui \mathcal{B} denota os Borelianos.

Seja $\{X_t\}_{t \geq 0}$ um processo de Lévy em \mathfrak{R}^d . Definimos a medida v em \mathfrak{R}^d , para $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})$ por:

$$v(A) = E[J_X([0, 1] \times A)]$$

como sendo a medida de Lévy de X . Esta medida pode ser interpretada como a quantidade média do número de saltos com dimensões em A , em uma unidade de tempo. Para mais detalhes, veja Tankov e Cont [13].

2.5 A fórmula de Lévy-Khintchine

Teorema 2.5.1

A densidade $f(x)$ de uma variável aleatória X é infinitamente divisível se, e somente se, existe um tripé (b, c, v) com $b \in \mathfrak{R}$, $c \in \mathfrak{R}_+$ e uma medida satisfazendo $v(\{0\}) = 0$ e $\int_{\mathfrak{R}} \min(1, x^2)v(dx) < \infty$, tal que:

$$E(e^{itX}) = \exp \left[ibt - \frac{t^2c}{2} + \int_{\mathfrak{R}} (e^{itx} - 1 - itx I_{|x|<1})v(dx) \right]$$

onde $I_A(x)$ é a função indicadora de x . O tripé (b, c, v) é chamado tripé característico e o expoente:

$$\psi_X(u) = ibt - \frac{t^2c}{2} + \int_{\mathfrak{R}} (e^{itx} - 1 - itx I_{|x|<1})v(dx)$$

é chamado de expoente característico. A medida v é chamada de medida de Lévy de X . Se a medida de Lévy é da forma $v(dx) = u(x)dx$, então $u(x)$ é a função densidade de Lévy.

Nota-se então que um processo de Lévy consiste de 3 partes independentes: uma parte linear e determinística (a), uma parte Browniana, ou Gaussiana, ou ainda coeficiente de difusão (b), e uma parte de saltos puros (v). Portanto a medida $v(dx)$ indica como os saltos ocorrem. Veja Tankov Cont [13].

Exemplo 2.5.1

Nesse exemplo ilustraremos a aplicação da fórmula Lévy-Khintchine para mostrar que a distribuição Normal é infinitamente divisível. Temos que a função característica de uma variável aleatória X com distribuição $Normal(\mu, \sigma^2)$ é dada por:

$$\phi_X(t) = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Comparando com a fórmula de Lévy-Khintchine temos que a distribuição normal tem tripé característico definido como $(\mu, \sigma^2, 0)$ portanto satisfaz o teorema 3.5.1 e com isso concluímos que a distribuição normal é infinitamente divisível.

2.6 Processo de Poisson

Um processo de Poisson $N = (N(t), t \geq 0)$ com taxa $\lambda > 0$ é um processo estocástico com espaço de estados $S = 0, 1, 2, \dots$ (veja Ross [12]). Além disso, satisfaz as propriedades:

1. $N(0) = 0$.
2. N possui incrementos estacionários e independentes.

A distribuição de probabilidade de $N(t)$ é dada por:

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

Mostramos também no Exemplo 1.2.2. que a distribuição de Poisson é infinitamente divisível e, portanto um processo de Poisson é um caso particular de um processo de Lévy com tripé característico $(0, 0, \lambda\delta_1)$ onde δ_1 é massa de Dirac concentrada em 1. Com isso o processo de Poisson é um processo de salto puro, onde o tamanho desses saltos é 1.

2.6.1 Processo de Poisson Composto

Um processo composto de Poisson com intensidade $\lambda > 0$ e tamanho do salto com distribuição f é um processo estocástico X_t definido como:

$$X_t = \sum_{i=0}^{N_t} Y_i,$$

onde os tamanhos dos saltos Y_i são i.i.d. com distribuição f e $\{Y_i\}_{i \geq 0}$. Um processo de Poisson pode ser expresso como um processo composto de Poisson em \mathfrak{R} tal que $Y_1 = 1$. Isto explica a origem do processo composto de Poisson na definição acima. Processos compostos de Poisson são processos de Lévy e, eles são os únicos processos de Lévy que possuem trajetórias observadas constantes por partes.

2.7 Movimento Browniano

Um processo estocástico $X(t), t \geq 0$ é dito um movimento Browniano se satisfaz as propriedades:

1. $X(0) = 0$.
2. X possui incrementos estacionários e independentes.
3. Se para todo $t > 0$, $X(t)$ é normalmente distribuído com média 0 e variância $\sigma^2 t$.

Portanto como mostrado no exemplo 1.2.1 a distribuição normal é infinitamente divisível e com isso tal processo define um processo de Lévy com tripé característico definido por $(0, \sigma^2 t, 0)$.

Exemplo 2.7.1

O processo de Lévy desempenha um importante papel na física (turbulência, resfriamento a laser), na engenharia (telecomunicações, filas, barragem), nas atuárias (seguro de risco), dentre outras. O exemplo a seguir (veja Böttcher [2]) foi obtido através de uma simulação computacional no software R, que mostra as várias possibilidades de comportamento de um processo de Lévy (o código também pode ser encontrado em Böttcher [2]) que combina os seguintes processos:

- Movimento Browniano de $(-\infty, -6)$
- Processo de Poisson de $(-4, 4)$
- Processo Cauchy de $(6, \infty)$

Esse processo é obtido definindo o processo de Lévy com o seguinte expoente característico:

$$\psi_X(u) = a_1(x) \frac{|u|^2}{2} + a_2(x)(1 - e^{iu}) + a_3(x)|u|$$

Em que,

$$a_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 6 \\ 1 - \frac{x+6}{2}, & \text{se } x \in (-6, -4) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$a_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-4, 4] \\ \frac{x+6}{2}, & \text{se } x \in [-6, -4] \\ 1 - \frac{x-4}{2}, & \text{se } x \in [4, 6] \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$a_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 6 \\ \frac{x-4}{2}, & \text{se } x \in [4, 6] \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Essa função resulta no processo de Feller [4] apresentado na Figura 1.

Pode-se perceber que, no intervalo próximo à origem, o processo se comporta como um processo de Poisson, abaixo de -6 se comporta como Movimento Browniano, e acima de 6 apresenta saltos conforme uma distribuição Cauchy. Isso mostra como esse tipo de processo pode se ajustar a diferentes comportamentos.

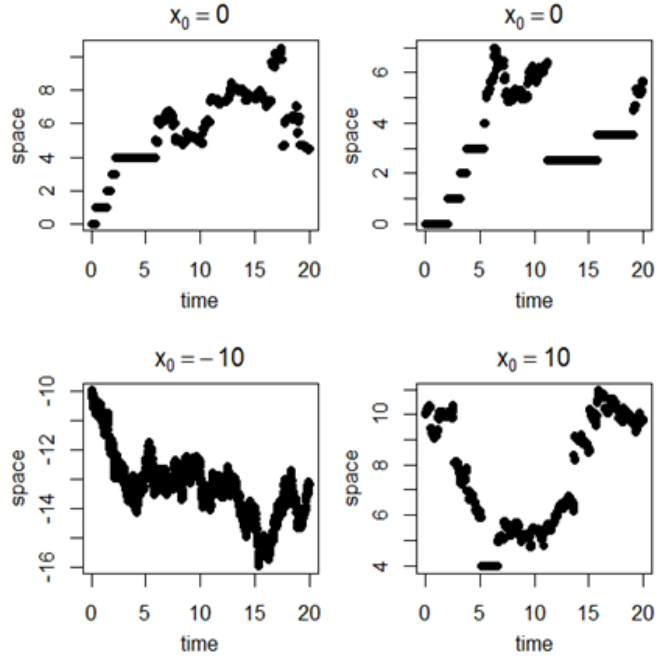


Figura 1: Processo de Feller Browniano-Poisson-Cauchy

2.8 Processos de Variância Gama

Processos de Variância Gama podem ser definidos de várias formas. Claramente, pode ser definido em termos do tripé característico. No entanto, também pode ser definido em termos de outro processo estocástico. Uma forma de fazer isto é através da diferença entre dois processos Gama.

