



Universidade de Brasília
IE - Instituto de Exatas
Departamento de Estatística

Inferência bayesiana em sistemas de reparo imperfeito

Gabriel Hideki Vatanabe Brunello

Brasília
2014

Gabriel Hideki Vatanabe Brunello

Inferência bayesiana em sistemas de reparo imperfeito

Monografia apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Orientador(a): Gustavo Leonel Gilardoni Avalle

Brasília
2014

Brunello, G. H. V.

Inferência bayesiana em sistemas de reparo imperfeito

31 páginas

Monografia - Instituto de Exatas da Universidade de Brasília. Departamento de Estatística.

1. Sistemas Reparáveis

2. Inferência Bayesiana

3. Reparo Imperfeito

I. Universidade de Brasília. Instituto de Exatas. Departamento de Estatística.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr: Jhames Matos Sampaio

Prof. Dr: Eduardo Yoshio Nakano

Prof. Gustavo Leonel Gilardoni Avalor
Orientador

Agradecimentos

Primeiramente aos meus pais, pelo apoio que me deram durante todos esses anos, sempre me incentivando a estudar e me esforçar.

Aos meus professores, que contribuíram muito para minha formação, me ensinando não apenas estatística, mas também lições de vida.

Aos meus amigos, pelo companheirismo e ajuda nos momentos de dificuldade.

A minha namorada, pelo amor, carinho e estar sempre ao meu lado, me proporcionando momentos de risada e descontração que me fizeram superar minhas dificuldades com mais facilidade.

Resumo

Neste trabalho aborda-se o uso de modelos de reparo imperfeito no estudo de sistemas reparáveis utilizando diferentes bancos de dados. O estudo tem como objetivo verificar se os modelos apresentam bons ajustes, comparando-os com o ajuste do modelo de reparo mínimo utilizando o *BIC* como critério de comparação. Outro ponto estudado é a comparação da abordagem bayesiana com a abordagem clássica nesse tipo de modelagem, verificando as limitações, dificuldades e resultados de cada método. Verificou-se que nos bancos de dados estudados, o modelo de reparo imperfeito só se mostrou mais eficiente que o de reparo mínimo quando o parâmetro de reparo era superior a 0,5, e que a abordagem bayesiana se mostra mais prática pois evita alguns problemas na estimação do parâmetro, porém ainda não se sabe uma forma viável de se estimar o valor esperado de falhas no contexto bayesiano.

Keywords: Sistemas Reparáveis, Inferência Bayesiana, Reparo Imperfeito

Lista de Figuras

1.1	Modelos RI e RP	2
3.1	<i>PLP</i> para diferentes valores de β ($\theta = 1$)	10
3.2	Modelos <i>ARI</i> e <i>ARA</i> simulados com funções de intensidades iguais . . .	12
3.3	Dados de transformadores	16
3.4	Dados de Ar condicionado	17
3.5	Dados Gerados	17
4.1	Ajuste modelo <i>RM</i> para transformadores	19
4.2	Ajuste modelo <i>ARA</i> ₁ para transformadores	21
4.3	Ajuste modelo <i>RM</i> em ar condicionado	23
4.4	Ajuste modelo <i>ARA</i> ₁ em ar condicionado	24
4.5	Ajuste modelo <i>RM</i> para dados gerados	26
4.6	Ajuste modelo <i>ARA</i> ₁ para dados gerados	27

Lista de Tabelas

4.1	Modelo RM nos transformadores	18
4.2	Modelo ARA_1 nos transformadores	20
4.3	Modelo ARI_1 nos transformadores	21
4.4	Modelo RM em ar condicionado	22
4.5	Modelo ARA_1 em ar condicionado	23
4.6	Modelo ARI_1 em ar condicionado	24
4.7	Modelo RM em dados gerados	25
4.8	Modelo ARA_1 em dados gerados	26
4.9	Modelo ARI_1 em dados gerados	27

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	2
2	Conceitos Básicos	3
2.1	Processos de Contagem	5
2.2	Processo de Poisson	6
2.3	Modelos de Reparo	7
3	Reparo Imperfeito	9
3.1	Redução Aritmética de Intensidade (<i>ARI</i>)	12
3.2	Redução Aritmética de Idade (<i>ARA</i>)	13
3.3	Inferência nos Modelos de Reparo Imperfeito	13
3.4	Banco de dados	16
4	Resultados	18
4.1	Transformadores	18
4.2	Ar Condicionado	22
4.3	Dados Gerados	25
5	Considerações Finais	28
	Referências Bibliográficas	30

Capítulo 1

Introdução

Algumas empresas possuem sistemas que ao apresentarem falha não podem ser facilmente substituídos devido ao seu alto custo, fazendo com que seja necessária uma política eficiente de manutenção preventiva que estenda suas vidas úteis com reparos periódicos, o que torna a modelagem do efeito dos reparos fundamental na obtenção de eficiência na manutenção.

As modelagens mais utilizadas consideram dois tipos de reparo, reparo perfeito e reparo mínimo, que possuem alguns pressupostos básicos. O modelo de reparo mínimo (*RM*) assume que o reparo deixa o sistema no mesmo estado em que ele estava antes da falha. O modelo de reparo perfeito (*RP*) assume que o sistema é reparado de forma que volta ao estado de um sistema novo. Esses tipos de reparo foram estudados em Gilardoni e Colosimo (2007) e de Oliveira et al. (2012). Seus comportamentos podem ser observados na Figura 1.1, que apresenta suas intensidades de falha.

Apesar de muito utilizados, esses modelos possuem pressupostos que não representam bem a realidade, pois um sistema que passou por um reparo após uma falha pode melhorar o seu risco de falhar novamente. Sistemas com essas características são conhecidos como sistemas de reparo imperfeito (*RI*).

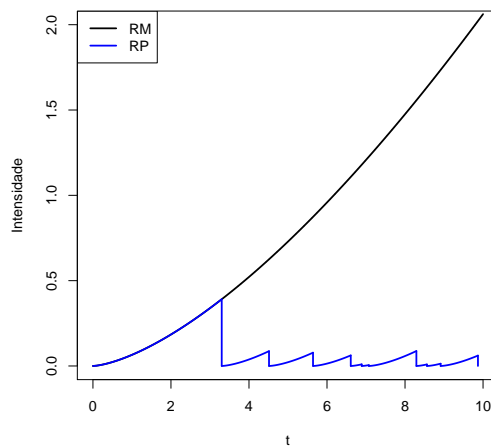


Figura 1.1: Modelos RI e RP

Os modelos de reparo imperfeito foram introduzidos por Kijima (1989). Uma abordagem bayesiana para a modelagem de sistemas reparáveis foi proposta por Pan e Rigdon (2009), utilizando modelos de reparo imperfeito com funções de falha apresentadas por Doyen e Gaudoin (2004). Neste contexto, o objetivo deste trabalho é verificar se a abordagem proposta por Pan e Rigdon (2009) é robusta e ajusta adequadamente outros bancos de dados.

1.1 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é ajustar o modelo proposto por Pan e Rigdon (2009) para diferentes bancos de dados, verificando a eficiência do ajuste do modelo.

