



**Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia de Energia**

**AVALIAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO TENSORIAL DA
POTÊNCIA INSTANTÂNEA EM CONDIÇÕES
SENOIDAIS EQUILIBRADAS**

**Autor: Eduardo Jorge Silva Leite Junior
Orientador: Jorge Andrés Cormane Angarita**

**Brasília, DF
2014**



EDUARDO JORGE SILVA LEITE JUNIOR

**AVALIAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO TENSORIAL DA POTÊNCIA
INSTANTÂNEA EM CONDIÇÕES SENOIDAIS EQUILIBRADAS**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de Energia da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Energia.

Orientador: Prof. Jorge Andrés Cormane Angarita

**Brasília, DF
2014**

CIP – Catalogação Internacional da Publicação*

Jorge, Eduardo.

Avaliação da representação tensorial da potência instantânea em condições senoidais equilibradas / Eduardo Jorge Silva Leite Junior. Brasília: UnB, 2014. 67 p.: il. ; 29,5 cm

Monografia (Graduação) – Universidade de Brasília
Faculdade do Gama, Brasília, 2014. Orientação: Jorge Andrés
Cormane Angarita.

1. Tensor potência elétrica. 2. Tensor de deformações. 3. Potência instantânea. I. Jorge, Cormane. II. Avaliação da representação tensorial da potência instantânea em condições senoidais equilibradas.

CDU Classificação



**AVALIAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO TENSORIAL DA POTÊNCIA
INSTANTÂNEA EM CONDIÇÕES SENOIDAIS EQUILIBRADAS**
Eduardo Jorge Silva Leite Junior

Monografia submetida como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Energia da Faculdade UnB Gama - FGA, da Universidade de Brasília, em 27/11/2014 apresentada e aprovada pela banca examinadora abaixo assinada:

Prof. Dr.: Jorge Andrés Cormane Angarita, UnB/ FGA
Orientador

Prof. Dr.: Daniel Mauricio Muñoz Arboleda, UnB/ FGA
Membro Convidado

Prof. Dr.: Luciano Gonçalves Noletto, UnB/ FGA
Membro Convidado

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e familiares. Em especial a Fernando e Luciana pelo apoio, paciência, carinho e confiança. Sei que não mediram esforços para a realização desse sonho. Sem a presença deles, a caminhada seria mais longa e mais difícil.

A Ridina Silva Leite pelos ensinamentos e pela demonstração constante de amor, força e coragem.

A Amarilio Vieira Leite pelo exemplo de perseverança e humildade.

A Jorge Andrés Cormane Angarita pelo tempo destinado a essa orientação. Agradeço pela motivação, apoio, paciência e pela oportunidade de aprendizado.

Aos meus professores de graduação da Universidade de Brasília: Profa. Dra. Cristina de Abreu Silveira, Prof. Dr. Fábio Macedo Mendes, Prof. Dr. Luciano Noletto, Prof. Dr. Marcos Chaffim, Prof. Dr. Pedro Nery Lavinias e a Profa. Dra. Rita Silva.

Aos meus amigos pelo apoio e cumplicidade.

Aos colegas, professores e funcionários da UnB que, direta ou indiretamente, contribuíram para realização deste trabalho. Obrigado.

As academias coroam com igual zelo o talento
e a ausência dele. Carlos Drummond de Andrade.

RESUMO

Este trabalho se propôs a estudar o comportamento da potência elétrica instantânea em condições senoidais equilibradas por meio da definição do tensor potência instantânea. Esse tensor é definido para que seja possível aplicar uma analogia entre os estudos da mecânica dos meios contínuos para deformação e os estudos das potências ativa e reativa de um sistema elétrico trifásico. Procura-se relacionar o tensor potência elétrica e suas componentes simétrica e antissimétrica com as definições das parcelas de potência ativa e reativa da potência instantânea. A proposta principal do documento é analisar as alterações na forma da representação espacial do tensor potência instantânea assim como é feito na representação do elemento de volume cúbico do tensor de deformações. Dessa forma, fundamenta-se uma interpretação geométrica que associa qual componente da potência altera o volume total e qual a componente da potência que provoca alterações rotacionais da representação espacial do tensor potência elétrica instantânea.

Palavras-chave: Tensor potência elétrica. Tensor de deformações. Potência reativa instantânea.

ABSTRACT

This work aimed to study the behavior of instantaneous electrical power in balanced sinusoidal conditions by defining the instantaneous power tensor. This tensor is defined so that it is possible to apply an analogy between the study of continuum mechanics for deformation and the study of active and reactive power in a three phase electrical system. It seeks to relate the tensor electric power and its symmetric and antisymmetric components with the definitions of the parcel of active and reactive power of instantaneous power. The main purpose of the document is to analyze the changes in the form of spatial representation of the instantaneous power tensor as it has done in the representation of the cubic volume element of the strain tensor. Thus, is based on a geometric interpretation that associated what power component alters the total volume and what power component causes rotational changes of the spatial representation of the instantaneous power tensor.

Keywords: Electrical power tensor. Strain tensor. Instantaneous reactive power.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Diagrama ilustrativo de um circuito monofásico.....	16
Figura 2 - Sistema trifásico de quatro condutores.	20
Figura 3 - Representação das potências ativa e reativa em um sistema trifásico.	22
Figura 4 - Representação de um vetor em \mathbb{R}^3	25
Figura 5 - Representação espacial dos vetores unitários.	26
Figura 6 - Representação espacial do vetor c como produto vetorial entre os vetores a e b. ...	27
Figura 7- Representação espacial dos vetores tensão e corrente elétrica.	31
Figura 8 - Representação de um sistema de n fases.	34
Figura 9 - Representação espacial do tensor tensão de Cauchy.	35
Figura 10 - Representação geométrica do tensor potência instantânea.	36
Figura 11 - Análise de um sistema elétrico tomando como base a forma geométrica do tensor potência instantânea.....	36
Figura 12 - Corpo sujeito a uma deformação.	37
Figura 13 - Transformação afim de um cubo.	38
Figura 14 - Representação geométrica do deslocamento devido à rotação.	40
Figura 15 - Face do cubo sujeita a uma deformação de extensão.	41
Figura 16 - Distorção entre os eixos x e y.	42
Figura 17 - Diminuição do ângulo entre os semieixos positivos x e y.....	43
Figura 18 - Circuito resistivo equilibrado.....	44
Figura 19 - Resultado para simulação do circuito resistivo equilibrado.	45
Figura 20 - Visões das faces do cubo em deformação de extensão.....	46
Figura 21 - Circuito RL equilibrado.	47
Figura 22 - Resultado para simulação do circuito RL equilibrado.....	48
Figura 23 - Visões das faces do cubo em deformação de extensão: circuito RL.	49
Figura 24 - Circuito resistivo desequilibrado.	50
Figura 25 - Resultado para simulação do circuito desequilibrado.....	51
Figura 26 - Visões das faces do cubo em deformação de extensão: circuito desequilibrado...	52
Figura 27 - Potência ativa e reativa do circuito resistivo equilibrado.	57
Figura 28 - Elemento de volume infinitesimal.	58
Figura 29 - Gráfico das potências para o circuito RL equilibrado.	61
Figura 30 - Gráfico das potências para o circuito desequilibrado.	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados do circuito resistivo equilibrado.....	44
Tabela 2 - Dados do circuito RL equilibrado.	47
Tabela 3 - Dados do circuito resistivo desequilibrado.	50

LISTA DE SÍMBOLOS

$v(t)$	Tensão no domínio do tempo.	[V]
$i(t)$	Corrente no domínio do tempo.	[A]
V	Tensão RMS.	[V]
I	Corrente RMS.	[A]
RMS	<i>root-mean-square</i> .	
V_{max}	Tensão de pico para um sinal senoidal.	[V]
I_{max}	Corrente de pico para um sinal senoidal.	[A]
θ	Ângulo de fase para tensão.	[rad]
ω	Frequência angular.	[rad/s]
f	Frequência do sistema.	[Hz]
T	Período da função.	[s]
$p(t)$	Potência elétrica instantânea.	[W]
q	Carga elétrica.	[C]
w	Energia.	[J]
i	Corrente elétrica.	[A]
p_a	Potência instantânea ativa.	[W]
p_q	Potência instantânea reativa.	[W]
P	Potência ativa.	[VAR]
Q	Potência reativa.	[VAR]
S	Potência aparente.	[VA]
V_{ll}	Tensão entre fases.	[V]
δ_{ij}	Delta de Kronecker.	
ε_{ijk}	Símbolo de Levi-Civita.	
\mathbf{a}	Vetor em \mathbb{R}^3 .	
\mathbf{a}^T	Transposto de \mathbf{a} .	
$ \mathbf{a} $	Módulo do vetor \mathbf{a} .	
$\hat{\mathbf{e}}$	Vetores unitários.	
\otimes	Produto tensorial.	
\mathbf{T}_{ij}	Tensor de segunda ordem.	
\mathbf{T}_{ij}^T	Tensor transposto de \mathbf{T}_{ij} .	
\mathbf{T}_{ij}^{sim}	Componente simétrica do tensor \mathbf{T}_{ij} .	
\mathbf{T}_{ij}^{ant}	Componente antissimétrica do tensor \mathbf{T}_{ij} .	
tr	Traço.	
\mathbf{v}	Vetor tensão elétrica.	[V]
\mathbf{i}	Vetor corrente elétrica.	[A]
\mathbf{i}_p	Componente ativa da corrente elétrica.	[A]
\mathbf{i}_q	Componente reativa da corrente elétrica.	[A]
$\mathbf{q}(t)$	Vetor potência reativa instantânea.	[VAR]
\wp_{ij}	Tensor potência elétrica instantânea.	[W]

φ_{ij}^{sim} Componente simétrica do tensor φ_{ij} .
 φ_{ij}^{ant} Componente antissimétrica do tensor φ_{ij} .
 σ Tensor tensão de Cauchy.

[N/m²]

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	13
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
1.3	METODOLOGIA DE PESQUISA	14
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	15
2	CONCEITOS E DEFINIÇÕES	16
2.1	POTÊNCIA INSTANTÂNEA MONOFÁSICA EM REGIME SENOIDAL EQUILIBRADO	16
2.1.1	Potência elétrica instantânea	17
2.1.2	Potência ativa	18
2.1.3	Potência reativa	19
2.1.4	Potência aparente	19
2.2	POTÊNCIA INSTANTÂNEA TRIFÁSICA EM REGIME SENOIDAL EQUILIBRADO	19
2.2.1	Potência instantânea	21
2.2.2	Potência ativa	21
2.2.3	Potência aparente	21
2.2.4	Potência reativa	22
2.3	CONCEITOS E DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS	22
2.3.1	Grandeza escalar, vetorial e tensorial	23
2.3.2	Notação de Einstein, delta de Kronecker e o símbolo de Levi-Civita	23
2.3.3	O vetor e sua representação em um sistema em \mathbb{R}^3	24
2.3.4	Módulo de um vetor e vetores unitários	25
2.3.5	Produto escalar, ângulo entre vetores, ortogonalidade e produto vetorial	26
2.3.6	Produto tensorial, tensor de segunda ordem e a decomposição de um tensor	28
2.3.7	Traço de um tensor	29
2.3.8	Vetor dual	29
3	ANÁLISE TENSORIAL DE UM SISTEMA ELÉTRICO DE POTÊNCIA TRIFÁSICO	30
3.1	TENSÃO E CORRENTE ELÉTRICA	30
3.2	DECOMPOSIÇÃO DO VETOR CORRENTE ELÉTRICA	30

3.3	CONCEITOS VETORIAIS APLICADOS A SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA	31
3.4	ANÁLISE TENSORIAL DE SEGUNDA ORDEM	32
3.5	A INTERPRETAÇÃO DOS FENÔMENOS FÍSICOS A PARTIR DA ANÁLISE TENSORIAL	34
3.5.1	Estado de deformação	37
3.5.2	Rotação.....	39
3.5.3	Deformação pura.....	41
4	SIMULAÇÕES E ANÁLISE DE RESULTADOS.....	44
4.1	CIRCUITO RESISTIVO EQUILIBRADO.....	44
4.2	CIRCUITO EQUILIBRADO RESISTIVO E INDUTIVO.....	47
4.3	CIRCUITO RESISTIVO DESEQUILIBRADO	49
5	CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES.....	53
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54
	APÊNDICE A	56

1 INTRODUÇÃO

As motivações, os objetivos e a estrutura deste trabalho serão explicitadas nesse capítulo, bem como a metodologia de pesquisa.

1.1 MOTIVAÇÃO

O aumento de dados que estão sendo registrados em redes de energia elétrica e a necessidade de desenvolver novos métodos capazes de extrair informações úteis a partir desses registros constituem um campo de pesquisa muito ativo e desafiador. Monitoramento da qualidade de energia inteligente é uma dessas áreas que podem se beneficiar da combinação de princípios de manipulação de dados e algoritmos de processamento de sinais. Um exemplo é a análise instantânea de distúrbios registrados durante o monitoramento da rede de energia a qual pode ser usada para localizar falhas e analisar o funcionamento do dispositivo de proteção. O primeiro passo para realizar qualquer um desses objetivos consiste na extração de características significativas das formas de onda que estão relacionadas com os fenômenos estudados (Barrera *et al.*, 2012). Os estudos sobre qualidade de energia são atualmente baseados em duas causas principais: a alta sensibilidade dos equipamentos elétricos e eletrônicos e nos requisitos de continuidade do serviço em condições críticas (Jagua *et al.*, 2010).

Como proposta para extração de características, este trabalho estuda o comportamento da potência elétrica instantânea em um sistema trifásico utilizando análise tensorial, ferramenta de estudo recente no ramo de sistemas elétricos de potência. Em 1986, o engenheiro elétrico Dai Xianzhong definiu a potência reativa em um sistema monofásico como sendo o produto vetorial do vetor tensão com o vetor corrente elétrica. Desta forma introduziu-se uma grandeza vetorial no estudo da potência elétrica. Porém, os sistemas polifásicos, em especial os trifásicos, são mais utilizados (por causa da transmissão e transformação de potência). Em 2004, Dai Xianzhong no trabalho intitulado “Generalized Theory of Instantaneous Reactive Quantity for Multiphase Power System” reuniu as teorias dispersas até então desenvolvidas para equacionar um sistema elétrico de potência polifásico por meio de uma análise tensorial. Até então algumas definições para sistemas trifásicos como as de Peng em 1996 e em 1998 foram apresentadas, porém definiam a potência reativa como um vetor e não era possível utilizar essa definição para sistemas com mais de três fases (Dai, 2004).

Depois de 2004 a base matemática para a análise tensorial em sistemas elétricos estava, em partes, fundamentada e disponível para diversas aplicações. Entre as aplicações que

surgiram, destacou-se a utilização da análise tensorial da potência elétrica instantânea de forma análoga ao estudo da deformação na mecânica dos meios contínuos (Ustariz *et al.*, 2010).

1.2 OBJETIVO GERAL E OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Este trabalho tem como objetivo geral estudar a analogia entre os conceitos tensoriais introduzidos por Daí em 2004 e os conceitos tensoriais aplicados no estudo de deformações para caracterizar o comportamento da potência elétrica instantânea.

O presente trabalho tem como objetivos específicos:

- Reunir definições e conceitos sobre a aplicação da análise tensorial em sistemas elétricos de potência;
- Fundamentar as definições e relacioná-las com as definições encontradas na mecânica dos meios contínuos;
- Fundamentar uma ferramenta de visualização do comportamento do tensor potência elétrica instantânea.

1.3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Inicialmente foi feita uma revisão bibliográfica sobre análise tensorial aplicada em sistemas elétricos de potência para tomar ciência dos trabalhos já realizados nessa área. Essa pesquisa foi importante para o conhecimento de qual é a tendência dos estudos nessa área.

Como segundo passo, tornou-se necessário uma pesquisa bibliográfica sobre os conceitos e definições aplicados no estudo da potência elétrica instantânea. A pesquisa bibliográfica se estendeu para os conceitos matemáticos das grandezas tensoriais e suas principais operações e propriedades. Outra área pesquisada foi sobre mecânica dos meios contínuos, onde procurou-se entender os princípios do tensor de tensão de Cauchy e do tensor deformação.

A partir dessas pesquisas foi possível reunir, em um terceiro passo, todos os conceitos e fazer as correlações necessárias para fundamentar teoricamente a análise tensorial de um sistema elétrico. A última etapa consistiu em simulações realizadas para comparar os resultados obtidos com os apresentados na teoria fundamentada.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo introduz o trabalho, destacando a motivação, os objetivos, a metodologia e a estrutura.

O segundo capítulo traz a revisão bibliográfica referente aos conceitos de potência elétrica instantânea e suas componentes. Traz também conceitos matemáticos sobre grandezas vetoriais e tensoriais que serão aplicados no terceiro capítulo.

O terceiro capítulo aborda a análise tensorial do sistema elétrico de potência. Inicialmente define-se potência elétrica instantânea em termos das grandezas vetoriais e em um segundo momento aplica-se os conceitos sobre grandezas tensoriais. Traz também a definição da potência elétrica como sendo uma grandeza tensorial e relaciona as novas definições com as apresentadas anteriormente. Nesse capítulo é feita a analogia entre a teoria tensorial para circuitos elétricos e a análise tensorial aplicada na mecânica dos meios contínuos no estudo das deformações. Por fim apresenta-se a representação espacial do tensor potência instantânea e a influência das potências ativa e reativa nessa representação.

O quarto capítulo desse trabalho traz simulações de circuitos elétricos aplicando a teoria proposta de visualização do comportamento da potência elétrica instantânea. É nesse capítulo que serão apresentadas e analisadas as imagens do modelo.

O quinto e último capítulo traz uma discussão sobre os resultados obtidos no trabalho e sobre importância deles. Esse capítulo também apresenta quais as expectativas de continuidade para o estudo.

2 CONCEITOS E DEFINIÇÕES

Neste trabalho serão abordadas várias definições sobre sistemas elétricos. As representações dessas definições podem ser levemente diferentes se comparadas às bibliografias disponíveis. Para evitar enganos, esse capítulo abordará as definições utilizadas no trabalho bem como as suas representações.