Como foi mostrado por Schoutens [14], o processo $Gama(a,b)$ é um processo de Lévy de saltos puros, ou seja, não possui o componente Browniano em que o tamanho de um salto positivo em um intervalo de tempo (Δt) pequeno segue uma distribuição $Gama(a\Delta t, b)$. Os dois processos Gamas utilizados para gerar um processo de Variância Gama possuem o mesmo parâmetro a mas diferentes parâmetros b . Quando o processo de Variância Gama é definido dessa forma, podemos escrevê-lo como $VG(C, G, M)$ que é equivalente à $G_{(1)} - G_{(2)}$ em que $G_{(1)}$ é um processo $Gama(C, M)$ e $G_{(2)}$ é um processo $Gama(C, G)$.

Assim, nesta parametrização, o tripé característico pode ser definido como

$$\begin{aligned}
 b &= C(MG)^{-1}(G(\exp(-M) - 1) - M(\exp(-G) - 1)) \\
 c &= 0 \\
 v &= \frac{C}{|x|}(\exp(Gx)1_{x<0} + \exp(-Mx)1_{x>0})
 \end{aligned}$$

assim, podemos ver que o processo de Variância Gama é um processo de saltos puros, com ausência do componente Browniano.

3 Cópulas

Cópulas são funções que ligam funções de distribuições multivariadas a suas marginais. Equivalentemente podemos dizer que cópulas são funções de distribuições cujas marginais são uniformes no intervalo $[0, 1]$. Elas nos permitem criar distribuições multivariadas que possuam marginais com distribuições diferentes. Isto é de grande valia em finanças uma vez que suas séries podem apresentar assimetria e curtose nos mais diversos graus.

Assim, suponha que dispomos de duas variáveis aleatórias X e Y , com função de distribuição $F(x) = P(X \leq x)$ e $G(y) = P(Y \leq y)$, respectivamente, e função de distribuição conjunta $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Dado um ponto $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$ podemos associar a ele três números: $F(x)$, $G(y)$ e $H(x, y)$. Note que cada um desses números pertence ao intervalo $[0, 1]$. Assim para cada ponto $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$, associamos um par $(F(x), G(y)) \in [0, 1] \times [0, 1]$, e a este par ordenado corresponde um número $H(x, y) \in [0, 1]$.

Essa correspondência que, para cada par ordenado de valores das funções de distribuição individuais, atribui o valor da distribuição conjunta é de fato uma função a qual chamamos de cópula.

Além disso, para este caso bivariado podemos dizer que se $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ então $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$:

- $C(0, y) = 0$ e $C(x, 0) = 0$
- $C(1, y) = y$ e $C(x, 1) = x$

- C é crescente, isto é

$$\forall x_1 \leq x_2 \text{ e } y_1 \leq y_2 \in [0, 1], C(x_2, y_2) - C(x_1, y_2) - C(x_2, y_1) + C(x_1, y_1) \geq 0$$

3.1 Teorema de Sklar

O teorema de Sklar é resultado chave na teoria de cópulas e é responsável pela maioria das aplicações das cópulas à estatística. Para enunciá-lo tomaremos o caso bivariado com (Ω, \mathcal{F}, P) em que $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, como mostrado a seguir.

Teorema 3.1.1

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com função de distribuição F e G , respectivamente, e distribuição conjunta H . Então existe uma cópula C tal que,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}$. Se F e G são contínuas, então C é única; caso contrário, C é unicamente determinada em $Im(F) \times Im(G)$. Reciprocamente, se C é uma cópula e F e G são funções de distribuição, então a função H é uma função de distribuição conjunta com marginais F e G (veja Nelsen [11]).

A partir deste teorema vemos uma maneira de expressar uma função de distribuição conjunta em função de sua cópula e de suas marginais (estendível para o caso multivariado – veja Embrechts et al. [3]).

Definição 3.1.1

Seja $F: \mathfrak{R} \rightarrow I$ uma função de distribuição. Então, a quase-inversa ou inversa generalizada de F , $F^{(-1)}: I \rightarrow \mathfrak{R}$ é definida como

$$F^{(-1)}(x) = \begin{cases} \sup_{x \in \mathfrak{R}} \{F(x) = 0\}, & t = 0 \\ \inf_{x \in \mathfrak{R}} \{F(x) = 0\}, & t = 0 \end{cases}$$

Usando o conceito acima, obtemos o seguinte corolário de Sklar.

Corolário 3.1.1

Seja H uma função de distribuição conjunta contínua com marginais F e G . Sejam $F^{(-1)}$ e $G^{(-1)}$ as quase-inversas de F e G , respectivamente, e C a cópula associada a H , F e G como no Teorema de Sklar. Então, para todo $(u, v) \in I^2$,

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(u))$$

3.2 Limites de Fréchet-Hoeffding

Teorema 3.2.1

Seja C uma cópula qualquer e sejam W e M os limites inferior e superior de Fréchet-Hoeffding (veja Nelsen [11]), respectivamente. Então, para todo $(u, v) \in I^2$,

$$\begin{aligned} W(u, v) &\leq C(u, v) \leq M(u, v) \\ \max(u + v - 1, 0) &\leq C(u, v) \leq \min(u, v) \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.1

Seja H a função de distribuição

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1-e^{-y})}{5+(x-5)e^{-y}}, & \text{se } (x, y) \in [0, 5] \times [0, \infty) \\ 1 - e^{-y}, & \text{se } (x, y) \in [5, \infty) \times [0, \infty) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

cujas funções marginais $F(x)$ e $G(y)$ são

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{5}, & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ 1, & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & \text{se } y \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

As quase-inversas de F e G são dadas por $F^{(-1)}(u) = 5u$ e $G^{(-1)}(v) = -\ln(1 - v)$, para todo $u, v \in I^2$. Substituindo isso no corolário de Sklar, obtemos a cópula

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}$$

Exemplo 3.2.2

Seja Φ a função de distribuição Normal $N(0, 1)$ dada por

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$$

e sejam C_1 e C_2 cópulas quaisquer e considere $\alpha \in I$ e a função C , definida em I^2 , dada por

$$C(u, v) = \alpha C_1(u, v) + (1 - \alpha) C_2(u, v)$$

Então pelo teorema de Sklar,

$$H(x, y) = \alpha \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2} dt \right\} + (1 - \alpha) \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2} dt - 1, 0 \right\}$$

é uma função de distribuição conjunta que não é normal bivariada e cujas marginais são $\Phi(x)$ e $\Phi(y)$.

3.3 Cópulas e Variáveis Aleatórias

Teorema 3.3.1

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com cópulas $C_{X,Y}$. Sejam f e g transformações estritamente monótonas em quase toda parte, então,

1. Se f é estritamente decrescente em quase toda a parte e g é estritamente crescente em quase toda a parte, então,

$$C_{f(X),g(X)}(u, v) = v - C_{X,Y}(1 - u, v)$$

2. Se f é estritamente crescente em quase toda a parte e g é estritamente decrescente em quase toda a parte, então,

$$C_{f(X),g(X)}(u, v) = u - C_{X,Y}(u, 1 - v)$$

3. Se f e g são estritamente decrescentes em quase toda a parte, então,

$$C_{f(X),g(X)}(u, v) = u + v - 1 + C_{X,Y}(1 - u, 1 - v)$$

Para mais detalhes veja Embrechts et al. [3]

3.4 Transformada Integral

Teorema 3.4.1

Seja X uma variável aleatória qualquer com distribuição F e seja $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Então,

1. Se X é contínua, temos $F(X) \sim \mathcal{U}[0, 1]$
2. $F^{(-1)}(U) \sim [0, 1]$
3. $F^{(-1)}(1 - U) \sim X$

Veja Meyer [10].

Teorema 3.4.2

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas. Então, X e Y são independentes se, e somente se, $C_{X,Y} = \Pi$

Teorema 3.4.3

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função distribuição F e G , respectivamente, e distribuição conjunta H . Então, X e Y tem cópula M se, e somente se, existem duas funções crescentes f e g e uma variável aleatória Z tais que $(X, Y) \stackrel{d}{=} (f(Z), g(Z))$.

Teorema 3.4.4

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função distribuição F e G , respectivamente, e distribuição conjunta H . Então, X e Y tem cópula W se, e somente se, existe uma função crescente f e uma função decrescente g e uma variável aleatória Z tais que $(X, Y) \stackrel{d}{=} (f(Z), g(Z))$.