Os objetivos específicos do trabalho são:

- desenvolver um algoritmo para aplicação do modelo de Pan e Rigdon (2009) utilizando o *software* R (R Development Core Team, 2014);
- comparar os resultados do modelo clássico com o modelo bayesiano;
- comparar os resultados do modelo *RI* com o modelo *RM*.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentamos alguns dos conceitos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Um sistema reparável é um sistema em que, quando ocorre uma falha, ele pode voltar a funcionar por meio de uma ação de reparo que não seja a troca de todo o sistema, diferente de um sistema não reparável, que ao acontecer uma falha deve ser descartado.

Os tempos de falha em um sistema reparável, ou seja, o tempo desde o começo do funcionamento do sistema até o momento de uma das falhas, é denotado por $T_1 < T_2 < \dots$. Quando o tempo entre falhas de um sistema reparável tende a diminuir com o passar do tempo, diz-se que ele está deteriorando e quando o tempo entre falhas tende a aumentar, ele está aprimorando.

Dados sobre confiabilidade normalmente apresentam censura, isto é, observações em que não foi possível fazer o acompanhamento durante todo o estudo. Isso acontece devido a causas que não podem ser controladas, como, por exemplo, a perda do equipamento. Esses dados são chamados de dados censurados.

Duas funções importantes para o estudo de dados censurados são as funções de sobrevivência e de risco, que tornam possível a utilização da informação obtida nas observações censuradas.

A *função de sobrevivência*, denotada por $S(x)$, indica probabilidade do sistema funcionar pelo menos até o tempo x , ou seja, a função de sobrevivência avaliada no ponto x , sendo

$$S(x) = P(X > x).$$

A função de risco é o limite da probabilidade de uma unidade falhar (pela primeira e única vez) em um pequeno intervalo dado que ele sobreviveu desde o começo do intervalo, ou seja

$$h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x | X > x)}{\Delta x}.$$

A escolha de uma função de risco adequado para um sistema reparável é de extrema importância pois ela indica o comportamento entre os tempo de falha do sistema. Se a função de risco é crescente, os tempos entre as falhas diminuem, e caso ela seja decrescente, os tempos entre falhas aumentam.

Sua função de distribuição acumulada é

$$H(t) = \int_0^t h(x) dx. \quad (2.1)$$

Em estudos de confiabilidade é necessário definir um critério de parada, chamado de truncamento, podendo ser definido de diferentes maneiras.

Se a observação do sistema termina após um determinado número de falhas, os dados são denominados truncados por falha. Os tempos dos dados são denotados por t_1, t_2, \dots, t_n , onde $0 < t_1 < \dots < t_n$.

Quando a observação do sistema termina após um determinado tempo de estudo, os dados são denominados truncados por tempo. Neste tipo de supervisão, a quantidade de falhas observadas torna-se uma variável aleatória, então as variáveis do estudo são $(n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ em que a quantidade de falhas igual a n e $0 < t_1 < \dots < t_n < T$, onde T é o tempo fixado para o fim do estudo.

2.1 Processos de Contagem

As ocorrências de falhas em um sistema reparável são probabilisticamente descritas por meio de processos de contagem, onde um processo de contagem é um modelo estocástico que descreve a ocorrência de um evento no tempo. No contexto de sistemas reparáveis, o evento de interesse do processo é o tempo de falha do sistema. Nesta seção serão introduzidas notações utilizadas no estudo de processos de contagem.

O número de falhas em um intervalo $(0,t]$ é denotado pela variável aleatória $N(t)$. N é chamado de processo estocástico de contagem e seu número de falhas em um intervalo $(a,b]$ pode ser escrito como

$$N(a,b] = N(b) - N(a). \quad (2.2)$$

A *função intensidade* de um processo de contagem é a probabilidade de falha em um pequeno intervalo dividido pelo tamanho do intervalo e é dada por

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[N(t, t + \Delta t) \neq 1 | N(s) : s \leq t].$$

A função média de um processo pontual é definida como

$$\Phi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t] \geq 1)}{\Delta t} = E[N(t)],$$

que é a quantidade esperada de falhas do sistema até o tempo t .

Quando Φ é diferenciável temos

$$\phi(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t),$$

que é a *taxa de ocorrência de falhas (TOF)*. A taxa de ocorrência de falhas pode ser interpretada como a taxa de mudança instantânea no número esperado de falhas.

No estudo de sistemas reparáveis é necessário definir o comportamento dos incrementos do processo, pois o padrão de falhas pode sofrer modificações no tempo, gerando aprimoramento ou deterioramento no sistema.

Um processo de contagem tem *incrementos independentes* se para todo n e para todo $r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq \dots < r_n \leq s_n$, as variáveis aleatórias $N(r_1, s_1], N(r_2, s_2], \dots, N(r_n, s_n]$ são independentes, ou seja,

$$P(N(r_1, s_1] = k_1, \dots, N(r_n, s_n] = k_n) = \prod_{i=1}^n P(N(r_i, s_i] = k_i).$$

Quando o sistema possui a propriedade de incrementos independentes a intensidade é determinística e, portanto a *TOF* é equivalente à função intensidade.

2.2 Processo de Poisson

O processo de Poisson é um dos mais importantes processos de contagens, possuindo inúmeras aplicações e podendo ser utilizado na construção de processos mais complexos. A distribuição de Poisson é a distribuição de probabilidade utilizada na modelagem de processos de Poisson, ela expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer em um certo período de tempo se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento.

Se X é uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\Psi^x \exp(-\Psi)}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots,$$

então X tem uma distribuição de Poisson, denotada por $X \sim POI(\Psi)$, com $E(X) = \Psi$ e $V(X) = \Psi$.

Definição 1 *Processo de Poisson* O processo de contagem $N(t)$ é dito ser um processo de Poisson se:

i) $N(0) = 0$

ii) Para quaisquer $a < b \leq c < d$ as variáveis aleatórias $N(a,b]$ e $N(c,d]$ são independentes, ou seja, possuem incrementos independentes.

iii) Existe uma função Ψ tal que

$$\Psi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t] = 1)}{\Delta t},$$

e chamada a função intensidade de um Processo de Poisson.

iv) Não podem ocorrer falhas simultâneas, ou seja:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t] \geq 2)}{\Delta t} = 0.$$

Um processo de Poisson homogêneo (*PPH*) é um processo de Poisson com função intensidade constante λ . Uma característica do processo de Poisson homogêneo é que os tempos entre falhas são variáveis aleatórias iid com distribuição exponencial de média $\frac{1}{\lambda}$.

Um processo de Poisson não homogêneo (*PPNH*) é um processo de Poisson com função intensidade não constante $\lambda(t)$.

2.3 Modelos de Reparo

Um modelo estatístico para sistemas reparáveis busca descrever o comportamento dos tempos de falha. Os pressupostos sobre o envelhecimento do sistema, efeitos de falhas e efeitos de reparos vão levar à escolha de um modelo para o problema e também de uma função intensidade adequada, pois ela contém toda a informação sobre o comportamento das falhas e envelhecimento do sistema.

Os modelos de reparos mais conhecidos são os modelos de reparo perfeito, modelo de reparo mínimo e modelo de reparo imperfeito.