2.1 POTÊNCIA INSTANTÂNEA MONOFÁSICA EM REGIME SENOIDAL EQUILIBRADO

Segundo Alexander e Sadiku (2009), um sistema de alimentação alternado monofásico é constituído por um gerador ligado por meio de um par de fios (linha de transmissão) a uma carga. A representação mais comum encontrada na literatura de um sistema monofásico alternado de dois fios é mostrada na Fig. 1.

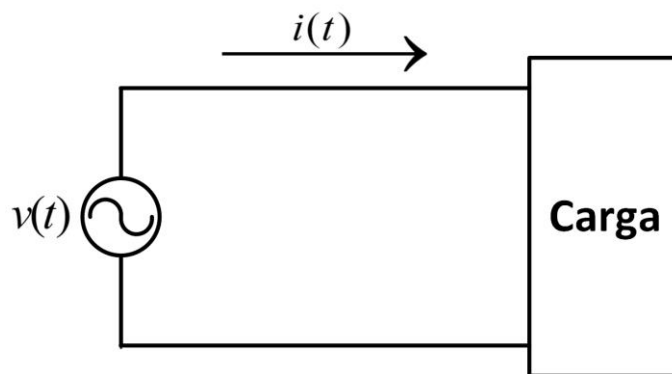


Figura 1 - Diagrama ilustrativo de um circuito monofásico.

No domínio do tempo, a tensão $v(t)$, em volts, e a corrente $i(t)$, em ampère, são definidas de acordo com as expressões (2.1) e (2.2), nas quais são usadas as formas compactas v e i para tensão e corrente no domínio do tempo.

$$v = \sqrt{2} V \text{ sen}(\omega t) \text{ [V]} \quad (2.1)$$

$$i = \sqrt{2} I \text{ sen}(\omega t - \theta) \text{ [A]} \quad (2.2)$$

Onde V e I são os valores eficazes ou *RMS* (do inglês Root-Mean-Square) da tensão e da corrente respectivamente (IEEE 1459, 2010). O valor *RMS* para tensão e para a corrente é definido como a raiz do valor médio quadrático para uma forma de onda senoidal, tal como expresso em (2.3).

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [v(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[V_{max} \text{sen} \left(\frac{2\pi t}{T_0} \right) \right]^2 dt} \quad (2.3)$$

$$= \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} [V]$$

A relação do valor eficaz como o valor máximo do sinal senoidal é dado pela equação $V = V_{max}/\sqrt{2}$ [V]. De forma semelhante é possível achar a relação para a forma de onda senoidal da corrente, sendo assim, $I = I_{max}/\sqrt{2}$ [A].

O parâmetro de deslocamento no tempo θ na Eq. (2.2) é chamado de ângulo de fase. A frequência angular ω (em radianos por segundo) está relacionada à frequência do sistema f de acordo com a Eq. (2.4).

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (2.4)$$

A frequência f , em hertz, é definida como o número de períodos por unidade de tempo. Por definição se o período T é o número de segundos por ciclo consequentemente, a frequência será (Thomas, 2011)

$$f = \frac{1}{T} [Hz]. \quad (2.5)$$

2.1.1 Potência elétrica instantânea

O termo potência corresponde à taxa de variação da energia com o tempo (em Joules por segundos ou Watt, abreviada por W)

$$p(t) = \frac{dw}{dt} [W]. \quad (2.6)$$

Em circuitos elétricos é útil expressar a potência em termos da tensão e corrente. Definindo a corrente elétrica i como a taxa de variação com relação ao tempo da carga elétrica dq em um determinado ponto do circuito e a tensão v como a variação de energia dw que uma carga elétrica está submetida ao passar através de um circuito elétrico, tem-se que (Thomas, 2011)

$$i = \frac{dq}{dt} [A] \quad (2.7)$$

$$v = \frac{dw}{dq} [V], \quad (2.8)$$

portanto, aplicando a regra da cadeia em (2.6), tem-se

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dq} \right) \left(\frac{dq}{dt} \right) [W]. \quad (2.9)$$

Utilizando a tensão e a corrente no domínio do tempo, define-se a potência elétrica instantânea

$$p(t) = v \cdot i \text{ [W]}. \quad (2.10)$$

Substituindo as equações para tensão (2.1) e para corrente (2.2) na Eq. (2.10), tem-se o seguinte desenvolvimento

$$p(t) = [\sqrt{2} V \text{ sen}(\omega t)] \cdot [\sqrt{2} I \text{ sen}(\omega t - \theta)] \text{ [W]}. \quad (2.11)$$

Utilizando as identidades trigonométricas necessárias para simplificar a Eq. (2.11), tem-se que

$$p(t) = VI \cos(\theta) - VI \cos(\theta) \cos(2\omega t) - VI \text{ sen}(\theta) \text{ sen}(2\omega t) \text{ [W]}. \quad (2.12)$$

Escrevendo a potência instantânea na forma da Eq. (2.12), observa-se que o primeiro termo não varia com o tempo e os outros dois termos variam. Esse primeiro termo é chamado de componente independente do tempo e os outros dois termos formam a componente dependente do tempo.

A potência elétrica pode também ser escrita como

$$p(t) = \underbrace{VI \cos(\theta) [1 - \cos(2\omega t)]}_{p_a} - \underbrace{VI \text{ sen}(\theta) \text{ sen}(2\omega t)}_{p_q} \text{ [W]}. \quad (2.13)$$

Observa-se que a potência instantânea é composta por duas parcelas e pode ser reescrita da seguinte maneira

$$p(t) = p_a + p_q \text{ [W]}. \quad (2.14)$$

A primeira parcela p_a , chamada de parcela ativa da potência instantânea ou de potência instantânea ativa, corresponde à potência produzida pela componente ativa da corrente, ou seja, pela componente que está em fase com a tensão. Representa a taxa do fluxo de energia no sistema. A segunda parcela p_q , chamada de parcela reativa da potência instantânea ou potência instantânea reativa, corresponde à potência produzida pela componente reativa da corrente, ou seja, pela componente ortogonal à tensão (IEEE 1459, 2010).

2.1.2 Potência ativa

A potência ativa P é definida como sendo o valor médio da potência instantânea. Matematicamente define-se o valor médio de uma onda periódica na Eq. (2.15) (Thomas, 2011).

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \text{ [W]} \quad (2.15)$$

Substituindo (2.12) em (2.15), tem-se,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \{ [VI \cos(\theta)] - [VI \cos(\theta) \cos(2\omega t)] - [VI \sin(\theta) \sin(2\omega t)] \} dt = VI \cos(\theta) [W]. \quad (2.16)$$

De acordo com o desenvolvimento em (2.16), verifica-se que o valor médio da potência instantânea é diferente de zero e não depende do tempo.

2.1.3 Potência reativa

A amplitude do termo $\sin(2\omega t)$ mostrado em (2.13) tem uma forma muito parecida com a potência média, exceto que o primeiro envolve $\sin(\theta)$ em vez do $\cos(\theta)$. Este fator de amplitude é chamado de potência reativa Q e tem a unidade de volt-ampère-reactivo ou VAR (Thomas, 2011).

$$Q = VI \sin(\theta) [VAR] \quad (2.17)$$

Substituindo (2.16) e (2.17) em (2.13) tem-se que

$$p(t) = P[1 - \cos(2\omega t)] - Q \sin(2\omega t) [W]. \quad (2.18)$$

2.1.4 Potência aparente

Outra definição importante no estudo de sistemas de potência é a definição de potência aparente S . Definida como sendo o produto entre os valores *RMS* da tensão e da corrente, pode ser escrita da seguinte forma

$$S = VI [VA]. \quad (2.19)$$

Para um circuito monofásico, a potência aparente pode ser interpretada como sendo o valor máximo da potência ativa que pode ser entregue à carga quando os valores da tensão e da corrente *RMS* são mantidos constantes. A unidade da potência aparente é dada em VA (volts-ampère). A potência aparente se relaciona com as potências ativa e reativa pela Eq. (2.20) (IEEE 1459, 2010; Thomas, 2011).

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} [VA] \quad (2.20)$$

O fluxo das potências ativa e reativa é um dos temas mais importantes nos estudos de sistemas elétricos de potência.

2.2 POTÊNCIA INSTANTÂNEA TRIFÁSICA EM REGIME SENOIDAL EQUILIBRADO

Circuitos ou sistemas em que as fontes de tensão operam nas mesmas frequências, mas com ângulos de fases diferentes são conhecidos como circuitos polifásicos. Há muito tempo o

sistema polifásico mais usado e mais econômico é o trifásico. Um sistema trifásico é representado por um gerador que consiste de três fontes de tensão com a mesma amplitude e frequência, mas defasadas 120° entre elas. Um sistema trifásico pode ser composto por três (três fases) ou quatro (três fases e neutro) condutores. O último caso é o mais comumente aplicado no âmbito da distribuição e consumo de energia elétrica já o primeiro caso é mais utilizado no processo de geração e transmissão de energia elétrica. Há pelo menos três razões principais que tornam a utilização de sistemas trifásicos viável (Alexander, 2009). A primeira delas é que a maior parte da energia elétrica é gerada e distribuída por meio de sistemas trifásicos. A segunda razão é que a potência instantânea em um sistema trifásico poderá ser constante o que resulta em uma transmissão de energia uniforme e em menos vibração nas máquinas trifásicas. Em terceiro lugar, para a mesma quantidade de energia, o sistema trifásico é mais econômico do que o monofásico, pois, nessas condições, a quantidade de fio necessária para um sistema de três fases é menor do que a necessária para um sistema de fase única (Alexander, 2009).

Um sistema trifásico de quatro condutores é representado pela Fig. 2.

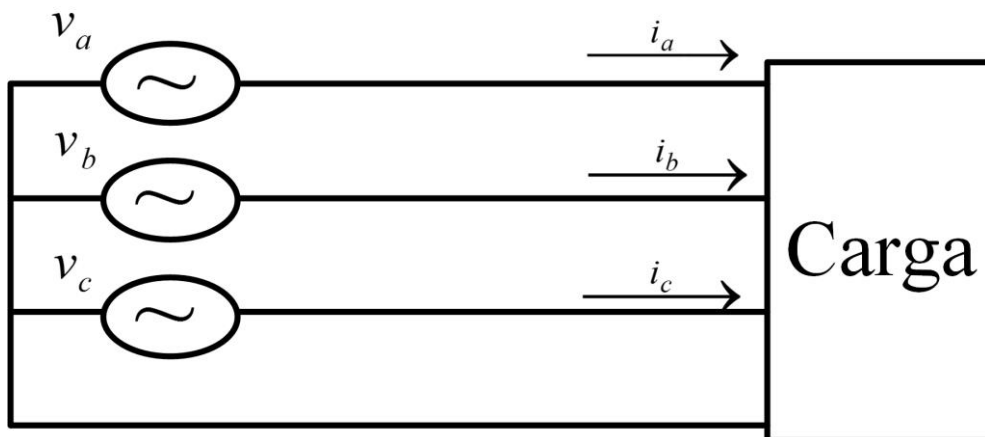


Figura 2 - Sistema trifásico de quatro condutores.

Onde v_a , v_b e v_c são as tensões entre as fases e uma referência, no caso, neutro. As correntes i_a , i_b e i_c são as correntes nas linhas a , b e c , respectivamente.

Em um sistema trifásico em regime senoidal e equilibrado, tem-se que as tensões v_a , v_b e v_c são defasadas igualmente tal que, algebricamente, a soma delas é igual à zero. Em (2.21) encontra-se o equacionamento para essa condição (IEEE 1459, 2010).

$$\begin{aligned}
 v_a &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}(\omega t) \text{ [V]} \\
 v_b &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \text{ [V]} \\
 v_c &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}(\omega t + 120^\circ) \text{ [V]}
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Onde V é a tensão entre a fase e o neutro em *RMS*. A amplitude da forma de onda pode também ser representada como sendo a tensão entre uma fase e outra também em *RMS*, nesse caso usa-se V_{ll} .

Nota-se que as equações são similares à equação da tensão para um circuito monofásico, porém, adiciona-se um fator de defasagem. De forma análoga teremos as equações em (2.22) para as correntes de linha, ou seja, para as correntes em cada condutor (IEEE 1459, 2010).

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}(\omega t - \theta) \text{ [A]} \\ i_b &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}(\omega t - \theta - 120^\circ) \text{ [A]} \\ i_c &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}(\omega t - \theta + 120^\circ) \text{ [A]} \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.2.1 Potência instantânea

A potência instantânea em um sistema trifásico senoidal e equilibrado pode ser considerada como sendo a soma das potências instantâneas de cada fase, ou seja,

$$p(t) = v_a \cdot i_a + v_b \cdot i_b + v_c \cdot i_c \text{ [W]}. \quad (2.23)$$

Substituindo os valores das tensões e das correntes em (2.23) tem-se a seguinte expressão

$$\begin{aligned} p(t) &= 2 \cdot V \cdot I \cdot [\text{sen}(\omega t) \cdot \text{sen}(\omega t - \theta) \\ &\quad + \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \cdot \text{sen}(\omega t - \theta - 120^\circ) \\ &\quad + \text{sen}(\omega t + 120^\circ) \cdot \text{sen}(\omega t - \theta + 120^\circ)] \text{ [W]}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Utilizando as identidades trigonométricas necessárias para simplificar a Eq. (2.24), tem-se que (Alexander, 2009)

$$p(t) = 3VI \cos(\theta) \text{ [W]}. \quad (2.25)$$

2.2.2 Potência ativa

Por definição, a potência ativa corresponde à potência média da potência instantânea. Como a potência instantânea não varia no tempo, o valor médio é correspondente ao seu próprio valor e pode ser validado usando a equação da definição de potência média mostrada na Eq. (2.16), ou seja (IEEE 1459, 2010)

$$P = p(t) = 3VI \cos(\theta) \text{ [W]}. \quad (2.26)$$

2.2.3 Potência aparente

Sabe-se que a potência aparente para um circuito monofásico é definida como sendo o produto entre os valores RMS da tensão e da corrente. Para um circuito trifásico equilibrado e

equilibrado considera-se a existência três circuitos monofásicos. Sendo assim a potência aparente trifásica pode ser escrita da seguinte forma (Alexander, 2009)

$$S = 3VI \text{ [VA]}. \quad (2.27)$$

2.2.4 Potência reativa

Definida na subseção 2.1.3, a potência reativa pode ser interpretada como sendo a componente da potência aparente ortogonal à potência ativa, ou seja,

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \text{ [VAR]}. \quad (2.28)$$

Tem-se que a potência reativa total para um circuito trifásico equilibrado tem a seguinte equação (Alexander, 2009)

$$Q = 3VI \text{sen}(\theta) \text{ [VAR]}. \quad (2.29)$$

De forma ilustrativa é possível ver a diferença entre os conceitos físicos de potência ativa e reativa para um sistema trifásico. De acordo com a Fig. 3, observa-se que a potência ativa tem o mesmo sentido da corrente e, portanto, contribui para o acréscimo de energia na carga. A potência reativa, no entanto, tem sentido perpendicular ao sentido da potência ativa e é representada de forma circular para indicar que é uma quantidade da potência relacionada à geração de campos magnéticos circulantes no sistema (Ustariz, 2010).

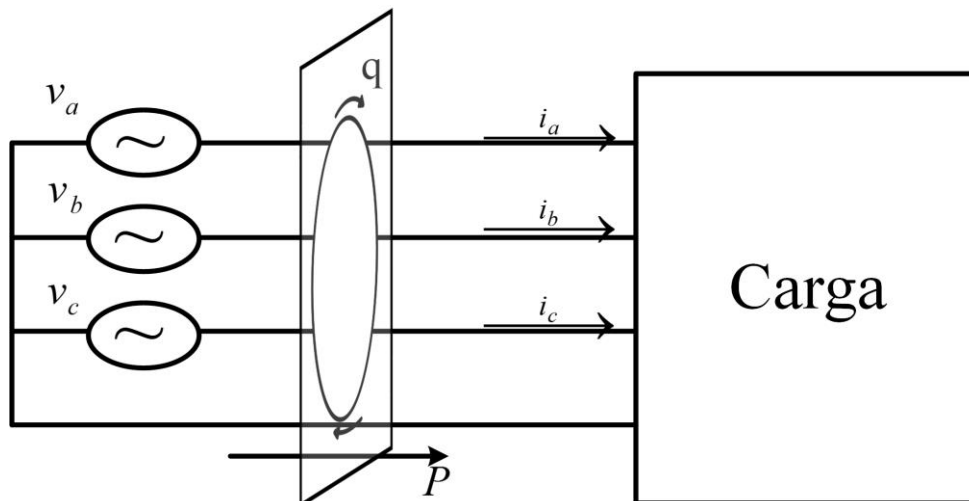


Figura 3 - Representação das potências ativa e reativa em um sistema trifásico.

2.3 CONCEITOS E DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS

Os conceitos e as definições abordadas nesse trabalho não se restringem apenas aos conceitos expostos nas seções 2.1 e 2.2. Também será necessário o estudo dos conceitos associados às grandezas vetoriais e tensoriais, suas operações básicas e a relação entre elas. Esta

seção apresenta as definições matemáticas para um espaço tridimensional, \mathbb{R}^3 , embora nem todas sejam restritas a essa dimensão.

2.3.1 Grandeza escalar, vetorial e tensorial

A grandeza escalar remete ao conceito da análise de uma propriedade física, estabelecida por meio de um valor apropriado a uma unidade pré-definida. Por exemplo, a quantidade de tempo, pode ser denotada por meio de um valor numérico (magnitude) e uma unidade (Nussenzveig, 2002).

Uma grandeza vetorial é uma grandeza que pode ser representada por um vetor, isto é, uma grandeza que pode ser caracterizada por um módulo, uma direção e um sentido. Entre as grandezas físicas que podem ser representadas por vetores estão o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a força e o campo magnético (Halliday, 2002).