Teorema 3.4.5

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função distribuição F e G , respectivamente, e distribuição conjunta H . Então, X e Y tem cópula W se, e somente se, existe uma função decrescente h , tal que $Y \stackrel{d}{=} h(X)$ quase certamente. Para mais detalhes dos teoremas desta seção veja Embrechts et al. [3].

3.5 Derivadas de uma Cópula

Considerando X e Y com distribuição F e G respectivamente distribuição conjunta H e cópula C , a definição de cópulas também pode ser vista como distribuições que possuem marginais $\mathcal{U}[0, 1]$ pois

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) \\ &= P(X \leq F^{(-1)}(u), Y \leq G^{(-1)}(v)) \\ &= P(F(X) \leq u, G(X) \leq v) \\ &= P(U_1 \leq u, U_2 \leq v) \end{aligned}$$

onde U_1 e U_2 são duas variáveis aleatórias com distribuição $\mathcal{U}[0, 1]$.

Dessa forma fica claro que podemos substituir o problema de caracterizar o tipo de dependência entre as variáveis aleatórias, pelo problema mais fácil de caracterizar cópula.

Usando a definição de probabilidade condicional e a equação descrita acima, podemos escrever para as v.a. U_1 e U_2 com distribuição $\mathcal{U}[0, 1]$ que

1. $P(U_1 \leq u, U_2 \geq v) = u - C(u, v)$
2. $P(U_1 \geq u, U_2 \leq v) = v - C(u, v)$
3. $P(U_1 \leq u | U_2 \leq v) = \frac{C(u, v)}{v}$

$$4. P(U_1 \leq u | U_2 \geq v) = \frac{v - C(u, v)}{1 - v}$$

Proposição 3.5.1

Sejam U_1 e U_2 duas variáveis aleatórias com distribuição $\mathcal{U}[0, 1]$. Então,

1. $\frac{\partial C_v(u, v)}{\partial v} = P(U_1 \leq u | U_2 = v)$
2. $\frac{\partial C_v(u, v)}{\partial u} = P(U_2 \leq v | U_1 = u)$

onde

$$P(U_1 \leq u | U_2 = v) = \lim_{h \rightarrow 0^+} P(U_1 \leq u | v \leq U_2 \leq v + h)$$

Definição 3.5.1

Seja C uma cópula qualquer. A densidade associada a ela é dada por

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Definição 3.5.2

Seja C uma cópula, defina

$$A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v c(x, y) dx dy$$

Então,

$$C(u, v) = A_C(u, v) + S_C(u, v)$$

onde $S_C(u, v) = C(u, v)$. A função $A_C(u, v)$ é chamada componente absolutamente contínua da cópula C e $S_C(u, v)$ é chamada componente singular de C .

Exemplo 3.5.1

Considere a família de cópulas dada por

$$C_\theta(u, v) = uv \exp\{-\theta \ln(u) \ln(v)\}$$

onde $\theta \in [0, 1]$. Esta é a família Gumbel-Bernett de cópulas. Esta família é composta apenas de cópulas absolutamente contínuas. De fato, como $C_\theta(u, v)$ dada pode ser reescrita como

$$C_\theta(u, v) = vu^{1-\theta \ln(v)}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{dC_\theta(u, v)}{du} &= [1 - \theta \ln(v)] vu^{-\theta \ln(v)} \\ \frac{d^2 C_\theta(u, v)}{dv du} &= \{1 - \theta [1 + \ln(v) + \ln(u) (1 - \theta \ln(v))]\} u^{-\theta \ln(v)} \end{aligned}$$

Assim, a parte absolutamente contínua da cópula $C_\theta(u, v)$ é dada por

$$\begin{aligned} A_{C_\theta} &= \int_0^u \int_0^v c(x, y) dx dy \\ &= \int_0^u \int_0^v \{1 - \theta [1 + \ln(y) + \ln(x)(1 - \theta \ln(y))]\} x^{-\theta \ln(y)} dx dy \\ &= \int_0^u [1 - \theta \ln(x)] x^{1-\theta \ln(y)} dy \\ &= v \exp\{[1 - \theta \ln(v)] \ln(x)\} \Big|_0^u \\ &= uv \exp\{-\theta \ln(u) \ln(v)\} \end{aligned}$$

Isto prova que C_θ é absolutamente contínua.

Proposição 3.5.2

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com cópula C , densidade de cópula c e função de distribuição F e G , respectivamente. Sejam f , g e h as funções de densidades marginais de X e Y e sua função de densidade conjunta, respectivamente. Então, para todo $x, y \in \mathfrak{R}$

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y)$$

¹Usamos a fórmula (Gradshteyn e Ryzhik, fórmula 2.723, página 234)

$$\int x^n \ln(x) dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]$$

²Lembrando que $\int a^{\ln(y)} dy = \frac{y^{1+\ln(a)}}{1+\ln(a)}$

Exemplo 3.5.2

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com distribuição logística univariada padrão. Sejam F , f , G e g as funções de distribuições e densidade de X e Y , respectivamente. Isto significa que,

$$X \sim \begin{cases} F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \\ f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \end{cases}, \quad Y \sim \begin{cases} F(y) = \frac{1}{1+e^{-y}} \\ f(y) = \frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2} \end{cases}$$

Supondo que X e Y tenham cópula $C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$. Derivando em relação a u e a v obtemos,

$$c(u, v) = \frac{2uv}{(u + v - uv)^3}$$

Dessa forma, após algumas simplificações, a densidade conjunta de X e Y é dada por

$$\begin{aligned} h(x, y) &= c(F(x), G(y))f(x)g(y) \\ &= \left(\frac{2(1 + e^{-x})^2(1 + e^{-y})^2}{(1 + e^{-x} + e^{-y})^3} \right) \left(\frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \right) \left(\frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})^2} \right) \\ &= \frac{2e^{-x-y}}{(1 + e^{-x} + e^{-y})^3} \end{aligned}$$

3.6 Cópulas Arquimedianas

A Classe das cópulas Arquimedianas abrange uma grande variedade de estruturas de dependência, incluindo estruturas próprias de estudos financeiros. Algumas questões em finanças exigem modelos que permitem uma forte dependência entre perdas ou ganhos extremos. Em particular, as cópulas Arquimedianas podem assumir dependência caudal assimétrica.

Em estudos financeiros um aspecto importante a ser analisado é a dependência caudal. Dependência caudal inferior e superior entre dois mercados financeiros existe quando a probabilidade de valores conjuntos negativos ou positivos em eventos extremos é maior que a que poderia ser prevista a partir das distribuições marginais.

Recentes estudos empíricos mostram que períodos de turbulência e calma em finanças são caracterizados por diferentes níveis de dependência caudal, sendo a dependência mais forte sobre a cauda inferior do que na cauda superior.

As cópulas Arquimedianas podem ser construídas facilmente e a forma fechada para sua expressão é simples. Estas facilidades se devem ao fato da representação da cópula Arquimediana permitir reduzir o estudo de cópula multivariada ao estudo de uma função univariada denotada por gerador de uma cópula Arquimediana ϕ .

Uma grande variedade de famílias paramétricas de cópulas pertence a classe das cópulas Arquimedianas. Nelsen [11] apresenta uma lista extensa com as famílias de cópulas Arquimedianas mais comuns. Por exemplo a família de Gumbel apresenta dependência caudal superior e a família de Clayton apresenta dependência caudal inferior. A seguir estas funções são apresentadas com mais detalhes.

Proposição 3.6.1

Seja $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ uma função contínua estritamente crescente, então,

$$C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$$

é uma cópula se e somente se ϕ for convexa e $\phi(0) = 1$.

A função ϕ é denominada gerador da cópula de Arquimedes. Se tomarmos $\phi(t) = (-\ln t)^\theta$ temos a família Gumbel de cópulas:

$$C_\theta(x, y) = \exp \left\{ - \left[(-\ln x)^\theta + (-\ln y)^\theta \right] \right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

Se tomarmos $\phi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$ temos a família Clayton de cópulas que é uma família determinada por apenas um parâmetro:

$$C_\theta(x, y) = (x^{-\theta} + y^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta > 0$$

Ela inclui cópulas tais como de dependência completa ou independência completa, dadas a seguir respectivamente:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta(x, y) = \min(u, v) = M(u, v)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(x, y) = uv = \Pi$$

3.7 Medidas de Concordância

Sejam (x_i, y_i) e (x_j, y_j) duas observações de um par de variáveis aleatórias (X, Y) . Diremos que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordantes se $(x_i, y_i)(x_j, y_j) > 0$. Isto é, se $x_i < x_j$ e $y_i < y_j$ ou se $x_i > x_j$ e $y_i > y_j$ então o par é concordante. Analogamente, se $(x_i, y_i)(x_j, y_j) < 0$, o par é discordante. Assim, de uma maneira informal, nós podemos ver que concordância descreve um par de variáveis aleatórias em que valores grande tendem a se associar a valores grande e valores pequenos a se associar a valores pequenos.