O modelo de reparo perfeito (*RP*) assume que quando realizado, deixa o sistema na condição de um sistema novo. Em um modelo de reparo perfeito, os tempos entre falhas X_1, X_2, \dots , devem ser independentes e identicamente distribuídos.

O modelo de reparo mínimo (*RM*) assume que quando realizado, deixa o sistema na exata condição que estava antes da falha. Um modelo de reparo mínimo implica que as falhas não são independentes e processos de Poisson não homogêneos são utilizados para a modelagem do sistema. Como a intensidade de falha não é constante em um modelo *RM*, é necessário definir uma função intensidade para o processo de Poisson não homogênea. A parametrização usada na função intensidade do processo deve ser escolhida de forma que consiga modelar adequadamente o comportamento do risco do sistema.

O modelo de reparo imperfeito (*RI*) assume que quando realizado, deixa o sistema em uma condição desconhecida, podendo tanto melhorar quanto piorar seu risco de falhar novamente. O modelo considera que os reparos podem ter diferentes efeitos sobre o sistema e a maneira com que se aborda esse efeito depende do modelo de reparo imperfeito utilizado.

Capítulo 3

Reparo Imperfeito

Este capítulo aborda alguns conceitos de processo de Poisson que são utilizados em modelos de reparo imperfeito, detalhando também o modelo de Pan e Rigdon (2009) que será apresentado neste trabalho.

Para utilização de processos de poisson não homogêneos em modelos de reparo mínimo, é necessário definir uma função intensidade.

A parametrização da função intensidade de um *PPNH* mais utilizada na prática é

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{t}{\theta} \right)^{\beta-1}. \quad (3.1)$$

Essa função intensidade é denominada Power Law Process (*PLP*) e é capaz de modelar sistemas que estão deteriorando ($\beta > 1$), ou se aprimorando ($\beta < 1$). Quando o parâmetro β assume valor 1, o processo vira um *PPH* com intensidade de falha $\frac{1}{\theta}$.

A Figura 3.1 apresenta o comportamento da função de intensidade de um *PLP* para diferentes valores de β com o parâmetro $\theta = 1$.

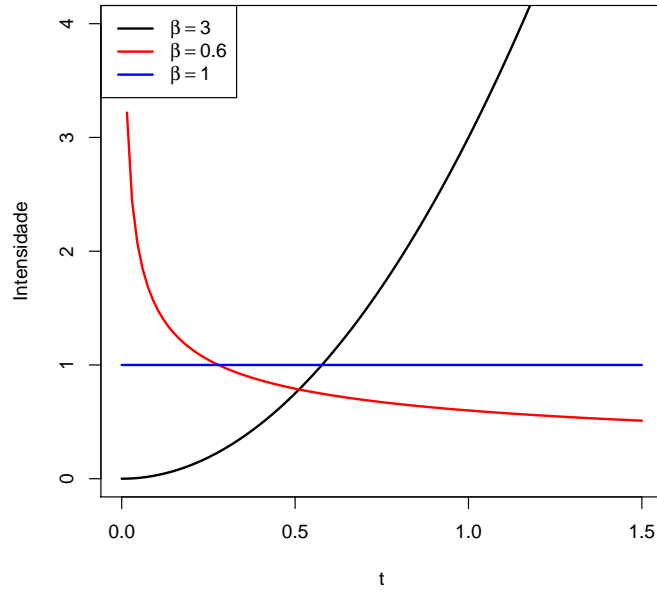


Figura 3.1: *PLP* para diferentes valores de β ($\theta = 1$)

Em Rigdon e Basu (2000), é desenvolvida a verossimilhança para modelos de reparo mínimo. Para sistemas que são truncados por falha, a distribuição conjunta dos tempos T_1, T_2, \dots, T_n de um *PPNH* com função intensidade $\lambda(t)$ é dada por,

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\beta^n}{\theta^{n\beta}} \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t_n}{\theta} \right)^\beta \right], 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n. \quad (3.2)$$

Para sistemas que são truncados por tempo, a distribuição conjunta da quantidade de falhas e dos tempos de falha truncados em um tempo T é,

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\beta^n}{\theta^{n\beta}} \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{T}{\theta} \right)^\beta \right], 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T. \quad (3.3)$$

Apesar dos modelos *RM* e *RP* serem muito utilizados, eles não representam bem

a realidade de alguns sistemas, pois o modelo *RM* assume que não existe melhora no risco do sistema após o reparo e o modelo *RP* assume que o sistema se torna um sistema novo, suposições que não acontecem na maioria dos casos.

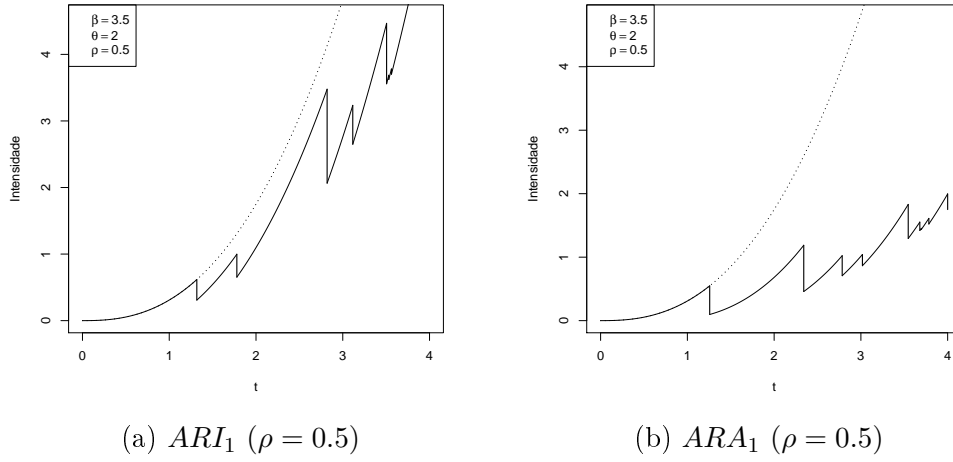
Para tentar modelar de uma maneira mais realista o efeito dos reparos, os modelos de reparo imperfeitos foram propostos. Duas formas de modelar esse tipo de reparo foram propostas por Doyen e Gaudoin (2004), tendo cada um desses modelos, diferentes pressupostos para o efeito do reparo no sistema.

A primeira metodologia proposta é chamada de redução aritmética de intensidade (*ARI* - Arithmetic Reduction of Intensity). Essa metodologia pressupõe que cada reparo diminui a intensidade de falha por uma quantia que depende das falhas passadas do processo, reduzindo a intensidade por uma constante multiplicativa $(1 - \rho)$, e que após cada falha o desgaste do sistema continua o mesmo, ou seja, a intensidade entre falhas é verticalmente paralela à intensidade inicial.

A segunda metodologia é chamada de redução aritmética de idade (*ARA* - Arithmetic Reduction of Age). Essa metodologia pressupõe que o efeito do reparo diminui a idade virtual do sistema (Kijima, 1989) desde o último reparo, ou seja, ao ser reparado a intensidade de falha do sistema volta à um estado em que estava em um tempo passado.

A Figura 3.2 apresenta os modelos *ARA* e *ARI* simulados, percebe-se que para funções de intensidades iguais o comportamento dos modelos são muito diferentes, isso ocorre devido a maneira que os modelos tratam o efeito do reparo, o modelo *ARA* retardando a idade e o modelo *ARI* deslocando a intensidade do sistema.