Algumas propriedades físicas não podem ser expressas nem na forma escalar nem na forma vetorial, pois possui algumas características a mais. No caso da intensidade do tensor tensão mecânica \mathbf{F}/\mathbf{a} em uma superfície tem-se que \mathbf{F} é o vetor força aplicado na superfície e \mathbf{a} é o vetor de magnitude igual à área na direção normal. A divisão do vetor força pelo vetor área não é definida, fazendo necessária a introdução de uma nova grandeza. Essa grandeza deve relacionar a divisão de tal forma que, dada à área, seja possível encontrar a força pela multiplicação $\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{a}$, onde a nova grandeza \mathbf{T} nesse caso é o tensor tensão. É uma grandeza com a qual duas direções podem ser associadas e não apenas uma como o caso da grandeza vetorial ou nenhuma como o caso da grandeza escalar. Essa nova grandeza é chamada de tensor de segunda ordem, ou apenas tensor, e é a representação mais adequada para entidade física com a qual duas direções podem ser associadas (Aris, 1989). Um tensor \mathbf{T} é, algebricamente falando, uma transformação linear que dado um vetor \mathbf{a} pode-se obter outro vetor \mathbf{b} com a relação $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$.

2.3.2 Notação Indicial, delta de Kronecker e o símbolo de Levi-Civita

A notação de Einstein, ou apenas notação indicial, é uma convenção adotada para simplificação de somatórios. Com essa notação é possível simplificar um somatório da seguinte forma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_i. \quad (2.30)$$

O somatório se resume a a_i . Somatórios mais complexos como o expresso na Eq. (2.31) também podem ser simplificados usando a notação de indicial,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{ij} x_i x_j. \quad (2.31)$$

Algumas funções utilizam a notação indicial em suas definições. Entre estas funções, as abordadas neste trabalho são o delta de Kronecker e o símbolo de Levi-Civita.

O delta de Kronecker, denotado por δ_{ij} , é definido como (Lai, 2010)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (2.32)$$

Essa função é utilizada em diversas definições como, por exemplo, na definição de produto escalar na subseção 2.3.5 e na definição de traço de um tensor que será na subseção 2.3.7.

O símbolo de Levi-Civita, ou símbolo de permutação, denotado por ε_{ijk} , é definido como (Lai, 2010)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação par de } (1, 2, 3) \\ -1, & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, 3), \\ 0, & \text{para qualquer outro caso.} \end{cases} \quad (2.33)$$

onde a permutação par é uma permutação cíclica de (1,2,3) e a permutação ímpar é uma permutação acíclica de (1, 2, 3).

Este permutador será utilizado neste trabalho na definição de produto vetorial na subseção 2.3.5 e na definição do vetor de um tensor antissimétrico na subseção 2.3.8.

2.3.3 O vetor e sua representação em um sistema em \mathbb{R}^3

O conceito de vetor é a relação de um valor numérico caracterizado por intensidade, com um sentido orientado. Quando analisa-se uma força sendo aplicada em um objeto, faz-se necessário saber não só a intensidade, mas também a direção e o sentido. A representação espacial de um vetor em um sistema tridimensional está ilustrada na Fig. 4 (Boldrini, 1980).

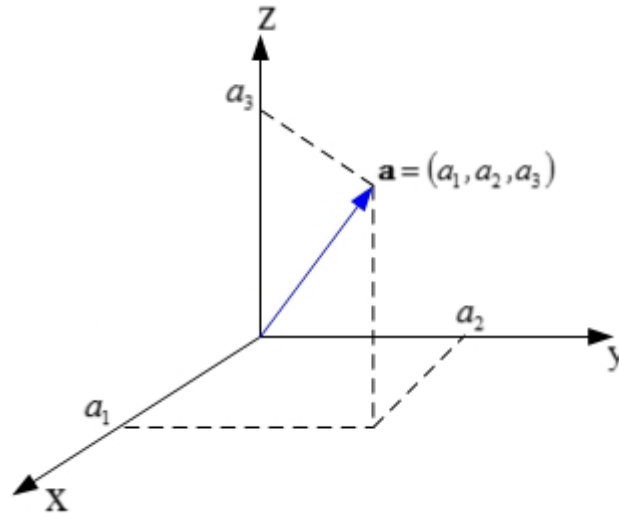


Figura 4 - Representação de um vetor em \mathbb{R}^3 .

O vetor \mathbf{a} na Fig. 4 é representado em um espaço tridimensional como um vetor coluna de acordo com as suas componentes a_1 , a_2 e a_3 nas direções dos eixos x , y e z , respectivamente. Essa representação pode ser vista na Eq. (2.34).

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Um vetor coluna como o descrito acima pode ser interpretado como sendo uma matriz de apenas uma coluna. A matriz transposta de um vetor coluna \mathbf{a} é um vetor linha \mathbf{a}^T , ou seja, a função transposta transforma coluna em linha e vice versa. Em algumas escritas, usa-se a função transposta como ferramenta de simplificação e é expressa como (Lai, 2010)

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T. \quad (2.35)$$

2.3.4 Módulo de um vetor e vetores unitários

O módulo de um vetor, ou magnitude, é o valor do comprimento do vetor. Observando a Fig. 4, o módulo do vetor \mathbf{a} seria interpretada como sendo o comprimento da seta indicada por azul. Esse comprimento é calculado de acordo com a equação (Ferreira, 2001)

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}, \quad (2.36)$$

onde \mathbf{a} é um vetor de \mathbb{R}^3 e a_1 , a_2 e a_3 são suas componentes.

Os vetores unitários são subconjuntos do espaço vetorial a que pertencem, tendo como propriedade magnitude igual a 1 (um). Um vetor unitário é muitas vezes denotado pelo símbolo $\hat{\mathbf{e}}$. Nas coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 , esses elementos são usualmente $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$, e

representam as direções dos eixos x, y e z, respectivamente. Esses vetores unitários são representados como vetores coluna e expressos da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Esses vetores nem sempre são escritos com um circunflexo, mas pode ser normalmente assumido que \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 são vetores unitários na maioria dos contextos, como podem ser observados na Fig. 5 (Fleisch, 2008).

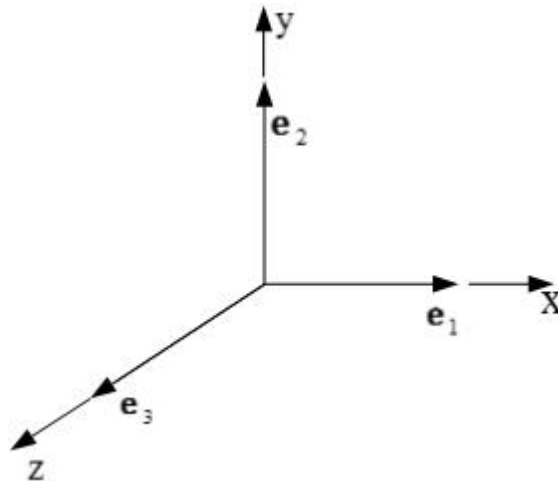


Figura 5 - Representação espacial dos vetores unitários.

2.3.5 Produto escalar, ângulo entre vetores, ortogonalidade e produto vetorial

Produto escalar é uma abstração que permite introduzir noções de comprimento e ângulo em espaços vetoriais. Considerando dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} de \mathbb{R}^3 , defini-se $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ como sendo o produto escalar entre \mathbf{a} e \mathbf{b} e é expresso de acordo com o somatório a seguir.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.38)$$

Em notação indicial é possível escrever o produto escalar como sendo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a_i b_j. \quad (2.39)$$

O ângulo θ entre dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é definido de acordo com a equação abaixo.

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (2.40)$$

De acordo com a Eq. (2.40) é possível definir uma propriedade de ortogonalidade entre vetores. Dois vetores são ortogonais se $\theta = 90^\circ$, ou seja, $\cos(\theta) = 0$. Como $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{b}|$ são magnitudes, a Eq. (2.40) só possui valor nulo se e somente se $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$. Sendo assim, se \mathbf{a} e \mathbf{b} são ortogonais o produto escalar entre eles é nulo. Essa propriedade é expressa de acordo com a Eq. (2.41) (Malajovich, 2010).

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \quad (2.41)$$

Além do produto escalar, define-se ainda outra operação entre vetores denominada produto vetorial. Enquanto o produto escalar de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} fornece uma grandeza escalar como resultado, o produto vetorial de \mathbf{a} e \mathbf{b} fornece o vetor \mathbf{c} indicado como $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. A magnitude de \mathbf{c} é dada de acordo com a Eq. (2.42) (Malajovich, 2010).

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\text{sen}(\theta) \quad (2.42)$$

Onde θ é novamente o ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} . Observa-se que \mathbf{c} é perpendicular ao plano determinado por \mathbf{a} e \mathbf{b} . Em termos das componentes de \mathbf{a} e \mathbf{b} , tem-se que \mathbf{c} é dado pelo determinante

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.43)$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3.$$

Em notação indicial é possível escrever o produto vetorial como sendo (Ferreira, 2001)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk}a_ib_j\mathbf{e}_k. \quad (2.44)$$

Resolvendo o determinante na Eq. (2.43) é possível determinar quais são as componentes do vetor \mathbf{c} em função das componente dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . O vetor \mathbf{c} pode ser escrito como um vetor coluna expresso na Eq. (2.45) e sua representação gráfica é mostrada na Fig. 6.

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

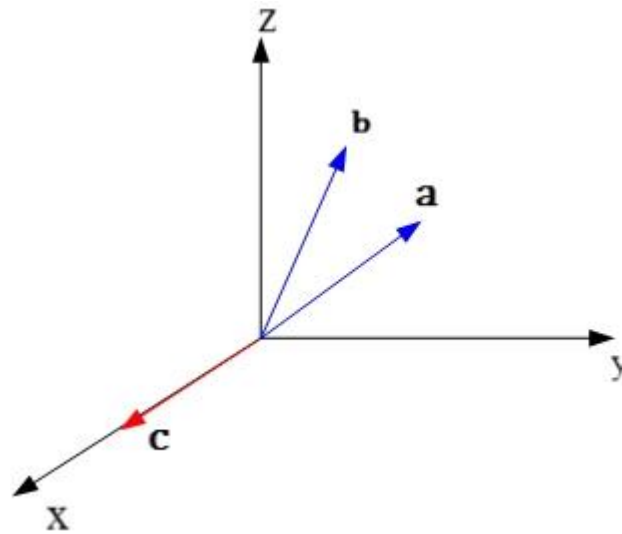


Figura 6 - Representação espacial do vetor \mathbf{c} como produto vetorial entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} .

2.3.6 Produto tensorial, tensor de segunda ordem e a decomposição de um tensor

Tomando como exemplo dois vetores coluna de \mathbf{a} e \mathbf{b} de \mathbb{R}^3 , define-se o produto tensorial, representado pelo operador ' \otimes ', como uma transformação que associa a cada vetor \mathbf{v} o vetor $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$, ou seja, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$. Na forma matricial, o produto tensorial entre \mathbf{a} e \mathbf{b} é o produto termo a termo expresso na Eq. (2.46) e tem como resultado um tensor de segunda ordem (Lai, 2010; Ferreira, 2001).

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Um tensor \mathbf{T}_{ij} então é, em termos algébricos, uma transformação linear que, dado um vetor \mathbf{a} , pode-se obter outro vetor \mathbf{b} com a relação $\mathbf{T}_{ij}\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Portanto, o tensor possui a forma de uma matriz quadrada de ordem 3, conforme a Eq. (2.47).

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Como o tensor toma a forma de uma matriz quadrada, tem-se que a maioria das operações a ele relacionadas serão operações iguais às usadas no tratamento de matriz.

O tensor simétrico é obtido da definição de matriz simétrica e é definido quando o transposto do tensor é igual ao próprio tensor, ou seja, $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ij}^T$. Em notação indicial, tem-se que, em termo das componentes

$$T_{ij} = T_{ji}. \quad (2.48)$$

Um tensor é dito antissimétrico quando $\mathbf{T}_{ij} = -\mathbf{T}_{ij}^T$. Em termos das componentes tem-se que um tensor é antissimétrico quando

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad \text{e} \quad T_{ii} = 0. \quad (2.49)$$

Qualquer tensor pode ser decomposto como a soma de uma parte simétrica e uma parte antissimétrica e, portanto, pode ser expresso como (Ferreira, 2001)

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ij}^{sim} + \mathbf{T}_{ij}^{ant}. \quad (2.50)$$

Onde \mathbf{T}_{ij}^{sim} é a componente simétrica e \mathbf{T}_{ij}^{ant} é a componente antissimétrica do tensor \mathbf{T}_{ij} . Essas componente são expressas de acordo com as Eq. (2.51) e (2.52).

$$\mathbf{T}_{ij}^{sim} = \frac{1}{2}[\mathbf{T}_{ij} + \mathbf{T}_{ij}^T] \quad (2.51)$$

$$\mathbf{T}_{ij}^{ant} = \frac{1}{2}[\mathbf{T}_{ij} - \mathbf{T}_{ij}^T] \quad (2.52)$$

2.3.7 Traço de um tensor

O traço de um produto tensorial entre \mathbf{a} e \mathbf{b} é definido como o produto escalar entre esses dois vetores (Ferreira, 2001). Considerando o tensor $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, tem-se

$$tr(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a_i b_j = \delta_{ij} T_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \quad (2.53)$$

Representando \mathbf{T} na forma matricial de um tensor definida em (2.46), observa-se que o traço representa a soma dos elementos da diagonal principal do tensor e que o traço de um tensor é igual ao traço do seu tensor transposto, ou seja, $tr(\mathbf{T}) = tr(\mathbf{T}^T)$. Em notação indicial, tem-se que o traço do tensor \mathbf{T} é representador por

$$tr(\mathbf{T}) = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii}. \quad (2.54)$$

2.3.8 Vetor dual

Existe uma importante relação entre um vetor em três dimensões e o tensor antissimétrico. As componentes da diagonal de um tensor antissimétrico são sempre nulas, e, dos seis elementos restantes, apenas três são independentes, porque $T_{12} = -T_{21}, T_{23} = -T_{32}$ e $T_{31} = -T_{13}$ (Lai, 2010). Desta forma, um tensor antissimétrico possui na realidade apenas três componentes, assim como um vetor. De fato ele se comporta como um vetor. Mais especificamente, para todo tensor antissimétrico, existe um vetor correspondente chamado de vetor dual. Considerando um vetor dual \mathbf{a} correspondente de um tensor antissimétrico \mathbf{T} , os dois podem ser escritos como (Aris, 1989; Ferreira, 2001):

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

A relação entre eles pode ser expressa em termos da notação indicial de acordo com a Eq. (2.56).

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_{jk} \mathbf{e}_i \quad (2.56)$$

3 ANÁLISE TENSORIAL DE UM SISTEMA ELÉTRICO DE POTÊNCIA TRIFÁSICO

Os equacionamentos comumente usados trazem os circuitos polifásicos sempre em um estado senoidal, regime estacionário e equilibrado, o que na prática não é muito comum. A existência de cargas não lineares conectadas à rede e de forma desequilibradas são fatores determinantes para a deformação na forma de onda. Este fator dificulta a utilização dos equacionamentos básicos, sendo preciso fazer várias aproximações.

Para melhor representar a análise de circuitos polifásicos, este trabalho propõe uma análise vetorial da tensão e da corrente. As relações matemáticas, as representações físicas e as análises geométricas dessa abordagem são apresentadas. Inicialmente expõe-se a análise vetorial para um sistema elétrico de potência, que é uma análise já bem fundamentada. Por fim é apresentada a análise tensorial e suas definições.

Para a aplicação dos conceitos vetoriais e tensoriais, faz-se necessário a utilização de grandezas vetoriais. A tensão e a corrente elétrica são inicialmente definidas como grandezas vetoriais a partir da definição de um sistema elétrico alternado trifásico como o mostrado na Fig. 2.

3.1 TENSÃO E CORRENTE ELÉTRICA

Para um sistema trifásico como o ilustrado na Fig. 2, pode-se definir a tensão e a corrente elétrica como sendo os vetores \mathbf{v} e \mathbf{i} , onde cada componente representa a tensão e a corrente instantânea em determinada fase com referência ao neutro, respectivamente. Os vetores tensão e corrente elétrica são definidos como vetores coluna:

$$\mathbf{v} = [v_a v_b v_c]^T [V] \quad (3.1)$$

$$\mathbf{i} = [i_a i_b i_c]^T [A] \quad (3.2)$$

3.2 DECOMPOSIÇÃO DO VETOR CORRENTE ELÉTRICA

A corrente pode ser expressa como a soma de duas componentes ortogonais: uma componente na mesma direção e outra ortogonal à tensão.

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_p + \mathbf{i}_q [A] \quad (3.3)$$

A componente na mesma direção da tensão é chamada de componente ativa da corrente \mathbf{i}_p e a componente ortogonal é chamada de componente reativa da corrente \mathbf{i}_q . Essas componentes são expressas por:

$$\mathbf{i}_p = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \text{ [A]} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{i}_q = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{i}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \text{ [A]} \quad (3.5)$$

Como as componentes são ortogonais, podemos dizer que o módulo do vetor corrente elétrica pode ser expresso como a soma dos módulos das componentes ativa e reativa da corrente.

$$|\mathbf{i}|^2 = |\mathbf{i}_p|^2 + |\mathbf{i}_q|^2 \text{ [A]} \quad (3.6)$$

A representação espacial do vetor tensão e do vetor corrente é mostrada na Fig. 7. Como são grandezas instantâneas, a representação mostrada corresponde à configuração em um determinado instante de tempo no sistema trifásico. Cada eixo da representação abaixo corresponde a cada fase do sistema elétrico estudado.

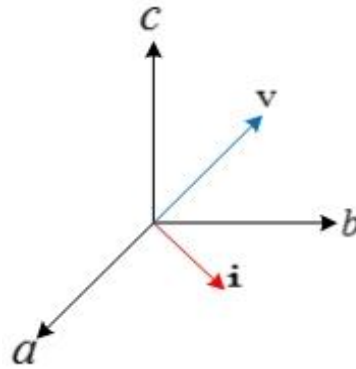


Figura 7- Representação espacial dos vetores tensão e corrente elétrica.