3.7.1 τ de Kendall

τ de Kendall é uma medida de associação entre duas variáveis. Ela é definida em termos da concordância. Seja $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ uma amostra de n observações de (X, Y) , um par de variáveis aleatórias. Denote c o número de pares concordantes das observações (x_i, y_i) e (x_j, y_j) com $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ e d o número de pares discordantes. Assim, o τ de Kendall é definido por:

$$\tau = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}}$$

A versão popular do τ Kendall para um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas com a função de distribuição conjunta H é definida como a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância por um par de observações (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , que é escolhido aleatoriamente a partir da amostra:

$$\tau = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0)$$

Podemos demonstrar (veja Nelsen [11]) que para qualquer par de variáveis aleatórias contínuas, o τ Kendall pode ser escrito da forma:

$$\tau_C = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 = 4E[C(U, V)] - 1$$

onde (U, V) é uma cópula de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas em $[0, 1]$.

Note que τ só depende da cópula. Logo, essa expressão de τ é uma consequência do teorema de Sklar.

3.7.2 ρ de Spearman

O ρ de Spearman é um coeficiente de correlação não paramétrico e é também baseado em concordância e discordância.

Sejam (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) três vetores independentes com distribuição conjunta comum H . A versão populacional do ρ de Spearman é definida como sendo proporcional à probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância dos dois vetores (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , que têm as mesmas marginais, mas tem uma função de distribuição de H , de forma que os componentes do outro são independentes:

$$\rho = 3(P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0))$$

O ρ de Spearman também pode ser reescrito em termo de cópulas:

$$\rho_C = 12 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) \partial u \partial v - 3$$

3.8 Dependência Caudal

Dependência caudal descreve a tendência de duas variáveis aleatórias distribuídas em conjunto X e Y em mostrar valores extremos simultâneos. Como essa dependência pode estar na cauda superior ou inferior, existem coeficientes de dependência caudal superior λ_U e inferior λ_L para capturá-la no quadrante superior direito e no quadrante inferior esquerdo de $[0, 1]^2$.

Esses parâmetros de dependência caudal, podem ser definidos como:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(X > F^{-1}(u) | Y > G^{-1}(u))$$
$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(X < F^{-1}(u) | Y < G^{-1}(u))$$

considerando um par (X, Y) de variáveis aleatórias, com $H(x, y) = C(F(x), G(y))$.

Assim, pode-se mostrar que:

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u}$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}$$

Veja Grothe [6].

Se $\lambda_U = 0$ nós podemos dizer que C não tem dependência na cauda superior. Isto significa que se formos longe o suficiente na cauda superior da distribuição conjunta, eventos extremos parecem ocorrer de forma independente.

4 Cópulas de Lévy e Medida de dependência caudal com saltos

A partir de todas as definições mostradas nas seções e nos capítulos anteriores, podemos começar a escrever sobre a cópula de interesse neste trabalho: a cópula de Lévy. Estimativação, aplicações e mais detalhes ainda serão escritos na próxima etapa.

A dependência de processos de Lévy multivariados é determinada pela cópula Lévy cujo conceito foi introduzido por Kallsen e Tankov [8]. Da mesma forma que uma cópula probabilística acopla funções de distribuição marginais para a função de distribuição conjunta, a cópula de Lévy acopla as integrais caudais marginais para a integral caudal conjunta. No entanto, como a integral caudal não é uma função de distribuição probabilística, a definição de uma cópula de Lévy difere da definição de uma cópula probabilística. Em particular, este último não serve para acoplar as integrais caudais marginais para uma integral da caudal conjunta.

De acordo com Kallsen e Tankov [8], uma cópula de Lévy C é uma função $C : \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}$ com:

- $C(u_1, \dots, u_d) \neq \infty$ para $(u_1, \dots, u_d) \neq (\infty, \dots, \infty)$
- $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ se pelo menos um $u_i = 0$ para $i \in \{1, \dots, d\}$

- C é decrescente e as $[i]$ -ésimas marginais $C^{[i]}(u) = u$ para qualquer $i \in \{1, \dots, d\}$ e $u \in \mathfrak{R}$

Para todo \mathfrak{R}^d avaliado em um processo de Lévy, existe uma cópula de Lévy C tal que a integral caudal de X satisfaz

$$U((x_i)_{i \in I}) = C((U_i(x_i))_{i \in I})$$

para qualquer conjunto não vazio $I \subset \{1, \dots, d\}$ e para qualquer $(x_i)_{i \in I} \in (\mathfrak{R} \setminus \{0\})^I$.

Determinar todas as integrais caudais marginais, C , juntamente com $U_i, i = 1, \dots, d$ determina a medida de Lévy do processo. Seja C uma d -dimensional cópula de Lévy e $U_i, i = 1, \dots, d$ as integrais caudais de processos de Lévy com valor real. Existe um \mathfrak{R}^d avaliado em um processo de Lévy X cujos componentes têm integrais caudais U_1, \dots, U_d e cujas integrais marginais caudais satisfazem a equação acima, então, analogamente as cópulas probabilísticas, cópulas Lévy separam a dependência de salto de suas distribuições marginais. Note que, em contraste com as cópulas probabilísticas, as cópulas Lévy não podem ser interpretadas como funções de distribuição. Como a medida Lévy e a integral caudal podem ser infinitas no zero, elas não podem ser normalizadas para o intervalo $[0, 1]$.

Portanto, cópulas de Lévy podem ser computadas a partir de processos Lévy usando transformada integral. No entanto, este método não é muito útil porque não há muitos modelos de Lévy disponíveis. Assim uma alternativa para a construção dessas cópulas é a proposta a seguir.

Proposição 4.0.1

Seja ϕ uma função convexa estritamente decrescente $\phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, tal que $\phi(0) = \infty$ e $\phi(\infty) = 0$. Assim,

$$C^L(x, y) = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y))$$

define uma cópula de Lévy positiva bidimensional.

Para $\phi(u) = u^{-\theta}$ com $\theta > 0$, obtém-se a seguinte família paramétrica de cópulas de Lévy:

$$C^L(x, y) = (x^{-\theta} + y^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}},$$

que lembram a família de cópulas de Clayton, mostrada na Seção 3.6. Esta família também apresenta os casos limites de completa dependência ($\theta \rightarrow \infty$) e independência ($\theta \rightarrow 0$) como mostrado a seguir:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C^L_{\theta}(x, y) = \min(u, v) = M(u, v)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C^L_{\theta}(x, y) = uv = \Pi$$

Lema 4.0.1

Ao contrário das cópulas comuns, as cópulas de Lévy não são funções de distribuição, mas as suas derivadas têm uma interpretação probabilística interessante. Seja F uma cópula bidimensional positiva Lévy. Então, para quase todo $x \in [0, \infty]$, a função

$$F_x(u) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, u)$$

existe e é contínua para todo $u \in [0, \infty]$ fora de um conjunto contável. Além disso, é uma função de distribuição de uma variável aleatória positiva, isto é, é crescente e satisfaz $F_x(0) = 0$ e $F_x(\infty) = 1$.

Para extensões multivariadas veja Tankov Cont [13] e demonstrações detalhadas veja Grothe [6].

Este teorema mostra que F determina a forma do salto no segundo componente de um processo de Lévy condicionado ao tamanho do salto no primeiro. Isto é útil para simulação de processos de Lévy dependentes.