Esses modelos possuem uma função de desgaste mínimo que indica o ponto de intensidade de falha que o modelo assume quando uma falha ocorre. O parâmetro ρ utilizado nestes modelos é o parâmetro que indica a eficiência do reparo em uma escala de 0 a 1, onde 0 indica reparo sem eficiência sendo equivalente a um modelo *RM* e 1 indica um reparo perfeito, sendo equivalente a um modelo *RP*.


 Figura 3.2: Modelos ARI e ARA simulados com funções de intensidades iguais

3.1 Redução Aritmética de Intensidade (ARI)

O modelo ARI considera que um reparo não pode diminuir o desgaste global do sistema, apenas um desgaste relativo desde a última falha. A intensidade de falha de um modelo ARI_m é,

$$\lambda_R(t) = \lambda(t) - \rho \sum_{j=0}^{\text{Min}(m-1, N_t-1)} (1 - \rho)^j \lambda(T_{N_t-j}), \quad (3.4)$$

onde m é a memória do modelo, isto é, a quantidade de falhas anteriores envolvidas na intensidade de falha. Para o caso onde $m = 1$ temos

$$\lambda_R(t) = \lambda(t) - \rho \lambda(T_{N_t}). \quad (3.5)$$

A função de desgaste mínimo do modelo é dada por

$$\lambda_{min}(t) = (1 - \rho)^m \lambda(t). \quad (3.6)$$

Essa função indica o valor que a função de intensidade de falha do modelo assume

quando ocorre uma falha no sistema.

3.2 Redução Aritmética de Idade (*ARA*)

O modelo *ARA* considera que um reparo rejuvenesce o sistema, ou seja, altera a idade virtual do sistema, que é uma função positiva da idade real do sistema que depende de falhas passadas (Kijima, 1989). A intensidade de falha de um modelo *ARA_m* é,

$$\lambda_R(t) = \lambda \left(t - \rho \sum_{j=0}^{\text{Min}(m-1, N_t-1)} (1 - \rho)^j \lambda(T_{N_t-j}) \right), \quad (3.7)$$

que para o caso $m = 1$ tem a forma

$$\lambda_R(t) = \lambda(t - \rho T_{N_t}). \quad (3.8)$$

A função de desgaste mínimo do modelo é,

$$\lambda_{min}(t) = \lambda((1 - \rho)^m t). \quad (3.9)$$

3.3 Inferência nos Modelos de Reparo Imperfeito

Para realizar inferências sobre os modelos de reparo imperfeito é necessário definir a função de intensidade que será utilizada. Utilizando o *PLP* como intensidade de referência, temos que a distribuição condicional da densidade de falha para um modelo *ARI₁* é dada por

$$f_i(t_i | t_{i-1}, \dots, t_1) = \frac{1}{\theta^\beta} \beta \left(t_i^{\beta-1} - \rho t_{i-1}^{\beta-1} \right) \exp \left(-\frac{1}{\theta^\beta} \left[t_i^\beta - t_{i-1}^\beta - \rho t_{i-1}^{\beta-1} (t_i - t_{i-1}) \right] \right), \quad (3.10)$$

onde $t_0 = 0$ e para o modelo *ARA₁*,

$$f_i(t_i|t_{i-1}, \dots, t_1) = \frac{1}{\theta^\beta} \beta (t_i - \rho t_{i-1})^{\beta-1} \exp\left(-\frac{1}{\theta^\beta} \left[(t_i - t_{i-1})^\beta - (t_{i-1} - \rho t_{i-1})^\beta\right]\right). \quad (3.11)$$

Cuidado deve ser tomado ao se utilizar o modelo ARI_1 com função de intensidade seguindo um PLP , pois este não suporta valores de parâmetro $\beta < 1$. Caso os dados apresentem comportamento de aprimoramento, o modelo ARI não pode ser utilizado.

A função de verossimilhança do modelo para um único sistema com truncamento por falha é

$$L(\theta, \beta, \rho) = \prod_{i=1}^n f_i(t_i|t_{i-1}, \dots, t_1), \quad (3.12)$$

e para modelos com truncamento por tempo,

$$L(\theta, \beta, \rho) = \left[\prod_{i=1}^m f_i(t_i|t_{i-1}, \dots, t_1) \right] S(T), \quad (3.13)$$

onde $S(T)$ é a função de sobrevivência no intervalo (t_m, T) . Para o modelo ARI_1 a função de sobrevivência é,

$$S(T) = \exp\left(-\theta \left(T^\beta - t_m^\beta - \rho \beta t_m^{\beta-1} (T - t_m)\right)\right), \quad (3.14)$$

e para o modelo ARA_1 ,

$$S(T) = \exp\left(-\theta \left((T - \rho t_m)^\beta - (t_m - \rho t_m)^\beta\right)\right). \quad (3.15)$$

O modelo bayesiano de reparo imperfeito proposto por Pan e Rigdon (2009) que será estudado neste trabalho, é um modelo que considera o efeito do reparo imperfeito da maneira proposta por Doyen e Gaudoin (2004), com modelos ARA e ARI para a eficiência do reparo.

No contexto bayesiano os parâmetros são considerados variáveis aleatórias e é necessário o uso de uma distribuição a priori, que indica a informação inicial conhecida sobre o parâmetro, para obter uma distribuição a posteriori que é a distribuição condicional dos parâmetros condicionada aos dados observados. A partir da distribuição a posteriori, é possível obter estimativas para os parâmetros e fazer previsões com o modelo ajustado.

No modelo de Pan e Rigdon (2009), cada sistema possui 3 parâmetros, β, θ e ρ , onde são necessários alguns pressupostos sobre a similaridade dos sistemas para a modelagem. Para este trabalho, os sistemas serão considerados iid e as prioris utilizadas para os parâmetros β, θ e ρ serão prioris difusas $Gama(10^{-5}, 10^{-5}), Gama(10^{-5}, 10^{-5})$ e $Beta(1, 1)$.

Para a estimação dos parâmetros no modelo bayesiano é necessário o uso de métodos computacionais de simulação. O método computacional utilizado será o de Cadeias de Markov via Monte Carlo - MCMC (Gamerman, 1997), que gera valores aleatórios da distribuição a posteriori, possibilitando a aproximação dos parâmetros. Utilizou-se o algoritmo de Metropolis–Hastings, que consegue simular estes valores quando a forma fechada da distribuição a posteriori é desconhecida.

O intervalo de confiança para o número esperado de falhas dos modelos de reparo imperfeito precisa ser aproximado numericamente devido à complexidade de sua obtenção. Utiliza-se então, uma aproximação Bootstrap (Davidson e Hinkley, 1997) e uma aproximação de Monte Carlo (Hammersley e Handscomb, 1964) para se obter uma estimativa do intervalo de confiança. Uma estimativa não-paramétrica pode ser obtida utilizando o estimador de Nelson-Aalen (Aalen, 1978).

Os intervalos de credibilidade calculados para os parâmetros bayesianos foram intervalos *HPD* com 95% de credibilidade.