3.3 CONCEITOS VETORIAIS APLICADOS A SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Utilizando a definição de tensão e corrente como grandezas vetoriais é possível definir potência instantânea, potência ativa, potência reativa e potência aparente. De forma similar às definições abordadas na subseção 2.2.2 e utilizando os conceitos matemáticos abordados para grandezas vetoriais na seção 2.3, é possível definir a potência instantânea como o produto escalar entre o vetor tensão e o vetor corrente elétrica, e assim

$$p(t) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \text{ [W]}. \quad (3.7)$$

Como definido na subseção 2.2.3, em um sistema trifásico equilibrado a potência ativa coincide com a potência instantânea, tem-se que a potência ativa pode ser representada em função das grandezas vetoriais.

$$P = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} \text{ [W]} \quad (3.8)$$

A potência reativa instantânea $\mathbf{q}(t)$ é definida como sendo a parcela da potência ortogonal a potência ativa e pode ser expressa utilizando a definição de produto vetorial comentada na subseção 2.3.5. Portanto, define-se a potência reativa a partir do produto vetorial entre os vetores tensão e corrente elétrica. Sendo assim, a potência reativa agora é uma grandeza vetorial instantânea expressa de forma compacta por \mathbf{q} .

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{i} \text{ [VAR]} \quad (3.9)$$

Portanto pode-se observar que a componente ativa da corrente tem uma estreita relação com a potência ativa e que a componente reativa da corrente tem uma estreita relação entre a potência reativa e podem ser expressas em termos de $p(t)$ e \mathbf{q} .

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_p &= \frac{p(t)}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \text{ [A]} \\ \mathbf{i}_q &= \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \text{ [A]} \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.4 ANÁLISE TENSORIAL DE SEGUNDA ORDEM

No estudo da mecânica dos meios contínuos é frequente o uso da análise tensorial para o estudo, por exemplo, de deformações. Este trabalho propõe uma analogia entre o uso da análise tensorial na mecânica dos meios contínuos e o estudo de sistema elétrico de potência, mais precisamente, o estudo do comportamento da potência elétrica instantânea. Para isso, será preciso representar algumas grandezas de um sistema elétrico de potência em grandezas tensoriais. Primeiramente define-se a potência instantânea como uma grandeza tensorial tomando como base um sistema elétrico trifásico conforme apresentado na Fig. 2. A potência elétrica instantânea é definida como o produto tensorial dos vetores tensão e corrente elétrica. Nesse caso, torna-se a potência instantânea uma grandeza tensorial e será chamada de tensor potência instantânea. De acordo com as definições de tensor e produto tensorial abordada na subseção 2.3.6, tem-se que o tensor potência elétrica é expresso por

$$\wp_{ij} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{i} = \begin{bmatrix} v_a i_a & v_a i_b & v_a i_c \\ v_b i_a & v_b i_b & v_b i_c \\ v_c i_a & v_c i_b & v_c i_c \end{bmatrix} \text{ [W]}. \quad (3.11)$$

Sabe-se que um tensor de segunda ordem pode ser expresso como a soma de um tensor simétrico e um antissimétrico, sendo assim, pode-se escrever a Eq. (3.11) da seguinte forma

$$\wp_{ij} = \frac{1}{2} [\wp_{ij} + \wp_{ij}^T] + \frac{1}{2} [\wp_{ij} - \wp_{ij}^T] \text{ [W]}. \quad (3.12)$$

A primeira parcela da soma corresponde ao tensor simétrico \wp_{ij}^{sim} e a segunda parcela corresponde ao tensor antissimétrico \wp_{ij}^{ant} e são expressos de acordo com as Eq. (3.13) e (3.14), respectivamente.

$$\wp_{ij}^{sim} = \begin{bmatrix} v_a i_a & \frac{1}{2}[v_a i_b + v_b i_a] & \frac{1}{2}[v_a i_c + v_c i_a] \\ \frac{1}{2}[v_b i_a + v_a i_b] & v_b i_b & \frac{1}{2}[v_b i_c + v_c i_b] \\ \frac{1}{2}[v_c i_a + v_a i_c] & \frac{1}{2}[v_c i_b + v_b i_c] & v_c i_c \end{bmatrix} [W] \quad (3.13)$$

$$\wp_{ij}^{ant} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}[v_a i_b - v_b i_a] & \frac{1}{2}[v_a i_c - v_c i_a] \\ \frac{1}{2}[v_b i_a - v_a i_b] & 0 & \frac{1}{2}[v_b i_c - v_c i_b] \\ \frac{1}{2}[v_c i_a - v_a i_c] & \frac{1}{2}[v_c i_b - v_b i_c] & 0 \end{bmatrix} [W] \quad (3.14)$$

Sendo assim, o tensor potência instantânea pode ser expresso como sendo a soma de sua parte simétrica com a antissimétrica de acordo com a Eq. (3.15).

$$\wp_{ij} = \wp_{ij}^{sim} + \wp_{ij}^{ant} [W] \quad (3.15)$$

Usando os conceitos definidos para tensores na seção 2.3 é possível estabelecer uma relação entre os conceitos vetoriais e a análise tensorial para o estudo de sistemas de potência. Observa-se que, no tensor simétrico, os elementos da diagonal correspondem às parcelas da potência ativa expressa na Eq. (3.7). Esses elementos são expressos em notação indicial como \wp_{ii}^{sim} . A operação matemática que relaciona esses termos é o traço, como definido na subseção 2.3.7. Portanto, a relação entre o conceito vetorial e tensorial para potência ativa instantânea trifásica é expresso por

$$P = tr(\wp_{ij}^{sim}) = \wp_{11}^{sim} + \wp_{22}^{sim} + \wp_{33}^{sim} [W]. \quad (3.16)$$

A definição da potência reativa instantânea a partir da análise tensorial proposta utiliza a relação apresentada na Eq. (2.36). Portanto, em notação indicial pode-se definir a potência reativa como sendo

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \wp_{jk}^{ant} \mathbf{e}_i [VAR]. \quad (3.17)$$

A análise matemática proposta pode ser expandida para um sistema de n fases como o mostrado na Fig. 8.

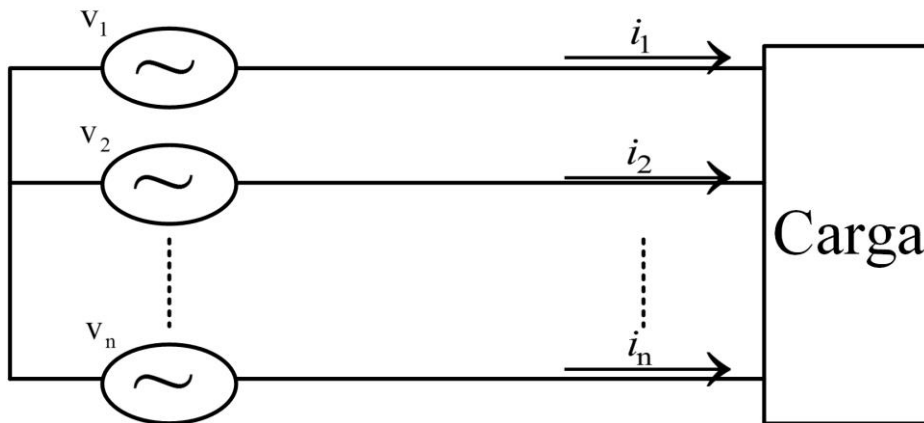


Figura 8 - Representação de um sistema de n fases.

Onde V_n e i_n são a tensão e a corrente na n ésima fase respectivamente. Sendo assim, os vetores tensão e corrente elétrica para um sistema de n fases são expressos em (3.18) e as definições, tanto na análise vetorial como na análise tensorial, são desenvolvidas tomando os vetores em \mathbb{R}^n (Salmerón, 2009).

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [v_1 v_2 v_3 \dots v_n]^T \text{ [V]} \\ \mathbf{i} &= [i_1 i_2 i_3 \dots i_n]^T \text{ [A]} \end{aligned} \quad (3.18)$$

O tensor potência elétrica poderia ser representado substituindo os vetores para n fases na Eq. (3.11) e representado de acordo com a Eq. (3.19). As definições para potência ativa e reativa se aplicariam normalmente para o tensor em (3.19).

$$\wp_{ij} = \begin{bmatrix} u_1 i_1 & u_1 i_2 & \dots & u_1 i_n \\ u_2 i_1 & u_2 i_2 & \dots & u_2 i_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n i_1 & u_n i_2 & \dots & u_n i_n \end{bmatrix} \text{ [W]} \quad (3.19)$$

3.5 A INTERPRETAÇÃO DOS FENÔMENOS FÍSICOS A PARTIR DA ANÁLISE TENSORIAL

A interpretação geométrica do tensor potência instantânea corresponde a um elemento infinitesimal de volume e faz analogia com estudos na mecânica dos meios contínuos. Esse ramo da mecânica propõe um modelo de estudo unificado para sólidos deformáveis, sólidos rígidos e fluídos. O tensor de tensões e o tensor de deformações são assuntos abordados nesse âmbito da mecânica dos meios contínuos e serão utilizados para analogia neste trabalho.

O tensor de tensão de Cauchy, ou apenas tensor tensão, é um tensor de segunda ordem que define o estado de tensão em um ponto no domínio de um material contínuo. O tensor de tensão é, portanto, expresso por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Os índices i e j de cada componente σ_{ij} do tensor tensão tem um significado em sua representação. O índice j indica o plano no qual a componente da tensão atua, já o índice i indica a direção dessa componente. Por exemplo, considerando uma componente σ_{12} , tem-se que o plano que a componente da tensão está sendo aplicada é o plano normal à direção representada pelo vetor unitário \mathbf{e}_2 . Para esse exemplo a componente da tensão está sendo aplicada na direção representada pelo vetor unitário \mathbf{e}_1 . As componentes da tensão aplicadas na direção normal de cada plano são representadas por σ_{ii} . Essas componentes quando positivas são chamadas de tensões de tração e quando negativas são chamadas de tensões de compressão. As componentes $i \neq j$ do tensor tensão são chamadas de componentes tangenciais também chamadas de tensões de cisalhamento (Lai, 2010). A representação espacial das componentes do tensor tensão pode ser vista na Fig. 9.

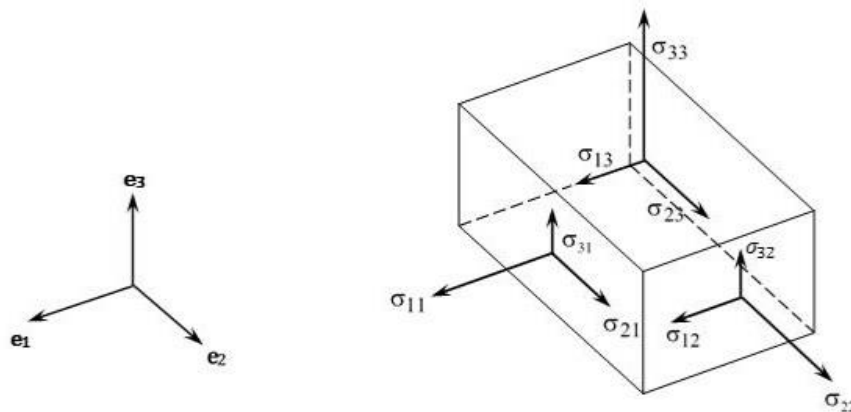


Figura 9 - Representação espacial do tensor tensão de Cauchy.

O tensor de deformação possui características similares ao tensor de tensões, no entanto, suas componentes são deformações que serão aplicadas as faces do cubo respeitando a teoria dos índices aplicada no tensor de tensões.

A representação do tensor potência instantânea nesse caso é válida apenas para sistemas trifásicos. A aplicação da analogia com a mecânica dos sólidos só é possível considerando um

elemento de volume cúbico assim como é considerado o tensor de deformação na mecânica dos meios contínuos. Esse volume é representado na Fig. 10.

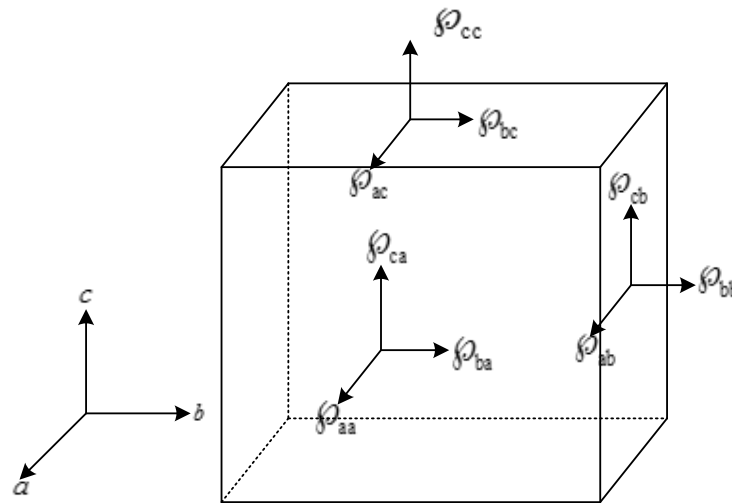


Figura 10 - Representação geométrica do tensor potência instantânea.

As componentes do tensor potência instantânea atuarão na representação geométrica cúbica proposta, causando deformações. Estas medidas de desvio da forma são as ferramentas propostas neste trabalho para analisar e caracterizar as variações da potência instantânea. A Figura 10 mostra a interpretação proposta, em que o tensor ρ_{ij} representa o volume total de energia por unidade de tempo. Uma visualização geral dessa proposta pode ser observada na Fig. 11, onde um sistema trifásico é analisado tomando como base a forma do tensor potência instantânea.

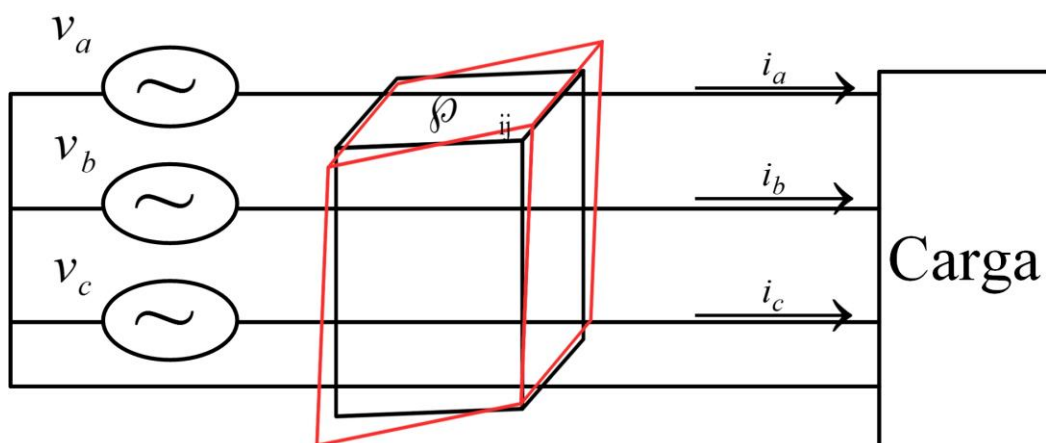


Figura 11 - Análise de um sistema elétrico tomando como base a forma geométrica do tensor potência instantânea.

A correlação entre o comportamento da potência instantânea e a deformação no cubo será desenvolvida juntamente com a apresentação da teoria de deformação nas próximas seções. No capítulo será possível analisar as teorias abordadas com o auxílio de simulações.

3.5.1 Estado de deformação

Quando são aplicadas forças a um corpo, este pode deformar-se, sendo possível estudar as características da deformação independentemente das forças que a originaram. As teorias acerca dessa área do estudo da deformação serão apresentadas neste trabalho de acordo com a aplicabilidade na analogia proposta.

Considera-se um corpo sólido e contínuo sujeito a uma deformação que o faz passar de um estado inicial P para um estado final P' conforme pode ser visto na Fig. 12.

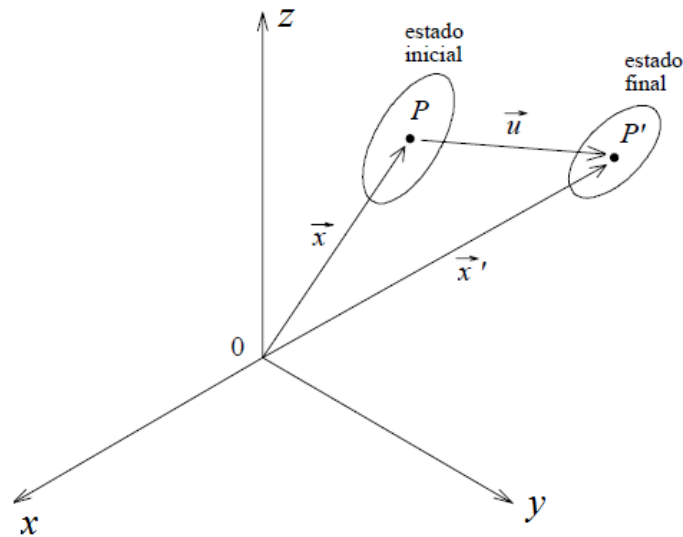


Figura 12 - Corpo sujeito a uma deformação.