Proposição 4.0.2

Seja (X_t, Y_t) um processo Lévy bidimensional com saltos positivos, tendo integrais marginais caudais U_1 , U_2 e cópula de Lévy F . Seja ΔX_t e ΔY_t os tamanhos dos saltos dos dois componentes no tempo t . Então, se U_1 tem densidade não nula em x , $F_{U_1(x)}(y)$ é a função de distribuição de $U_2(\Delta Y_t)$ condicionada em $\Delta X_t = x$:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, u) = P(U_2(\Delta Y_t) \leq y | \Delta X_t = x)$$

Para introduzir a medida de salto com dependência na cauda, é necessária a noção de integral caudal. Um processo de Lévy, conforme enunciado na Seção 2.3, é totalmente caracterizados pelo tripé (b, c, ν) , como mostrado na Seção 2.5, em que para este caso b é um vetor constante, c é a matriz covariância e $\nu(A)$ é a medida de Lévy, como foi mostrado na seção 2.4, que é o número esperado de saltos por unidade de tempo com tamanhos de salto A . A dependência dos saltos de um processo de Lévy é determinada pela sua cópula Lévy. Assim, definimos integral caudal como:

$$U(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d \text{sgn}(x_i) \nu \left(\prod_{j=1}^d I(x_j) \right)$$

onde $I(x) := [x, \infty)$, para $x \geq 0$ e $I(x) = (-\infty, x)$ para $x < 0$ ($x \in \mathfrak{R}$). Para $i = 1, \dots, d$ definimos integral marginal caudal U_i como a integral caudal do processo de Lévy. Assim, para x_i positivo, $U_i(x_i)$ é o número esperado de saltos por unidade de tempo do salto com tamanhos maiores do que x_i .

Assim, o conceito de dependência caudal com salto, que se concentra em saltos extremos conjuntos desse processo, pode ser definido por quatro tipos de cenários: grandes saltos positivos (PP), grandes saltos negativos (NN), saltos negativo-positivo (NP) e positivo-negativo (PN), conforme definido e demonstrado por Grothe [6].

Definição 4.0.1

Coefficientes de dependência caudal com salto – Seja $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ um processo de Lévy bidimensional com integrais marginais de cauda U_1 e U_2 . Seja t o tempo do maior salto da componente em X_t , $t \in [0, 1]$. Se o limite existe, podemos definir o coeficiente de dependência caudal com saltos de grandes saltos positivos como:

$$\begin{aligned}\lambda_{PP} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P(\Delta Y_t > U_2^{-1}(u) | \Delta X_t > U_1^{-1}(u)) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P(0 < U_2(\Delta Y_t) < u | 0 < U_1(\Delta X_t) < u)\end{aligned}$$

onde $\Delta X_t := X_t - X_t^-$ e $\Delta Y_t := Y_t - Y_t^-$ denotam os tamanhos do salto dos primeiro e segundo componentes no tempo t , respectivamente. Analogamente, definimos λ_{NP} , λ_{PN} e λ_{NN} :

$$\begin{aligned}\lambda_{NP} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P(0 > U_2(\Delta Y_t) > -u | 0 < U_1(\Delta X_t) < u), \\ \lambda_{PN} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P(0 < U_2(\Delta Y_t) < u | 0 > U_1(\Delta X_t) > -u), \\ \lambda_{NN} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P(0 > U_2(\Delta Y_t) > -u | 0 > U_1(\Delta X_t) > u).\end{aligned}$$

Dessa forma, grandes saltos positivos dos processos de Lévy correspondem a pequenos valores positivos da integral marginal caudal U_i e grandes saltos negativos para absolutamente pequenos valores negativos. A interpretação dos coeficientes de dependência caudal com salto é análoga à interpretação dos coeficientes de dependência caudal. Por exemplo, λ_{PP} , assintoticamente, prevê a probabilidade de observar um grande salto positivo num componente, quando se observa um grande salto positivo no outro componente, em que ambos os tamanhos de salto referem-se a valores de integrais caudais positivos menores ou iguais a u . Os seguintes teorema de que os coeficientes de dependência caudal com salto são inteiramente determinadas pela cópula Lévy do processo, como mostrado em Grothe [6].

Teorema 4.0.1

Dependência caudal e cópula Lévy – Seja $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ um processo de Lévy bidimensional

com cópula Lévy C . Então, os quatro coeficientes de dependência caudal com saltos são determinados pela cópula de Lévy C da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lambda_{PP} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \\ \lambda_{NP} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(-u, u)}{-u} \\ \lambda_{PN} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, -u)}{-u} \\ \lambda_{NN} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(-u, -u)}{u}\end{aligned}$$

Para demonstração desse teorema veja Grothe [6].

Exemplo 4.0.1

Os coeficientes de dependência caudal com saltos para a cópula Clayton Lévy pode ser definida através de:

$$C(u, v) = (|u|^{-\theta} + |v|^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}} (\eta I_{uv \geq 0} - (1 - \eta) I_{uv < 0})$$

que foi introduzido por Kallsen e Tankov [8]. Aqui, $\theta > 0$ determina a dependência dos tamanhos de saltos absolutos onde maiores valores de θ correspondem a dependências mais fortes, ou seja, a intensidade do salto e $0 < \eta < 1$ determina os sinais dependência, conforme mostrado pelas indicadoras. Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned}\lambda_{PP} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (|u|^{-\theta} + |u|^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}} \eta = 2^{-\frac{1}{\theta}} \eta = \lambda_{NN} \\ \lambda_{NP} &= 2^{-\frac{1}{\theta}} (1 - \eta) = \lambda_{PN}\end{aligned}$$

5 Estudo de simulação: Dependência Caudal em Cópulas de Lévy

Nesta seção, vamos ilustrar o efeito da dependência caudal com saltos na distribuição de um processo de Lévy e demonstrar a relação de dependência caudal com saltos. Para isso, reproduziremos o exemplo financeiro, mostrado por Groethe [6], que consiste em um cenários da carteira de crédito. A carteira é bidimensional com os preços modelados por um processo de Lévy copulado por uma cópula Clayton Lévy. Os parâmetros são escolhidos de forma que as estruturas de variância-covariância das carteiras sejam as mesmas em ambos os cenários, indicando que as duas carteiras têm os mesmos processos de Lévy.

Os preços dos ativos na carteira A e B são modelados pelo processo de Lévy de variância gama, $X_t^{(1)}$ e $X_t^{(2)}$, introduzido por Madan Seneta [9]. Como os retornos de tais processos são de caudas pesadas, eles capturam certos fatos sobre retornos de ativos e, assim, sendo amplamente utilizados para a modelagem de processos financeiros. Além disso, como mostrado em Groethe [6], a medida de Lévy, $\nu(x)$, de um processos de Lévy com variância gama é dada por:

$$\nu(x) = \frac{c}{|x|} \exp(-\lambda_- |x|) 1_{x < 0} + \frac{c}{|x|} \exp(-\lambda_+ |x|) 1_{x > 0}$$

sendo $c = 1/k$ e

$$\lambda_{\pm} = \frac{\sqrt{\vartheta^2 + 2\sigma^2/k}}{\sigma^2} \mp \frac{\vartheta}{\sigma^2}$$

Para o caso analisado, considerando a unidade de tempo anual com 1920 dias úteis, sendo 12 meses, 4 semanas por mês, 5 dias por semana e 8 horas por dia, 160 preços foram simulados para cada ativo. Os parâmetros para os processo $X_t^{(1)}$ e $X_t^{(2)}$ foram $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(2)} = -0,2$, $k^{(1)} = k^{(2)} = 0,04$, $\sigma^{(1)} = 0,3$ e $\sigma^{(2)} = 0,25$. Os gráfico simulados podem ser vistos na Figura 2.

Assim, o ativo 1 é mais volátil do que ativo 2 pois tem maiores valores médios absolutos de salto. Para melhor examinar essas marginais, algumas estatísticas descritivas foram

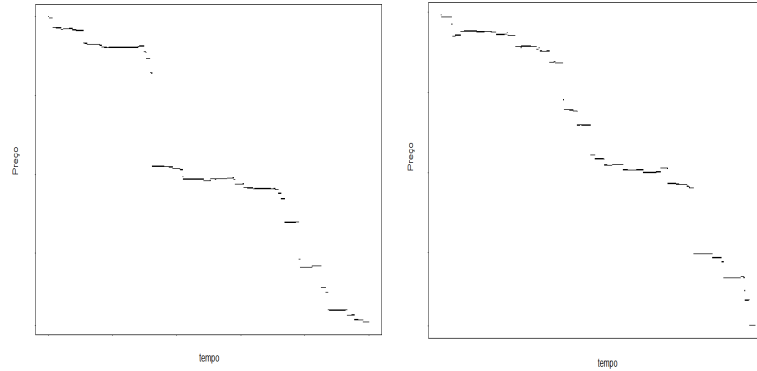


Figura 2: À esquerda a realização do processo de variância gamma para o ativo 1 e à direita a realização do processo de variância gamma para o ativo 2.

feitas, e duas diferenças foram tomadas para que a série se tornasse estacionária, como mostrado na Tabela 1 e Figura 3. A Figura 4 mostra o histograma com as densidades kernel e normal ajustadas e a Figura 5 temos o QQ plot dos ativos. Note que tanto pelos gráficos como pelo p-valor do teste de Kolmogorov-Smirnov calculado com p-valor < 0.0001 os ativos não seguem uma distribuição normal.