3.4 Banco de dados

Banco de dados normalmente utilizados no contexto de sistemas reparáveis apresentam os tempos de falhas dos sistemas observados no estudo, indicando também seus pontos de censura. Um banco de dados utilizado em Gilardoni e Colosimo (2007) e de Oliveira et al. (2012) é o apresentado na Figura 3.3 sobre a manutenção de transformadores de energia de uma empresa de eletricidade no Brasil. Cada linha indica um sistema diferente observado no estudo, os pontos indicam os tempos de falhas e o fim de cada linha indica o tempo de censura da observação.

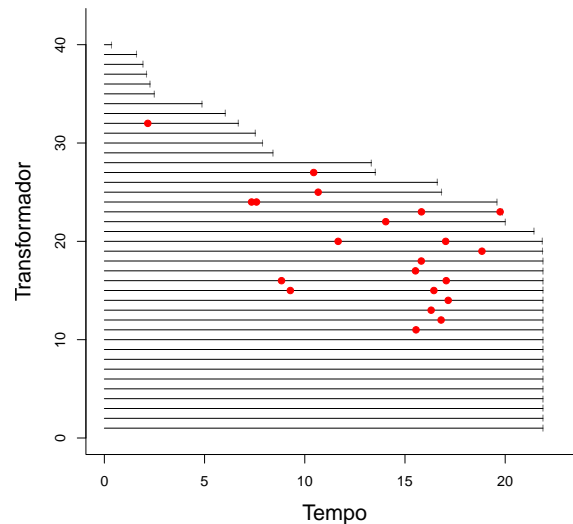


Figura 3.3: Dados de transformadores

A Figura 3.4 apresenta os tempos de falha em unidades de ar condicionado de 13 aeronaves. Esses dados são um dos mais analisados no contexto de sistemas reparáveis e foram os estudados no artigo de Pan e Rigdon (2009). Nos dados de ar condicionado o critério de parada da pesquisa foi uma quantidade de falha por sistema, diferente dos dados de transformadores, em que o critério de parada foi um determinado tempo de observação.

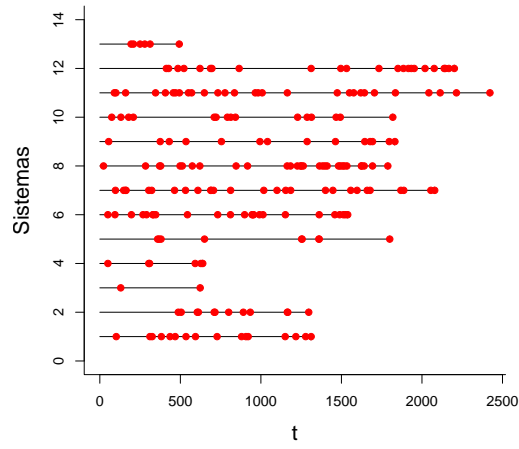


Figura 3.4: Dados de Ar condicionado

A Figura 3.5 apresenta um banco de dados gerado de um processo ARA_1 com parâmetros $\beta = 2$, $\theta = 3$ e $\rho = 0.8$ composto por 5 sistemas, o tempo de truncamento foi definido como 40 para todos os sistemas.

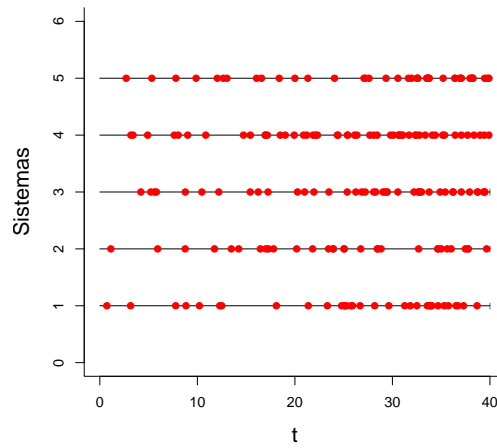


Figura 3.5: Dados Gerados

Capítulo 4

Resultados

4.1 Transformadores

Utilizando o banco de dados de transformadores apresentado na Figura 3.3, foi ajustado o modelo de reparo mínimo. As estimativas para o modelo estão contidas na Tabela 4.2.

Tabela 4.1: Modelo RM nos transformadores

Método	Parâmetro	Estimativa	IC 95%	
Clássico	β	1,99	1,21	2,78
	θ	24,36	18,88	29,85
Bayesiano	β	1,99	1,25	2,78
	θ	25,074	19,36	31,57

As estimativas da abordagem clássica e da abordagem bayesiana foram muito próximas devido ao uso de prioris difusas.

O *BIC* (Bayesian Information Criterion), é uma metodologia que permite fazer seleção de modelos baseado na informação que o modelo apresenta ponderada pelo seu número de parâmetros, o modelo que apresentar o menor valor é considerado o com melhor ajuste. Essa metodologia compara apenas os resultados da abordagem clássica.

Para o modelo de reparo mínimo, o BIC foi de 186,40, utilizando como o total de valores observados, o número de sistemas do estudo.

A Figura 4.1 apresenta a curva estimada pelo estimador de Nelson-Aalen e a função média estimada pelo modelo clássico com seu respectivo intervalo de 95% de confiança.

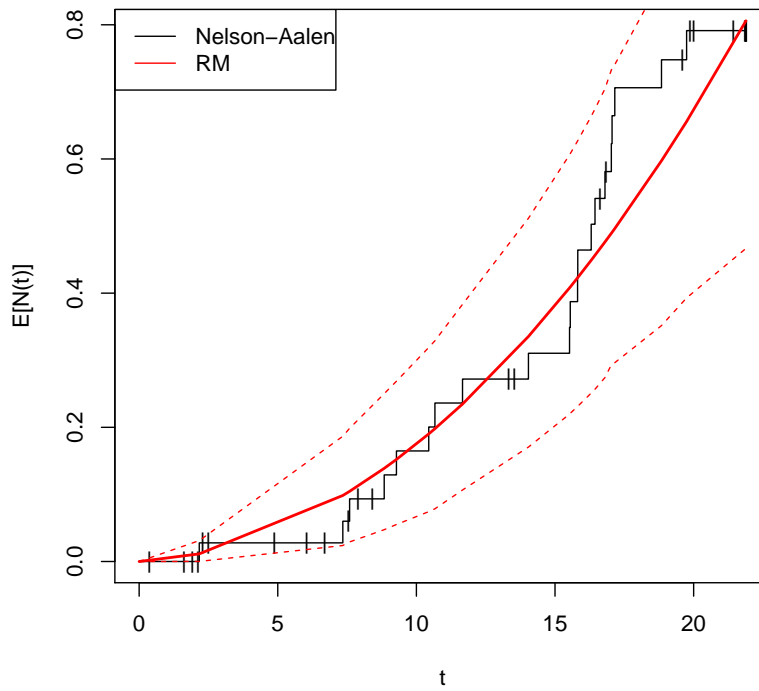


Figura 4.1: Ajuste modelo RM para transformadores

O modelo de reparo mínimo apresentou um bom ajuste, com todos os valores estimados pelo estimador de Nelson-Aalen estando dentro do intervalo de 95% de confiança do modelo.

A Tabela 4.2 apresenta os parâmetros estimados para o modelo de reparo imperfeito seguindo uma função de intensidade ARA_1 baseada no PLP .