Para essa mudança de estado, o vetor deslocamento \mathbf{u} tem componentes (u_1, u_2, u_3) . De acordo com a Fig. 12, o novo vetor posição do ponto P' pode ser obtido pela soma vetorial do vetor posição inicial \mathbf{x} com o vetor deslocamento \mathbf{u} . Em notação indicial, tem-se que

$$x_i' = x_i + u_i. \quad (3.21)$$

Cada uma das componentes do vetor deslocamento \mathbf{u} depende da posição do ponto P , sendo assim:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Portanto, em notação indicial, considera-se que as componentes do deslocamento u_i são funções lineares das coordenadas x_j do ponto P . Desenvolvendo cada uma das componentes em série de Taylor (Sokolnikoff, 1946), tem-se que

$$u_i = u_{i0} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 x_j. \quad (3.23)$$

Nesta expressão u_{i0} e $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ são constantes de acordo com a linearidade entre u_i e x_j . O fato de esta relação ser linear implica que na vizinhança infinitesimal de um ponto, todos os pontos apresentam a mesma deformação, tratando-se, portanto de uma deformação homogênea (Sokolnikoff, 1946; SAADA, 1974). Substituindo a Eq. (3.23) na Eq. (3.21), tem-se que

$$x'_i = x_i + u_{i0} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 x_j. \quad (3.24)$$

Essa expressão caracteriza uma transformação afim. Uma vez que a deformação não dá origem à sobreposição de matéria, nem ao aparecimento de vazios, tem de existir uma correspondência única entre os pontos do corpo no estado inicial e no estado final. A transformação apresenta as seguintes propriedades: planos transformam-se em planos; retas transformam-se em retas; planos paralelos transformam-se em planos paralelos e retas paralelas transformam-se em retas paralelas. Essas características podem ser visualizadas na Fig. 13 (Sokolnikoff, 1946).

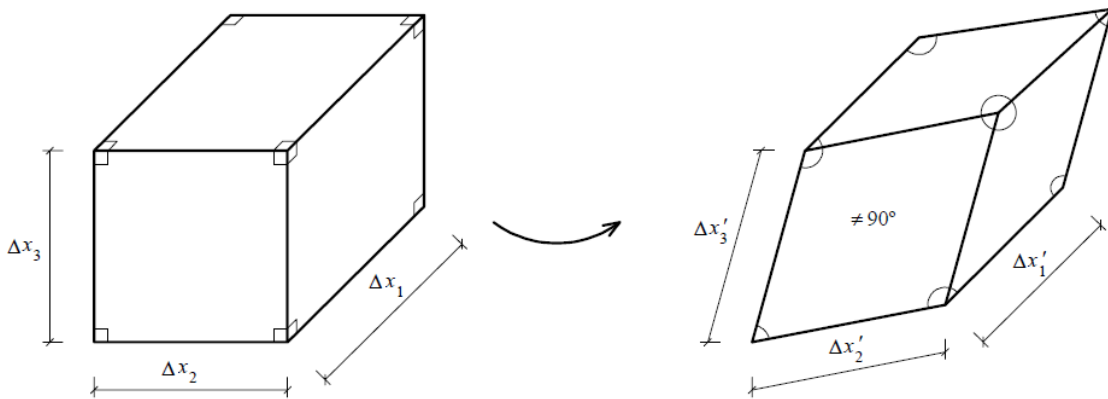


Figura 13 - Transformação afim de um cubo.

Considerando o tensor transformação $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e decompondo esse tensor em uma componente simétrica e_{ij}^{sym} e outra antissimétrica e_{ij}^{ant} , a Eq. (3.24) pode ser reescrita como

$$u_i = u_{i0} + e_{ij}^{sym} x_j + e_{ij}^{ant} x_j. \quad (3.25)$$

O vetor deslocamento é composto por três termos como observado na Eq. (3.25): \mathbf{u}^T , \mathbf{u}^R e \mathbf{u}^D . O termo $\mathbf{u}^T = \mathbf{u}_0$ representa uma translação que é interpretada como o deslocamento da origem do sistema de referência. O termo $\mathbf{u}^R = e_{ij}^{ant} \mathbf{x}$ representa uma rotação e $\mathbf{u}^D = e_{ij}^{sym} \mathbf{x}$ uma deformação pura. Sendo assim, o vetor deslocamento pode ser escrito como uma soma de uma translação, de uma rotação e de uma deformação pura (Sokolnikoff, 1946).

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^T + \mathbf{u}^R + \mathbf{u}^D \quad (3.26)$$

O estudo do estado de deformação no entanto fornece mais informações quando se analisa os fenômenos separadamente, sendo essa a maneira abordada nesse trabalho. Considera-se que a origem é fixa e então o termo de translação da Eq. (3.26) se anula restando apenas os termos de rotação e deformação pura.

3.5.2 Rotação

De acordo com a Eq. (3.26):

$$\mathbf{u}^R = e_{ij}^{ant} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -e_{21}^{ant} & e_{13}^{ant} \\ e_{21}^{ant} & 0 & -e_{32}^{ant} \\ -e_{13}^{ant} & e_{32}^{ant} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{u}^R = \begin{bmatrix} e_{13}^{ant} x_3 - e_{21}^{ant} x_2 \\ e_{21}^{ant} x_1 - e_{32}^{ant} x_3 \\ e_{32}^{ant} x_2 - e_{13}^{ant} x_1 \end{bmatrix}$$

Conforme mencionado na subseção 2.3.8, o tensor antissimétrico possui um vetor dual relacionado com as suas três componentes independentes. Sendo \mathbf{w} o vetor dual do tensor antissimétrico e_{ij}^{ant} , tem-se que

$$\mathbf{w} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} e_{ij}^{ant} \mathbf{e}_k = (e_{32}^{ant}, e_{13}^{ant}, e_{21}^{ant}). \quad (3.28)$$

Realizando o produto vetorial entre o vetor \mathbf{w} e o vetor posição \mathbf{x} do ponto P conclui-se que o vetor resultante desse produto é exatamente o vetor deslocamento rotacional \mathbf{u}^R (Sokolnikoff, 1946). Observa-se essa conclusão no desenvolvimento abaixo.

$$\mathbf{w} \times \mathbf{x} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} e_{13}^{ant} x_3 - e_{21}^{ant} x_2 \\ e_{21}^{ant} x_1 - e_{32}^{ant} x_3 \\ e_{32}^{ant} x_2 - e_{13}^{ant} x_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

De acordo com a definição para produto vetorial apresentada na subseção 2.3.5 pode-se reescrever o vetor \mathbf{u}^R conforme apresentado a seguir.

$$\mathbf{u}^R = \mathbf{w} \times \mathbf{x} = |\mathbf{w}| |\mathbf{x}| \text{sen}(\alpha) \mathbf{n}_{\mathbf{w}\mathbf{x}} \quad (3.30)$$

Onde α é o ângulo entre os vetores \mathbf{w} e \mathbf{x} , e $\mathbf{n}_{\mathbf{w}\mathbf{x}}$ é o vetor unitário normal ao plano (\mathbf{w}, \mathbf{x}) .

Analisando a Eq. (3.30) verifica-se que na origem o vetor \mathbf{u}^R é nulo assim como em todos os pontos situados sobre as retas paralelas ao vetor \mathbf{w} que passam pela origem. De acordo com essa conclusão, observa-se que o vetor \mathbf{w} representa o eixo de rotação pois é o lugar geométrico dos pontos que apresentam a componente rotacional nula.

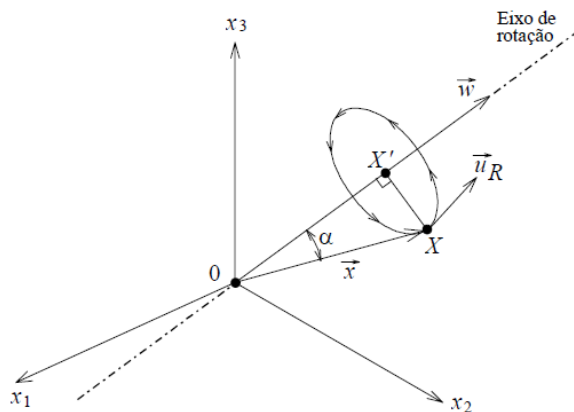


Figura 14 - Representação geométrica do deslocamento devido à rotação.

De acordo com a Fig. 14 pode-se observar que o ângulo de rotação w do ponto X é

$$w \cong \operatorname{tg} w = \frac{|\mathbf{u}^R|}{\overline{XX'}} = \frac{|\mathbf{u}^R|}{|\mathbf{x}| \operatorname{sen} \alpha} \quad [rad]. \quad (3.31)$$

Sendo w muito pequeno pode-se fazer a aproximação $w = \operatorname{tg} w$. Substituindo a Eq. (3.30) na Eq. (3.31) tem-se que

$$w = \frac{|\mathbf{w}| |\mathbf{x}| \operatorname{sen} \alpha}{|\mathbf{x}| \operatorname{sen} \alpha} = |\mathbf{w}| \quad [rad]. \quad (3.32)$$

Conclui-se que o ângulo de rotação é aproximadamente igual ao módulo do vetor que representa o eixo de rotação. No estudo proposto observa-se que o tensor analisado é o tensor potência instantânea \wp_{ij} . A componente antissimétrica desse tensor \wp_{ij}^{ant} tem como vetor dual o vetor potência relativa \mathbf{q} conforme apresentado na subseção 3.4. Observando a teoria apresentada para análise de deformação rotacional, conclui-se que o vetor \mathbf{q} é o eixo de rotação do elemento infinitesimal em estudo e seu módulo indica aproximadamente o ângulo de rotação observado.

3.5.3 Deformação pura

A deformação pura é caracterizada pelo tensor simétrico e_{ij}^{sim} e sua representação matricial é

$$e_{ij}^{sim} = \begin{bmatrix} e_{11}^{sim} & e_{12}^{sim} & e_{13}^{sim} \\ e_{12}^{sim} & e_{22}^{sim} & e_{23}^{sim} \\ e_{13}^{sim} & e_{23}^{sim} & e_{33}^{sim} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

A análise da deformação pura é analisada em duas partes separadamente para facilitar a visualização dos resultados. A primeira parte observa os elementos da diagonal principal do tensor simétrico e_{ij}^{sim} , ou seja, $i = j$, e é conhecida como estudo da extensão do elemento infinitesimal. Estes elementos serão os responsáveis pela alteração do volume sem alterar a forma do elemento em estudo. A segunda parte observa os elementos fora da diagonal principal, ou seja, $i \neq j$, e é conhecida como estudo da distorção do elemento infinitesimal. Esses elementos não alteram o comprimento das arestas do elemento, altera apenas o ângulo, sendo assim, alteram a forma do elemento sem alterar o volume.

Diferentemente do estudo da rotação, o estudo das deformações puras é mais bem entendido quando se analisa cada face do cubo apresentado na Fig. 9. Na Figura 15 tem-se uma face do cubo relativa ao plano (x, y) . O tracejado indica uma alteração no comprimento da face na direção do eixo x devido à deformação provocada pela componente do tensor simétrico e_{11}^{sim} . Indica exatamente uma deformação de extensão provocada por uma componente $i = j$ do tensor simétrico. Para o comportamento das outras componentes e_{11}^{sim} e e_{22}^{sim} basta fazer uma alteração dos índices respeitando a alteração das faces na qual cada componente se aplica.

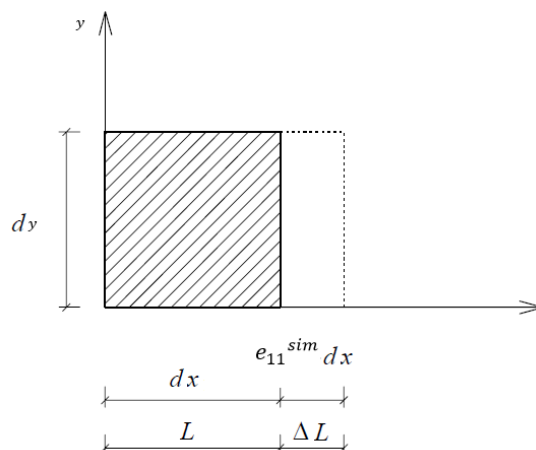


Figura 15 - Face do cubo sujeita a uma deformação de extensão.

No livro do professor Francisco Correia de Araújo, “Elasticidade e Plasticidade”, encontra-se o desenvolvimento que relaciona as componentes $i = j$ do tensor simétrico com a

alteração volumétrica do cubo. O desenvolvimento parte do princípio que o volume dV é calculado pela multiplicação das arestas do cubo, ou seja, $dV = dx dy dz$. Após algumas considerações, Correia de Araújo (1961) conclui que a variação de volume por unidade de volume, ou deformação volumétrica, é calculada por

$$\frac{\Delta dV}{dV} = e_{11}^{sim} + e_{22}^{sim} + e_{33}^{sim}. \quad (3.34)$$

Retomando a componente de deformação pura $\mathbf{u}^D = e_{ij}^{sym} \mathbf{x}$ da Eq. (3.26), pode-se observar os efeitos de formas separadas e mais detalhadas. Neste trabalho será abordada essa análise para uma melhor interpretação dos resultados.

No estudo proposto a componente simétrica do tensor potência instantânea \wp_{ij}^{ant} apresentada na Eq. (3.14) possui como componentes da diagonal principal as componentes $v_a i_a$, $v_b i_b$ e $v_c i_c$ que correspondem diretamente as componentes da potência ativa definida na seção 3.5. Substituindo os elementos da coluna principal do tensor \wp_{ij}^{ant} na Eq. (3.34) conclui-se que a variação volumétrica do elemento em estudo se relaciona com a potência ativa de acordo com equação abaixo.

$$\frac{\Delta dV}{dV} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = P \quad (3.35)$$

Observando agora os elementos fora da diagonal principal, tem-se que eles implicam em uma alteração da forma das faces sem alterar os comprimentos. A mesma face analisada na extensão será agora submetida apenas às componentes fora da diagonal principal. Observando as componentes e_{12} e e_{21} do tensor deformação, tem-se que a face na qual as deformações ocorrem é a face do plano (x, y) . A primeira componente indica uma deformação na face com relação ao eixo x e a segunda componente uma deformação com relação ao eixo y . A Figura 16 mostra a ocorrência dessas duas deformações.

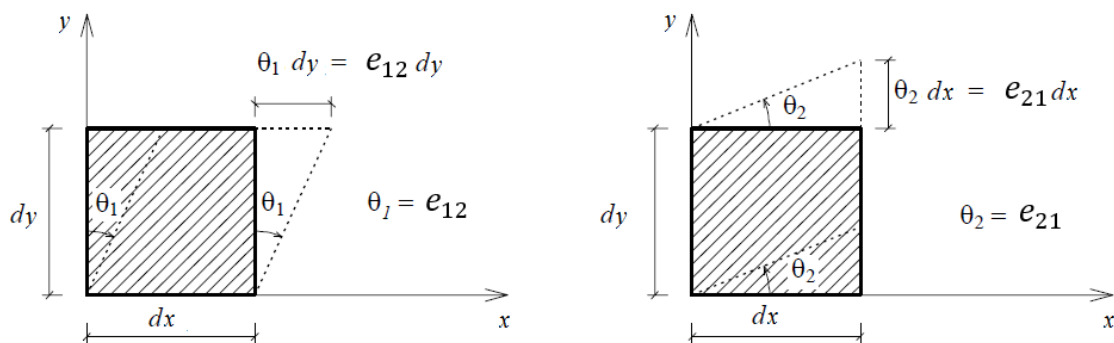


Figura 16 - Distorção entre os eixos x e y .

Desenvolvendo agora o elemento e_{12}^{sym} tem-se que

$$e_{12}^{sym} = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}). \quad (3.36)$$

Nota-se que os valores dentro dos parênteses correspondem exatamente aos ângulos de distorção da face θ_1 e θ_2 .

$$e_{12}^{sym} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.37)$$

O valor da soma desses ângulos representam uma diminuição do ângulo entre os semieixos x e y e é chamado de distorção entre x e y . Essa distorção é representada por γ_{12} . De acordo com a Eq. (3.36), observa-se que a distorção se relaciona com as componentes $i \neq j$ do tensor simétrico de acordo com a Eq. (3.37). As demais distorções γ_{13} e γ_{23} são obtidas de forma análoga ao desenvolvimento proposto para a distorção γ_{12} (Shames, 2000).

$$\gamma_{12} = \theta_1 + \theta_2 = 2e_{12}^{sym} \quad (3.38)$$

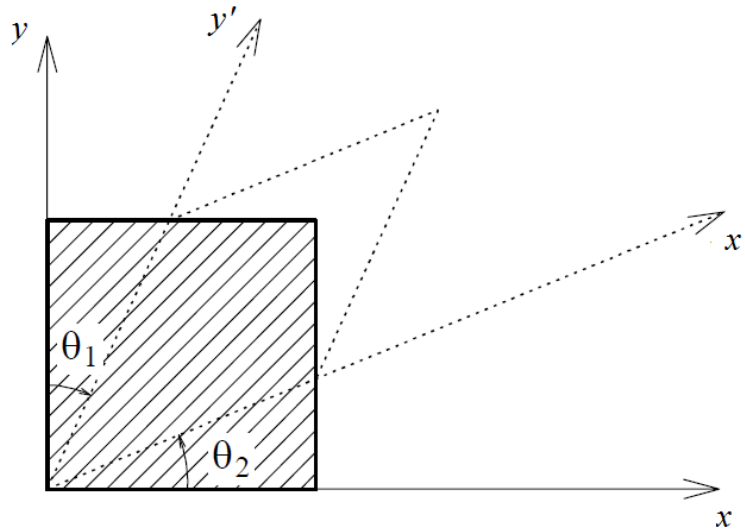


Figura 17 - Diminuição do ângulo entre os semieixos positivos x e y .

Observando a componente simétrica do tensor potência instantânea, nota-se que as componentes $i \neq j$ do tensor e_{ij}^{sym} não possuem relação com a teoria proposta nesse estudo. Sendo assim, a aplicação dessa teoria nas simulações propostas no próximo capítulo se limitará a analisar o comportamento das componentes de rotação e de deformação pura de extensão.

Observando a Eq. (3.26), tem-se que o vetor de deslocamento \mathbf{u} pode ser apresentado em termos do tensor potência instantânea \wp_{ij} definido na seção 3.4 como

$$u_i = \underbrace{\wp_{ij}^{sym} x_j}_{\text{Deformação Pura}} + \underbrace{\wp_{ij}^{ant} x_j}_{\text{Rotação}}. \quad (3.39)$$

Os conceitos necessários para a analogia proposta foram apresentados e serão aplicados nas simulações propostas no próximo capítulo.