Tabela 1: Estatísticas descritivas para os ativos 1 e 2

Ativo	kurtose	assimetria	mínimo	mediana	máximo
1	0.4788602	0.03159605	-25.13	-0.1551	24.28
2	2.274718	-0.06733587	-30.43	0.02763	22.26

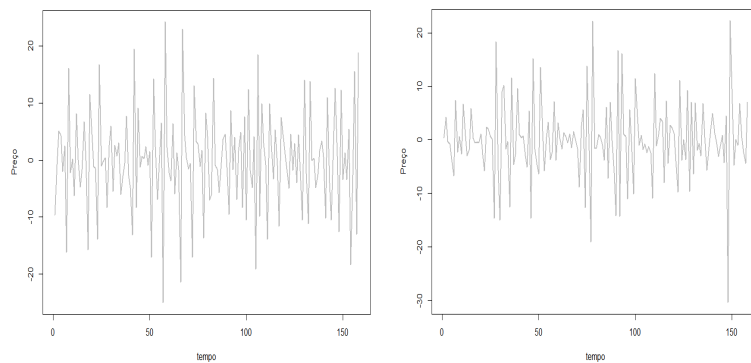


Figura 3: À esquerda o ativo 1 com duas diferenças e à direita o ativo 2 com duas diferenças.

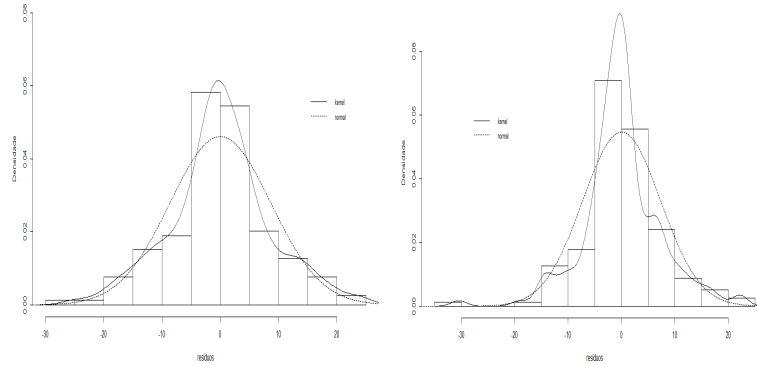


Figura 4: À esquerda histograma com densidade kernel e normal ajustada do ativo 1 e à direita histograma com densidade kernel e normal ajustada do ativo 2.

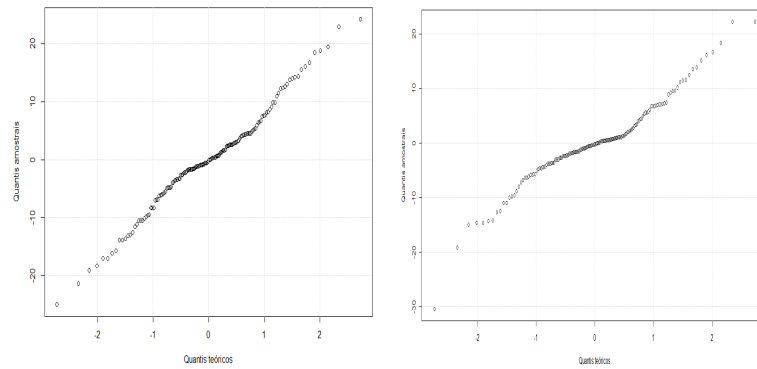


Figura 5: À esquerda QQ plot dos resíduos do ativo 1 e gráfico inferior à direita QQ plot dos resíduos do ativo 2.

Na Figura 6, temos a representação gráfica das funções de autocorrelação (*fac*) e autocorrelação parcial (*facp*) da série dos ativos 1 e 2 e a mesma mostra, além do p-valor de < 0.0001 do teste de Box-Pierce-Ljung para vários lags para ambos os ativos, que a série não é ruído branco sendo necessário um ajuste ARIMA.

Para corrigir esse problema, utilizamos a função *auto.arima()* do software estatístico *R* para que um modelo adequado fosse escolhido através do critério de seleção AIC. Ele nos indicou que o modelo adequado é o ARIMA(2,2,2) para o ativo 1 e o ARIMA(1,2,1) para o ativo 2. Para melhor enxergar a qualidade deste ajuste, uma análise de resíduos foi feita e pode ser observada na Figura 7, 8 e 9. Algumas estatísticas descritivas estão na Tabela 2 e os parâmetros dos modelos estão na Tabela 3.

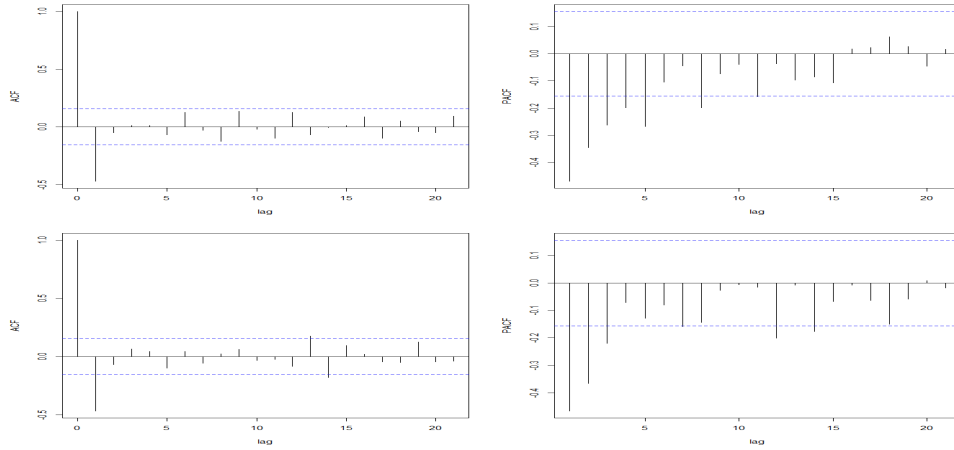


Figura 6: Em cima e na seqüência FAC e FACP do ativo 1 e embaixo e na seqüência FAC e FACP do ativo 2.

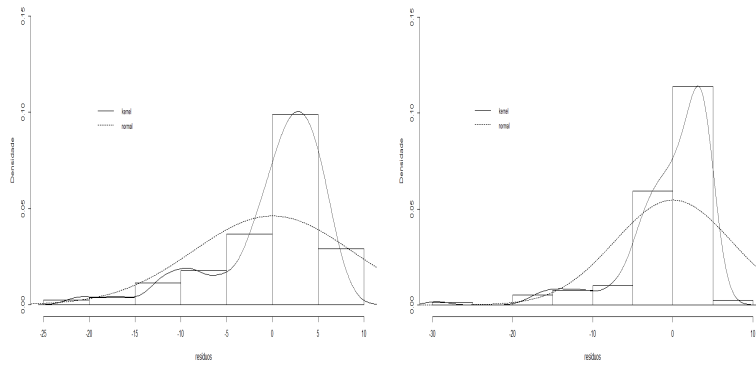


Figura 7: À esquerda histograma com densidade kernel e normal ajustada dos resíduos do ativo 1 e à direita histograma com densidade kernel e normal ajustada dos resíduos do ativo 2.