Na estimação do parâmetro ρ pelo método clássico, foi utilizado o logito do parâmetro para evitar problemas no intervalo de confiança.

Tabela 4.2: Modelo ARA_1 nos transformadores

Método	Parâmetro	Estimativa	IC 95%	
Clássico	β	2,10	1,41	3,14
	θ	22,66	17,87	28,72
	ρ	0,50	0,05	0,95
Bayesiano	β	1,96	1,15	2,74
	θ	24,04	18,46	30,96
	ρ	0,43	0,01	0,86

Na estimação dos parâmetros bayesianos, utilizou-se MCMC para gerar 100.000 amostras da distribuição a posteriori do processo, onde obteve-se uma taxa de aceitação de 0,36.

Os parâmetros estimados para o modelo bayesiano mostraram uma diferença razoável dos parâmetros do modelo clássico, mesmo com o uso de prioris difusas. Testes de sensibilidade de priori foram realizados e mostraram que o valor da priori era pouco influente no valor estimado pelo modelo.

O parâmetro estimado para a eficiência do reparo foi de aproximadamente $\rho = 0,5$ para a metodologia clássica e bayesiana, ou seja, toda vez que o sistema é reparado após uma falha, sua intensidade de falha reduz pela metade de sua idade, que é bem diferente do suposto pelo modelo RM , onde o parâmetro de reparo é considerado $\rho = 0$.

O valor esperado de falhas do modelo não é trivial. Os valores foram aproximados numericamente por metodologias Bootstrap e Monte Carlo. Utilizou-se 7000 simulações Bootstraps com 10000 simulações de Monte Carlo em cada uma.

A Figura 4.2 apresenta o ajuste do modelo e seu intervalo de 95% de confiança comparado com o estimador de Nelson-Aalen. O modelo apresentou um bom ajuste com todos os valores do estimador não-paramétrico dentro do IC do modelo.

O BIC calculado para o modelo foi de 191,25, considerando como total de observações, o número de sistemas observados.

Como o parâmetro β estimado pelos outros modelos foi maior do que 1, mostrando que os sistemas estão deteriorando, o modelo ARI_1 pode ser utilizado. A Tabela 4.3

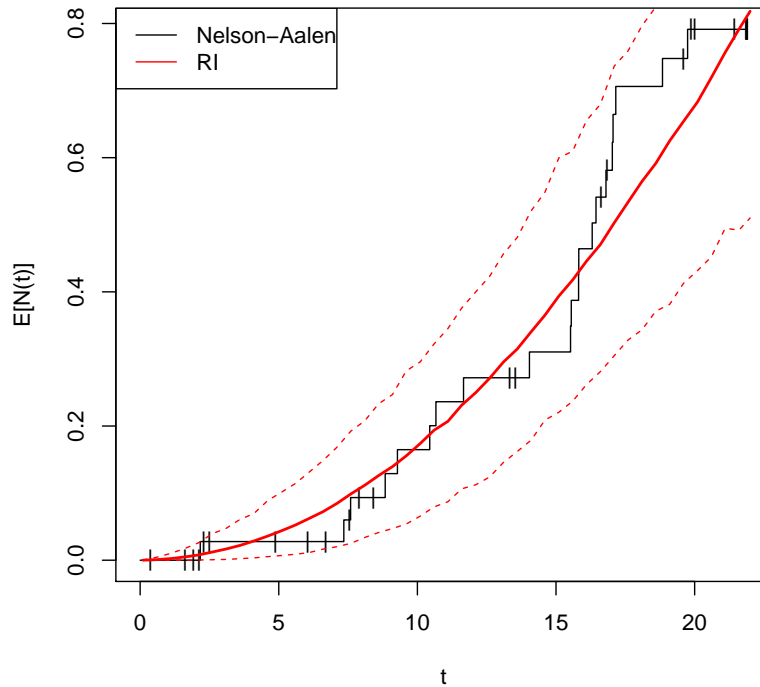


Figura 4.2: Ajuste modelo ARA_1 para transformadores

apresenta os parâmetros estimados para o modelo de reparo imperfeito seguindo uma função de intensidade ARI_1 baseada no PLP .

Tabela 4.3: Modelo ARI_1 nos transformadores

Método	Parâmetro	Estimativa	IC 95%	
Clássico	β	2,17	1,29	3,04
	θ	22,66	17,25	28,07
	ρ	0,63	0,40	0,81
Bayesiano	β	1,89	1	2,71
	θ	24,87	19,39	34,21
	ρ	0,39	0,01	0,84

A função de verossimilhança do modelo ARI_1 apresentou problemas na estimação dos parâmetros pelo método de máxima verossimilhança. Devido a muitos mínimos locais presentes na verossimilhança do modelo, o algoritmo numérico utilizado para a

estimação se tornou extremamente dependente do valor inicial dos parâmetros. Como a obtenção de uma metodologia mais eficiente para essa estimação foge do escopo deste trabalho, os parâmetros iniciais para o algoritmo de convergência foram definidos como os valores obtidos para o modelo ARA_1 .

Os parâmetros estimados para o modelo ARI_1 foram próximos dos estimados para o modelo ARA_1 , apresentando maior diferença na estimativa do parâmetro de reparo ρ .

O BIC calculado para o modelo foi de 191,24, considerando como total de observações, o número de sistemas observados. O modelo ARI_1 mostrou um ajuste levemente melhor do que o do modelo ARA_1 utilizando o BIC como critério, porém o modelo RM apresentou o menor BIC entre os modelos utilizados, de modo que ele seja a melhor escolha para modelar os dados de transformadores.

4.2 Ar Condicionado

Utilizando o banco de dados apresentado na Figura 3.4, foi ajustado o modelo de reparo mínimo. As estimativas para o modelo estão contidas na Tabela 4.5.

Tabela 4.4: Modelo RM em ar condicionado

Método	Parâmetro	Estimativa	IC 95%	
Clássico	β	1,20	1,06	1,35
	θ	152,53	103,79	201,27
Bayesiano	β	1,20	1,06	1,36
	θ	153,28	105,69	202,23

O BIC para o modelo de reparo mínimo foi de 2358,34, utilizando como o total de valores observados, o número de sistemas do estudo.

A Tabela 4.5 apresenta os parâmetros estimados para o modelo de reparo imperfeito seguindo uma função de intensidade ARA_1 baseada no PLP .