4 SIMULAÇÕES E ANÁLISE DE RESULTADOS

Após apresentadas todas as teorias que serão usadas nesse trabalho já pode ser possível analisa-las e observar o modelo em simulações de eventos práticos. Este capítulo apresentará simulações de circuitos elétricos e das visualizações do modelo proposto. O ambiente para simulação utilizado foi o *software* MATLAB. As simulações dos circuitos e visualização do modelo proposto serão apresentadas e analisadas individualmente.

Observando o trabalho de Ustariz (2009), propõe-se implementar os três circuitos elétricos presentes em seu trabalho: resistivo equilibrado, resistivo-indutivo equilibrado e resistivo desequilibrado. Os códigos utilizados para as simulações se encontram no Apêndice A.

4.1 CIRCUITO RESISTIVO EQUILIBRADO

O circuito resistivo equilibrado mostrado na Fig. 18 é um circuito trifásico conforme apresentado na seção 2.2.

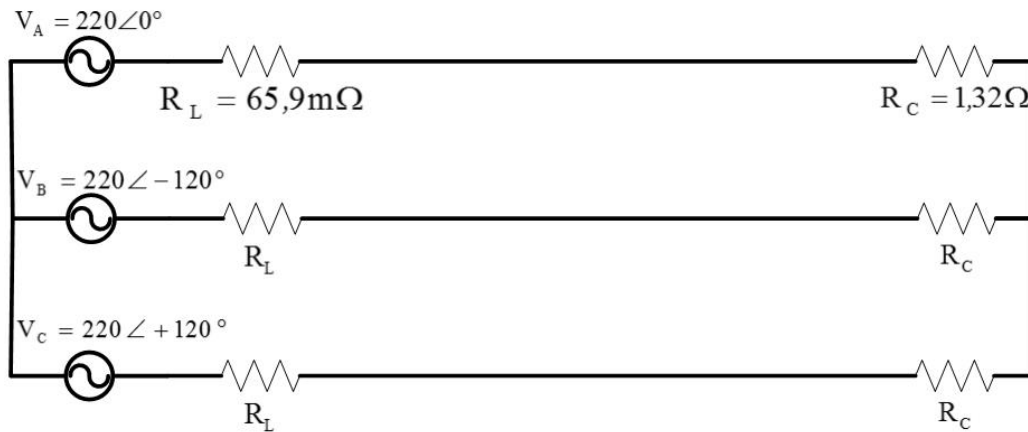


Figura 18 - Circuito resistivo equilibrado.

Onde R_L é a impedância da linha e R_C é a impedância da carga. Observando os valores do circuito é possível apresentar os seguintes dados técnicos do circuito de prova.

Tabela 1 - Dados do circuito resistivo equilibrado.

V (RMS) [V]	220
R_L [Ω]	0.0659
R_C [Ω]	1,32

f [Hz]	60
ω [rad/s]	376.9911

A análise dos resultados foi observada em três pontos $t(i)$ distintos dentro do domínio de tempo estabelecido. Esses três pontos são: $t(167) = 0,0028s$, $t(541) = 0,009$ e $t(852) = 0,0142$. A escolha dos pontos foi de acordo com os resultados obtidos para circuito desequilibrado que será apresentado na seção 4.3 e coincide com os pontos observados no trabalho de Ustariz (2009).

A Figura 19 mostra os resultados obtidos para os três pontos de análise e para os três tipos de deformação. O pontilhado em azul representa o cubo de referência sem nenhuma deformação.

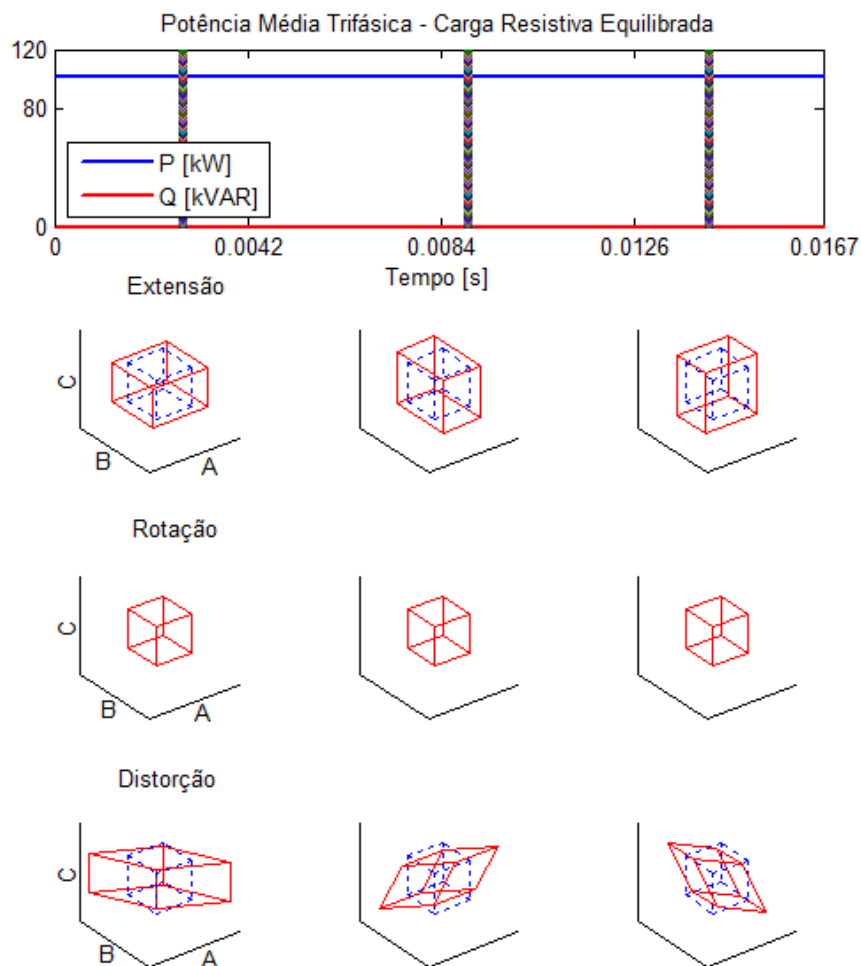


Figura 19 - Resultado para simulação do circuito resistivo equilibrado.

Nota-se que a primeira linha representa as deformações de extensão e que a deformação ocorre alterando o volume do cubo sem alterar nem a forma nem a posição dele. A visualização por face para a deformação de extensão é capaz de fornecer maiores informações. A Figura 20 mostra as faces desse cubo nos mesmos instantes de tempo. É possível observar que em diferentes instantes de tempo, ocorre uma variação na deformação por fase. Esse resultado é coerente ao fato que a cada passo do tempo os valores de tensão e de corrente por fase variam, como consequência a deformação por fase também varia. No entanto sabe-se que a deformação de extensão está diretamente ligada a potência ativa do sistema de acordo com a definição de deformação volumétrica representada pela Eq. (3.35). Observando o gráfico da Fig. 19 e as teorias de circuitos elétricos, sabe-se que a potência ativa do sistema resistivo equilibrado é constante e diferente de zero. Sendo assim conclui-se que há uma deformação volumétrica e que ela é constante. O fato de a deformação volumétrica ser constante não implica que as dimensões do cubo sejam constantes, mas sim o volume. A Figura 20 mostra que, embora as faces mudem de dimensões, o volume permanece constante. A importância da observação por face será mais significativa quando analisarmos os resultados para o circuito desequilibrado na seção 4.3.

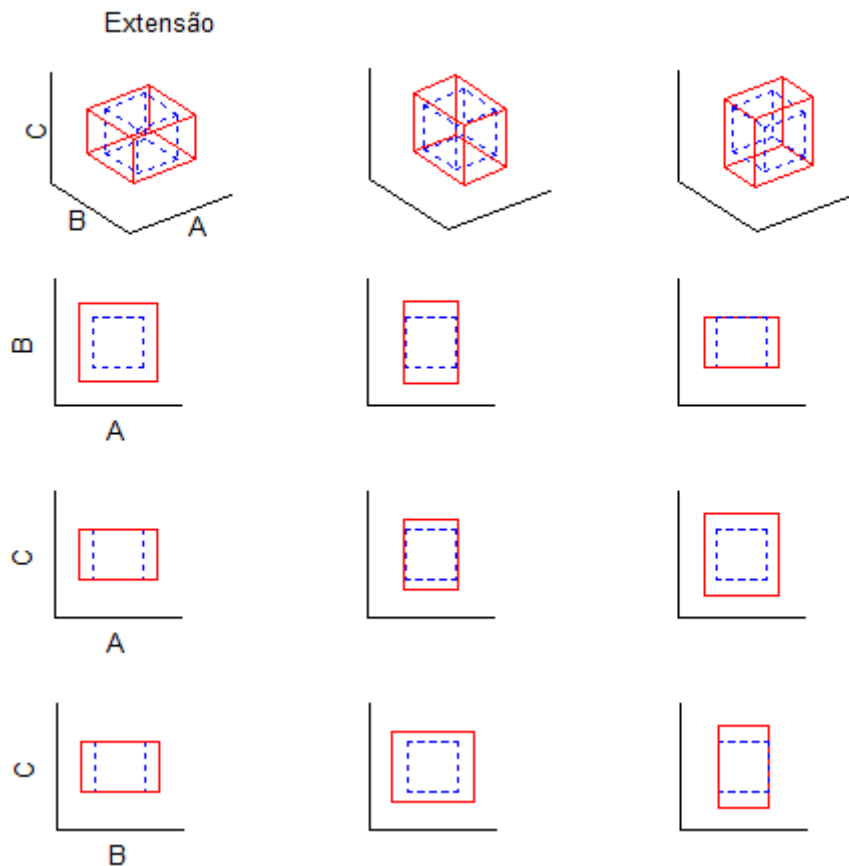


Figura 20 - Visões das faces do cubo em deformação de extensão.

Retomando a Fig. 19, observa-se que não há deformação de rotação do cubo. Esse resultado é esperado e coerente com o apresentado na Eq. (3.32). O circuito possui potência reativa constante igual a zero por ser um circuito equilibrado e resistivo portanto o ângulo de rotação também é zero. A deformação de distorção também é mostrada na Fig. 19, porém esse trabalho não relaciona conceitos físicos a essa deformação.

4.2 CIRCUITO EQUILBRADO RESISTIVO E INDUTIVO

O primeiro circuito de prova tinha potências ativa e reativa constante, porém a potência reativa era nula implicando uma ausência de deformação de rotação. Para observar a rotação escolhe-se um circuito resistivo indutivo RL equilibrado, no qual deverá aparecer uma potência reativa constante diferente de zero. O circuito é apresentado na Fig. 21.

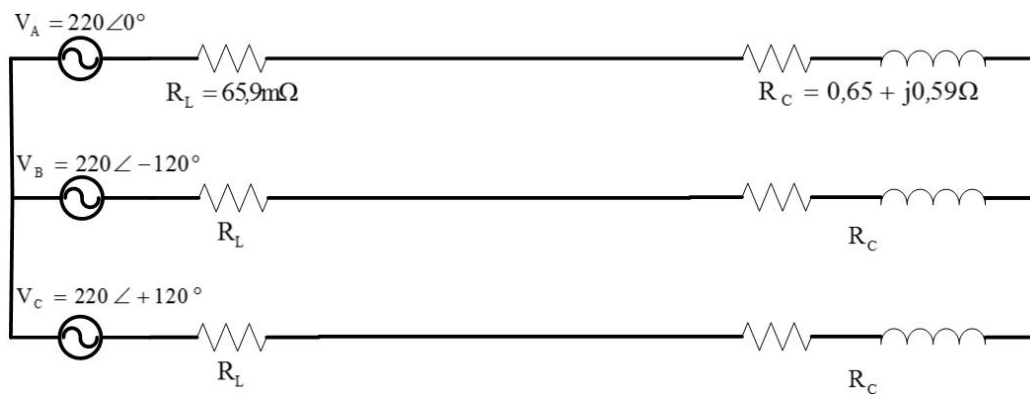


Figura 21 - Circuito RL equilibrado.

Observando os valores do circuito é possível apresentar os seguintes dados técnicos do circuito de prova.

Tabela 2 - Dados do circuito RL equilibrado.

$V (MAX) [V]$	220
$R_L [\Omega]$	0.0659
$R_C [\Omega]$	$0.65 + j0.59$
$f [Hz]$	60
$\omega [rad/s]$	376.9911
$\theta [rad]$	0,6893

A análise dos resultados será realizada de acordo com a análise na seção 4.1. Após utilizar os dados desse circuito no código de simulação, obtém-se os seguintes resultados. A Figura 22 mostra os resultados obtidos para os três pontos de análise e para os três tipos de deformação.

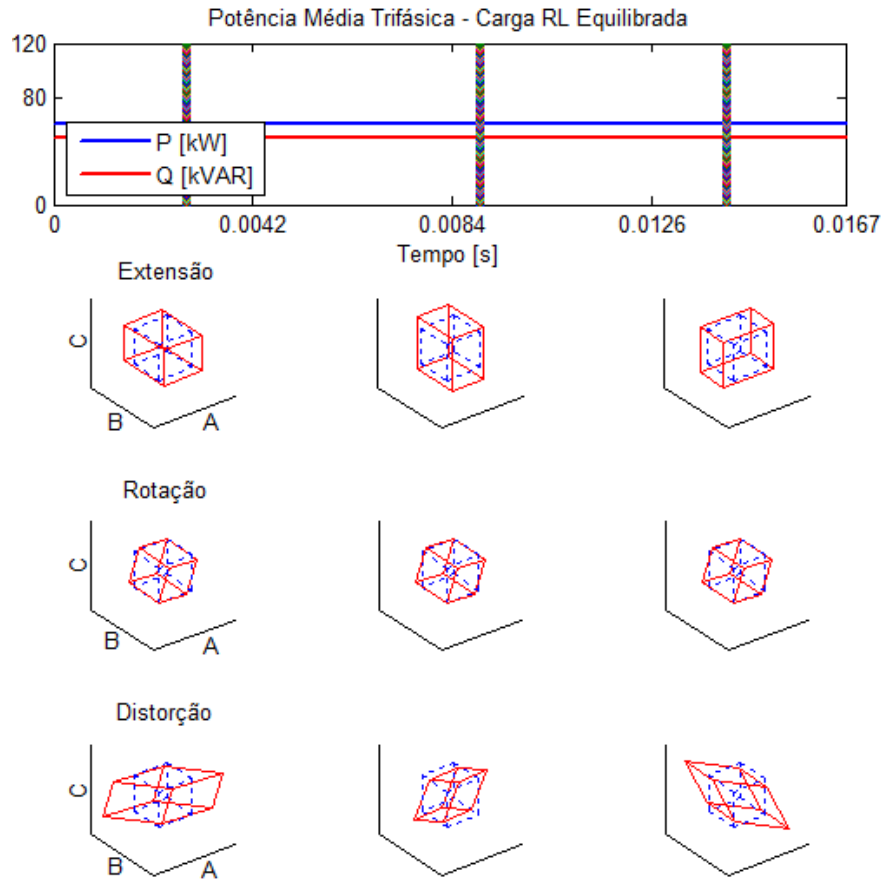


Figura 22 - Resultado para simulação do circuito RL equilibrado.

De maneira semelhante ao obtido no circuito anterior, o cubo sofre deformação de extensão devido a existência de potência ativa. O volume do cubo inicial portanto é alterado, porém permanece constante pois a potência ativa do sistema é constante. A visualização por face da deformação por extensão é apresentada na Fig. 23.

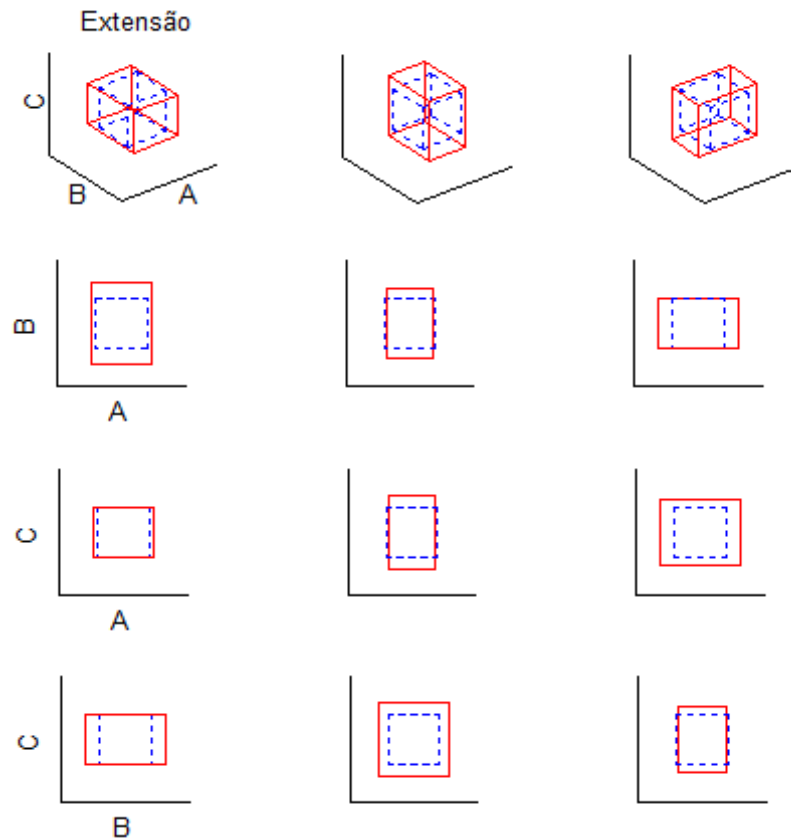


Figura 23 - Visões das faces do cubo em deformação de extensão: circuito RL.

Observando novamente a Fig. 22, percebe-se que o cubo sofre uma deformação de rotação. A rotação do cubo é exatamente a mesma em todos os três pontos analisados indicando que o ângulo de rotação é constante. Esse resultado foi observado devido o módulo da potência reativa ser constante em um circuito equilibrado RL.