Tabela 2: Estatísticas descritivas para os resíduos dos ativos 1 e 2

Ativo	kurtose	assimetria	mínimo	mediana	máximo
1	1.742157	-1.426608	-21.28	1.4740	7.922
2	5.570172	-2.009355	-29.46	0.8817	6.16

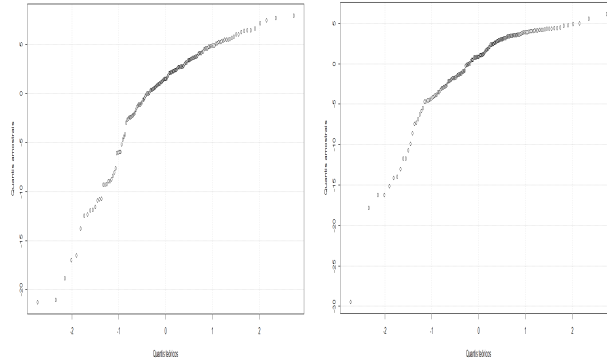


Figura 8: À esquerda QQ plot dos resíduos do ativo 1 e à direita QQ plot dos resíduos do ativo 2.

Tabela 3: Parâmetros dos modelos ARIMA ajustados para os ativos 1 e 2

Ativo	AR1	AR2	MA1	MA2
1	0.8079	-0.216	-1.7651	0.7932
2	0.0867	0	-0.9929	0

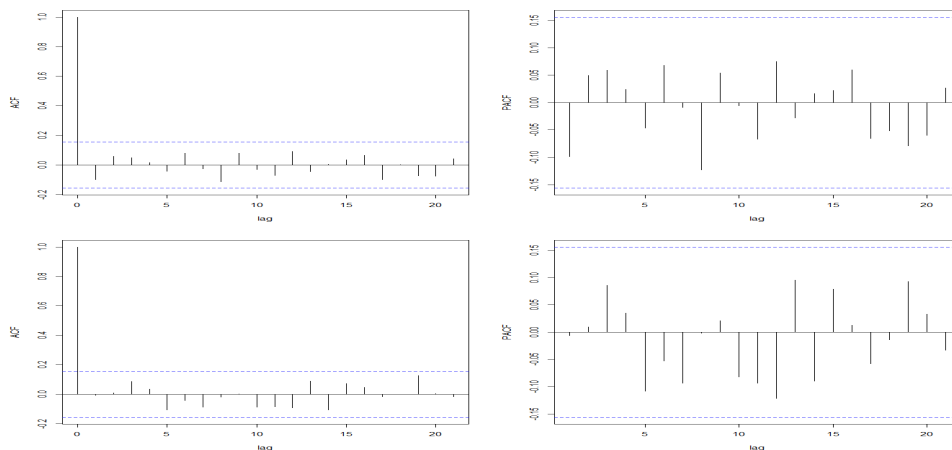


Figura 9: Na parte superior FAC e FACP dos resíduos ativo 1 e na parte inferior FAC e FACP dos resíduos do ativo 2.

Note que, com o novo ajuste as marginais se tornam ruídos brancos e prosseguimos com a visualização da dependência dos ativos através da cópula Clayton Lévy. Para isso, utilizamos a cópula definida no exemplo 5.0.1 tomando como marginais, as ajustadas acima. Para estimarmos os parâmetros θ e η desta cópula, utilizamos a função `constrOptim()` do software estatístico *R* faz a estimação através de máxima verossimilhança restrita utilizando o método iterativo Newton-Raphson. A função de verossimilhança utilizada nesse caso pode ser definida como:

$$L(p) = \sum_{i=1}^n \log C''(u_i, v_i; p)$$

Para melhor visualizar esses resultados, o scatterplot entre os ativos, as curvas de nível da kernel empírica desses dados e as curvas de nível da cópula ajustada podem ser vistas na Figura 10. Além disso os respectivos valores de ajuste, dependência caudal e medidas de concordância estão na Tabela 4.

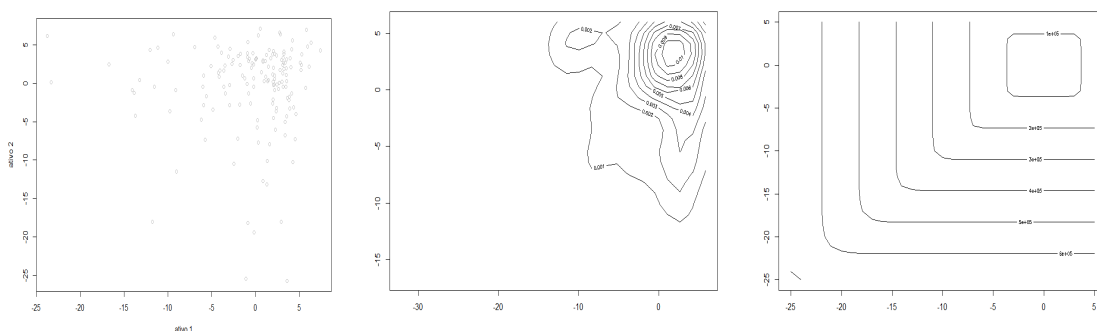


Figura 10: À esquerda scatterplot entre os ativos ajustado, no centro a curva de nível da kernel empírica e à direita as curvas de nível da cópula estimada.

Tabela 4: Parâmetros da cópula, dependência caudal e medidas de concordância

θ	η	$\lambda_{PP} = \lambda_{NN}$	$\lambda_{NP} = \lambda_{PN}$	$\hat{\tau}$	$\hat{\rho}$
140.1982	0.999	0.9940	0.0009	0.09086511	0.1352366

Portanto, nota-se que a cópula conseguiu capturar bem a dependência do resultado. Além disso, vemos que há uma alta dependência caudal, o que corresponde à probabilidade de observar um grande salto de um componente do ativo 1 dado um grande salto simultâneo em outro componente do ativo 2 ou vice versa. Seu papel é de grande importância para este caso, pois apesar de termos um pequeno horizonte de investimento, equivalente a um mês, e pouca correlação entre os dados, mostramos que saltos individuais têm um grande impacto sobre os valores dos ativos.

6 Conclusão

Neste trabalho uma intensa revisão bibliográfica para maior compreensão teórica do tema a ser tratado foi feita. Essa revisão envolveu uma breve verificação de conceitos preliminares como divisibilidade infinita e processos de Lévy até a formulação de cópulas e sua relação com a dependência caudal com saltos. Diversos procedimentos e ferramentas de simulação do software estatístico *R* foram estudados para que a manipulação dos dados pudessem mostrar todas as características do problema proposto.

Além disso, a relevância econômica dessa medida foi analisada em um estudo de simulação, que mostra um efeito significativo na dependência caudal com saltos em distribuições de carteiras em um contexto financeiro. Em particular, o campo de aplicação da dependência caudal com saltos em aplicações de controle de risco é especialmente positiva para curtos horizontes de investimento, em que um único salto tem um grande impacto nos preços dos ativos.

A dependência caudal com saltos corresponde a probabilidade de observar um grande salto em um componente do processo dado a ocorrência de um grande salto em outro componente e por isso é uma medida que permite capturar a dependência de saltos extremos em processo de Lévy. Além disso, como foi mostrado, a dependência caudal com salto é função de uma cópula de Lévy que é independente da distribuição marginal com salto do processo, tornando essa informação interpretável de grande valor.

Existem diversos processos estocásticos que podem ser utilizados para gerar os gráficos no Capítulo 4, entre eles temos o processo de variância gamma que possui diversas versões. A versão mostrada no Capítulo 2 foi a escolhida para este trabalho, porém acreditamos que os resultados possam ser melhorados utilizando alguma outra versão mais sofisticada (mais opções veja Madan e Senata [9]). O aperfeiçoamento das ilustrações numéricas ficam para serem tratadas em trabalhos futuros.