Na estimação dos parâmetros bayesianos, foram geradas 100.000 amostras da dis-

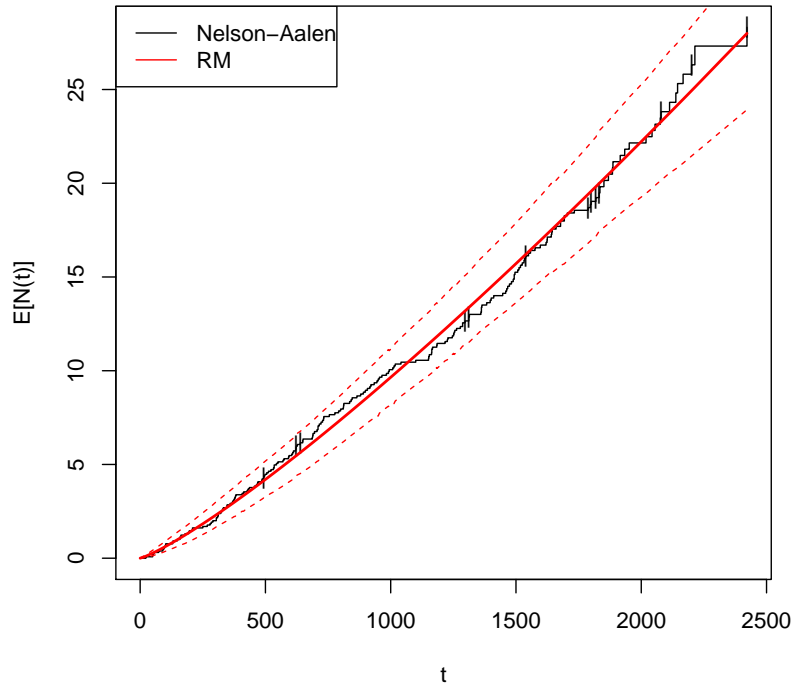


Figura 4.3: Ajuste modelo RM em ar condicionado

Tabela 4.5: Modelo ARA_1 em ar condicionado

Método	Parâmetro	Estimativa	IC 95%	
Clássico	β	1,20	1,03	1,38
	θ	137,45	95,38	198,09
	ρ	0,50	0,09	0,91
Bayesiano	β	1,19	1,01	1,36
	θ	143,11	100,34	197,17
	ρ	0,27	0,01	0,676

tribuição a posteriori do processo, onde obteve-se uma taxa de aceitação de 0,17.

Pela Figura 4.4, o modelo apresentou um bom ajuste com todos os valores do estimador não-paramétrico dentro do IC do modelo.

O BIC calculado para o modelo foi de 2365,17, considerando como total de observações, o número de sistemas observados.

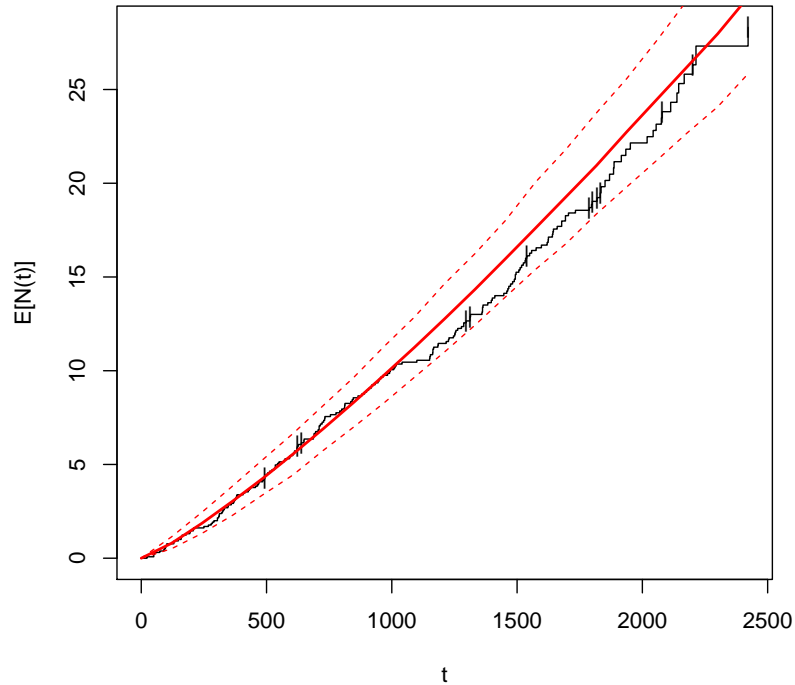


Figura 4.4: Ajuste modelo ARA_1 em ar condicionado

A Tabela 4.6 apresenta os parâmetros estimados para o modelo de reparo imperfeito seguindo uma função de intensidade ARI_1 baseada no PLP .

Tabela 4.6: Modelo ARI_1 em ar condicionado

Método	Parâmetro	Estimativa	IC 95%	
Clássico	β	1,33	1,15	1,51
	θ	123,56	83,30	163,81
	ρ	0,5	0,32	0,68
Bayesiano	β	1,23	1,07	1,37
	θ	145,87	98,83	194,88
	ρ	0,16	0,00	0,30

Os resultados para o modelo ARI_1 foram muito próximos dos apresentados pelo artigo (Pan e Rigdon, 2009). A discrepância entre as estimativas do modelo clássico e do modelo bayesiano pode ser devido ao algoritmo de maximização utilizado, pois foi

visto anteriormente que a função possui muito mínimos locais.

O *BIC* calculado para o modelo foi de 2373,48, considerando como total de observações, o número de sistemas observados. O modelo ARA_1 mostrou um ajuste melhor do que o do modelo ARI_1 utilizando o *BIC* como critério, porém o modelo *RM* apresentou o menor *BIC* entre os modelos utilizados, de modo que ele seja a melhor escolha para modelar os dados.

4.3 Dados Gerados

Utilizando o banco de dados na Figura 3.5, foi ajustado o modelo de reparo mínimo. As estimativas para o modelo estão contidas na Tabela 4.8.

Tabela 4.7: Modelo RM em dados gerados

Método	Parâmetro	Estimativa	IC 95%	
Clássico	β	1,74	1,5	1,98
	θ	4,81	3,34	6,27
Bayesiano	β	1,74	1,51	1,99
	θ	4,82	3,44	6,33

O *BIC* para o modelo de reparo mínimo foi de 355,35, utilizando como o total de valores observados, o número de sistemas do estudo.

Mesmo a amostra não apresentando os parâmetros da distribuição original, a Figura 4.5 mostra que o modelo ajustou bem os dados.

A Tabela 4.8 apresenta os parâmetros estimados para o modelo de reparo imperfeito seguindo uma função de intensidade ARA_1 baseada no *PLP*.

Na estimação dos parâmetros bayesianos, foram geradas 100.000 amostras da distribuição a posteriori do processo, onde obteve-se uma taxa de aceitação de 0,39.

Pela Figura 4.6, o modelo apresentou um bom ajuste com todos os valores do estimador não-paramétrico dentro do IC do modelo.