4.3 CIRCUITO RESISTIVO DESEQUILIBRADO

Os circuitos de prova anteriores tinham como característica comum o valor constante das potências ativa e reativa sendo que, em situações práticas, isso raramente ocorre. Para observar o comportamento do modelo em uma situação em que as potências não possuam valores constantes, propõe-se um circuito de prova com carga desequilibrada como mostrado na Fig. 24.

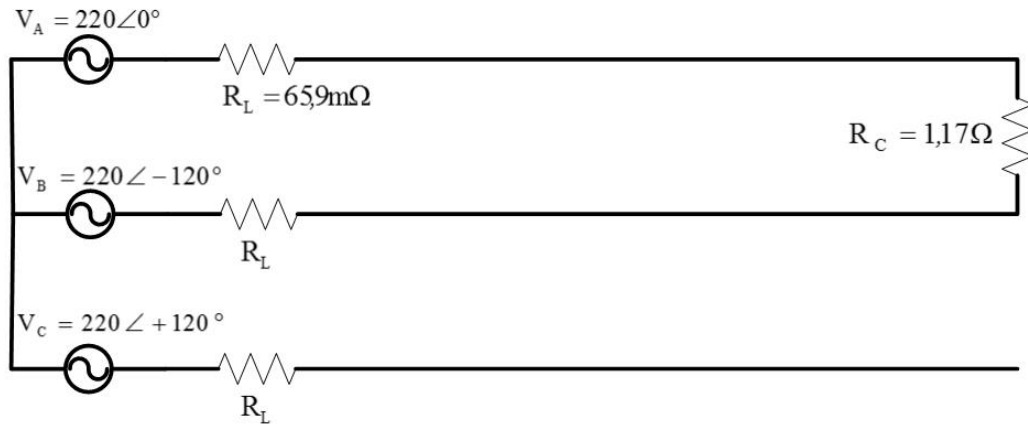


Figura 24 - Circuito resistivo desequilibrado.

O circuito apresentado fornece os seguintes dados técnicos:

Tabela 3 - Dados do circuito resistivo desequilibrado.

$V_1 (MAX) [V]$	220
$\phi_1 [^\circ]$	0
$V_2 (MAX) [V]$	220
$\phi_2 [^\circ]$	-120
$R_L [\Omega]$	0.0659
$R_C [\Omega]$	1,32
$f [Hz]$	60
$\omega [rad/s]$	376.9911

Após utilizar os dados desse circuito no código de simulação, obtêm-se os seguintes resultados.

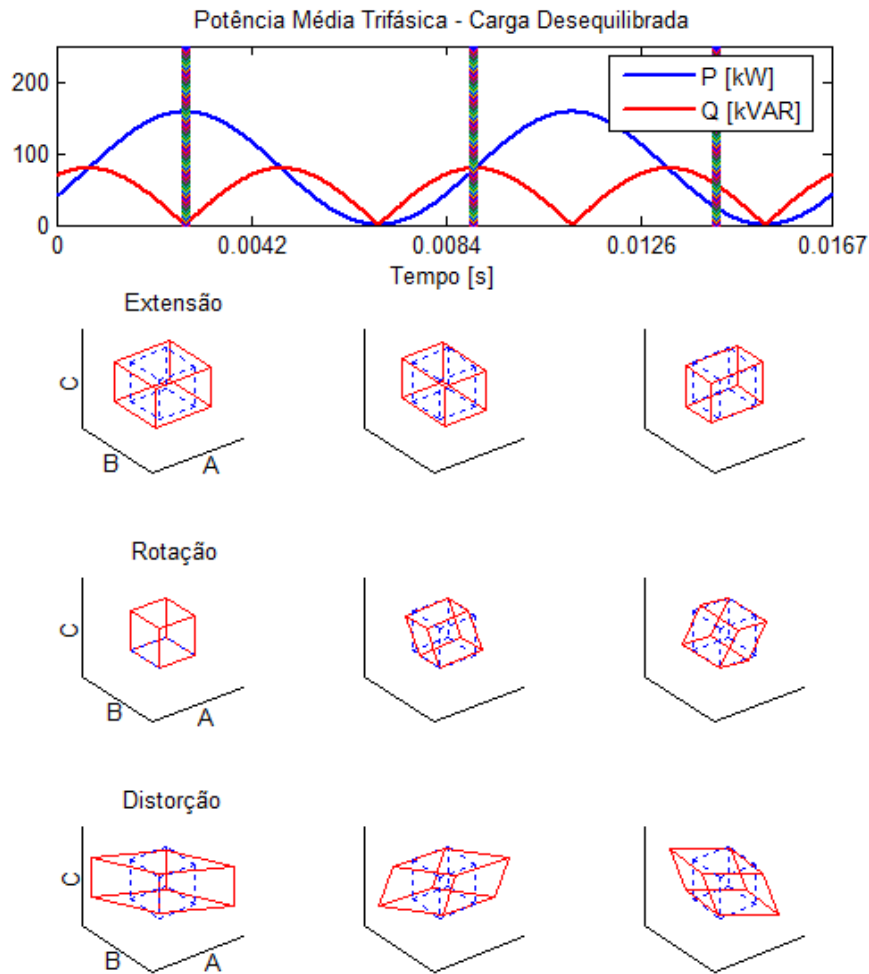


Figura 25 - Resultado para simulação do circuito desequilibrado.

O circuito agora simulado tem como característica principal a inconstância das potências ativa e reativa. Esse fato ocorre devido ao desequilíbrio da carga. No desenvolvimento apresentado nas Eqs. (2.23) e (2.24) o módulo das correntes não serão os mesmos em todas as fases. Sendo assim, quando se efetua a soma das potências em cada fase, a potência não será independente do tempo, pois as funções seno não se anularão.

De maneira semelhante ao obtido no circuito anterior, o cubo sofre deformação de extensão devido à existência de potência ativa. O volume do cubo inicial, portanto é alterado e não permanece constante, pois a potência ativa do sistema é variável. A visualização por face da deformação por extensão é apresentada na Fig. 26.

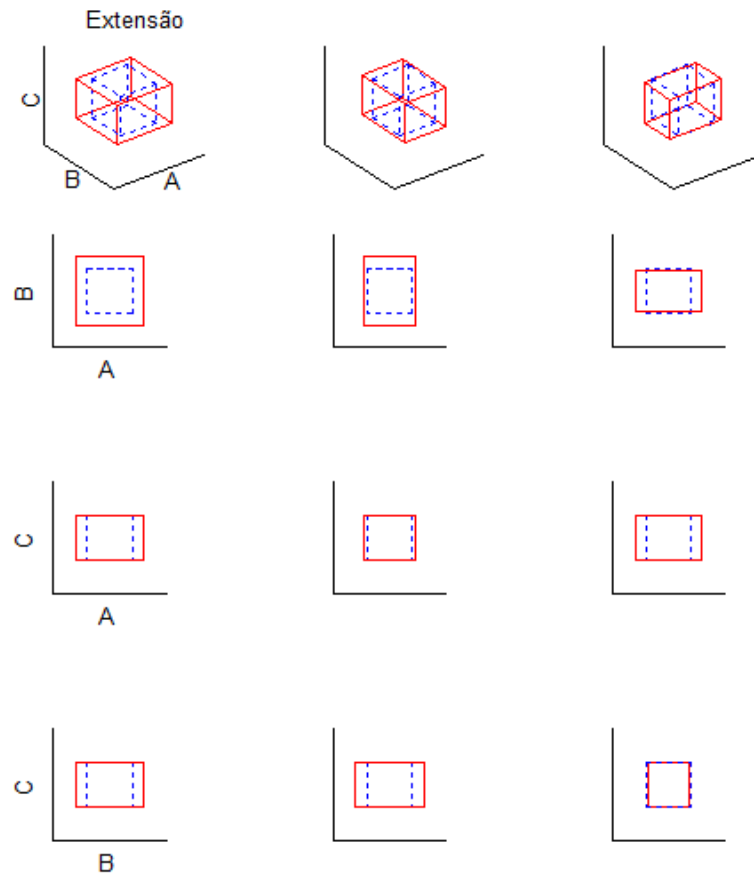


Figura 26 - Visões das faces do cubo em deformação de extensão: circuito desequilibrado.

Uma informação importante observada na Fig. 26 é que não há deformação com relação a fase C. Esse resultado está de acordo com o esperado pois, no circuito analisado, não há corrente nessa fase. Comparando as imagens da primeira coluna, referente ($t = 0,0028$) com as imagens da última coluna ($t = 0,0142$), observa-se que na primeira tem-se deformação tanto com relação à fase A quanto com à fase B, porém na última tem-se apenas deformação com relação à fase A. Essa observação permite concluir visualmente que existiu uma mudança no volume do cubo entre os tempos analisados. Observa-se também que a deformação de extensão máxima ocorreu quando a potência ativa foi máxima. Resultado de acordo com a Eq. (3.35) que relaciona o volume do cubo com a potência ativa.

Analisando a deformação de rotação detalhadamente na Fig. 25, observa-se que o ângulo de rotação do cubo não foi constante no domínio do tempo, resultado coerente com apresentado na Eq. (3.32). Ainda de acordo com a Eq. (3.32), espera-se que o ângulo de rotação seja nulo quando a potência reativa for nula. O valor mínimo da potência reativa na simulação proposta não é nulo, porém é próximo a zero e nesse ponto a rotação do cubo foi praticamente imperceptível.

5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho foi estudado o comportamento da potência elétrica instantânea utilizando análise tensorial. Os resultados obtidos foram coerentes com as teorias estudadas e próximos aos resultados encontrados em trabalhos sobre o assunto. A proposta de fundamentar essa ferramenta recente foi de extrema importância para a utilização dessa teoria em trabalhos futuros.

Diferentemente do encontrado nos trabalhos relacionados a esse assunto, propôs-se a utilização direta dos conceitos existentes no estudo da deformação. Com essa aplicação foi possível observar mais detalhadamente o comportamento da potência elétrica. Enquanto nos trabalhos pesquisados o volume e a forma do cubo permaneciam constantes quando a potência ativa do sistema era constante, no trabalho proposto apenas o volume permaneceu constante enquanto o cubo se deformava indicando a contribuição de cada fase. A visualização do modelo por face aplicada nesse trabalho também é um dos recursos utilizados no estudo de deformações na mecânica dos meios contínuos.

Após o estudo detalhado das teorias envolvidas e do entendimento do funcionamento do modelo é possível projetar algumas linhas de estudo para dar continuidade ao iniciado com este trabalho. Um importante passo pode ser dado estudando o comportamento do modelo em sistemas não lineares. A alteração na forma da onda da tensão elétrica pode influenciar na deformação do cubo indicando algum padrão. Outra proposta é o estudo detalhado do ângulo de rotação do cubo para a identificação de mudanças na potência reativa. Essa identificação pode ser aplicada para segmentação de um sinal elétrico afim de indicar o momento exato da ocorrência. Essas propostas em conjunto tornariam o modelo capaz de ser aplicado para análise de fenômenos de qualidade de energia em um sistema elétrico de potência.

A construção do modelo permitiu a comunicação entre diversas áreas do conhecimento e principalmente entre as áreas estudadas no curso Engenharia de Energia da Universidade de Brasília. Foi possível aprofundar os conhecimentos obtidos nos cursos de álgebra linear, mecânica dos sólidos e nos cursos de análise de circuitos elétricos. Notou-se que seria de grande importância, para a formação de um engenheiro de energia, a inclusão de uma disciplina específica do tronco comum na área de cálculo tensorial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N.O.. **Fundamentals of Electric Circuits**. 4 ed. Mc Graw Hill, 2009. 1056 p.
- ARAÚJO, C. A.. **Elasticidade e Plasticidade**. Porto: Imprensa Portuguesa, 1961.
- ARIS, Rutherford. **Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics**. New York, 1989. 314 p.
- BARRERA, V.; MELÉNDEZ, J.; HERRAIZ, S.. Waveform segmentation for intelligent monitoring of power events. *Electric Power Systems Research* 93. Elsevier, 2012. p. 67-75.
- BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R., RIBEIRO, V. L. F. F. RIBEIRO, V.L.F.F. WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. Harbra, 1980. 424 p.
- DAI, Xianzhong; LIU, Guohai; GRETSCH, Ralf. Generalized Theory of Instantaneous Reactive Quantity for Multiphase Power System. *IEEE Transactions on Power Delivery*. Vol. 19, Nº. 3. Julho, 2004. p. 965-972.
- FERREIRA, W. G.; BITTENCOURT, M. L.. Mecânica dos Sólidos Deformáveis. Universidade Federal de Campinas. Campinas, 2001. Trabalho não publicado.
- FLEISCH, Daniel A. **A Student's Guide to Vectors and Tensors**. Cambridge University Press, 2008. 175 p.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física 1: Mecânica**. 4. ed. LTC, 2002. 330 p.
- INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS. **IEEE Standard 1459**: Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions. New York, 2010. 52 p.
- JAGUA, Jorge; BARRERA, Victor; CARRILLO, Gilberto; MELÉNDEZ, Joaquim. Waveform Segmentation Based On Tensor Analysis. *IEEE Andean Conference, Exhibition and Industry*, Sept. Colombia, 2010. p. 15-17.
- LAI, Michael; KREMPL, Erhard; RUBEN, David. **Introduction to Continuum Mechanics**. 4 ed. Elsevier, 2010. 535 p.
- MALAJOVICH, Gregorio. **Álgebra Linear**. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Versão eletrônica, 2010. 189 p.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica: Mecânica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. 323 p.
- PENG, F. Z.. Generalized instantaneous reactive power theory for three-phase power systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*. Vol. 45. February 1996. p. 293-297.
- PENG, F. Z.. Harmonic and reactive power compensation based on the generalized instantaneous reactive power theory for three-phase four-wire systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*. Vol. 13. November 1998. p. 1174-1180.
- SAADA, A.S.; IRVINE, T. F.. **Elasticity: Theory and Applications**. New York: Pergamon Press, 1974. 643 p.
- SALMERÓN, P.; HERRERA, R. S.. Instantaneous reactive power theory - A general approach to poly-phase systems. *Electric Power Systems Research* 79. Abril, 2009. p. 1263-1270.
- SHAMES, I. H.; PITARRESI, J. M.. **Introduction to Solid Mechanics**. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2000. 787 p.

- SOKOLNIKOFF, I. S.. **Mathematical Theory of Elasticity**. New York: Mc Graw Hill, 1946. 384 p.
- THOMAS, Roland E.; ROSA, Albert J.; TOUSSAINT. Gregory J.; **Análise e Projeto de Circuitos Eléctricos Lineares**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. 820 p.
- USTARIZ, A. J.; CANO, E. A.; TACCA, H. E.. Evaluación, Interpretación y Visualización de la Potencia Instantánea en Sistemas Eléctricos. *V Simposio Internacional sobre Calidad de la Energia Eléctrica*. Agosto, 2009. 7 p.
- USTARIZ, A. J.; CANO, E. A.; TACCA, H. E.. Tensor analysis of the instantaneous power in electrical networks. *Electric Power Systems Research 80*. Janeiro, 2010. p. 788-798.

APÊNDICE A

• CIRCUITO RESISTIVO EQUILIBRADO

O código utilizado para simulação dos circuitos de prova foi dividido em duas partes: PARTE 1 e PARTE 2. A PARTE 1 do código usado na simulação define os parâmetros técnicos como tensão, frequência e impedâncias. Essa parte do código é a única que se diferencia para os demais circuitos de prova utilizados. Como o circuito é equilibrado, observa-se que as impedâncias de linha são iguais e que os valores das correntes em *RMS* também serão iguais. Abaixo segue a parte do código na qual são introduzidos os dados do circuito.

```
%INÍCIO PARTE 1:
n=1000; %Número de pontos.
tend=0.0167; %Limite para o valor de t.[s]
t=linspace(0,tend,n); %Vetor tempo entre 0 e 0,0167 com n pontos
incluindo os extremos. [s]
f=60; %Frequência do Sistema. [Hz]
w=2*pi*f; %Frequência angular. [rad/s]
Vmax=220; %Tensão máxima. [V]
Vrms=220/sqrt(2); %Tensão em RMS. [V]
za=((65.9/1000)+0.65)+0i; %Impedância complexa da fase A. [Ohm]
zb=za; %[Ohm]
zc=za; %[Ohm]
IrmsA=Vrms/abs(za); %Corrente em RMS na fase A. [A]
ImaxA=IrmsA*sqrt(2); %Corrente Máxima na fase A. [A]
ImaxB=ImaxA %[A]
ImaxC=ImaxA %[A]
theta=angle(za) %[rad]
```

Observa-se que para a simulação escolheu-se mil pontos linearmente espaçados entre os tempos de 0 e 0,0167 segundos, aproximadamente um período.

Ainda na PARTE 1 do código foram realizados os cálculos referentes as tensões e correntes em cada fase no domínio do tempo.

```
for i=1:n
%FASE A:
va(i)=Vmax.*sin(w.*t(i)); %Tensão na fase A.
ia(i)=ImaxA.*sin(w.*t(i)-theta); %Corrente na fase A.

%FASE B:
vb(i)=Vmax.*sin(w.*t(i)-((120/180)*pi)); %Tensão na fase B. Fase
em rad.
ib(i)=ImaxB.*sin(w.*t(i) - theta - ((120/180)*pi)); %Corrente na fase B.

%FASE C:
vc(i)=Vmax.*sin(w.*t(i)+((120/180)*pi)); %Tensão na fase C.
ic(i)=ImaxC.*sin(w.*t(i) - theta +((120/180)*pi)); %Corrente na fase C.

P(i)=3.*Vrms.*IrmsA.*cos(theta); %Potência Ativa.
Q(i)=3.*Vrms.*IrmsA.*sin(theta); %Potência Reativa.
End

%FIM PARTE 1.
```

Com os valores das tensões e correntes é possível calcular as potências ativa P e reativa Q do sistema como mostrado na Fig. 27.