7 Anexo

Anexo A - Programação

```
require(SuppDists)
require(fBasics)
library(forecast)
VG.proc <- function(t.grid, sigma, theta, kappa) {
  dt.grid <- diff(t.grid)
  dS.grid <- rgamma(length(dt.grid),shape=dt.grid,rate=kappa)
  dX.grid <- rnorm(length(dt.grid),mean=theta*dS.grid,sd=sigma*sqrt(dS.grid))
  return(list(t=t.grid,X=c(0,cumsum(dX.grid))))
}
plot.simple <- function(func = VG.proc, type = "p",
pch = ".", cex = 2, n = 1000,...) {
t.grid <- seq(0,10,length=n)
p1 <- func(t.grid,...)
plot(p1$t,p1$X,col=1,type=type,pch=pch,cex=cex,
axes=FALSE,frame.plot=TRUE,xlab="",ylab="")
}
v<-0.2
k<-0.04
sigma<-0.3
c<-1/k
lambdap=sqrt(v^2 +2*sigma^2/k)/sigma^2-v/sigma^2
lambdan=sqrt(v^2 +2*sigma^2/k)/sigma^2+v/sigma^2
r<-c*log(1-1/lambdap+1/lambdan-1/(lambdap*lambdan))
g1<-VG.proc(1:160,sigma=0.25,theta=-0.2,kappa=0.04)
v<-0.2
k<-0.04
sigma<-0.25
c<-1/k
```

```

lambdap=sqrt(v^2 +2*sigma^2/k)/sigma^2-v/sigma^2
lambdan=sqrt(v^2 +2*sigma^2/k)/sigma^2+v/sigma^2
r<-c*log(1-1/lambdap+1/lambdan-1/(lambdap*lambdan))
g2<-VG.proc(1:160,sigma=0.3,theta=-0.2,kappa=0.04)
plot.simple(VG.proc,sigma=0.25,theta=-0.2,kappa=0.04)
plot.simple(VG.proc,sigma=0.3,theta=-0.2,kappa=0.04)
plot(diff(diff(g1\$X)), type="l", lwd=2,
      col='gray', xlab="tempo", ylab="Preço",
      main="Ativo 1 com duas diferenças")
plot(diff(diff(g2\$X)), type="l", lwd=2,
      col='gray', xlab="tempo", ylab="Preço",
      main="Ativo 2 com duas diferenças")
#Histograma do retorno 1
retorno=diff(diff(g1\$X))
hist(retorno, prob=T, main="Histograma dos retornos do ativo 1",xlab='resíduos',yl
lines(density(retorno))
x <- seq(-40, 30, 0.01)
y <- dnorm(x, mean(retorno), sd(retorno))
lines(x, y, lty=2)
#Algumas estatísticas descritivas
kurtosis(retorno)
skewness(retorno)
summary(retorno)
ks.test(retorno,y)
#qqplot
qqnorm(retorno,main='Normal QQ plot dos retornos do ativo 1',
ylab='Quantis amostrais',xlab='Quantis teóricos')
grid()
#Série temporal
par(mfrow=c(1,2))
acfPlot(retorno)
pacfPlot(retorno)

```



```

#teste de Ljung-Box
Box.test(retorno, lag=10)
Box.test(retorno, lag=15)
Box.test(retorno, lag=20)
fit=auto.arima(retorno)
summary(fit)
res <- residuals(fit)
acfPlot(res)
pacfPlot(res)
par(mfrow=c(1,1))
#Estudando os resíduos
#histograma dos resíduos
hist(res, prob=T,ylim=c(0,0.15),
main="Histograma dos resíduos dos retornos do ativo 1",
xlab='resíduos',ylab='Densidade')
lines(density(res))
x <- seq(-40, 50, 0.01)
y <- dnorm(x, mean(retorno), sd(retorno))
lines(x, y, lty=2)
kurtosis(res)
skewness(res)
summary(res)
ks.test(res,"pnorm",mean(res),sd(res))
qqnorm(res,main='Normal QQ plot dos resíduos dos retornos do ativo 1',
ylab='Quantis amostrais',xlab='Quantis teóricos')
grid()
A=res
#Histograma do retorno 2
retorno=diff(diff(g2\$$X))
hist(retorno, prob=T,main="Histograma dos retornos do ativo 2",xlab='resíduos',ylab=
lines(density(retorno))
x <- seq(-40, 30, 0.01)

```

```

y <- dnorm(x, mean(retorno), sd(retorno))
lines(x, y, lty=2)
#Algumas estatísticas descritivas
kurtosis(retorno)
skewness(retorno)
summary(retorno)
ks.test(retorno,y)
#jarque.bera.test(retorno)
#qqplot
qqnorm(retorno,main='Normal QQ plot dos retornos do ativo 2',
ylab='Quantis amostrais',xlab='Quantis teóricos')
grid()
#Série temporal
par(mfrow=c(1,2))
acfPlot(retorno)
pacfPlot(retorno)
#teste de Ljung-Box
Box.test(retorno, lag=10)
Box.test(retorno, lag=15)
Box.test(retorno, lag=20)
fit=auto.arima(retorno)
summary(fit)
#tsdiag(fit)
res <- residuals(fit)
acfPlot(res)
pacfPlot(res)
par(mfrow=c(1,1))
#Estudando os resíduos
#histograma dos resíduos
hist(res, prob=T,main="Histograma dos resíduos dos retornos do ativo 2",xlab='resíd
lines(density(res))
x <- seq(-40, 50, 0.01)

```

```

y <- dnorm(x, mean(retorno), sd(retorno))
lines(x, y, lty=2)
kurtosis(res)
skewness(res)
summary(res)
ks.test(res, "pnorm", mean(res), sd(res))
qqnorm(res, main='Normal QQ plot dos resíduos dos retornos do ativo 2',
ylab='Quantis amostrais', xlab='Quantis teóricos')
grid()
B=res
#Medidas de dependência
#correlação de pearson
msp=A
mftse=B
cor(msp, mftse)
#Kendall
cor(msp, mftse, method="kendall")
#Spearman
cor(msp, mftse, method="spearman")
#Scatterplot
plot(msp, mftse, col="gray", ylab="ativo 2", xlab="ativo 1",
      main="Gráfico de dispersão")
#Acumuladas
a.ecdf = ecdf(msp)
aa=a.ecdf(msp)
plot(a.ecdf)
b.ecdf = ecdf(mftse)
bb=b.ecdf(mftse)
plot(b.ecdf)
#####Estimando a Cópula Lévy
cop<- function(A,B,theta,ni){

```

```

r<-ifelse(A*B>=0,(abs(A)^(-theta)+abs(B)^(-theta))^(1/theta)*ni,
          -(abs(A)^(-theta)+abs(B)^(-theta))^(1/theta)*(1-ni))
return(r)
}
logverocop <- function(pars){
  theta <- pars[1]
  ni <- pars[2]
  f <- sum(log(cop(aa,bb,theta=theta,ni=ni)))
  return(-f)
}
param <- c(10,0.1)
(ajuste <-(constrOptim(theta=param, f=logverocop, ui=rbind(c(1, 0),
                                                         c(0,-1),
                                                         c(0, 1)),
                                                         ci=c(0,-1,0)
                                                         , method="Nelder-Mead", outer.iterations=100)
))
x <- seq(-25,5)
y <- seq(-25,5)
z <- outer(x,y,copf,theta,ni)
contour(x,y,z)
la=2^(-1/theta)*ni
ln=2^(-1/theta)*(1-ni)

```

Referências

- [1] Applebaum, D. (2004): *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Böttcher, B. (2010): *Feller Processes: The Next Generation in Modeling. Brownian Motion, Lévy Processes and Beyond* US National Library of Medicine.
- [3] Embrechts, P.; Lindskog, F.; McNeil, A. (2003): *Handbook of heavy tailed distributions in finance, chap. Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, pp. 329-384. Elsevier, Amsterdam.
- [4] Feller, W. (1971): *An Introduction Probability Theory and its Applications*. John Wiley, New York.
- [5] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. (2000): *Table of integrals, Series and Products*. Academic Press, New York.
- [6] Grothe, O. (2012): *Jump tail dependence in Lévy copula models*. Springer, New York.
- [7] Hoel, P. G.; Port, S. C.; Stone, C. J. (2006): *Introduction to probability theory*. Houghton Mifflin, New York.
- [8] Kallsen, J.; Tankov, P. (2006): *Characterization of dependence of multidimensional Lévy processes using Lévy copulas*. J. Multivar. Anal. 97, 1551–1572.
- [9] Madan, D.B.; Seneta, E.: The variance gamma (v.g.) model for share market returns. J. Bus. 63(4), 511–524 (1990)
- [10] Meyer, P. (2003): *Probabilidade - Aplicações à Estatística*. São Paulo.
- [11] Nelsen, R. (1999): *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- [12] Ross, M. S. (2007): *Introduction to Probability Models*. Berkeley, California.
- [13] Tankov, P.; Cont, R. (2004): *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman - Hall, New York.

- [14] Schoutens, W. (2003): *Lévy Processes in Finance - Pricing Financial Derivatives*.
Wiley.