O *BIC* calculado para o modelo foi de 349,12, considerando como total de obser-

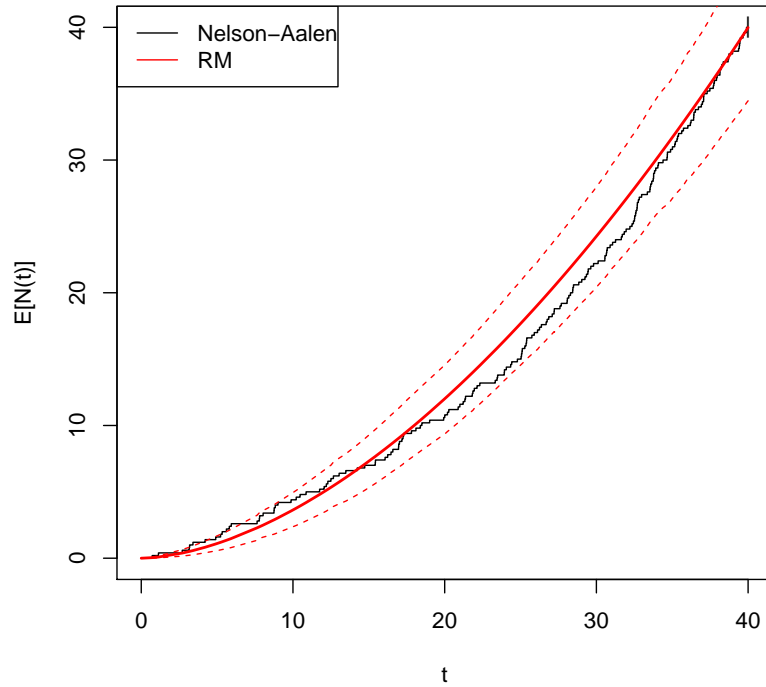


Figura 4.5: Ajuste modelo *RM* para dados gerados

Tabela 4.8: Modelo ARA_1 em dados gerados

Método	Parâmetro	Estimativa	IC 95%	
Clássico	β	2,11	1,69	2,65
	θ	3,73	2,79	4,98
	ρ	0,73	0,44	0,91
Bayesiano	β	2,19	1,72	2,532
	θ	3,65	2,60	4,73
	ρ	0,72	0,41	0,88

vações, o número de sistemas observados.

A Tabela 4.9 apresenta os parâmetros estimados para o modelo de reparo imperfeito seguindo uma função de intensidade ARI_1 baseada no *PLP*.

O *BIC* calculado para o modelo foi de 349,56, considerando como total de observações, o número de sistemas observados. O modelo ARA_1 apresentou o *BIC* menor

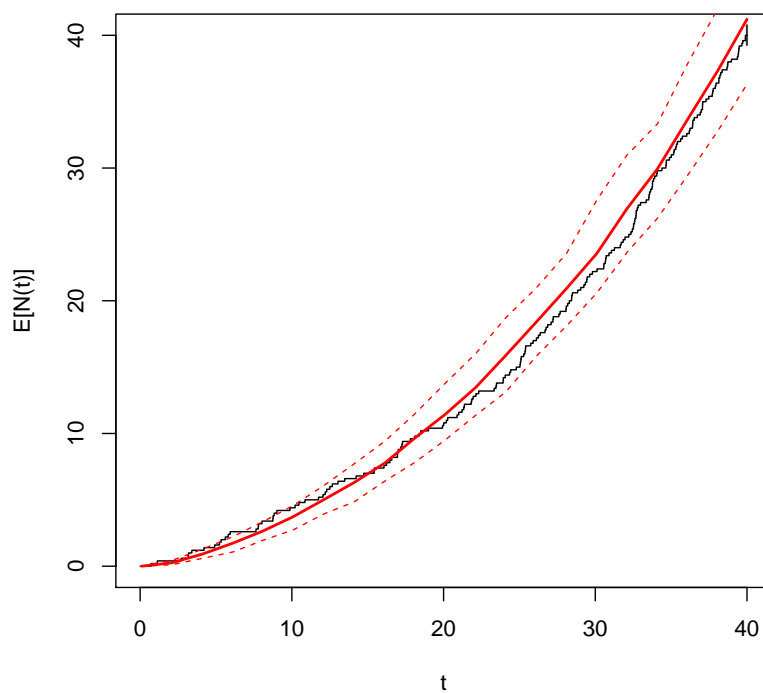


Figura 4.6: Ajuste modelo ARA_1 para dados gerados

Tabela 4.9: Modelo ARI_1 em dados gerados

Método	Parâmetro	Estimativa	IC 95%	
Clássico	β	2,02	1,67	2,37
	θ	3,60	2,44	4,76
	ρ	0,73	0,43	0,91
Bayesiano	β	2,03	1,69	2,36
	θ	3,70	2,61	4,98
	ρ	0,69	0,39	0,90

do que os outros modelos, fazendo com que ele seja a melhor escolha para modelar os dados.

Capítulo 5

Considerações Finais

Os modelos de reparo imperfeito foram propostos com o intuito de permitir a modelagem do efeito do reparo realizado sobre os sistemas. O acréscimo desse efeito no modelo traz benefícios tanto para a modelagem, tornando o modelo mais flexível, quanto para a interpretação do pesquisador, permitindo uma análise eficiente sobre a qualidade de sua manutenção. Essas características tornam conveniente o uso do modelo de reparo imperfeito para a obtenção de excelência na manutenção de equipamentos.

A abordagem clássica apresentou problemas na estimação dos parâmetros e seus intervalos de confiança em algumas situações, sendo necessário a reparametrização dos mesmo. A verossimilhança do modelo *ARI* na abordagem clássica apresentou muitos mínimos locais, fazendo com que seja necessário um algoritmo de maximização mais robusto, que por falta de tempo não pode ser estudado mas pode se tornar um interessante futuro tópico de pesquisa.

A metodologia bayesiana apresentada por Pan e Rigdon (2009) se mostrou eficiente para o ajuste de vários bancos de dados, não apresentando problemas que foram observados na abordagem clássica do modelo. Uma desvantagem da metodologia bayesiana é que não se sabe ainda uma maneira viável para a obtenção do valor esperado de falhas do processo devido a limitações computacionais.

Apesar de se mostrar uma eficiente metodologia para a modelagem de sistemas reparáveis, os resultados obtidos nesse trabalho e em simulações que não foram apresentadas, indicam que o modelo de reparo mínimo também apresentam um bom ajuste para dados gerados por um processo ARA, começando a justificar o uso de modelos de *RI* apenas para situações em que a eficiência do reparo é possivelmente acima de 0,5.

As metodologias de reparo imperfeito se mostraram uma maneira prática de se estimar a eficiência da manutenção em sistemas reparáveis, que pode ser de extrema importância em algumas aplicações, e por ser uma metodologia recente, muito ainda pode ser estudado e desenvolvido para aprimorar essas modelagens.

Referências Bibliográficas

- Aalen, O. (1978). Nonparametric inference for a family of counting processes. *The Annals of Statistics*.
- Davidson, A. e Hinkley, D. (1997). Bootstrap methods and their applications. *Cambridge University Press*.
- de Oliveira, M. D., Gilardoni, G. L., e Colosimo, E. A. (2012). Bayesian inference for power law processes with applications in repairable systems. *Journal of Statistical Planning and Inference*.
- Doyen, L. e Gaudoin, O. (2004). Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age. *Reliability Engineering and System Safety*.
- Gamerman, D. (1997). Markov chain monte carlo: Stochastic simulation for bayesian inference. *Chapman & Hall*.
- Gilardoni, G. L. e Colosimo, E. A. (2007). Optimal maintenance time for repairable systems. *Journal of Quality Technology*.
- Hammersley, J. e Handscomb, D. (1964). Monte carlo methods. *Methuen*.
- Kijima (1989). Some results for repairable systems with general repair. *Journal of Applied Probability*.

- Pan, R. e Rigdon, S. E. (2009). Bayes inference for general repairable system. *Journal of Quality Technology*.
- R Development Core Team (2014). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rigdon, S. e Basu, A., editors (2000). *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems*. John Wiley Sons, Inc., New York.