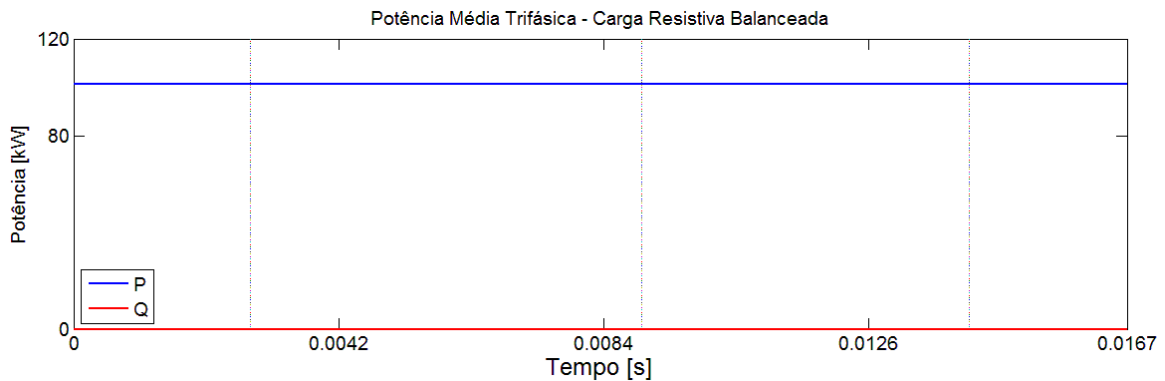


Figura 27 - Potência ativa e reativa do circuito resistivo equilibrado.

É possível também construir o tensor potência instantânea \wp_{ij} mostrado na Eq. (3.11). Observa-se que a cada instante de t tem-se um tensor potência instantânea diferente pois os valores de v_a , v_b , v_c , i_a , i_b e i_c mudam de acordo com o tempo. Dar-se início então a PARTE 2 do código. Essa parte possui os equacionamentos e ferramentas necessários para visualização do modelo proposto. O tensor potência instantânea é representado pela matriz \mathbf{E} .

```
%INÍCIO PARTE 2:
e11=va.*ia;      %componente  $\wp_{11}$ .
e12=va.*ib;      %componente  $\wp_{12}$ .
e13=va.*ic;      %componente  $\wp_{13}$ .

e21=vb.*ia;      %componente  $\wp_{21}$ .
e22=vb.*ib;      %componente  $\wp_{22}$ .
e23=vb.*ic;      %componente  $\wp_{23}$ .

e31=vc.*ia;      %componente  $\wp_{31}$ .
e32=vc.*ib;      %componente  $\wp_{32}$ .
e33=vc.*ic;      %componente  $\wp_{33}$ .
```

Após a simulação do circuito e observação do comportamento da potência graficamente, pode-se iniciar a implementação do modelo para visualização utilizando os conceitos apresentados na seção 3.5 deste trabalho. Inicialmente define-se o cubo como elemento de volume infinitesimal a partir dos seus oito vértices. E para visualização plota-se os doze seguimentos de reta que ligam vértices dois a dois. Esse elemento mostrado na Fig. 28 será utilizado como elemento de referência para o estudo da deformação e sobre ele serão aplicadas as deformações de acordo com o apresentado na seção 3.5. Para o modelo proposto, o cubo tem centro coincidente com a origem do sistema e arestas iguais a 2 unidades de medida.

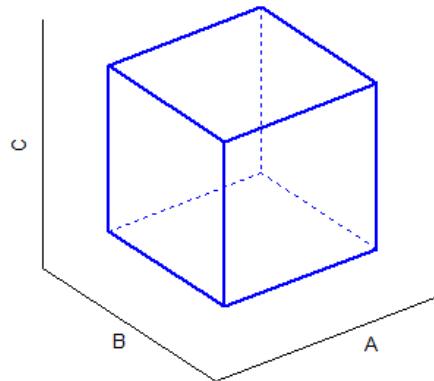


Figura 28 - Elemento de volume infinitesimal.

Conforme apresentado na seção 3.5, o tensor de deformação é dividido em duas componentes, uma simétrica e outra antissimétrica. A componente simétrica por sua vez também é analisada em duas partes, componentes $i = j$ e componentes $i \neq j$. Considerando essa definiu-se os tensores para qualquer ponto i .

```

%Tensor potência elétrica:      %Tensor potência elétrica instantânea  $\phi_{ij}$ .
Et=[e11(i) e12(i) e13(i);
e21(i) e22(i) e23(i);
e31(i) e32(i) e33(i)];
E=Et/norm(Et);

%Rotação:
w32=(E(3,2)-E(2,3))/2;          % $\phi_{32}^{ant}$ .
w13=(E(1,3)-E(3,1))/2;          % $\phi_{13}^{ant}$ .
w21=(E(2,1)-E(1,2))/2;          % $\phi_{21}^{ant}$ .
                                %Tensor antissimétrico

W=[0 -w21 w13;
w21 0 -w32;
-w13 w32 0];

%Extensão:
D=[E(1,1) 0 0;                  %Tensor simétrico  $\phi_{ij}^{sim}$  para  $i=j$ .
0 E(2,2) 0;
0 0 E(3,3)];

%Distorção:
D2(1,2)=1/2*(E(1,2)+E(2,1));    % $\phi_{12}^{sim}$ .
D2(1,3)=1/2*(E(1,3)+E(3,1));    % $\phi_{13}^{sim}$ .
D2(2,3)=1/2*(E(2,3)+E(3,2));    % $\phi_{23}^{sim}$ .
D2=[0 D2(1,2) D2(1,3);          %Tensor simétrico  $\phi_{ij}^{sim}$  para  $i \neq j$ .
D2(1,2) 0 D2(2,3);
D2(1,3) D2(2,3) 0];

```

Como o cubo possui oito vértices, os vetores deslocamento de cada vértice serão calculados separadamente. Em seguida, de acordo com a Eq. (3.21), calcula-se o novo vetor posição do vértice.

```

%Coordenadas dos 8 vértices
x=[1 -1 -1 1 1 -1 -1 1];      %Coordenadas x dos vértices.

```

```

y=[1 1 -1 -1 1 1 -1 -1]; %Coordenadas y dos vértices.
z=[1 1 1 1 -1 -1 -1 -1]; %Coordenadas z dos vértices.

xR=x;yR=y;zR=z; %Pontos sujeitos a Rotação.
xD1=x;yD1=y;zD1=z; %Pontos sujeitos a Extensão.
xD2=x;yD2=y;zD2=z; %Pontos sujeitos a Distorção.

for j=1:8 %Aplicar deformação nos 8 vértices.
%Extensão:
pD1=[xD1(j) yD1(j) zD1(j)]; %Ponto do vértice j.
uD1=D*pD1'; %Vetor deslocamento de extensão.
xD1(j)=xD1(j)+uD1(1); %Nova coordenada x do ponto j.
yD1(j)=yD1(j)+uD1(2); %Nova coordenada y do ponto j.
zD1(j)=zD1(j)+uD1(3); %Nova coordenada z do ponto j.

%Rotação:
pR=[xR(j) yR(j) zR(j)]; %Ponto do vértice j.
uR=W*pR'; %Vetor deslocamento de rotação.
xR(j)=x(j)+uR(1); %Nova coordenada x do ponto j.
yR(j)=y(j)+uR(2); %Nova coordenada y do ponto j.
zR(j)=z(j)+uR(3); %Nova coordenada z do ponto j.

%Distorção:
pD2=[xD1(j) yD1(j) zD1(j)]; %Ponto do vértice j.
uD2=D2*pD2'; %Vetor deslocamento de distorção.
xD2(j)=xD1(j)+uD2(1); %Nova coordenada x do ponto j.
yD2(j)=yD1(j)+uD2(2); %Nova coordenada y do ponto j.
zD2(j)=zD1(j)+uD2(3); %Nova coordenada z do ponto j.

End

```

Desse ponto em diante as coordenadas dos vértices do cubo deformado no instante $t(i)$ estão armazenadas. O final do código apresenta a ferramenta de visualização do cubo deformado juntamente com o cubo sem deformação.

```

figure (1)
%Início do cubo de referência com vértices (x,y,z):
plot3([x(1),x(2)], [y(1),y(2)], [z(1),z(2)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(2),x(3)], [y(2),y(3)], [z(2),z(3)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(3),x(4)], [y(3),y(4)], [z(3),z(4)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(4),x(1)], [y(4),y(1)], [z(4),z(1)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(5),x(6)], [y(5),y(6)], [z(5),z(6)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(6),x(7)], [y(6),y(7)], [z(6),z(7)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(7),x(8)], [y(7),y(8)], [z(7),z(8)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(8),x(5)], [y(8),y(5)], [z(8),z(5)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(1),x(5)], [y(1),y(5)], [z(1),z(5)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(2),x(6)], [y(2),y(6)], [z(2),z(6)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(3),x(7)], [y(3),y(7)], [z(3),z(7)], 'b',':') ;hold on
plot3([x(4),x(8)], [y(4),y(8)], [z(4),z(8)], 'b',':') ;hold on

%Início do Cubo deformado em extensão (xD1,yD1,zD1):
plot3([xD1(1),xD1(2)], [yD1(1),yD1(2)], [zD1(1),zD1(2)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(2),xD1(3)], [yD1(2),yD1(3)], [zD1(2),zD1(3)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(3),xD1(4)], [yD1(3),yD1(4)], [zD1(3),zD1(4)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(4),xD1(1)], [yD1(4),yD1(1)], [zD1(4),zD1(1)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(5),xD1(6)], [yD1(5),yD1(6)], [zD1(5),zD1(6)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(6),xD1(7)], [yD1(6),yD1(7)], [zD1(6),zD1(7)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(7),xD1(8)], [yD1(7),yD1(8)], [zD1(7),zD1(8)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(8),xD1(5)], [yD1(8),yD1(5)], [zD1(8),zD1(5)], 'r') ;hold on

```

```

plot3([xD1(1),xD1(5)], [yD1(1),yD1(5)], [zD1(1),zD1(5)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(2),xD1(6)], [yD1(2),yD1(6)], [zD1(2),zD1(6)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(3),xD1(7)], [yD1(3),yD1(7)], [zD1(3),zD1(7)], 'r') ;hold on
plot3([xD1(4),xD1(8)], [yD1(4),yD1(8)], [zD1(4),zD1(8)], 'r') ;hold on
title('Extensão');
set(gca, 'YTick', []);
set(gca, 'XTick', []);
set(gca, 'ZTick', []);
axis([-2.5 2.5 -2.5 2.5 -2.5 2.5]);
xlabel('Fase A');
ylabel('Fase B');
zlabel('Fase C');
hold off
%Fim da Figura 1.

%FIM PARTE 2.

```

• CIRCUITO RESISTIVO INDUTIVO EQUILIBRADO

A PARTE 1 para o circuito RL equilibrado será agora apresentada. Primeiramente introduz-se os dados técnicos do circuito.

```

%INÍCIO PARTE 1:RL
n=1000;
tend=0.0167;
t=linspace(0,tend,n);
f=60;
w=2*pi*f;
Vmax=220;
Vrms=220/sqrt(2);
za=((65.9/1000)+0.65)+0.59i %Impedância no formato complexo.
zb=za;
zc=za;
IrmsA=Vrms/abs(za);
ImaxA=IrmsA*sqrt(2);
ImaxB=ImaxA
ImaxC=ImaxA
theta=angle(za)

```

Dando continuidade à PARTE 1 do código de simulação, calcula-se os valores das tensões e correntes no domínio do tempo para o circuito RL. Calcula-se também as potências ativa e reativa trifásica.

```

for i=1:n
%FASE A:
va(i)=Vmax.*sin(w.*t(i));
ia(i)=ImaxA.*sin(w.*t(i)-theta);

%FASE B:
vb(i)=Vmax.*sin(w.*t(i)-((120/180)*pi));
ib(i)=ImaxB.*sin(w.*t(i) - theta -((120/180)*pi));

%FASE C:
vc(i)=Vmax.*sin(w.*t(i)+((120/180)*pi));
ic(i)=ImaxC.*sin(w.*t(i) - theta +((120/180)*pi));

```

```
P(i)=3.*Vrms.*IrmsA.*cos(theta);
Q(i)=3.*Vrms.*IrmsA.*sin(theta);
End
```

```
%FIM PARTE 1.
```

A Figura 29 mostra o resultado obtido para as potências. Como esperado, a potência reativa é constante e diferente de zero. Esse resultado deverá implicar numa deformação de rotação no elemento cubico de volume.

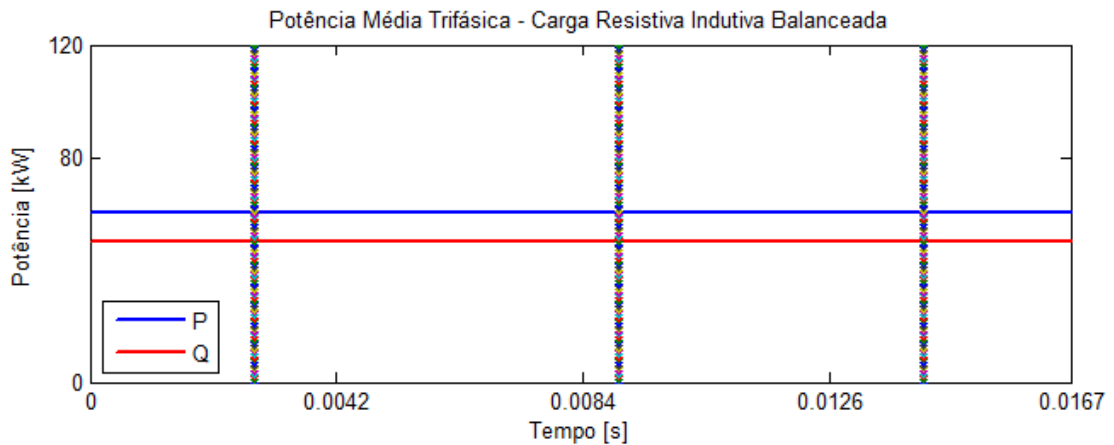


Figura 29 - Gráfico das potências para o circuito RL equilibrado.

- CIRCUITO RESISTIVO DESEQUILIBRADO

Observa-se que a fase C não possui corrente e que a relação entre a corrente na fase B é o oposto da corrente na fase A, $i_B = -i_A$. A PARTE 1 do código para o circuito desequilibrado é apresentada a seguir.

```
%INÍCIO PARTE 1: DESEQUILIBRADO
n=1000;
tend=0.0167;
t=linspace(0,tend,n);
f=60;
w=2*pi*f;
Vmax=220;
Vrms=220/sqrt(2);
zl=(65.9/1000)+0i; %Impedância no formato complexo.
zc=1.17+0i;
ztotal=zl+zl+zc;
V1=Vmax+0i;
V2=Vmax*exp(-j*2*pi/3);
IA=(V1-V2)/ztotal;
IrmsA=abs(IA);
ImaxA=IrmsA*sqrt(2);
IrmsB=-IrmsA;
IrmsA=Vrms/abs(ztotal);
theta=-angle(IA)
```

Dando continuidade à PARTE 1, calcula-se os valores das tensões e correntes no domínio do tempo para o circuito desequilibrado. Calcula-se também as potências ativa e reativa trifásica conforme o modelo proposto na seção 3.4.

```

for i=1:n
%FASE A:
va(i)=Vmax.*sin(w.*t(i));
ia(i)=ImaxA.*sin(w.*t(i)-theta);

%FASE B:
vb(i)=Vmax.*sin(w.*t(i)-((120/180)*pi));
ib(i)=-ia(i);

%FASE C:
vc(i)=Vmax.*sin(w.*t(i)+((120/180)*pi));
ic(i)=0;

P(i)=(va(i)*ia(i))+(vb(i)*ib(i))+(vc(i)*ic(i));

qa=(vb(i)*ic(i))-(vc(i)*ib(i));           %Componentes do vetor
qb=(vc(i)*ia(i))-(va(i)*ic(i));           potência reativa.
qc=(va(i)*ib(i))-(vb(i)*ia(i));

q=[qa qb qc];                               %Vetor potência reativa.
Q(i)=norm(q);
end

%FIM PARTE 1.

```

A Figura 30 mostra o resultado obtido para as potências. Como esperado, o comportamento das potências não é constante. Esse resultado deverá implicar numa inconstância do volume do cubo e do ângulo de rotação.

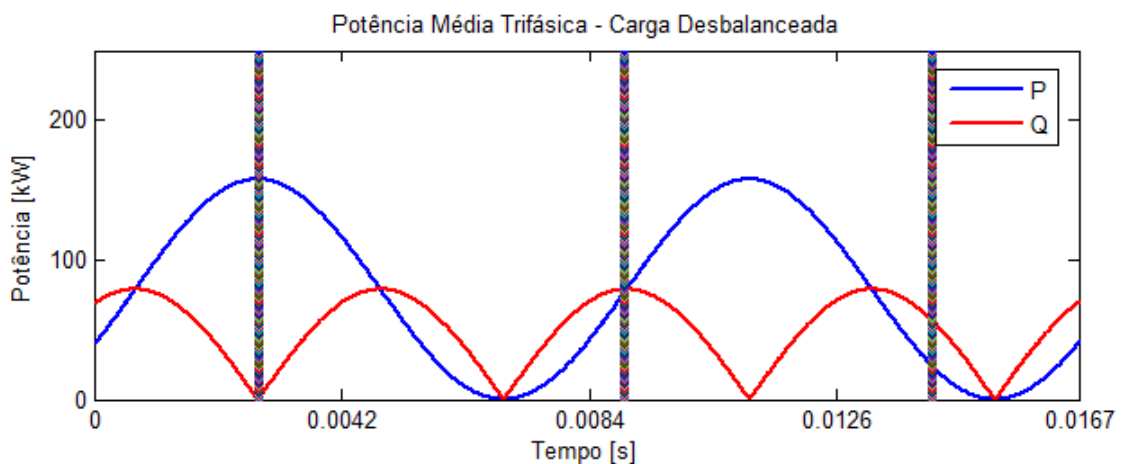


Figura 30 - Gráfico das potências para o circuito desequilibrado.